Обложка
пщется

Обложка
пщется

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

XI Сем. **№ 132.** № 12.

Содержаніе: О наибольшихъ произведеніяхъ и наименьшихъ суммахъ. *П. С. Флорова* —Площадь круга и длина окружности. *Ф. П. В.*—Разныя извѣстія.—Задачи №№ 286 — 290. — Рѣшенія задачъ (2 сер.) №№ 169, 183, 193, 199, 208 и 231.

О НАИБОЛЬШИХЪ ПРОИЗВЕДЕНІЯХЪ И НАИМЕНЬШИХЪ СУММАХЪ.

Въ ряду доказательствъ теоремъ о наибольшихъ произведеніяхъ и наименьшихъ суммахъ не послѣднее мѣсто принадлежитъ тому, которое основано на способѣ заключенія отъ n къ $n+1$.

Болѣе того, употребляя этотъ способъ, можно сдѣлать достояніемъ элементарной алгебры весьма общія соображенія о наименьшихъ суммахъ. Въ виду этого рѣчь о наибольшихъ произведеніяхъ и наименьшихъ суммахъ, основанную на заключеніи отъ n къ $n+1$, должно считать умѣстною.

Мы начнемъ эту рѣчь изложеніемъ извѣстныхъ уже теоремъ и закончимъ ее теоремой, которая въ элементарныхъ руководствахъ, сколько намъ извѣстно, еще не трактовалась.

Теорема 1. Произведеніе нѣсколькихъ множителей, сумма которыхъ есть величина постоянная, достигаетъ наибольшаго значенія въ томъ случаѣ, когда эти множители дѣлаются равными между собою. Докажемъ эту теорему сначала для случая двухъ множителей. Пусть a будетъ данная постоянная величина, а x и y два положительныя числа, удовлетворяющія условію

$$x + y = a.$$

Произведеніе xy можно представить въ видѣ

$$xy = x(a - x) = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2$$

Видимъ отсюда, что при измѣненіи x отъ 0 до $\frac{a}{2}$ произведеніе xy увеличивается отъ 0 до $\frac{a^2}{4}$, а при измѣненіи x отъ $\frac{a}{2}$ до a, оно уменьшается отъ $\frac{a^2}{4}$ до 0. Это значитъ, что $\frac{a^2}{4}$ есть наибольшее значеніе произведенія xy и получается оно въ томъ случаѣ, когда

$$x = y = \frac{a}{2}.$$

Такимъ образомъ теорема для случая двухъ множителей доказана. Допустимъ теперь, что она справедлива для $n - 1$ множителей и докажемъ, что она остается справедливою и въ томъ случаѣ, когда число множителей будетъ n.

Пусть $x, y, z \ldots . t$ будутъ n положительныхъ чиселъ, удовлетворяющихъ условію

$$x + y + z + \ldots . + t = a.$$

Согласно допущенію, произведеніе

$$xyz \ldots t$$

увеличивается, если $n - 1$ неравныхъ множителей $y, z \ldots . t$, которыхъ сумма $y + z + \ldots . + t$, будутъ замѣнены равными, которыхъ сумма та же, именно

$$y + z + \ldots . + t = a - x.$$

Послѣ этой замѣны вмѣсто произведенія $xyz \ldots t$ получимъ

$$x \cdot x_1^{n-1},$$

гдѣ для краткости положено

$$x_1 = \frac{a - x}{n - 1}.$$

Замѣнивъ въ призведеніи $x \cdot x_1^{n-1}$ $n - 1$ неравныхъ множителей равными, имѣющими ту же сумму, получимъ

$$x_1 x_2^{n-1},$$

гдѣ положено

$$x_2 = \frac{x + (n - 2)x_1}{n - 1}.$$

Произведеніе $x_1 \cdot x_2^{n-1}$ больше произведенія $x \cdot x_1^{n-1}$ и въ свою очередь можетъ быть увеличено посредствомъ замѣны $n-1$ неравныхъ множителей равными. Замѣняя такимъ образомъ произведеніе произведеніемъ, послѣ $(k+1)$-ой замѣны найдемъ

$$x_k \cdot x_{k+1}^{n-1}$$

гдѣ положено

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1} + (n-2)x_k}{n-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Теперь должно отыскать предѣльное состояніе произведенія

$$x_k \cdot x_{k+1}^{n-1}$$

при $k = \infty$, ибо это состояніе и есть искомый maximum.

Представимъ уравненіе (1) въ видѣ

$$(1-n)(x_{k+1} - x_k) = x_k - x_{k-1}$$

и умножимъ каждую его часть на $(1-n)^k$, получаемъ

$$(1-n)^{k+1}(x_{k+1} - x_k) = (1-n)^k (x_k - x_{k-1}).$$

Это равенство показываетъ, что выраженіе

$$(1-n)^{k+1}(x_{k+1} - x_k)$$

не измѣняетъ своей величины съ измѣненіемъ k. Поэтому оно при всякомъ k обладаетъ тѣмъ самымъ значеніемъ, какое ему приличествуетъ при $k = 1$. Слѣдовательно

$$(1-n)^{k+1}(x_{k+1} - x_k) = (1-n)^2 (x_2 - x_1)$$

Выражая x_2 и x_1 черезъ x, получаемъ

$$(1-n)^{k+1}(x_{k+1} - x_k) = nx - a$$

вслѣдствіе чего

$$x_{k+1} - x_k = \frac{nx - a}{(1-n)^{k+1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Посредствомъ этого равенства можно выразить x_k черезъ данныя величины: стоитъ только положить послѣдовательно

