Обложка
ищется

Обложка
пщется

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 107.

IX Сем. 1 Декабря 1890 г. № 11.

КЪ РЕФОРМѢ УЧЕБНИКА ФИЗИКИ.

ВНѢШНІЯ ДѢЙСТВІЯ ТОКА.

(Продолженіе) *).

§ 43. *Самоиндукція.* Неустановившееся электронатяженіе (§ 30) возбуждаетъ индуктивные токи или заряды во *всякомъ* постороннемъ проводникѣ, независимо отъ того существуетъ ли въ немъ какой либо самостоятельный токъ или зарядъ, или нѣтъ (§§ 35, 36). Такъ какъ для каждаго проводника (конечныхъ размѣровъ) любая его часть по отношенію къ другой можетъ быть разсматриваема какъ посторонній проводникъ, то слѣдуетъ ожидать, что явленія индукціи должны обнаруживаться и въ самомъ основномъ проводникѣ. А именно:

1) При замыканіи тока въ нѣкоторомъ проводникѣ, въ немъ самомъ долженъ обнаруживаться всякій разъ несогласный индуктивный токъ, въ теченіе всего того времени τ, пока электронатяженіе не установится (§ 40). Такой же несогласный инд. токъ долженъ возникать въ самомъ основномъ проводникѣ также и въ томъ случаѣ, когда въ теченіе времени t геом. коэффиціентъ этого проводника почему либо увеличивается, и въ томъ—, когда въ теченіе времени t_1 сила тока почему либо возрастаетъ (§ 40).

2) При размыканіи тока въ нѣкоторомъ проводникѣ, въ немъ самомъ долженъ всякій разъ обнаруживаться согласный индуктивный токъ, въ теченіе всего того времени τ', пока электронатяженіе не исчезнетъ. Такой-же согласный инд. токъ долженъ возникать въ самомъ основномъ проводникѣ также и въ томъ случаѣ, когда въ теченіе времени t' геом. коэффиціентъ этого проводника почему либо уменьшается, и въ томъ—, когда въ теченіе времени t'_1 сила тока почему либо убываетъ (§ 40).

Опыты вполнѣ оправдываютъ эти заключенія. Индукція проводника самого на себя называется *самоиндукціею*. Несогласные и согласные инд. токи, возникающіе при этомъ въ самомъ наводящемъ проводникѣ, называются *экстратоками*.

§ 44. *Несогласный экстратокъ* не можетъ быть отдѣленъ отъ основного тока, вызывающаго его. Существуя одновременно съ основнымъ

*) См. „Вѣстникъ“ №№ 97, 98 и 100.

токомъ и въ томъ же самомъ проводникѣ, несогласный экстратокъ представляется намъ какъ нѣкоторое *временное сопротивленіе*, встрѣчаемое всякимъ распространяющимся по проводнику токомъ и побѣждаемое имъ къ концу нѣкотораго промежутка времени τ. Явленіе происходитъ такъ, какъ будто помимо обыкновеннаго, *постояннаго сопротивленія* проводника r (зависящаго только отъ вещества, размѣровъ и температуры проводника) возникающій въ немъ токъ встрѣчаетъ другое сопротивленіе, временное, убывающее отъ ∞ до 0 тѣмъ быстрѣе, чѣмъ меньше геом. коэффиціентъ проводника, и чѣмъ больше его постоянное сопротивленіе r.

Опытъ Фарадея, показывающій, что при замыканіи тока, развѣтвленнаго такъ, что въ одну вѣтвь введенъ гальваноскопъ, а въ другую катушка съ значительнымъ геом. коэффиціентомъ, отклоненіе стрѣлки гальваноскопа въ первый моментъ будетъ больше, чѣмъ при стаціонарномъ состояніи.

§ 45. *Согласный экстратокъ* можетъ быть отдѣленъ отъ основного тока въ томъ случаѣ, когда онъ вызванъ размыканіемъ этого послѣдняго, ибо, возникая въ моментъ прекращенія тока въ проводникѣ, онъ существуетъ въ немъ въ теченіе всего того промежутка времени τ', пока электронатяженіе не исчезнетъ. Такъ какъ по направленію онъ согласенъ съ основнымъ токомъ, то при размыканіи этого послѣдняго онъ представляется намъ какъ бы *дополнительнымъ* токомъ. При достаточно высокой электровозб. силѣ согласнаго эктсратока онъ обнаруживается искрою въ мѣстѣ размыканія цѣпи (см. § 42).

Опытъ Фарадея, показывающій, что при размыканіи тока, развѣтвленнаго между гальваноскопомъ и катушкою значительнаго геом. коэффиціента, стрѣлка гальваноскопа въ первый моментъ отклоняется подъ вліяніемъ согл. экстратока въ обратную сторону.

§ 46. *Коэффиціентъ самоиндукціи* проводника. Мы видѣли, что явленія самоиндукціи суть лишь прямыя слѣдствія поглощенія внѣшней энергіи тока самимъ проводникомъ этого тока. Слѣдовательно, чѣмъ больше та часть энергіи, которая, благодаря присутствію проводника, переходитъ въ окружающую среду, тѣмъ и самоиндукція проводника будетъ больше. Но раньше мы установили 2-ой основной законъ (§ 20), по которому внѣшняя энергія тока (при прочихъ равныхъ условіяхъ) прямо пропорціональна геометр. коэффиціенту проводника. Можемъ поэтому сказать теперь, что чѣмъ больше будетъ геометр. коэффиціентъ проводника, тѣмъ больше будетъ (при прочихъ равныхъ условіяхъ) и его индукція самого на себя, т. е. тѣмъ больше будетъ электровозб. сила возникающихъ въ немъ подъ вліяніемъ самоиндукціи экстратоковъ. Отсюда видимъ, что самоиндукція обусловливается тою именно величиною, которою характеризуется форма и расположеніе проводника въ пространствѣ, и которую мы—за отсутствіемъ другого термина—назвали раньше (§ 19) *геометрическимъ коэффиціентомъ* проводника Теперь для насъ понятно, что эту величину можно еще назвать—какъ это и общепринято—*коэффиціентомъ самоиндукціи* проводника*).

*) Когда рѣчь идетъ не объ одномъ проводникѣ, а о системѣ двухъ отдѣльныхъ проводниковъ, то величина, характеризующая ихъ форму и взаиморасположеніе, которую мы раньше (§ 19) тоже назвали *геометрическимъ коэффиціентомъ системы* проводниковъ, можетъ быть точно также названа—какъ это и общепринято—*коэф-*

Для проводника, лежащаго въ одной плоскости, геом. коэффиціентъ обусловливается величиною обнимаемой имъ площади; слѣдовательно для проводника данной длины и расположеннаго въ одной плоскости самоиндукція будетъ minimum, когда онъ сложенъ вдвое (или скрученъ на подобіе шнурка), и maximum—когда онъ имѣетъ форму окружности.—Для проводника, составленнаго изъ двухъ или большаго числа оборотовъ, не лежащихъ въ одной плоскости, геом. коэфф. т. е. коэфф. самоиндукціи будетъ тѣмъ больше, чѣмъ обороты расположены ближе другъ къ другу. Отсюда понятно почему для возможнаго усиленія явленій самоиндукціи проводнику придаютъ форму катушки. Наоборотъ, если желательно довести самоиндукцію до возможно слабой степени, проводникъ складываютъ вдвое (или скручиваютъ) и придаютъ ему произвольную затѣмъ форму. Напр. катушка, составленная такъ, что въ каждыхъ двухъ сосѣднихъ оборотахъ токъ идетъ по противоположнымъ направленіямъ, имѣетъ геом. коэфф. близкій къ нулю и потому явленій самоиндукціи почти не обнаруживаетъ.

