Обложка
ищется

Обложка
ищется

XXVII Сем. № 10.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

31 Мая № 322. 1902 г.

Опредѣленіе наименьшей толщины жидкой пластинки, какъ способъ опредѣленія діаметра молекулъ.

Ф. Бѣлоярцева въ Казани.

Окончаніе *).

Въ предыдущемъ очеркѣ мы, насколько возможно сжато, представили читателю исторію экспериментальнаго опредѣленія наименьшей толщины жидкихъ пластинокъ; но эта исторія была бы не полна, если бы мы обошли молчаніемъ очень крупный вопросъ, связанный съ изслѣдованіемъ указанныхъ выше экспериментаторовъ, — это вопросъ о радіусѣ сферы молекулярнаго дѣйствія.

Однако, на страницахъ этой исторіи, въ отношеніи только что указаннаго вопроса, мы повсюду встрѣчаемся только съ предположеніями авторовъ, иногда совершенно необоснованными.

Такъ, въ основу своего изслѣдованія Plateau кладетъ мысль, что въ моментъ, предшествующій разрыву мыльнаго пузыря, толщина пленки послѣдняго равна, по крайней мѣрѣ, двойному радіусу сферы молекулярнаго дѣйствія.

*) См. „В. О. Ф.“ № 320.

Опредѣленный такимъ образомъ Plateau радіусъ долженъ бы равняться 57 $\mu\mu$.

Drude же, на основаніи своихъ опытовъ, заключаетъ, что величина радіуса сферы молекулярнаго дѣйствія значительно ниже, чѣмъ половина толщины пластинки мыльнаго пузыря въ его черной части, т. е., меньше, слѣдовательно, 8,5 $\mu\mu$.

Sohncke , заканчивая свою статью, также посвящаетъ этому вопросу нѣсколько строкъ.

Такъ, онъ говоритъ: „Пока капля жидкости превращается въ пластинку и толщина этой пластинки еще больше двойного радіуса сферы молекулярнаго дѣйствія, нѣтъ никакого основанія для равномѣрнаго распаденія всей пластинки. Но послѣднее наступаетъ, какъ только толщина пластинки сдѣлается равной или меньше двойного радіуса сферы молекулярнаго дѣйствія“.

Согласно результатамъ опытовъ Sohncke, радіусъ сферы молекулярнаго дѣйствія долженъ бы быть

для оливковаго масла $\geq$ 55,75 $\mu\mu$

„ рѣпного масла $\geq$ 46,8 „

Остальные экспериментаторы, въ томъ числѣ и Fischer, въ ряду разсмотрѣнныхъ нами ученыхъ не находятъ въ этихъ методахъ достаточнаго основанія для какого либо заключенія относительно радіуса сферы молекулярнаго дѣйствія.

Въ цѣляхъ моей статьи я долженъ упомянуть еще объ одномъ совершенно особенномъ способѣ опредѣленія радіуса сферы молекулярнаго дѣйствія.

Этотъ способъ принадлежитъ нѣмецкому ученому Quincke [13]).

Quincke вводилъ между поверхностью стеклянной пластинки и цилиндрической поверхностью (радіуса 120 mm.) слой серебрящей жидкости.

Полученный такимъ образомъ двойной клинообразный серебряный слой имѣлъ ничтожную толщину въ томъ мѣстѣ, гдѣ цилиндрическая поверхность соприкасалась со стеклянной пластинкой. Двѣ такимъ образомъ приготовленныя пластинки обмывались водой, сушились и вводились въ дистиллированную воду для наблюденія. Оказалось, что на самыхъ тонкихъ мѣстахъ серебрянаго слоя высота поднятія воды была наибольшая, и уменьшалась въ обѣ стороны клинообразнаго слоя, становясь постоянной тамъ, гдѣ слой серебра былъ уже какъ бы непроницаемъ для взаимодѣйствія частичекъ стекла и воды.

Опредѣляя оптическимъ способомъ толщину серебрянаго слоя, Quincke нашелъ для стекла, серебра и воды радіусъ сферы молекулярнаго дѣйствія больше 54.2 $\mu\mu$.