$$k = 1,\ 2,\ 3 \ldots . k - 1$$

и сложить полученные результаты. Но есть возможность обойтись безъ этихъ вычисленій. Равенство (2) показываетъ, что разность $x_{k+1} - x_k$ уменьшается по мѣрѣ увеличенія k и при $k = \infty$ дѣлается равною нулю. Это заключеніе остается справедливымъ и для того случая, когда $nx - a = 0$, ибо тогда разность $x_{k+1} - x_k$ при всякомъ k должна равняться нулю. И такъ для всѣхъ случаевъ имѣемъ

$$lim(x_{k+1} - x_k) = 0, \text{ или } lim x_{k+1} = lim x_k .$$

Видимъ отсюда, что предѣлъ произведенія

$$x_k \, x_{k+1}^{n-1}$$

при $k = \infty$ выразится формулой

$$(lim\, x_k)^n ,$$

гдѣ всѣ n множителей равны между собою. Эта формула и есть искомый maximum произведенія n множителей, сумма которыхъ постоянна.

Такимъ образомъ теорема, предположенная справедливою для $n - 1$ множителей, оказывается имѣющею мѣсто и въ случаѣ n множителей. Но для случая двухъ множителей теорема была доказана непосредственно. Отсюда заключаемъ, что она всегда справедлива.

Теорема 2. Сумма нѣсколькихъ положительныхъ слагаемыхъ, произведеніе которыхъ есть величина постоянная, достигаетъ наименьшаго значенія въ томъ случаѣ, когда слагаемыя эти дѣлаются равными между собою.

Докажемъ эту теорему сначала для случая двухъ слагаемыхъ. Данную постоянную величину означимъ черезъ a, а перемѣнные множители черезъ x и y; будемъ имѣть

$$xy = a.$$

Сумма $x + y$ достигаетъ наименьшаго значенія одновременно съ $(x + y)^2$, при этомъ

$$(x + y)^2 = 4xy + (x - y)^2 \text{ или } (x + y)^2 = 4a - (x - y)^2$$

Правая часть, а вмѣстѣ съ тѣмъ и лѣвая достигаетъ наименьшаго значенія при $x = y$. Поэтому minimum суммы $x + y$ осуществляется при

$$x = y = \sqrt{a} .$$

Такимъ образомъ теорема для случая двухъ слагаемыхъ доказана. Предположимъ теперь, что она справедлива для $n - 1$ слагаемыхъ и докажемъ, что она остается справедливою и въ томъ случаѣ, когда число слагаемыхъ дѣлается n.

Пусть $x, y, z \dots . u, t$ будетъ n положительныхъ чиселъ, удовлетворяющихъ условію

$$xyz \dots . ut = a.$$

Согласно допущенію, сумма

$$x + y + z + \dots . + u + t$$

уменьшается, если $n - 1$ неравныхъ слагаемыхъ $y, z \dots . u, t$, произведеніе которыхъ $yz \dots . ut$, замѣнимъ равными, имѣющими тоже произведеніе, именно

$$yz \dots . ut = \frac{a}{x}.$$

Послѣ этой замѣны вмѣсто суммы $x + y + z + \dots . + u + t$ получимъ

$$x + (n - 1)x_1,$$

гдѣ для краткости положено

$$x_1 = \sqrt[n-1]{\frac{a}{x}}$$

Замѣнивъ въ суммѣ $x + (n - 1)x_1$, $n - 1$ неравныхъ слагаемыхъ равными, имѣющими то же произведеніе, получимъ

$$x_1 + (n - 1)x_2$$

гдѣ положено

$$x_2 = \sqrt[n-1]{xx_1^{n-2}}$$

Сумма $x_1 + (n - 1)x_2$ меньше суммы $x + (n - 1)x_1$ и въ свою очередь можетъ быть уменьшена посредствомъ замѣны $n - 1$ неравныхъ слагаемыхъ равными, имѣющими то же произведеніе. Замѣняя такимъ образомъ сумму суммою, послѣ $(k + 1)$-й замѣны найдемъ

$$x_k + (n - 1)x_{k+1},$$

гдѣ положено

$$x_{k+1} = \sqrt[n-1]{x_{k-1} x_k^{n-2}} \quad \dots \dots \dots (3)$$

Намъ предстоитъ найти предѣлъ

$$x_k + (n - 1)x_{k+1}$$

при $k = \infty$. Съ этою цѣлью возвышаемъ каждую часть уравненія (3) въ степень $n - 1$ и представляемъ его въ видѣ

$$\left(\frac{x_{k+1}}{x_k}\right)^{1-n} = \frac{x_k}{x_{k-1}}.$$

Снова возвышая каждую часть въ степень $(1-n)^k$, получаемъ

$$\left(\frac{x_{k+1}}{x_k}\right)^{(1-n)^{k+1}} = \left(\frac{x_k}{x_{k-1}}\right)^{(1-n)^k}.$$

Это равенство показываетъ, что выраженіе

$$\left(\frac{x_{k+1}}{x_k}\right)^{(1-n)^{k+1}}$$

не измѣняетъ своей величины съ измѣненіемъ k. Поэтому оно при всякомъ k обладаетъ тѣмъ самымъ значеніемъ, какое ему приличествуетъ при $k = 1$. Слѣдовательно

$$\left(\frac{x_{k+1}}{x_k}\right)^{(1-n)^{k+1}} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{(1-n)^2},$$

что можно представить въ такомъ видѣ

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{(1-n)^{1-k}}.$$

Это равенство показываетъ, что при $k = \infty$, $lim \dfrac{x_{k+1}}{x_k} = 1$ или $lim\, x_{k+1} = lim\, x_k$. Видимъ отсюда, что предѣльное состояніе суммы

$$x_k + (n-1)x_{k+1}$$

выражается формулой

$$n\, lim\, x_k\,,$$

гдѣ всѣ n слагаемыхъ равны между собою. Это и есть искомый minimum суммы n слагаемыхъ, произведеніе которыхъ равно данной величинѣ.