§ 47. *Аналогія между токами и движущимися инертными массами.* Явленія самоиндукціи аналогичны вполнѣ съ явленіями инерціи. Чтобы напр. привесть въ движеніе маховое колесо силою руки, надо сначала затратить часть работы на преодолѣніе инерціи, до тѣхъ поръ пока скорость колеса, постоянно возрастая, не достигнетъ нѣкоторой предѣльной величины; съ этого момента работа силы (постоянной) будетъ затрачиваться на побѣжденіе сопротивленій тренія, и скорость маховика сдѣлается постоянной; наоборотъ—прекращая прилагать къ маховику силу, мы увидимъ, что онъ не тотчасъ же остановится, и будетъ самъ собою, благодаря пріобрѣтенной скорости, продолжать вращаться и совершать нѣкоторую работу, пока вся его кинетическая энергія не израсходуется. Нѣчто совершенно аналогичное замѣчаемъ при возникновеніи и прекращеніи тока въ проводникѣ: сначала часть энергіи затрачивается на осуществленіе тока (или—какъ сказано выше—на побѣжденіе несогласнаго экстратока), а потомъ за то, при размыканіи цѣпи, та-же энергія возвращается намъ обратно въ видѣ дополнительнаго тока (согласнаго экстратока).

Отсюда нельзя однакожъ прійти къ заключенію, что токъ есть дѣйствительное движеніе (теченіе) нѣкоторой инертной массы по проводнику; если явленія самоиндукціи аналогичны тѣмъ, напр., которыя имѣютъ мѣсто при возникновеніи и прекращеніи теченія воды по водопроводнымъ трубамъ, то нельзя забывать, что явленія стаціонарнаго тока такой аналогіи не представляютъ, уже потому, что плоскій (кольцевой) проводникъ тока не обнаруживаетъ *никакого* сопротивленія измѣненію его плоскости, что было бы непремѣннымъ слѣдствіемъ теченія по этому проводнику нѣкоторой инертной массы.

§ 48. *Продолжительность экстратоковъ.* Несогласный экстратокъ, возникающій при замыканіи цѣпи, представляя собою временное сопротивленіе основному току, замедляетъ его установку въ проводникѣ на нѣкоторый конечный промежутокъ времени τ, въ теченіе котораго сила замкнутаго тока постепенно возрастаетъ отъ 0 до предѣльной величины i. Этотъ промежутокъ времени τ тѣмъ больше, чѣмъ больше геом. коэф-

фиціентомъ взаимоиндукціи системы этихъ проводниковъ.—Я думаю, однако, что терминъ „*геометрическій коэффиціентъ*", какъ болѣе общій, имѣетъ свои удобства.

фиціентъ проводника и чѣмъ меньше его постоянное сопротивленіе.— Отсюда становится понятнымъ относительная медленность возникающаго электронатяженія: это обусловливается самоиндукціею проводника, въ которомъ токъ данной силы не можетъ установиться мгновенно.

Совершенно иныя условія замѣчаемъ при мгновенномъ размыканіи цѣпи; при этомъ въ проводникѣ токъ сразу падаетъ отъ i до 0, и возникающій въ этотъ очень короткій промежутокъ времени согласный экстратокъ длится лишь до тѣхъ поръ, пока электронатяженіе не исчезнетъ, что совершается въ неизмѣримо малое время τ'. Вслѣдствіе этой кратковременности согласнаго экстратока его электровозб. сила сравнительно очень высока и потому въ большинствѣ случаевъ въ разомкнутомъ уже проводникѣ согласный экстратокъ замыкается искрой въ мѣстѣ разрыва цѣпи.

Опытъ искры отъ согл. экстратока. (При замыканіи цѣпи, содержащей катушку, искры не видно, если токъ не особенно силенъ, но она ясно видна при размыканіи той-же цѣпи). *Опытъ* физіолог. дѣйствія согл. экстратока. Опасность размыканія цѣпи съ катушками и сильными токами. Сгораніе мѣстъ разрыва цѣпи.

Если размыкаемый проводникъ тока сообщенъ посредствомъ отвѣтвленій съ конденсаторомъ, то согласный экстратокъ въ моментъ размыканія зарядитъ конденсаторъ, и тогда искра въ мѣстѣ разрыва цѣпи будетъ значительно слабѣе. Послѣ того какъ согл. экстратокъ прекратится, конденсаторъ тотчасъ-же разрядится черезъ проводникъ.

§ 49. *Индуктивная катушка Румкорфа.* Во внутренней катушкѣ Румкорфа, вслѣдствіе автоматическаго замыканія и размыканія тока, явленія самоиндукціи повторяются непрерывно. При замыканіи цѣпи, благодаря самоиндукціи, происходитъ замедленіе въ установкѣ данной силы тока и соотвѣтствующаго ей электронатяженія, вслѣдствіе чего несогласный индуктивный токъ возникаетъ во внѣшней катушкѣ не моментально, а въ теченіе нѣкотораго промежутка времени τ, почему его электровозб. сила сравнительно слаба. Наоборотъ, при размыканіи цѣпи, во внутренней катушкѣ возникаетъ почти мгновенный согласный экстратокъ, дающій искру въ прерывателѣ (молоточкѣ), а во внѣшней катушкѣ возникаетъ тоже почти мгновенный согласный индуктивный токъ, котораго электровозб. сила, вслѣдствіе кратковременности всего процесса индукціи, сравнительно высока. Такимъ образомъ понятно, почему индуктивные токи несогласный и согласный въ Румкорфа катушкѣ не равносильны: количество электричества, приводимое въ движеніе индукціею, одинаково какъ при замыканіи, такъ и при размыканіи цѣпи, но электровоззб. силы обоихъ индуктивныхъ токовъ неодинаковы, и всегда электрово б. сила больше въ согласномъ инд. токѣ, т. е. въ томъ, который возникаетъ при разрывѣ цѣпи. Разница здѣсь тѣмъ больше, чѣмъ больше самоиндукція внутренней катушки.—Появленіе искры вслѣдствіе экстратока въ мѣстѣ разрыва цѣпи не желательно какъ потому, что искра какъ бы удлиняетъ процессъ уничтоженія тока во внутренней катушкѣ и этимъ ослабляетъ согл. инд. токъ во внѣшней, такъ еще и потому, что искра быстро портитъ приборъ (молоточекъ). Для возможнаго уменьшенія искры въ прерывателѣ, выгодно, какъ было сказано выше (§ 48), присоединить къ внутренней катушкѣ конденсаторъ, который всякій разъ будетъ заряжаться согласнымъ экстратокомъ и вслѣдъ затѣмъ разряжаться черезъ катушку.

§ 50. *Обобщеніе явленій индукціи.* Всѣ частные случаи возбужденія инд. токовъ и зарядовъ (§§ 40—42), включая сюда и самоиндукцію (§ 43), сводятся къ одному общему положенію: усиливающееся электронатяженіе вызываетъ во всѣхъ имъ обнимаемыхъ проводникахъ несогласные токи (или заряды), ослабляющіе это электронатяженіе, и—наоборотъ—ослабѣвающее электронатяженіе вызываетъ во всѣхъ имъ обнимаемыхъ проводникахъ согласные токи (или заряды), поддерживающіе это электронатяженіе. Въ первомъ случаѣ индукція замедляетъ процессъ усиленія электронатяженія, во второмъ—процессъ ослабленія; въ обоихъ случаяхъ она обусловливается поглощеніемъ энергіи, перешедшей въ электронатяженіе, и преобразованіемъ ея, благодаря присутствію проводниковъ, въ электричество. Можемъ, слѣдовательно, опредѣлить теперь *индукцію*, какъ *то сопротивленіе, которое встрѣчаетъ всякое перемѣнное электронатяженіе въ тѣлахъ, называемыхъ нами хорошими проводниками.*

§ 51. *Основной законъ индукціи.* Смотря на индукцію какъ на временно возникающее въ проводникахъ сопротивленіе всякому измѣненію электронатяженія, не трудно прійти къ основному закону индукціи (4-му основному закону внѣдѣйствія токовъ), который можно формулировать такъ: *„при всякомъ измѣненіи внѣшнихъ силъ тока вызванныя ими явленія индукціи въ проводникахъ препятствуютъ этому измѣненію“.* (Разъясненія, примѣры. *Законъ Ленца*, какъ частный случай вышеприведеннаго).