---

[13]) Pogg. Ann., 137, стр. 402.

Подобныя же наблюденія Quincke произвелъ надъ ртутью, переводя серебро въ одномъ случаѣ въ сѣрное, а въ другомъ — въ іодистое.

Для ртути, сѣрнаго серебра и стекла онъ получилъ величину радіуса сферы молекулярнаго дѣйствія равную 48,3 $\mu\mu$., а для ртути, іодистаго серебра и стекла—59 $\mu\mu$.

Къ числамъ Quincke нужно, конечно, относиться съ большою осторожностью.

Дѣло въ томъ, что наблюдаемыя авторомъ (Quincke) кривыя высотъ поднятія жидкости мѣнялись въ зависимости отъ того, какъ долго осушался клинообразный серебряный слой, — это во-первыхъ, а во-вторыхъ, и это самое главное, серьезное вліяніе на высоту поднятія жидкости оказывало присутствіе въ клинообразномъ слоѣ частичекъ воздуха, которыя обыкновенно притягиваются серебромъ.

На основаніи этого, врядъ ли возможно признать за опытами Quincke рѣшающее значеніе въ вопросѣ о радіусѣ сферы молекулярнаго дѣйствія; до сихъ поръ экспериментальное изслѣдованіе не сказало своего послѣдняго слова по этому вопросу.

При этомъ намъ кажется страннымъ склонность нѣкоторыхъ экспериментаторовъ опредѣлять радіусъ сферы молекулярнаго дѣйствія той или другой величиной толщины жидкой пластинки. Мы совершенно согласны съ ними, что моментъ разрыва жидкой пластинки слѣдуетъ отнести къ тому положенію этой пластинки, когда частицы ея выходятъ изъ сферы взаимодѣйствія; однако, непосредственный анализъ состоянія жидкой пластинки въ моментъ, предшествующій разрыву ея, приводитъ насъ къ нѣкоторому другому убѣжденію, отличному отъ предположеній нашихъ ученыхъ предшественниковъ.

Пусть капля жидкости (напримѣръ, масла) расплывается по твердой плоской поверхности [14](напримѣръ, по стеклу). Явленіе это, если оно наблюдается, объясняется большимъ поверхностнымъ натяженіемъ твердой поверхности.

Не трудно представить себѣ, что расплываніе капли будетъ происходить до тѣхъ поръ, пока всѣ молекулы ея придутъ въ наибольшее удаленіе другъ отъ друга, на которомъ онѣ еще способны оказывать дѣйствіе взаимнаго притяженія. Но, какъ только этотъ моментъ наступаетъ, капля, теперь уже пластинка, подъ вліяніемъ постоянно дѣйствующей на ея молекулы силы натяженія, заставляющей ее все болѣе и болѣе расширяться, распадается на капли или пластинки. Распаденіе это, какъ оно наблюдалось и другими экспериментаторами, происходитъ на всѣхъ мѣстахъ пластинки и одновременно.

---

[14]) Я производилъ наблюденія надъ расплываніемъ парафиноваго масла и керосина по стеклу, при чемъ радіусы окружностей расплывшихся капель достигали у меня 80 mm.

Если мы зададимся теперь вопросомъ относительно взаимнаго положенія молекулъ жидкой пластинки, то необходимо придемъ къ тому заключенію, что положеній, въ которыхъ могутъ быть молекулы, можетъ быть только два.

Первое положеніе, когда центры молекулъ лежатъ на общей вертикали.

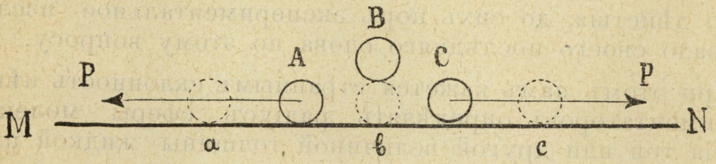
Второе положеніе, когда линія, соединяющая центры молекулъ, наклонена къ горизонтальной поверхности, по которой происходитъ расплываніе жидкости.

Обратимся прежде ко второму случаю.