Такимъ образомъ теорема, предположенная справедливою для случая $n - 1$ слагаемыхъ, оказывается имѣющею мѣсто и для n слагаемыхъ. Но для случая двухъ слагаемыхъ теорема была оправдана непосредственно. Отсюда заключаемъ, что она всегда справедлива.

Задача 1. Найти maximum и minimum суммы $x^k + y^k$, полагая, что k цѣлое положительное число больше 1, а перемѣнныя x и y связаны между собою уравненіемъ

$$ax + by = c,$$

гдѣ a, b, c положительныя постоянныя величины не равныя нулю.

Будемъ искать сначала maximum. Пусть оно осуществляется при

$$x = \alpha \text{ и } y = \beta.$$

Въ такомъ случаѣ

$$x^k + y^k < \alpha^k + \beta^k$$

или

$$x^k - \alpha^k + y^k - \beta^k < 0.$$

Это неравенство можно представить въ слѣдующемъ видѣ

$$(x-\alpha)(x^{k-1} + \alpha x^{k-2} + \ldots + \alpha^{k-1}) + (y-\beta)(y^{k-1} + \beta y^{k-2} + \ldots + \beta^{k-1}) < 0$$

Пусть $x = \alpha \pm \varepsilon$, тогда

$$y = \beta \mp \frac{a\varepsilon}{b}$$

и предыдущее неравенство по раздѣленіи на положительное число ε приводится къ виду

$$\pm(x^{k-1} + \alpha x^{k-2} + \ldots + \alpha^{k-1}) \mp \frac{a}{b}(y^{k-1} + \beta y^{k-2} + \ldots + \beta^{k-1}) < 0 \quad . \quad (4)$$

Это неравенство должно оставаться справедливымъ при всякомъ ε какъ угодно близкомъ къ нулю, а потому и при $\varepsilon = 0$. Но при $\varepsilon = 0$ имѣемъ

$$x = \alpha, \quad y = \beta$$

и вмѣстѣ съ тѣмъ предыдущее неравенство приводится къ виду

$$\pm k(\alpha^{k-1} - \frac{a}{b}\beta^{k-1}) < 0$$

Въ этомъ неравенствѣ можно удержать любой изъ двухъ знаковъ $\pm$ и оно должно удовлетворяться. Отсюда слѣдуетъ, что числа α и β должны удовлетворить условію

$$\alpha^{k-1} - \frac{a}{b}\beta^{k-1} = 0 \text{ или } \frac{\alpha^{k-1}}{a} = \frac{\beta^{k-1}}{b}$$

При помощи сужденій совершенно подобныхъ сейчасъ изложеннымъ легко убѣдиться, что этому самому условію удовлетворяютъ и тѣ числа, при которыхъ осуществляется minimum суммы $x^k + y^k$.

Установимъ теперь признакъ, по которому можно было бы отличить максимумъ отъ минимума.

Неравенство (4), которымъ характеризуется maximum, можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\pm(x^{k-1} + \alpha x^{k-2} + \ldots + \alpha^{k-1}) < \pm \frac{a}{b}(y^{k-1} + \beta y^{k-2} + \ldots + \beta^{k-1})$$

Сложимъ это неравенство съ тождествомъ

$$\mp(\alpha^{k-1} + \alpha^{k-1} + \ldots + \alpha^{k-1}) = \mp \frac{a}{b}(\beta^{k-1} + \beta^{k-1} + \ldots + \beta^{k-1}),$$

будемъ имѣть

$$\pm [x^{k-1} - \alpha^{k-1} + \alpha(x^{k-2} - \alpha^{k-2}) + \ldots + \alpha^{k-2}(x - \alpha)] <$$

$$< \pm \frac{a}{b}[y^{k-1} - \beta^{k-1} + \beta(y^{k-2} - \beta^{k-2}) + \ldots + \beta^{k-2}(y - \beta)].$$

Это неравенство остается тождественнымъ себѣ послѣ умноженія лѣвой его части на $\dfrac{\pm \varepsilon}{x - \alpha} = 1$ и правой на $\mp \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{\varepsilon}{y - b} = 1$.

Произведя умноженіе и раздѣливъ каждую часть на ε, получимъ

$$\frac{x^{k-1} - \alpha^{k-1}}{x - \alpha} + \alpha \frac{x^{k-2} - \alpha^{k-2}}{x - \alpha} + \ldots + \alpha^{k-2} <$$

$$< -\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{y^{k-1} - \beta^{k-1}}{y - \beta} + \beta \frac{y^{k-2} - \beta^{k-2}}{y - \beta} + \ldots + \beta^{k-2}\right)$$

Это неравенство должно имѣть мѣсто и въ предѣлѣ; слѣдовательно

$$k\alpha^{k-2} < -k\frac{a^2}{b^2}\beta^{k-2} \text{ или } \alpha^{k-2} + \frac{a^2}{b^2}\beta^{k-2} < 0.$$

Этимъ неравенствомъ характеризуется maximum. Помощью такихъ же сужденій можно было бы убѣдиться, что minimum характеризуется неравенствомъ

$$\alpha^{k-2} + \frac{a^2}{b^2}\beta^{k-2} > 0.$$

Такимъ образомъ числа α и β осуществляютъ или maximum или minimum суммы $x^k + y^k$ смотря по тому, для какого изъ двухъ знаковъ удовлетворяется неравенство

$$x^{k-2} + \frac{a^2}{b^2}\beta^{k-2} \lesseqgtr 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Замѣтимъ по поводу этого неравенства, что лѣвая его часть не можетъ быть нулемъ, ибо если одновременно

$$\alpha^{k-1} = \frac{a}{b}\beta^{k-1}, \quad \alpha^{k-2} = -\frac{a^2}{b^2}\beta^{k-2}$$

то неизбѣжно

$$a\alpha + b\beta = 0,$$

что противорѣчитъ условію

$$a\,\alpha + b\beta = c,$$

гдѣ c не нуль.