§ 52. *Принципъ индуктивныхъ машинъ.* Выше мы упомянули (§ 18), что уменьшать или увеличивать общую энергію электронатяженія среды, мы можемъ посредствомъ соотвѣтственныхъ перемѣщеній проводниковъ токовъ (или частей проводника), выполняемыхъ періодически какими нибудь посторонними механическими силами. Если воспользуемся этимъ съ тою цѣлью, чтобы въ нѣкоторомъ проводникѣ-пріемникѣ возбуждались періодически индуктивные токи (или заряды), то получимъ *индуктивную машину*, при помощи которой часть затрачиваемой механической работы преобразуется въ токъ. Не трудно видѣть, что при этомъ кромѣ обыкновенныхъ сопротивленій перемѣщенію подвижныхъ частей машины (тренія и пр.), въ ней будетъ еще и сопротивленіе, обусловливаемое индукціей, на побѣжденіе котораго должна быть затрачена механическая работа. (Напр. вдвигая и выдвигая періодически внутреннюю катушку, по которой проходитъ постоянный токъ, внутрь внѣшней, будемъ имѣть въ этой послѣдней всякій разъ индуктивный токъ то одного, то другого направленія (предполагая, что она замкнута). При вдвиганіи внутренней катушки, возникшіе уже во внѣшней катушкѣ несогласные инд. токи своимъ электродинамическимъ дѣйствіемъ будутъ до нѣкоторой степени препятствовать дальнѣйшему вдвиганію катушки (которую они стремятся вытолкнуть), и на оборотъ—при выдвиганіи ея, возникшіе уже во внѣшней катушкѣ согл. инд. токи, будутъ точно также препятствовать дальнѣйшему выдвиганію. Въ обоихъ случаяхъ, слѣдовательно, для того чтобы получить требуемые во внѣшней катушкѣ индуктивные токи, сила вдвигающая и выдвигающая катушку должна быть достаточно велика для того, чтобы преодолѣть и это электродинамическое сопротивленіе индукціи).

Щ.

(Продолженіе слѣдуетъ).

ОБОБЩЕНІЕ ЗАДАЧИ АПОЛЛОНІЯ ПЕРГАМСКАГО.

Обобщеніе задачи Аполлонія состоитъ въ слѣдующемъ: „построить кругъ, пересѣкающій три данные круга соотвѣтственно подъ углами A', A'', A'''.

Настоящая задача, подобно Аполлоніевой, непосредственно рѣшена быть не можетъ. Но прежде чѣмъ изложить рядъ предварительныхъ теоремъ, условимся въ томъ, что мы разумѣемъ подъ угломъ двухъ пересѣкающихся окружностей.

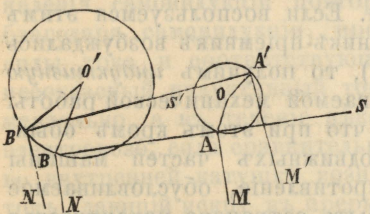
Двѣ окружности, пересѣкаясь, образуютъ около одной изъ точекъ пересѣченія, четыре угла, попарно равные. За уголъ между двумя окружностями мы будемъ принимать уголъ между радіусами, проведенными изъ точки пересѣченія окружностей къ ихъ центрамъ. Такое условіе мы вправѣ ввести на томъ основаніи, что упомянутый уголъ всегда равенъ углу между касательными, проведенными къ окружностямъ въ точкѣ пересѣченія.

Теперь можемъ приступить къ изложенію предварительныхъ теоремъ.

Теорема I. „Сѣкущая, проходящая черезъ прямой центръ подобія двухъ круговъ, пересѣкаетъ ихъ окружности въ соотвѣтственныхъ точкахъ подъ однимъ и тѣмъ же угломъ“.

Разсматривая (фиг. 29) сѣкущую SAB какъ окружность безконечно большого радіуса, видимъ, что MA и NB, проведенные перпендикулярно къ ней, суть радіусы ея. По условію углы дуги SAB съ окружностями суть OAM и O'BN. Но послѣдніе, очевидно, равны.

Фиг. 29.



Теорема II. „Сѣкущая, проходящая черезъ обратный центръ подобія двухъ круговъ, пересѣкаетъ ихъ окружности въ соотвѣтственныхъ точкахъ подъ углами, другъ друга дополняющими до 180°“.

На основаніи тѣхъ же соображеній (фиг. 29) видимъ, что сравниваемые углы суть OA'M' и O'B'N'.

Но мы имѣемъ:

$$\angle OA'M' = 90° - \angle OA'S'; \qquad \angle O'B'N' = 90° + \angle O'B'S'.$$

Складывая эти равенства и помня, что $\angle OA'S' = \angle O'B'S'$, находимъ

$$\angle OA'M' + \angle O'B'N' = 180°.$$

Теорема III. „Взаимный кругъ *), по отношенію къ прямому центру подобія двухъ круговъ, пересѣкаетъ ихъ окружности подъ однимъ и тѣмъ же угломъ“.

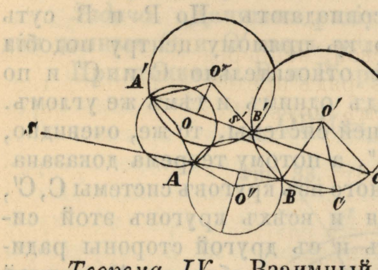
---

*) Кругъ, проходящій черезъ двѣ несоотвѣтственныя точки пересѣченія сѣкущей, прохдящей черезъ центръ подобія двухъ круговъ, наз. взаимнымъ.

Изъ чертежа (фиг. 30) видимъ, что

$$\angle O''BA=\angle O''AB \quad \text{и} \quad \angle O'BC=\angle O'CB=\angle OAS.$$

Фиг. 30.



На основанiи второго изъ этихъ равенствъ, заключаемъ, что

$$\angle OAB=\angle O'BA.$$

Складывая это послѣднее почленно съ первымъ изъ двухъ предыдущихъ равенствъ, имѣемъ

$$\angle OAO''=\angle O'BO''.$$

Теорема IV. „Взаимный кругъ, по отношенiю къ обратному центру подобiя двухъ круговъ, пересѣкаетъ ихъ окружности подъ углами, другъ друга дополняющими до 180°.

Изъ чертежа (фиг. 30) видимъ, что

$$\angle O'''A'B'=\angle O'''B'A' \quad \text{и} \quad \angle OA'B'=\angle O'C'B'.$$

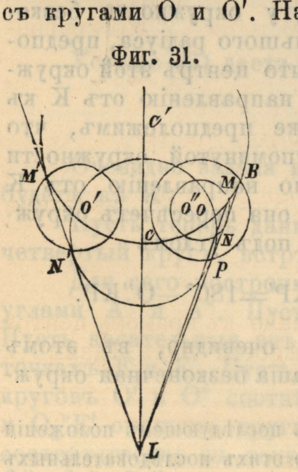
Складывая эти равенства и замѣчая, что сумма ихъ вторыхъ частей дополняетъ до 180° уголъ $O'B'O'''$, имѣемъ:

$$OA'O'''=180^\circ-O'B'O'''.$$

Теорема V. „Если система круговъ C, C′, C″.... такова, что всѣ они пересѣкаются кругомъ O подъ угломъ A, а кругомъ O′ подъ угломъ A′, то всякимъ новымъ кругомъ, имѣющимъ общую радикальную ось съ кругами O и O′, та же система круговъ пересѣчется подъ однимъ и тѣмъ же угломъ A″“.

Опишемъ изъ центра O кругъ, имѣющiй радикальную ось, общую съ кругами O и O′. Назовемъ этотъ кругъ черезъ O″ (фиг. 31).

Фиг. 31.



По теоремѣ III-й круги O и O′ „взаимные“ относительно прямого центра подобiя круговъ C и C′, ибо по условiю каждый изъ нихъ пересѣкаетъ круги C и C′ подъ однимъ и тѣмъ же угломъ. Отсюда слѣдуетъ, что точка L—пересѣченiе прямыхъ MN и M′N′ есть прямой центръ подобiя круговъ C и C′. Поэтому

$$LM.LN=LM'.LN'.$$

Такъ какъ M и N, M′ и N′ въ то же время находятся на кругахъ O, O′, то заключаемъ изъ предыдущаго равенства, что L лежитъ на радикальной оси круговъ O, O′.