Представимъ себѣ три молекулы: двѣ на горизонтальной плоскости и одну надъ этими двумя въ вертикальномъ сѣченіи.

На молекулы A и C дѣйствуютъ силы (P) поверхностнаго натяженія твердой поверхности и отодвигаютъ эти молекулы другъ отъ друга въ положеніе a и c.

I



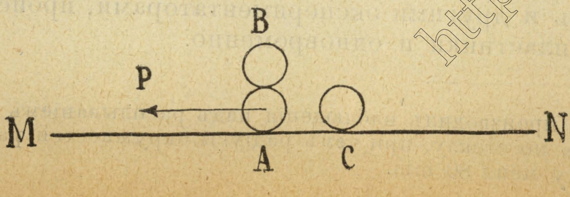
Не трудно видѣть, что молекула B, подчиняясь силамъ тяжести и притяженія со стороны молекулъ A и C, перейдутъ, говоря грубо, по діагонали параллелограмма, построеннаго на этихъ силахъ, до соприкосновенія съ плоскостью MN.

За время этого перехода молекулы B теоретически нельзя допустить моментъ разрыва между молекулами A и C: ихъ связываетъ молекула B; и только тогда, когда молекулы займутъ положеніе a, b и c, благодаря дѣйствію силы поверхностнаго натяженія, онѣ будутъ удалены другъ отъ друга настолько, что выйдутъ изъ сферы взаимодѣйствія, при чемъ происходитъ наблюдаемый нами разрывъ жидкой пластинки.

Случай, когда наши молекулы лежатъ своими центрами на общей вертикали, также не представляетъ затрудненій для анализа.

Пусть молекула A, надъ которой находится молекула B, занимаетъ крайнее положеніе; тогда на молекулу A непосредственно дѣйствуетъ сила (P) поверхностнаго натяженія.

II



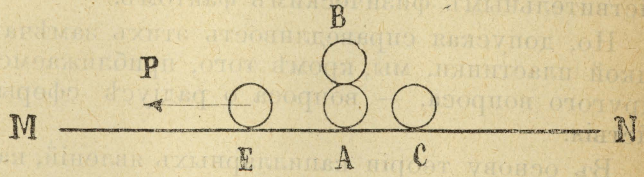
Эта сила, конечно, больше другихъ силъ, дѣйствующихъ на ту же молекулу; вслѣдствіе чего молекула *A* движется въ сторону силы (*P*).

Если бы на молекулу *B* не дѣйствовали силы притяженія со стороны молекулы *C*, то она неслась бы вмѣстѣ съ молекулой *A*, не измѣняя своего положенія, будучи связана съ ней силой взаимнаго притяженія; но будетъ какъ разъ обратное: молекула *B*, подчиняясь силѣ притяженія со стороны молекулы *C*, соскользнетъ съ молекулы *A* въ сторону, противоположную движенію молекулы *A*, и такимъ образомъ пройдетъ въ первое, уже разсмотрѣнное нами положеніе.

Въ случаѣ, если молекула *A* съ находящейся надъ ней молекулой *B* находится гдѣ-нибудь внутри круга расплывающейся капли жидкости, а не на границѣ его, то, повидимому, нѣтъ причинъ, въ силу которыхъ она должна измѣнить свое положеніе.

Но это можетъ показаться такъ только на первый взглядъ.

Въ самомъ дѣлѣ, анализируя тѣ случаи, которые мы только что разсмотрѣли, мы должны согласиться съ тѣмъ, что утонченіе расплывающейся капли должно идти отъ периферіи къ центру; слѣдовательно, мы необходимо должны придти къ допущенію того положенія, что молекула *E*, предшествующая моле-

III 

кулѣ *A*, подъ вліяніемъ дѣйствующихъ на нее впереди идущихъ молекулъ, будетъ двигаться впередъ съ бóльшей сравнительно скоростью, чѣмъ молекула *A*, и потому будетъ какъ бы отодвигаться отъ этой послѣдней, сообщая ей, въ свою очередь, бóльшую скорость, чѣмъ остальнымъ, ближайшимъ къ центру круга. Что же будетъ съ молекулой *B*? Движется ли она за молекулой *E*?