Если k четное число, то неравенство (5) удовлетворяетя только для нижняго знака и отсюда слѣдуетъ, что при k четномъ сумма $x^k + y^k$ не имѣетъ максимума, но имѣетъ только минимумъ.

При k нечетномъ неравенство (5) можно представить въ видѣ

$$\frac{\alpha^{k-1}}{a} \cdot \frac{1}{a\alpha} + \frac{\beta^{k-1}}{b} \cdot \frac{1}{b\beta} \lesseqgtr 0$$

или

$$\frac{\alpha^{k-1}}{a} \cdot \frac{c}{ab\alpha\beta} \lesseqgtr 0$$

Очевидно, что это неравенство равносильно неравенству

$$\alpha\beta \lesseqgtr 0.$$

Отсюда слѣдуетъ, что если при k четномъ числа α и β имѣютъ одинакіе знаки (оба положительны), то сумма $x^k + y^k$ допускаетъ minimum, а если разные, то она пріобрѣтаетъ maximum.

Задача 2. Найти maximum и minimum суммы $x^{-k} + y^{-k}$ при условіи $ax + by = c$. Эта задача рѣшается подобно предыдущей. Оказывается, что maximum и minimum осуществляются для тѣхъ значеній a, которыя удовлетворяютъ условію

$$\frac{x^{-k-1}}{a} = \frac{y^{-k-1}}{b}$$

Признакомъ, по которому можно отличить наибольшее состояніе отъ наименьшаго, служитъ неравенство

$$x^{-k-2} + \frac{a^2}{b^2} y^{-k-2} \gtrless 0$$

Для максимума оно должно удовлетворяться съ верхнимъ знакомъ, для минимума съ нижнимъ.

Теорема 3. Если перемѣнныя $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x_n$ связаны между собою уравненіемъ

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_{n-1} x_{n-1} + a_n x_n = b,$$

то сумма

$$x_1^k + x_2^k + \ldots + x_{n-1}^k + x_n^k,$$

гдѣ k четное положительное число, пріобрѣтаетъ минимумъ для тѣхъ значеній x, которыя удовлетворятъ условіямъ

$$\frac{x_1^{k-1}}{a_1} = \frac{x_2^{k-1}}{a_2} = \ldots = \frac{x_{n-1}^{k-1}}{a_{n-1}} = \frac{x_n^{k-1}}{a_n}$$

Допустимъ, что эта теорема уже доказана для случая $n-1$ перемѣнныхъ. Въ такомъ случаѣ, разумѣя подъ x_n постоянную величину, безъ труда можно найти minimum суммы

$$x_1^k + x_2^k + \ldots + x_{n-1}^k,$$

гдѣ перемѣнныя связаны между собою уравненіемъ:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots a_{n-1} x_{n-1} = b - a_n x_n$$

Этотъ minimum осуществляется для тѣхъ значеній перемѣнныхъ, которыя удовлетворяютъ условіямъ

$$\frac{x_1^{k-1}}{a_1} = \frac{x_2^{k-1}}{a_2} = \ldots = \frac{x_{n-1}^{k-1}}{a_{n-1}}$$

Эти уравненія вслѣдствіе того, что k четное число будутъ равносильны уравненіямъ

$$\frac{x_1}{a_1^{\frac{1}{k-1}}} = \frac{x_2}{a_2^{\frac{1}{k-1}}} = \ldots = \frac{x_{n-1}}{a_{n-1}^{\frac{1}{k-1}}}$$

Каждое изъ этихъ отношеній равно

$$\frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_{n-1} x_{n-1}}{a_1^{\frac{k}{k-1}} + a_2^{\frac{k}{k-1}} + \ldots + a_{n-1}^{\frac{k}{k-1}}} \text{ или } \frac{b - a_n x_n}{a_1^{\frac{k}{k-1}} + a_2^{\frac{k}{k-1}} + \ldots + a_{n-1}^{\frac{k}{k-1}}}.$$

Потому можно написать

$$\frac{x_1}{a_1^{\frac{1}{k-1}}} = \frac{x_2}{a_2^{\frac{1}{k-1}}} = \ldots . = \frac{x_n}{a_n^{\frac{1}{k-1}}} = \frac{y}{c^{\frac{1}{k-1}}},$$

гдѣ для краткости положено

$$cy = b - a_n x_n$$

$$c^{\frac{k}{k-1}} = a_1^{\frac{k}{k-1}} + a_2^{\frac{k}{k-1}} + \ldots + a_{n-1}^{\frac{k}{k-1}}$$

Посредствомъ этихъ уравненій можно получить

$$x_1^k + x_2^k + \ldots . + x_{n-1}^k = y^k.$$

Таково наименьшее значеніе суммы

$$x_1^k + x_2^k + \ldots . + x_{n-1}^k$$

при данномъ x_n. Поэтому наименьшее значеніе суммы

$$x_1^k + x_2^k + \ldots . + x_{n-1}^k + x_n^k$$

при томъ же значеніи x_n будетъ

$$y^k + x_n^k,$$

гдѣ между y и x_n существуетъ зависимость

$$cy + a_n x_n = b .$$

Для рѣшенія задачи остается найти минимумъ суммы $y^k + x_n^k$. Уже извѣстно, что этотъ минимумъ осуществляется для тѣхъ значеній x_n и y, которыя удовлетворяютъ уравненіямъ

$$\frac{y^{k-1}}{c} = \frac{x_n^{k-1}}{a_n}.$$

Отсюда, принявъ во вниманіе формулы

$$\frac{x_1^{k-1}}{a_1} = \frac{x_2^{k-1}}{a_2} = \ldots . = \frac{x_{n-1}^{k-1}}{a_{n-1}} = \frac{y^{k-1}}{c},$$