Соединимъ точку B съ L. Пусть прямая BL пересѣкаетъ кругъ O″ въ точкѣ P, а кругъ C въ точкѣ P′. Такъ какъ L есть прямой центръ подобія круговъ C и C′ съ одной стороны, и въ то же время лежитъ на радикальной оси круговъ O′ и O″, то имѣемъ:

$$LP.LB = LM'.LN'$$

$$LP'.LB = LM'.LN'.$$

Отсюда слѣдуетъ, что точки P и P′ совпадаютъ. Но P и B суть двѣ несоотвѣтственныя точки по отношенію къ прямому центру подобія круговъ C и C′, слѣд. кругъ O″ взаимный относительно C и C′ и по теоремѣ III-й пересѣкаетъ круги C и C′ подъ однимъ и тѣмъ же угломъ.

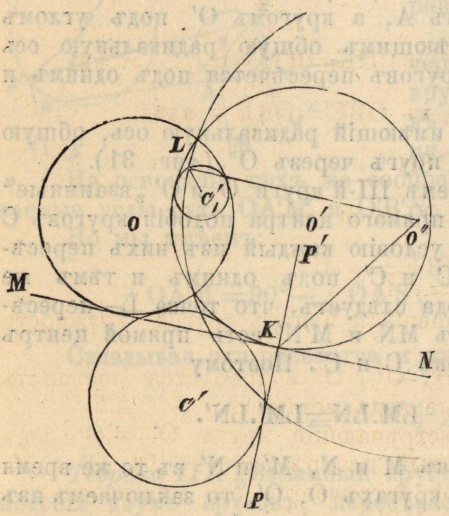
Что сказали о парѣ круговъ C, C′ нашей системы, то же, очевидно, относится и ко всякой новой парѣ, напр. C и C″, а потому теорема доказана.

Слѣдствіе I. „Если кругъ O″ касается одного изъ круговъ системы C, C′, C″,......, то, очевидно, онъ будетъ касаться и всѣхъ круговъ этой системы; такой же кругъ O″ можно построить и съ другой стороны радикальной оси круговъ O, O′; отсюда слѣдуетъ, что „обвертка*) данной системы круговъ C, C′, C″.... есть два круга, имѣющіе общую радикальную ось съ двумя данными“.

Слѣдствіе 2. „Если круги O, O′ одинаково (напр. внѣшне) касаются круговъ системы C, C′, C″....., то кругъ O″, имѣющій общую радикальную ось съ двумя первыми, пересѣчетъ систему круговъ C, C′, C″.... подъ однимъ и тѣмъ же угломъ A“.

Слѣдствіе 3. „Если одна часть системы круговъ C, C′, C″..... касается круговъ O, O′ внѣшне, а другая внутренне, то кругъ O″, имѣющій общую радикальную ось съ двумя первыми, пересѣчетъ первую часть круговъ подъ угломъ A, а вторую подъ угломъ 180°—A“.

Фиг. 32.



Въ самомъ дѣлѣ (фиг. 32) круги, касающіеся окружностей O, O′, внѣшне, какъ кругъ C′ пересѣкутъ окружность O″ подъ однимъ и тѣмъ же угломъ. Подъ этимъ же угломъ пересѣчется окружность O″ и съ прямою MN, если, считая MN за дугу окружности безконечно большого радіуса, предположимъ, что центръ этой окружности по направленію отъ K къ P. Если же предположимъ, что центръ упомянутой окружности лежитъ по направленію отъ K къ P′, то она пересѣчетъ окружность O″ подъ угломъ

$$O''KP' = 180^\circ - O''KP.$$

Но, очевидно, въ этомъ случаѣ наша безконечная окруж-

*) Если кругъ, непрерывно перемѣщаясь, въ своемъ послѣдующемъ положеніи пересѣкается съ предыдущимъ, то геометрическое мѣсто этихъ послѣдовательныхъ пересѣченій и есть обвертка.

ность будетъ касаться круговъ O и O′ такъ же точно, какъ ихъ касаются круги C_1'..... и будетъ пересѣкать O″ подъ угломъ$=\angle O''LC_1'$, который равенъ углу $O''KP'$, по раньше доказанному.

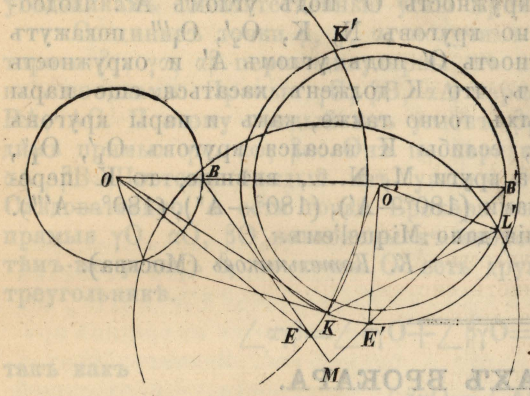
Прежде чѣмъ перейти теперь къ рѣшенію главнаго вопроса, рѣшимъ одну задачу.

Задача. „Даннымъ радіусомъ R описать окружность, пересѣкающую двѣ данныя O и O′ подъ углами A и A′“.

При точкахъ B и B′ радіусовъ OB и O′B′ (фиг. 33) строимъ углы:

$$\angle OBM=\angle A; \qquad \angle O'B'M=\angle A'.$$

Фиг. 33.



Отложивъ затѣмъ по BM и B′M равные отрѣзки

$$BE=B'E'=R,$$

опишемъ изъ центровъ O и O′ двѣ окружности соотвѣтственно радіусами OE и O′E′. Точка K — пересѣченіе построенныхъ окружностей, есть центръ искомаго круга. Дѣйствительно, если L и L′ суть пересѣченія искомой окружности съ данными, то имѣемъ:

$$OK=OE; \quad OB=OL; \quad LK=BE=R \quad . \ . \ . \ (1)$$

и

$$O'K=O'E'; \quad O'B'=O'L'; \quad L'K=B'E'=R \quad . \ . \ (2)$$

Условіе (1) показываетъ, что $\triangle$-къ $OBE'=OKL$ и слѣд.

$$\angle OLK=\angle OBE=\angle A.$$

Условіе (2) даетъ $\triangle$-къ $O'B'E=O'L'K$ и слѣд.

$$\angle O'L'K=\angle O'B'E'=\angle A'.$$

Очевидно задача имѣетъ два рѣшенія и центръ другой окружности будетъ въ K′.

Пусть теперь даны три круга O′, O‴, O″ и требуется построить четвертый кругъ, встрѣчающій данные подъ углами A′, A″, A‴.

Для сего построимъ кругъ M, встрѣчающій круги O′ и O″ подъ углами A′ и A″. Пусть P радикальный центръ круговъ O′, O″ и M. Пусть касательныя изъ P къ кругу M встрѣчаютъ его окружность въ точкахъ E и E′. Пусть радіусы ME и ME′ встрѣчаютъ линію центровъ круговъ O′ и O″ соотвѣтственно въ точкахъ O_1' и O_1''. Радіусами $O_1'E$ и $O_1''E'$ опишемъ круги, касательные къ кругу M и имѣющіе центры соотвѣтственно въ точкахъ O_1' и O_1''. Такимъ образомъ круги M, O′, O″, O_1', O_1'' имѣютъ общую радикальную ось. Разсужденія подобныя предыдущимъ, но касающіяся круговъ O' и O''' и круга N, пересѣкающаго первые два соотвѣтственно подъ углами A' и A''', приведутъ къ построенію двухъ круговъ O_2' и O_1''' и мы будемъ имѣть новую систему изъ пяти круговъ O', O''', O_2', O_1''' и N, имѣющихъ общую радикальную ось. Проведемъ теперь кругъ, касательный къ тремъ какимъ нибудь изъ 4-хъ круговъ O_1', O_1'', O_2', O_1'''. Проведенный кругъ и будетъ искомый. Назовемъ его черезъ K.