На основаніи того, что въ сторонѣ отъ *A*, противоположной движенію этой послѣдней, молекулы находятся въ болѣе скученномъ состояніи, а слѣдовательно, на основаніи того, что равнодѣйствующая силъ притяженія послѣднихъ больше равнодѣйствующей силъ притяженія со стороны молекулъ, ближайшихъ къ периферіи круга, молекула *B* не соскользнетъ съ молекулы *A* въ сторону *E*; моментъ скольженія для молекулы *B* наступитъ тогда, когда молекула *A* начнетъ отодвигаться отъ молекулы *C*, и самое скольженіе произойдетъ такъ, какъ мы это показали на стр. 220.

Итакъ, и въ томъ и въ другомъ положенiи въ моментъ, предшествующiй разрыву жидкой пластинки, молекулы ея, прежде чѣмъ произойдетъ разрывъ, займутъ положенiе на горизонтальной поверхности расширенiя, т. е., наша жидкая пластинка въ вертикальномъ сѣченiи представляетъ не рядъ молекулъ, а только одну молекулу, и, слѣдовательно, толщина жидкой пластинки въ моментъ, предшествующiй ея разрыву, представляетъ дiаметръ молекулы этой жидкости.

Мы видѣли, что Fischer'омъ уже на жидкой, ртутной поверхности получены числа, выражающiя толщину жидкой пластинки, очень малаго порядка, которыя, по его мнѣнiю, могутъ быть и еще меньше; и если мы заглянемъ въ труды, посвященные выясненiю порядка малости молекулъ, то найдемъ, что числа, данныя Fischer'омъ, какъ разъ того порядка, что и числа, найденныя для дiаметра молекулъ теоретическимъ путемъ.

Такъ, Van der Waals'омъ найдено теоретическимъ путемъ число—0,3 $\mu\mu$ [15]), выражающее собою дiаметръ молекулы воздуха. Для дiаметра молекулы водяного пара кинетической теорiей газовъ дано число—4,4 $\mu\mu$ [16]).

Мы ограничиваемся только этими ссылками, находя ихъ совершенно достаточными, чтобы ожидать, что изложенныя соображенiя и вытекающiя изъ нихъ заключенiя будутъ сходиться съ дѣйствительнымъ физическимъ фактомъ.

Но, допуская справедливость этихъ замѣчанiй относительно жидкой пластинки, мы, кромѣ того, приближаемся къ разрѣшенiю и другого вопроса, — вопроса о радiусѣ сферы молекулярнаго дѣйствiя.

Въ основу теорiи капиллярныхъ явленiй, какъ извѣстно, знаменитымъ Лапласомъ положено допущенiе, что взаимное притяженiе молекулъ замѣтно только на чрезвычайно малыхъ разстоянiяхъ; основываясь на числахъ Fischer'а, совпадающихъ съ размѣрами дiаметра молекулъ можно дѣйствительно думать, что радiусъ сферы молекулярнаго дѣйствiя есть величина очень и очень ничтожная, иначе трудно допустить указанное совпаденiе чиселъ.

Итакъ, если наши соображенiя справедливы и толщина наименьшей пластинки дѣйствительно совпадетъ съ дiаметромъ молекулы, то трудно примириться съ экспериментально найденными числами Quincke, выражающими собою радiусъ сферы молекулярнаго дѣйствiя. Напротивъ, представляется гораздо болѣе вѣроятнымъ то, что относительно названнаго радiуса предположилъ знаменитый Лапласъ.

Казань. 26-го февраля, 1902 г.

---

[15]) См. курсъ физики Хвольсона, т. I, стр. 410, изд. I.

[16]) Также см. статью Б. Голицына — „Абсолютные размѣры молекулъ“, „Вѣстн. Оп. Физики“ № 47, 1888 г., стр. 244.

Этюды по основаніямъ геометріи.

III.

Преобразованіе многоугольниковъ и многогранниковъ.

С. Рейтера въ Одессѣ.