находимъ

$$\frac{x_1^{k-1}}{a} = \frac{x_2^{k-1}}{a} = \ldots\ldots = \frac{x_{n-1}^{k-1}}{a_{n-1}} = \frac{x_n^{k-1}}{a_n}.$$

Таковы условія, которыми опредѣляется минимумъ суммы

$$x_1^k + x_2^k + \ldots\ldots + x_{n-1}^k + x_n^k.$$

Мы видимъ, что теорема, предположенная справедливою для $n-1$ перемѣнныхъ, оправдывается и для случая n перемѣнныхъ. Отсюда заключаемъ, что она справедлива для всякаго числа перемѣнныхъ, ибо непосредственно была обнаружена для $n = 2$.

Примѣчаніе. Доказанная теорема будетъ имѣть мѣсто и для нечетныхъ значеній цѣлаго положительнаго k, если введемъ ограниченіе, по которому перемѣнныя x_1, x_2, x_3 . . . . x_n при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ должны оставаться положительными.

Теорема 4. Если перемѣнныя x_1, x_2, . . . x_n связаны между собою условіемъ

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots\ldots + a_n x_n = b$$

то сумма

$$x_1^{-k} + x_2^{-k} + \ldots\ldots + x_n^{-k},$$

гдѣ k четное положительное число, достигаетъ минимума для тѣхъ значеній перемѣнныхъ, которыя удовлетворяютъ условіямъ,

$$\frac{x_1^{-k-1}}{a_1} = \frac{x_2^{-k\ \ 1}}{a_2} = \ldots\ldots = \frac{x_n^{-k-1}}{a_n}$$

Эта теорема доказывается такъ же, какъ и предыдущая. Она не перестанетъ имѣть мѣсто и для нечетныхъ значеній числа k, когда полагаютъ, что перемѣнныя x_1, x_2 . . . x_n при своихъ измѣненіяхъ всегда остаются положительными.

Задача 3. На основаніи доказанныхъ теоремъ легко рѣшается задача *) объ отысканіи максимума дроби

$$\frac{(ax + by + cz + \ldots\ldots + ku)^k}{x^k + y^k + z^k + \ldots\ldots + u^k}$$

*) Эта задача представляетъ собою обобщеніе задачи проф. Ермакова.

гдѣ n положительное или отрицательное цѣлое число не равное единицѣ. Дѣйствительно, раздѣляя числителя и знаменателя этой дроби на числителя и полагая

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} = \ldots = \frac{u}{z'} = ax + by + \ldots + ku$$

мы приведемъ вопросъ съ отысканію минимума суммы

$$x'^k + y'^k + z'^k + \ldots + u'^k$$

при условіи

$$ax' + by' + cz' + \ldots + ku' = 1.$$

Задача 4. Слѣдуя изложенному методу, безъ труда можно найти maximum суммы

$$x + y + z + \ldots + u,$$

полагая, что перемѣнныя связаны условіемъ

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + \ldots + ku^2 = l,$$

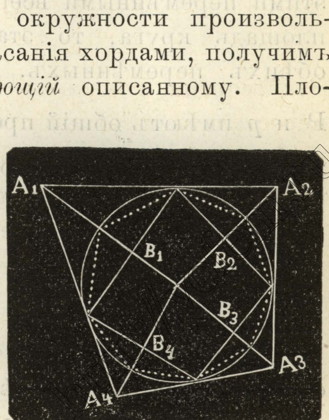
П. С. Флоровъ (Тамбовъ).

ПЛОЩАДЬ КРУГА И ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ.

Въ этой замѣткѣ для доказательства двухъ основныхъ теоремъ, относящихся къ площади круга и длинѣ окружности, указывается пріемъ, нѣсколько отличающійся отъ тѣхъ, которые обыкновенно употребляются въ учебникахъ геометріи.

1. *Площадь круга.* Опишемъ около окружности произвольный многоугольникъ; соединивъ точки касанія хордами, получимъ вписанный многоугольникъ, *соотвѣтствующій* описанному. Площади этихъ многоугольниковъ обозначимъ черезъ Q и q. Обозначивъ длины сторонъ вписаннаго многоугольника буквами a_1, a_2, a_3 . . . . и длины перпендикуляровъ A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3..., опущенныхъ на эти стороны изъ вершинъ описаннаго многоугольника, буквами h_1, h_2, h_3 . . . ., будемъ имѣть

$$Q - q = \frac{a_1h_1 + a_2h_2 + a_3h_3 + \ldots}{2}$$



Фиг. 29.

*

Если h есть наибольшій изъ перпендикуляровъ h_1, h_2, h_3...., то

$$Q - q < \frac{hp}{2},$$

гдѣ p периметръ вписаннаго многоугольника. Отсюда видимъ, что при увеличеніи числа сторонъ многоугольниковъ и уменьшеніи длины сторонъ до нуля, разность $Q - q$ стремится къ нулю. А такъ какъ между перемѣнными Q и q всегда заключается постоянная площадь, ограниченная окружностью, то обѣ эти перемѣнныя имѣютъ общій предѣлъ ω—величину площади круга.