Въ самомъ дѣлѣ, круги M и K одинаково касаются круговъ O_1' и O_1'', слѣд. (теор. V, слѣд. 2-е) круги O' и O'', имѣющіе радикальную ось общую съ кругами O_1' и O_1'', пересѣкутъ окружности круговъ M и K каждый подъ однимъ и тѣмъ же угломъ; слѣд. K пересѣкаетъ окружность O' подъ угломъ A', а окружность O'' подъ угломъ A''. Подобныя же разсужденія относительно круговъ N, K, O_2', O_1''' покажутъ намъ, что K пересѣкаетъ окружность O' подъ угломъ A' и окружность O'''—подъ угломъ A'''. Замѣтимъ, что K долженъ касаться еще пары круговъ O_2'' и O_2''', построенныхъ точно также, какъ и пары круговъ O_1', O_1'' и O_2', O_1'''. Наконецъ, еслибы K касался круговъ O_1', O_1'', O_2', O_2'', O_1''', O_2''' внутренне, а круги M, N...., внѣшне, то K пересѣкалъ бы O', O'', O''' подъ углами $(180°—A')$, $(180°—A'')$, $(180°—A''')$.

Обобщеніе задачи Аполлонія дано Miquel'емъ.

К. Котельниковъ (Москва).

О ТОЧКАХЪ БРОКАРА.

На сторонахъ $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ треугольника ABC опишемъ сегменты, вмѣщающіе углы $180°—B$, $180°—C$, $180°—A$. Центры β, γ, α описанныхъ окружностей будутъ находиться на перпендикулярахъ OD, OE, OF, возставленныхъ изъ срединъ сторонъ треугольника ABC. Всѣ три дуги пересѣкутся въ одной точкѣ ω, лежащей внутри треугольника. Обозначимъ уголъ $BC\omega$ черезъ θ. Тогда

$$\angle AC\omega = C-\theta.$$

Такъ какъ

$$\angle C\omega A = 180°-C,$$

то

$$\angle CA\omega = \theta.$$

Значитъ,

$$\angle BA\omega = A-\theta.$$

Такъ какъ

$$\angle A\omega B = 180°-A,$$

то

$$\angle AB\omega = \theta.$$

Такимъ образомъ прямыя $C\omega$, $A\omega$, $B\omega$ наклонены къ сторонамъ a, b, c подъ одинаковымъ угломъ θ. Точка ω называется точкой Брокара и уголъ θ—угломъ Брокара.

Описавъ на сторонахъ a, b, c сегменты, вмѣщающіе углы $180°-C$, $180°-A$, $180°-B$, получимъ въ пересѣченіи ихъ другую точку Брокара ω'. Прямыя $C\omega'$, $A\omega'$, $B\omega'$ будутъ наклонены къ сторонамъ b, c, a подъ однимъ и тѣмъ же угломъ θ'.

Если мы увеличимъ стороны треугольника ABC въ какомъ—нибудь отношеніи K, то въ томъ-же самомъ отношеніи увеличатся радіусы окружностей, описанныхъ на сторонахъ треугольника, и разстоянія точекъ Брокара отъ вершинъ треугольника. Слѣдовательно, въ подобныхъ треугольникахъ соотвѣтственные углы Брокара равны между собой.

Соединивъ точки β, γ, α, получимъ треугольникъ $\alpha\beta\gamma$, стороны котораго $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ перпендикулярны къ прямымъ $C\omega$, $A\omega$, $B\omega$ и дѣлятъ ихъ пополамъ. Прямыя γC, βB, αA перпендикулярны къ сторонамъ CB, BA, AC. Поэтому каждый изъ угловъ $\beta\gamma C$, $\alpha\beta B$, $\gamma\alpha A$ равенъ θ. Проводимъ прямыя $\gamma\omega$, $\alpha\omega$, $\beta\omega$. Онѣ по порядку будутъ равны прямымъ γC, αA, βB. Поэтому каждый изъ угловъ $\beta\gamma\omega$, $\alpha\beta\omega$, $\gamma\alpha\omega$ также равенъ θ. Слѣдовательно, ω есть точка Брокара въ треугольникѣ $\alpha\beta\gamma$. Такъ какъ прямыя γO, αO, βO наклонены къ сторонамъ $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ подъ однимъ и тѣмъ-же угломъ θ, то точка O есть другая точка Брокара въ томъ-же треугольникѣ.

$$\angle\alpha\gamma\beta=\angle\alpha\gamma O+\angle\beta\gamma O=\theta+(C-\theta)=C,$$

такъ какъ

$$\angle\beta\gamma O=\angle AC\omega$$

по перпендикулярности сторонъ. Точно также убѣдимся, что углы $\gamma\beta\alpha$, $\beta\alpha\gamma$ равны B, A. Значитъ треугольникъ $\alpha\beta\gamma$ подобенъ съ треугольникомъ ABC. Уголъ θ, подъ которымъ прямыя γO, αO, βO, наклонены къ сторонамъ $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, долженъ равняться углу θ', подъ которымъ прямыя $C\omega'$, $A\omega'$, $B\omega'$ наклонены къ сходственнымъ сторонамъ CA, AB, BC, такъ какъ въ подобныхъ треугольникахъ соотвѣтственные углы Брокара равны. Слѣдовательно, во всякомъ треугольникѣ оба угла Брокара равны.

Изъ точекъ ω и ω' (фиг. 34) опустимъ перпендикуляры $\omega A'$, $\omega B'$, $\omega C'$ и $\omega' A''$, $\omega' B''$, $\omega' C''$ на стороны BC, CA, AB и разсмотримъ треугольники $A'B'C'$ и $A''B''C''$. Около каждаго изъ четыреугольниковъ $\omega B'AC'$, $\omega C'BA'$, $\omega A'CB'$ и $\omega' B''AC''$, $\omega' C''BA''$, $\omega' A''CB''$ можно описать окружность.

Поэтому

$$\angle C'B'\omega=\angle C'A\omega=A-\theta,\quad \angle B'C'\omega=\angle B'A\omega=\theta;$$
$$\angle A'C'\omega=\angle A'B\omega=B-\theta,\quad \angle C'A'\omega=\angle C'B\omega=\theta;$$
$$\angle B'A'\omega=\angle B'C\omega=C-\theta,\quad \angle A'B'\omega=\angle A'C\omega=\theta.$$

Слѣдовательно,

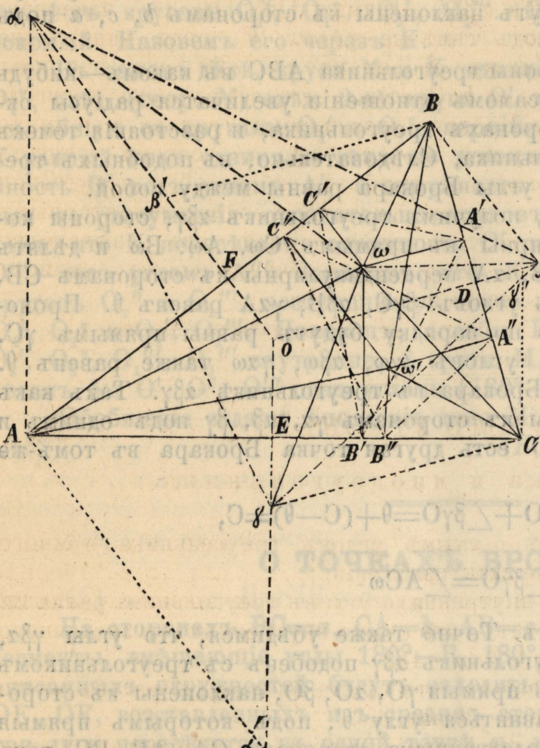
$$\angle C'B'A'=\angle C'B'\omega+\angle A'B'\omega=A-\theta+\theta=A,\quad \angle B'C'A'=B,\quad \angle C'A'B'=C.$$

Точно также докажемъ, что

$$\angle C''B''A''=\angle C,\quad \angle B''C''A''=A,\quad \angle C''A''B''=B.$$

Треугольники A′B′C′ и A″B″C″ подобны съ треугольникомъ ABC. При этомъ ω и ω' представляютъ точки Брокара въ треугольникахъ A′B′C′ и A″B″C″.