*(Продолженіе *).*

Въ первомъ этюдѣ, принадлежащемъ г. Кагану, былъ подробно развитъ принципъ,—данный и обоснованный г. Шатуновскимъ,—который слѣдуетъ положить въ основаніе теоріи объемовъ и площадей, чтобы избѣжать лишняго постулата. Въ примѣненіи къ плоскимъ фигурамъ онъ формулируется такъ:

Если къ квадрату, котораго ребро равно единицѣ, отнести число 1, то можно къ каждому многоугольнику отнести одно и только одно ариѳметическое число, отличное отъ нуля (инваріантъ), такъ, чтобы: a) конгруэнтнымъ многоугольникамъ соотвѣтствовали равные инваріанты и b) инваріантъ многоугольника равнялся суммѣ инваріантовъ его частей.

При этомъ относительно многоугольниковъ, которымъ соотвѣтствуютъ равные инваріанты, говорятъ, что они имѣютъ равныя площади; если одному изъ двухъ многоугольниковъ соотвѣтствуетъ большій инваріантъ, то говорятъ, что онъ имѣетъ большую площадь.

Такое опредѣленіе равенства и неравенствъ площадей устанавливаетъ полную дизъюнкцію въ примѣненіи къ площадямъ трехъ понятій: „равно", „больше" и „меньше", т. е. о каждыхъ двухъ данныхъ площадяхъ M и N всегда можно сказать: либо „M равно N", либо „M больше N", либо „M меньше N".

Что касаетсл объемовъ, то для нихъ въ статьѣ г. Шатуновскаго „Измѣреніе объемовъ многогранниковъ" *) устанавливается положеніе: если къ объему куба, котораго ребро равно единицѣ, отнести число 1, то можно къ объему каждаго многогранника, отнести одно и только одно число, отличное отъ нуля (инваріантъ), такъ, чтобы: a) конгруэнтнымъ многогранникамъ соотвѣтствовали равные инваріанты и b) инваріантъ многогранника равнялся суммѣ инваріантовъ его частей.

Опредѣленія равенства и неравенствъ объемовъ таковы же, какъ и для площадей, т. е., два объема равны, когда ихъ инваріанты равны, одинъ изъ объемовъ больше другого, когда его инваріантъ больше инваріанта другого и меньше — когда его инваріантъ меньше.

---

*) См. № 319 „Вѣстника".

Соотношенія равенства и неравенствъ площадей и объемовъ, опредѣленныя такимъ образомъ, обладаютъ формальными свойствами понятій „равно“, „больше“ и „меньше“, перечисленными въ упомянутой статьѣ г. Шатуновскаго въ № 1) между понятіями „равно“, „больше“ и „меньше“ установлена полная дизъюнкція; 2) $a=a$; 3) если $a=b$, то $b=a$; 4) если $a=b$ и $b=c$, то $a=c$; 5) если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$ и 6) если $a<b$ и $b<c$, то $a<c$.

На этомъ основаніи мы можемъ на объемы и площади смотрѣть, какъ на величины, въ томъ смыслѣ, какъ это выяснено въ статьѣ г. Шатуновскаго.

Общепринято иначе устанавливать систему измѣренія площадей и объемовъ. Въ обычномъ изложеніи этихъ частей геометріи понятія о равенствѣ и неравенствахъ фигуръ — плоскихъ и трехмѣрныхъ—опредѣляются слѣдующимъ образомъ:

1) Площадь (либо объемъ) фигуры M равна площади (либо объему) фигуры N, если мы можемъ, разбивъ M на части, образовать изъ нихъ фигуру P, конгруэнтную съ N.

2) Площадь (или объемъ) M больше площади (или объема) N, если можно сложить части фигуры M въ такую фигуру P, чтобы фигура N помѣщалась цѣликомъ внутри ея.

3) Площадь (или объемъ) M меньше площади (или объема) N, если можно M преобразовать въ такую фигуру P, которая помѣщалась бы цѣликомъ внутри N *).