2. *Длина окружности.* Обозначивъ периметры обоихъ многоугольниковъ буквами P и p и радіусъ круга буквой r, разсмотримъ произведенія $P.\frac{r}{2}$ и $p.\frac{r}{2}$. Первое очевидно представляетъ площадь описаннаго многоугольника; произведеніе же $p.\frac{r}{2}$ выражаетъ площадь того вписаннаго многоугольника, который получимъ, соединивъ вершины даннаго вписаннаго многоугольника съ серединами соотвѣтствующихъ дугъ окружности (на чертежѣ этотъ многоугольникъ обозначенъ пунктиромъ). Такъ какъ $p.\frac{r}{2} > q$, то

$$P.\frac{r}{2} - p.\frac{r}{2} < Q - q$$

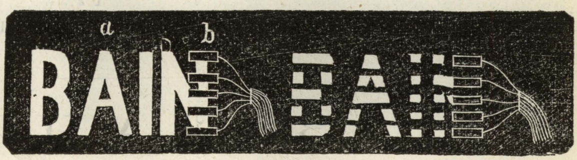
и слѣдовательно разность перемѣнныхъ $P.\frac{r}{2}$ и $p.\frac{r}{2}$ будетъ стремиться къ нулю вмѣстѣ съ разностью $Q - q$; а такъ какъ между этими перемѣнными всегда заключается постоянная величина ω—площадь круга, то эта постоянная будетъ общимъ предѣломъ обѣихъ перемѣнныхъ. Отсюда же слѣдуетъ, что перемѣнныя P и p имѣютъ общій предѣлъ $\frac{2\omega}{r}$. Этотъ предѣлъ принимаютъ за мѣру длины окружности.

Ф. П. В.

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Джіованни Казэлли. (1815—1891). Аббатъ Джіованни Казэлли, скончавшійся въ послѣднихъ числахъ истекшаго года, родился 25 мая 1815 года въ Сіенѣ. Образованіе свое онъ получилъ во Флоренціи, откуда переселился въ Парму. Но, высланный отсюда за политическую дѣятельность, онъ вернулся во Флоренцію, гдѣ и протекла большая часть его жизни и дѣятельности. Здѣсь онъ всецѣло предался наукамъ, въ особенности же изученію электричества и магнетизма. Въ 1854 году онъ основалъ журналъ „La Ricreazione“ популярно-научнаго характера. Къ этому же времени и относится (1856) построеніе пантелеграфа, названнаго его именемъ. Приборъ этотъ впослѣдствіи былъ усовершенствованъ Фроманомъ въ Парижѣ (1857) и функціонировалъ нѣкоторое время (1861) между Парижемъ и Ліономъ и Гавромъ, а также и у насъ въ Россіи.

Не вдаваясь въ подробное описаніе прибора Казэлли, что потребовало бы слишкомъ сложныхъ чертежей и много мѣста, изъяснимъ здѣсь лишь принципъ, на которомъ построены всѣ автографическіе, электрохимическіе телеграфы. Первымъ практически пригоднымъ приборомъ изъ разряда этихъ послѣднихъ былъ телеграфъ шотландца Bain'а. Пантелеграфъ Казэлли является лишь усовершенствованнымъ измѣненіемъ этого послѣдняго. Принципъ его заключается въ слѣдующемъ: Слово подлежащее телеграфной передачѣ, составляется изъ простыхъ металлическихъ буквъ *a* (черт. 30), которыя соединяются съ положительнымъ полюсомъ батареи, отрицательный полюсъ которой отведенъ къ землѣ. На станціи пріема имѣется металлическая пластинка, находящаяся въ соединеніи съ землей. На этой пластинкѣ помѣщается листъ бумаги, напитанной растворомъ, подлежащимъ разложенію. Щетка *b*, состоящая изъ пяти металлическихъ пластинокъ и находящаяся на станціи отправленія, соединена кабелемъ съ такой же точно щеткой *b'*, находящейся на станціи пріема, причемъ соединеніе это устроено такимъ образомъ, что первая пластинка щетки *b* соединена съ первой же пластинкой щетки *b'*, вторая со второй и т. д. отдѣльными кабельными проволоками. Если теперь проводить одновременно и съ равной скоростью щеткой *b* по металлическимъ буквамъ, а щеткой *b'* по приготовленной химическимъ образомъ бумагѣ, находящейся на вышеназванной металлической пластинкѣ, то будетъ замыкаться токъ всякій разъ, какъ одна изъ пластинокъ щетки *b* прійдетъ въ соприкос-



Фиг. 30.

новеніе съ металлическими буквами. Такъ напримѣръ, на нашемъ чертежѣ пластинка 3 щетки b только что отошла отъ косого штриха буквы N, пластинка 4 находится какъ разъ на немъ, а пластинка 5 собирается, такъ сказать, прійти съ нимъ въ соприкосновеніе. Сообразно съ этимъ, черезъ пластинки 4 обѣихъ щетокъ b и b' течетъ токъ, который и разлагаетъ растворъ въ мѣстѣ соприкосновенія пластинки 4 щетки b' съ напитанной поверхностью бумаги и оставляетъ, такимъ образомъ, видимый слѣдъ. Такъ какъ описанный процессъ совершается одинаково для каждой пластинки и каждой металлической буквы, то на станціи пріема и должно получиться на поверхности бумаги изображеніе a' слова a. Какъ чувствительный составъ, употребляется обыкновенно іодисто-калійный клейстеръ; электрическій токъ выдѣляетъ изъ состава іодъ и окрашиваетъ такимъ образомъ клейстеръ въ фіолетовый или голубой цвѣтъ. Съ такой окраской и получаются буквы.