Фиг. 34.



Не трудно видѣть, что прямыя $A\omega$, $B\omega$, $C\omega$ по порядку перпендикулярны къ сторонамъ B″C″, C″A″, A″B″ и прямыя $A\omega'$, $B\omega'$, $C\omega'$ перпендикулярны къ сторонамъ B′C′, C′A′, A′B′.

Около четыреугольника A′B′B″A″ можно описать окружность, такъ какъ

$$\angle B'A'C = 90^\circ - (C - \theta)$$

и

$$\angle A''B''C = 90^\circ - (C - \theta).$$

Перпендикуляры, возставленные изъ срединъ отрѣзковъ A′A″ и B′B″, пересѣкаются въ срединѣ прямой $\omega\omega'$. Значитъ, центръ окружности, проходящей черезъ точки A′, A″, B′, B″, находится въ срединѣ линіи $\omega\omega'$. Точно также докажемъ, что около четыреугольниковъ B′B″C′C″ и C′A′A″C″ можно описать окружности и что центры этихъ окружностей находятся въ срединѣ прямой $\omega\omega'$.

Слѣдовательно, шесть точекъ A′ и A″, B′ и B″, C′ и C″ находятся на одной окружности. Это показываетъ, что треугольники A′B′C′ и A″B″C″ равны, такъ какъ они подобны и вписаны въ одну и ту-же окружность. Значитъ,

$$\overline{C'A'} = \overline{A''B''}, \qquad \overline{A'B'} = \overline{B''C''}, \qquad \overline{B'C'} = \overline{C''A''}.$$

Пусть будутъ α', β', γ' центры окружностей, описанныхъ на сторонахъ AC, AB, BC и вмѣщающихъ углы 180°—A, 180°—B, 180°—C. Тогда $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$ перпендикулярны къ AB, BC, CA. Четыреугольники $A\alpha O\alpha'$, $B\beta O\beta'$, $C\gamma O\gamma'$ представляютъ параллелограммы съ острыми углами A, B, C (если ABC остроугольный треугольникъ). Такъ какъ

$$\angle \alpha' O\beta' = 180^\circ - A = \angle \alpha\omega\beta, \quad \overline{O\alpha'} = \overline{A\alpha} = \overline{\omega\alpha}, \quad \overline{O\beta'} = \overline{B\beta} = \overline{\omega\beta},$$

то треугольники $\alpha' O\beta'$ и $\alpha\omega\beta$ равны и слѣдовательно,

$$\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha'\beta'}.$$

Точно также докажемъ, что

$$\overline{\alpha\gamma}=\overline{\alpha'\gamma'},\qquad \overline{\beta\gamma}=\overline{\beta'\gamma'}.$$

Значитъ треугольники $\alpha\beta\gamma$ и $\alpha'\beta'\gamma'$ равны. ω' и O представляютъ точки Брокара въ треугольникѣ $\alpha'\beta'\gamma'$. Прямыя $O\alpha'$, $O\beta'$, $O\gamma'$ наклонены къ сторонамъ $\alpha'\gamma'$, $\beta'\alpha'$, $\gamma'\beta'$ подъ тѣмъ-же угломъ θ', подъ какимъ наклонены прямыя $\omega'\alpha'$, $\omega'\beta'$, $\omega'\gamma'$ къ сторонамъ $\alpha'\beta'$, $\beta'\gamma'$, $\gamma'\alpha'$ и прямыя $\omega'A$, $\omega'B$, $\omega'C$ къ сторонамъ c, a, b. Замѣчая, что въ равныхъ треугольникахъ соотвѣтственные углы Брокара должны быть равны, мы приходимъ къ новому доказательству той теоремы, что во всякомъ треугольникѣ углы Брокара θ и θ' равны, не прибѣгая къ подобію треугольниковъ. Послѣднее доказательство должно считаться болѣе элементарнымъ.

Точки Брокара представляютъ частный случай такъ называемыхъ взаимныхъ точекъ треугольника. Поэтому всѣ доказанныя ихъ свойства легко выводятся изъ свойствъ взаимныхъ точекъ.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

О СУММѢ УГЛОВЪ

треугольника и многоугольника.

Обыкновенно въ вопросѣ о суммѣ угловъ треугольника и многоугольника держатся такого порядка изложенія.

Доказываютъ, что сумма внутреннихъ угловъ треугольника равна $2d$.

Изъ этой теоремы выводятъ, что сумма внутреннихъ угловъ многоугольника о n сторонахъ равна $2dn-4d$.

Наконецъ отсюда заключаютъ, что сумма внѣшнихъ угловъ многоугольника—величина постоянная равная $4d$.

Мнѣ кажется, что изложеніе вопроса выиграетъ въ простотѣ и краткости, если принять обратный порядокъ.

Докажемъ сначала, что сумма внѣшнихъ угловъ многоугольника равна $4d$.

Положимъ данъ многоугольникъ объ n сторонахъ. Возьмемъ внутри его какую-нибудь точку O и опустимъ изъ нея перпендикуляры на стороны многоугольника.

Внѣшній уголъ многоугольника (по перпендикулярности сторонъ) равенъ углу между послѣдовательными перпендикулярами, опущенными изъ точки O на стороны, образующія разсматриваемый внѣшній уголъ. Такъ какъ при точкѣ O мы имѣемъ ровно столько угловъ, сколько данный многоугольникъ имѣетъ внѣшнихъ угловъ, то сумма внѣшнихъ угловъ многоугольника равна суммѣ угловъ при точкѣ O. Эта же послѣдняя, какъ извѣстно, равна $4d$, слѣд. *сумма внѣшнихъ угловъ многоугольника равна $4d$.*

Отсюда можно извѣстнымъ способомъ доказать, что сумма внутреннихъ угловъ многоугольника объ n сторонахъ равна $2dn-4d$ или можно воспользоваться слѣдующими соображеніями.

Уголъ между двумя перпендикулярами дополняетъ внутренній уголъ многоугольника до $2d$ (по теоремѣ объ углахъ съ взаимно-перпендикулярными сторонами). Слѣдовательно сумма внутреннихъ угловъ многоугольника объ n сторонахъ равна $2d.n$ безъ суммы $\alpha'+\beta'+\ldots$ угловъ около точки O.

Отсюда получаемъ прежнюю формулу $2dn-4d$.

Прилагая эту формулу къ случаю $n=3$, получаемъ: сумма внутреннихъ угловъ треугольника равна $2d$. *Н. Лунскій* (Кастрополь),

О ПРИВЕДЕНІИ КОРНЕЙ КЪ РАЦІОНАЛЬНОМУ ВИДУ.

Извѣстно, что, для приведенія корней къ раціональному виду, поступаютъ такъ:

1) въ случаѣ одночленныхъ выраженій, представляющихъ квадратные или кубичные корни, приведеніе этихъ выраженій къ раціональному виду производятъ посредствомъ возвышенія въ квадратъ первыхъ и—возвышенія въ кубъ вторыхъ, такъ напр.

$$(\sqrt{a})^2=\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a,\quad (\sqrt[3]{a})^3=\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a}=a;$$

2) въ случаѣ двучленовъ, составленныхъ изъ квадратныхъ корней, приведеніе къ раціональному виду этихъ двучленовъ дѣлается посредствомъ умноженія ихъ на сопряженныя имъ выраженія, такъ напр.

$$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1,\quad (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})=1$$

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$$

и т. д.

Но въ большинствѣ руководствъ по Алгебрѣ не разбирается случай приведенія къ раціональному виду двучленныхъ ирраціональныхъ выраженій, заключающихъ въ себѣ корни не второй только степени, а *вообще* и другихъ степеней.

Настоящая замѣтка имѣетъ въ виду пополнить этотъ пробѣлъ.

Извѣстно, что

$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1})\ldots..1;$$

$$x^n-y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+\ldots\ldots+xy^{n-2}-y^{n-1})\ldots..2;$$

когда n четное,

$$x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+\ldots\ldots-xy^{n-2}+y^{n-1})\ldots..3;$$

когда n нечетное.

Полагая въ этихъ равенствахъ $x^n=a$ и $y^n=b$, можемъ написать:

$$\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)=a-b\ldots\mathrm{I}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+\sqrt[n]{ab^{n-2}}-\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)=a-b\ldots\mathrm{II}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots-\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)=a+b.\,.\mathrm{III}$$

Отсюда видно, что для приведенія ирраціональныхъ двучленныхъ выраженій вида

$$\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b} \quad \text{или} \quad \sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$$

къ раціональному виду, нужно пользоваться соотвѣтственно однимъ изъ множителей, входящихъ въ равенства (I), (II) и (III). Такъ напр. для приведенія двучлена

$$\sqrt[6]{27}-\sqrt[6]{4}$$

къ раціональному виду, нужно этотъ двучленъ умножить на множителя равенства (I), тогда

$$\left(\sqrt[6]{27}-\sqrt[6]{4}\right)\left(\sqrt[6]{27^5}+\sqrt[6]{27^4.4}+\sqrt[6]{27^3.4^2}+\sqrt[6]{27^2.4^3}+\sqrt[6]{27.4^4}+\right.$$

$$\left.+\sqrt[6]{4^5}\right)=27-4=23.$$

Когда показатели корней бинома разные, то приводятъ корни къ одному показателю и поступаютъ, какъ сказано выше.

В. Захаровъ (Камышинъ).

О ДЛИНѢ ДУГИ КРИВОЙ ЛИНІИ*).

Изложеніе статьи о длинѣ окружности въ нашихъ русскихъ учебникахъ довольно существенно различается отъ таковаго же во францускихъ: у насъ понятіе о длинѣ окружности считается не подлежащимъ опредѣленію и, принимая его за данное, мы доказываемъ, что окружность есть предѣлъ периметровъ многоугольниковъ вписанныхъ и описанныхъ при безконечномъ увеличеніи числа сторонъ ихъ, а затѣмъ извѣстнымъ образомъ переходимъ отъ соотношенія между периметрами,

*) Развитыя здѣсь соображенія могутъ быть отнесены къ площадямъ криволинейныхъ фигуръ, къ поверхностямъ и объемамъ тѣлъ, ограниченныхъ кривыми поверхностями.

къ соотношенію между ихъ предѣлами; французы же говорятъ, что прежде всего нужно точно установить понятіе о длинѣ окружности, приведя его къ понятію о длинѣ прямой; они *называютъ* длиною окружности предѣлъ периметровъ многоугольниковъ вписанныхъ и описанныхъ при безграничномъ увеличеніи числа ихъ сторонъ, доказываютъ, что предѣлъ этотъ существуетъ и что онъ не зависитъ отъ закона вписыванія. Такимъ образомъ разница въ изложеніи хотя и формальна, однако существенна, и поэтому естественно представляется вопросъ, какой способъ изложенія слѣдуетъ предпочесть.

Для выясненія этого вопроса необходимо войти въ нѣкоторыя подробности о длинѣ линій вообще.

„Самое понятіе длины", говоритъ Дюгамель *), „есть одно изъ тѣхъ, которыя не способны къ опредѣленію". Слѣдовательно мы не можемъ опредѣлить въ смыслѣ понятія ни длины прямой, ни длины окружности, ни длины какой либо другой кривой. Понятіе о длинѣ отрѣзка прямой легко приводится къ понятію о длинѣ отрѣзка другой опредѣленной прямой, принимаемой за единицу, для чего, какъ извѣстно, употребляется процессъ послѣдовательныхъ наложеній. При переходѣ къ кривымъ линіямъ желаютъ также понятіе о длинѣ кривой привести къ понятію о длинѣ отрѣзка прямой, принимаемой за единицу. Но процессъ наложеній здѣсь невозможенъ, потому что никакая часть кривой не можетъ совмѣститься съ отрѣзкомъ прямой. Невозможность повторенія того процесса, который примѣнялся для прямой, должна ли насъ вести къ измѣненію понятія о самой длинѣ кривой?

Понятіе о длинѣ кривой, каково бы оно ни было, существуетъ въ нашемъ сознаніи,—только какъ элементарное, не подлежитъ опредѣленію и поэтому нельзя, казалось бы, признать основательной замѣну этого понятія другимъ совершенно условнымъ.

Невозможность примѣненія процесса наложенія должна привести къ отысканію другого процесса **), а не къ приспособленію самаго понятія къ излюбленному ранѣе методу наложенія. На этомъ основаніи французскій методъ, какъ мнѣ кажется, не выдерживаетъ критики въ самомъ существенномъ пунктѣ. Сверхъ того онъ, повидимому, заключаетъ въ себѣ неявное допущеніе, на которое я желаю обратить вниманіе читателей. Прежде, чѣмъ согласиться называть длиною окружности предѣлъ периметровъ многоугольниковъ вписанныхъ или описанныхъ, постараемся отдать себѣ отчетъ, почему мы принимаемъ такое условіе, почему мы, напримѣръ, не понимаемъ подъ длиною окружности удвоенный предѣлъ периметровъ многоугольниковъ вписанныхъ. Единственный отвѣтъ на этотъ вопросъ заключается въ томъ, что разность между длиною окружности и упомянутыми периметрами можетъ сдѣлаться менѣе всякой данной величины, тогда какъ разность между длиною окружности и удвоеннымъ периметромъ не обладаетъ этимъ свойствомъ. Но такой отвѣтъ предполагаетъ понятіе о длинѣ окружности ранѣе опредѣленія длины

*) *Дюгамель.* Основанія исчисленія безконечно малыхъ стр. 97.

**) Такой процессъ, какъ извѣстно, существуетъ, онъ принятъ въ русскихъ учебникахъ и исходитъ изъ аксіомы объ объемлемыхъ и объемлющихъ.

окружности, а потому и самый методъ заключаетъ въ себѣ неявное допущеніе, требующее понятія объ опредѣляемомъ объектѣ ранѣе его опредѣленія. Если съ точки зрѣнія чисто математической указанный изъянъ и не имѣетъ большого значенія, то съ точки зрѣнія педагогической онъ имѣетъ большую важность.

Замѣтимъ еще слѣдующее.

Въ среднеобразовательномъ курсѣ только одна геометрія даетъ достаточный матеріалъ для ознакомленія съ методомъ предѣловъ, и потому необходимо и желательно, чтобы этотъ отдѣлъ представился ученикамъ въ истинномъ своемъ значеніи, а не въ примѣненіи къ *условнымъ предѣламъ* почти не встрѣчающимся въ другихъ отдѣлахъ математики. Если наконецъ обратимся къ обзору доказательствъ, употребляемыхъ для убѣжденія въ томъ, что предѣлъ периметровъ существуетъ и не зависитъ отъ закона вписыванія, то придемъ къ заключенію, что тѣ изъ этихъ доказательствъ, которыя точны и полны (см. напр. Rouché et Comberousse) совершенно не подъ силу ученикамъ 5-го класса, другія. повидимому болѣе простыя (см. напр. Дюгамель „Исчисленіе безконечно малыхъ") требуютъ развитій тоже непосильныхъ для ученика, наконецъ неточныя, очевидно, приняты быть не могутъ.

Если эта маленькая замѣтка убѣдила читателей, что употребляемый въ нашихъ учебникахъ методъ лучше французскаго, то цѣль моя достигнута. *М. Попруженко* (Воронежъ).

ЗАДАЧИ.

№ 138. Въ данномъ прямоугольномъ треугольникѣ найти простымъ построеніемъ среднюю гармоническую его обоихъ катетовъ. *Ш.*

№ 139. Даны двѣ окружности. Найти отношеніе радіусовъ r и r_1 двухъ другихъ окружностей, касательныхъ къ первой изъ данныхъ въ одной и той-же ея точкѣ P и касательныхъ также ко второй данной окружности. (См. задачу № 133). *Н. Николаевъ* (Пенза).

№ 140. Рѣшить безъ помощи тригонометріи слѣдующую задачу, (помѣщенную въ „Прям. Тригон. Пржевальскаго", Москва, 1884, изд. 3-ье, стр. 205, № 11).