Надъ усовершенствованіемъ электро-химическихъ телеграфовъ трудились впослѣдствіи Штёреръ, Сименсъ, Гинтль; сюда же относятся такъ называемые копирующіе телеграфы Бэквелля, Боннэлли и, наконецъ, пантелеграфъ Джіовани Казэлли.

О. Пергаментъ.

ЗАДАЧИ.

№ 286. Въ алгебрѣ Бертрана (стр. 253) предложена слѣдующая задача:

„Требуется найти число, изображенное четырьмя цыфрами, зная: 1) что цыфра сотенъ равна суммѣ цыфръ единицъ и десятковъ; 2) что цыфра десятковъ равна удвоенной суммѣ цыфры тысячъ и цыфры единицъ; 3) что частное и остатокъ отъ дѣленія искомаго числа на сумму его цыфръ сотвѣтственно суть 109 и 9; 4) что разность между числомъ, изображеннымъ искомыми цыфрами, написанными въ обратномъ порядкѣ, и искомымъ числомъ равна 819.“

Показать, что въ этой задачѣ есть лишнія условія, и что она могла бы быть, напримѣръ, рѣшена, принявъ во вниманіе только одно третье условіе. *И. Вонсикъ* (Воронежъ).

№ 287. Рѣшить уравненіе

$$\sqrt[3]{x^3-x^2+x-1-\sqrt{x(x-1)}}=x-1$$

и повѣрить рѣшеніе. *І. Каменскій* (Пермь).

№ 288. Медіаны треугольника ABC продолжены до пересѣченія въ точкахъ L, M, N съ описанной около даннаго треугольника окружностью. Зная стороны треугольника ABC, требуется опредѣлить стороны и площадь треугольника LMN.

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 289. Дана окружность, центръ которой находится въ точкѣ O. На діаметрѣ AB взята точка C, дѣлящая радіусъ AO пополамъ. Черезъ точку C проведена хорда, пересѣкающая окружность въ точкахъ D и E. Опредѣлить радіусъ окружности, если извѣстно, что хорды AD и BE соотвѣтственно равны a и b.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 290. Опредѣлить вѣсъ прута, не употребляя вѣсовъ.

А. Воиновъ (Харьковъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 169 (2 сер.). Основаніемъ тетраэдра служитъ треугольникъ ABC, стороны котораго $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$. Ребра тетраэдра $AS = BC = a$, $CS = AB = c$, $BS = AC = b$. Опредѣлить объемъ тетраэдра.

Черезъ вершины основанія проведемъ прямыя параллельныя противолежащимъ сторонамъ и вершины D, E и F образовавшагося треугольника (D, E и F противолежатъ соотвѣтственно вершинамъ A, B и C) соединяемъ съ точкой S прямыми SD, SE и SF. Объемъ SABC $= \frac{1}{4}$ объема SDEF. Въ тетраэдрѣ SDEF боковыя ребра взаимно перпендикулярны (такъ напр. $SD \perp SF$ ибо кругъ, описанный въ грани SDF на діаметрѣ DF, пройдетъ черезъ вершину S); принимая въ тетраэдрѣ SDEF за основаніе грань SDE, получимъ для объема его формулу

$$\frac{SD \,.\, SE \,.\, SF}{6}$$

слѣдовательно объемъ $SABC = \dfrac{SD \,.\, SE \,.\, SF}{24}$

Изъ прямоугольныхъ треугольниковъ SDE, SDF и SEF имѣемъ

$$SD^2 + SE^2 = 4c^2$$
$$SE^2 + SF^2 = 4a^2$$
$$SF^2 + SD^2 = 4b^2,$$

откуда находимъ SD, SE и SF, такъ что объемъ

$$SABC = \frac{1}{12}\sqrt{2(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}$$

П. А. (Кишиневъ), *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ).

№ **183** (2 сер.). Доказать теорему; если всѣ ребра четырегранника касательны къ шару, то суммы противоположныхъ реберъ равны между собою.

Пусть MPNS данный четырегранникъ; A, B, C, D, E и F точки касанія его реберъ съ шаромъ. Такъ какъ касательныя къ шару, выходящія изъ одной и той-же точки равны между собой, то можно написать такія равенства:

$$SB = SA = SC$$
$$NB = NE = NF$$
$$MD = MA = MF$$
$$PD = PE = PC$$

Складывая эти равенства находимъ

$$SN + MP = MS + PN = SP + NM .$$

А. П. (Пенза), *В. Россовская, К. Щиголевъ* (Курскъ), *И. Б.* (Кіевъ).

№ **193** (2 сер.). Высота башни равна 120 ф., основаніе колонны находится въ одной горизонтальной плоскости съ основаніемъ башни. Наблюдатель, помѣстившійся на вершинѣ башни, нашелъ, что углы, составленные лучами зрѣнія къ обоимъ концамъ колонны съ горизонтальною плоскостью были соотвѣтственно равны 60° и 30°. Найти высоту колонны.

Назовемъ вершины башни и колонны через A и C, ихъ основанія B и D и точку встрѣчи линіи AC съ землей черезъ E.

Изъ $\triangle\triangle$ AEB и CDE

$$\frac{AB}{CD} = \frac{BE}{DE} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Такъ какъ въ $\triangle$ AEB $\angle A = 60°$, то

$$BE = \frac{AE}{2}\sqrt{3},$$

но $AB = \frac{EA}{2}$, слѣдовательно $BE = 120\sqrt{3}$,

Изъ $\triangle$ ABE, въ которомъ AD биссекторъ $\angle A$,

$\frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BD}$, т. е. $DE = 2BD$, $DE = \frac{2}{3}BE = 80\sqrt{3}$.

Подставляя въ (1), найдемъ $CD = 80$.