„Послѣдовательно изъ трехъ точекъ A, B и C, по направленію къ башнѣ DE, опредѣляютъ угловую высоту башни, когда $AB=a$, $BC=b$. Угловая высота въ точкѣ B вдвое больше угловой высоты въ A, а угловая высота въ точкѣ C, втрое больше чѣмъ въ A. Опредѣлить высоту башни DE". (Высота инструмента$=h$).

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 141. Рѣшить уравненіе

$$\frac{a}{x^4+mx^3+px^2+mx+1}+\frac{b}{x^4+nx^3+px^2+nx+1}=\frac{c}{x^3+x}.$$

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 142. Показать, что

$$\frac{1}{\operatorname{Cos}^2 a}+\frac{1}{4\operatorname{Cos}^{2a}/_2}+\frac{1}{16\operatorname{Cos}^{2a}/_4}+\ldots\ldots+\frac{1}{2^{2n}\operatorname{Cos}^2\frac{a}{2^n}}=\frac{4}{\operatorname{Sin}^2 2a}-\frac{1}{2^{2n}\operatorname{Sin}^2\frac{a}{2^n}}$$

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 143. Черезъ точку пересѣченія двухъ окружностей провести двѣ хорды (одну—въ одной окружности, другую въ другой) такъ, чтобы отношеніе между этими хордами и уголъ между ними были данные.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 144. Показать, что сумма обратныхъ квадратныхъ сторонъ гармоническаго четыреугольника равна удвоенной обратной степени точки пересѣченія діагоналей относительно описаннаго круга.

И. Пламеневскій (Темиръ-ханъ-Шура).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 91 (2-ой серіи). Стороны нѣкотораго треугольника удовлетворяютъ условіямъ

$$x+y-z=780$$

$$y+z-x=1040$$

$$z+x-y=910.$$

Найти три его высоты h_x, h_y, h_z.

Складывая попарно данныя уравненія, опредѣлимъ стороны треугольника $x=845(=13.65)$, $y=910(=14.65)$ и $z=975(=15.65)$; площадь треугольника (13, 14, 15) равна, какъ извѣстно, 84; слѣдов. площадь даннаго будетъ 84.65^2. Подставляя въ уравненія

$$\frac{x.h_x}{2}=\frac{y.h_y}{2}=\frac{z.h_z}{2}=84.65^2$$

найденныя значенія сторонъ и дѣлая возможныя сокращенія, легко находимъ:

$$h_x=84.2.5=840,\quad h_y=12.65=780,\quad h_z=28.13.2=728.$$

А. Рубиновскій, *А. Шульженко* и *Е. Пригоровскій* (Кіевъ), *М. Карташевскій*, *И. Вонсикъ*, *Г. Ширинкинъ*, *Н. Корзунъ* и *В. Вржестовскій* (Воронежъ), *А. П.* (Пенза), *П. Андреяновъ* и *А. Лентовскій* (Москва), *Н. Карповъ* (Златополь), *В. Соколовъ* (Кострома), *С. Тисъ*, (Спб.). Ученики: Донск. к. к. (6) *В. А.*, Ворон. к. к. (6) *А. С.*, Винницк. р. уч. (6) *Ю. Н.*, 2-ой Тифлис. г. (7) *М. А.*, Кременч. р. уч. (7) *А. Д.* и *М. А.*, Троицк. г. (7) *А. Т.* Курск. г. (5) *П. П.*, Кам.-Под. г. (8) *Я. М.*, 5-ой Кіев. г. (7) *Х. Л.*

№ 346. Найти число, котораго четвертая степень, равно какъ и оно само, есть сумма квадратовъ двухъ послѣдовательныхъ чиселъ.

Возводя дважды въ квадратъ обѣ части равенства

$$x=(y+1)^2+y^2,$$

сообразуясь каждый разъ съ тождествомъ

$$(u^2+z^2)^2=(2uz)^2+(u^2-z^2)^2,$$

получимъ

$$x^4=[4y(y+1)(2y+1)]^2+[4y^2(y+1)^2-(2y+1)^2]^2.$$

Слѣдовательно, чтобы x было искомымъ числомъ, достаточно, чтобы

$$4y(y+1)(2y+1)=4y^2(y+1)^2-(2y+1)^2+1.$$

Написавъ это равенство въ такомъ видѣ:

$$8y(y+1)^2(y-2)=0,$$

найдемъ

$$y=-1,\quad y=0,\quad y=2.$$

Сообразно съ чѣмъ и будемъ имѣть:

1) $\qquad x=x^4=0^2+(\pm1)^2$

и

2) $\qquad x=2^2+3^2=13,\quad x^4=119^2+120^2=28561.$

С. Шатуновскій (Кам.-Под.), *В. Будянскій* (Кіевъ). Ученики: Орловск. г. (8) *А. О.*, Тифл. р. уч. (7) *П. Н.*

№ 395. Изъ всѣхъ конусовъ, имѣющихъ данный объемъ V, опредѣлить размѣры такого, который имѣетъ наименьшую боковую поверхность.

Пусть высота искомаго конуса будетъ h, радіусъ основанія R и боковая поверхность S, тогда

$$V={}^1/_3\pi R^2.h$$

$$S=\pi\sqrt{R^2h^2+R^4}.$$

Но извѣстно, что выраженіе $R^2h^2+R^4$ будетъ minimum, когда

$$\frac{R^2h^2}{2}=\frac{R^4}{1}.$$

откуда

$$R^2=\frac{h^2}{2}.$$

Подставляя въ выраженіе для объема конуса вмѣсто R^2 его значеніе, получимъ

$$h=\sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$$

и слѣдовательно

$$R=\sqrt[6]{\frac{9V^2}{2\pi^2}}.$$

Это и есть размѣры искомаго конуса.

П. Трипольскій (Полтава), *С. Кричевскій* (Ромны), *Е. Ламанская* (Петрозаводскъ). Ученики: Кіевск. р. уч. (7) *А. М.*, Ровенск. р. уч. (5) *Х. Ш.*

№ 410. Дана окружность и на данной прямой опредѣленный отрѣзокъ АВ. Требуется на данной окружности найти такую точку М, чтобы, соединивъ ее съ концами отрѣзка А и В прямыми, пересѣкающими ту-же окружность въ точкахъ С и D, хорда CD была параллельна отрѣзку АВ. (Задача Паппуса Александрійскаго).

Проводимъ окружность касательную къ данной и проходящую черезъ точки А и В, точка касанія и будетъ искомая—М на основаніи теоремы, что если черезъ точку касанія двухъ окружностей проведемъ двѣ сѣкущія, то хорды, соединяющія точки ихъ пересѣченія съ окружностями, параллельны между собою.

С. Кричевскій (Ромны), *П. Трипольскій* (Полтава), *А. Плетневъ* (Спб.), *С. Карновичъ* (Воронежъ). Ученики: 1-ой Спб. г. (7) *А. К.*, Сарат. р. уч. (5) *С. Ш.*, Кам.-Под. г. (7) *А. Р.* и *Я. М.*

№ 461. Доказать, что произведеніе разстояній ортоцентра и центра описаннаго около треугольника круга отъ одной изъ сторонъ треугольника равно произведенію разстояній тѣхъ же точекъ отъ какой нибудь изъ остальныхъ его сторонъ.

Такъ какъ ортоцентръ и центръ круга, описаннаго около треугольника, суть двѣ взаимныя точки, то отсюда слѣдуетъ, что произведеніе перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ этихъ точекъ на одну изъ сторонъ треугольника, равно произведенію перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ тѣхъ же точекъ на вторую и на третью сторону треугольника (см. ст. „Взаимныя точки треугольника", помѣщ. въ „Вѣстникѣ" VIII с. стр. 2 и 29).

С. Кричевскій (Ромны), *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ), *С. Влажко* (Москва), *Н. Волковъ* и *Я. Эйлеръ* (Спб.). Ученикъ Курск. г. (7) *В. Х.*

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Кіевъ, 13 Февраля 1891 г.
Типо-литографія Высочайше утвержд. Товарищества И. Н. Кушнеревъ и К°.

Обложка
ищется

Обложка
пщется