Н. Николаевъ (Пенза), *Е. Абрамова* (Житоміръ), *В. Россовская*, *К. Щи-*

голевъ, *М. Цыбульскій* (Курскъ), *К. Ж.*, *И. Вонсикъ* (Воронежъ), *А. Байковъ* (Москва), *Я. Тепляковъ* (Радомысль).

№ 199 (2 сер.). Даны двѣ окружности, касающіяся извнѣ въ точкѣ A; общая касательная къ этимъ окружностямъ касается ихъ въ точкахъ B и C. Показать, что радіусъ окружности, проведенной черезъ точки A, B и C есть средняя пропорціональная между радіусами R и r данныхъ окружностей.

Черезъ точку A проведемъ общую касательную къ даннымъ окружностямъ, которая пересѣчетъ линію BC въ точкѣ D.

По свойству касательныхъ

$$AD = BD = DC = r',$$

т. е. D—центръ круга, проходящаго черезъ A, B и C, а r' его радіусъ.

По извѣстной теоремѣ

$$\frac{2R}{BC} = \frac{BC}{2r},$$

или

$$r' = \sqrt{Rr}.$$

А. П. (Пенза), *В. Россовская*, *К. Щиголевъ*, *К. Александровъ* (Курскъ), *И. Вонсикъ* (Воронежъ), *О. Озаровская* (Тифлисъ), *И. Качановскій* (Пермь), *А Гальперинъ* (Ромны).

№ 208 (2 сер.). Ромбъ ABCD, діагонали котораго CA=2,4 цм. и DB=1 цм. вращается около оси MN, проходящей черезъ вершину остраго угла C перпендикулярно большей его діагонали. Опредѣлить объемъ и поверхность происходящаго при такомъ вращеніи тѣла.

Опуская перпендикуляры DP и BQ на MN, найдемъ, что искомый объемъ равняется удвоенному объему прямого усѣченнаго конуса PDAC безъ удвоеннаго объема полнаго конуса CDP.

$$\text{Объемъ PDAC} = \frac{\pi \,.\, DO}{3}(CA^2 + CA \,.\, OC + OC^2).$$

$$\text{Объемъ CDP} = \frac{\pi \,.\, OD}{3} CO^2.$$

$$\text{Искомый объемъ } v = \frac{2\pi \,.\, OD}{3}(CA^2 + CA \,.\, CO) =$$

$$= \frac{2\pi \,.\, OD \,.\, CA}{3}(CA + CO)$$

или $v = 2{,}88\pi = 9{,}04$ куб. цм.

Искомая поверхность, очевидно, равна удвоенной суммѣ боковыхъ поверхностей тѣхъ же конусовъ.

Боковая поверхность CDP $= \pi \,.\, PD \,.\, CD$.

Боковая поверхность PDAC $= \pi \,.\, DA(CA + PD)$.

Искомая поверхность $s = 2\pi \,.\, CD(2PD + CA) = 4\pi . CA . CD$.

Такъ какъ $CD = \sqrt{1{,}2^2 + 0{,}5^2} = 1{,}3$ цм.

то $s = 12{,}48\pi = 39{,}29$ кв. цм.

В. Россовская, *К. Щиголевъ* (Курскъ), *А. Байковъ* (Москва), *О. Озаровская* (Тифлисъ), *А. Даниловъ* (Казань), *Я. Тепляковъ* (Радомысль), *А. Гуминскій*, *А Мельниковъ* (Троицкъ), *П. Ивановъ* (Одесса), *А. Семеновъ*, *Н. Горбатова-Стойкова* (Воронежъ), *В. Стуковъ* (Пермь).

№ 231 (2 сер.). Черезъ середину D основанія BC равнобедреннаго треугольника ABC проведена прямая, пересѣкающая одну изъ равныхъ сторонъ AC въ точкѣ N и продолженіе другой AB—въ точкѣ M. По даннымъ отрѣзкамъ $BM = a$ и $CN = b$ требуется опредѣлить длину равныхъ сторонъ $x = AB = AC$.

Проведемъ изъ точки B прямую параллельную MN до пересѣченія съ AC въ точкѣ P. Тогда

$$MA : MB = NA : NP$$

Такъ какъ $BD = CD$ и DN параллельно BP, то $PN = CN = b$. Представивъ полученную пропорцію въ видѣ

$$(a + x) : a = (x - b) : b,$$

находимъ

$$x = \frac{2ab}{a - b}.$$

П. Свѣшниковъ, *П. Ѳедосьевъ* (Троицкъ), *А. П.* (Пенза), *А. Семеновъ*, *И. Черевковъ*, *Г. Ширинкинъ*, *М. Ширинкинъ*, *Улагай*, *И. Вонсикъ* (Воронежъ), *В. Россовская*, *В. Клевцова*, *Н. Щекинъ*, *К. Щиголевъ*, *П. Писаревъ*, *К. Александровъ* (Курскъ), *В Шидловскій* (Полоцкъ), *И. Богоявленскій* (Шуя), *А. Байковъ* (Москва), *В. Костинъ* (Симбирскъ), *П Ивановъ* (Одесса), *А. Герашевскій*. *М. Павловъ* (Винница), *Я. Прядкинъ*, *Г. Соколовскій* (Старобѣльскъ), *А. Батухинъ*, *В Херувимовъ* (Ромны), *И. Бѣлянкинъ*, *М. Фридманъ* (Кіевъ), *І. Генкинъ*, *М. Френкинъ* (Новозыбковъ), *Ч. Рыбинскій* (Скопинъ), *О. Озаровская* (Тифлисъ).

Конецъ XI-го Семестра.

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Одесса, 24 Марта 1892 г.
Типо-литографія Штаба Одесскаго военнаго Округа, Тираспольская, № 14.

Обложка
ищется

Обложка
пщется