При этомъ обычная теорія не доказываетъ — и обыкновенно безмолвно подразумѣваетъ—что, если M преобразовывается въ фигуру P, конгруэнтную съ N, то никакимъ инымъ преобразованіемъ мы не получимъ изъ M такой фигуры P_1, которая бы заключалась въ фигурѣ N или заключала въ себѣ ее; между тѣмъ, разсужденіями г. Шатуновскаго это доказывается (стр. 152. № 119).

Является вопросъ: обладаютъ-ли понятія о равенствѣ и неравенствахъ въ примѣненіи къ площадямъ и объемамъ, устанавливаемыя обычными опредѣленіями тѣми формальными свойствами, которыя мы выше перечислили, и эквивалентны-ли они съ критеріями равенства и неравенства, данными въ опредѣленіи г. Шатуновскаго.

Въ виду того, что этотъ вопросъ рѣшается различно, смотря по тому, идетъ ли дѣло о плоскихъ или трехмѣрныхъ фигурахъ, то мы разсмотримъ каждый случай отдѣльно. Начнемъ съ плоскихъ фигуръ.

Прежде всего мы условимся говорить, что фигура M *равно-*

---

*) Нужно замѣтить, что эти обычныя опредѣленія приводятся самымъ г. Шатуновскимъ (№ 119) въ нѣсколько иной редакціи. Но нетрудно было бы показать, что оба способа выраженія имѣютъ одинъ и тотъ же смыслъ.

велика съ N, если ихъ инваріанты равны, и что M *равносоставлена* съ N, если фигуру M можно преобразовать подходящей конфигураціей ея частей въ фигуру P, конгруэнтную съ N.

Теорема I. *Если многоугольникъ M равносоставленъ съ многоугольникомъ N, то они равновелики.*

Доказательство. Разобьемъ многоугольникъ M на такія части, чтобы, сложивъ ихъ, получить многоугольникъ N. Инваріантъ M равенъ суммѣ инваріантовъ составляющихъ частей. То же можно сказать объ инваріантѣ N. Слѣдовательно обѣ суммы равны.

Теорема II. *Если многоугольникъ M равносоставленъ съ многоугольникомъ N, то и обратно многоугольникъ N равносоставленъ съ многоугольникомъ M.*

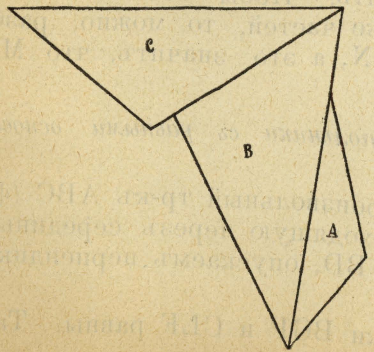
Доказательство. Разбивъ многогольникъ M на части, складываемъ ихъ въ фигуру, конгруэнтную съ N и совмѣщаемъ ее съ N. Тогда N будетъ состоять изъ частей, которыя прежде составляли M. Разобьемъ N на эти части и сложимъ ихъ въ первоначальномъ видѣ. Получимъ многоугольникъ M. Значитъ многоугольникъ N равносоставленъ съ M.

Теорема III. *Если многоугольникъ M равносоставленъ съ P, а многоугольникъ P равносоставленъ съ N, то многоугольникъ M равносоставленъ съ N.*

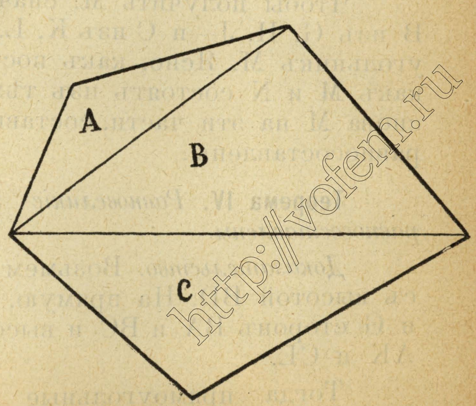
Доказательство.

Многоугольникъ M состоитъ изъ тѣхъ же частей A, B и C (фиг. 1) изъ которыхъ состоитъ фигура P (фиг. 2). Кромѣ того, P состоитъ изъ тѣхъ же частей A_1, B_1 и C_1 (фиг. 3), которыя образуютъ фигуру N (фиг. 4).

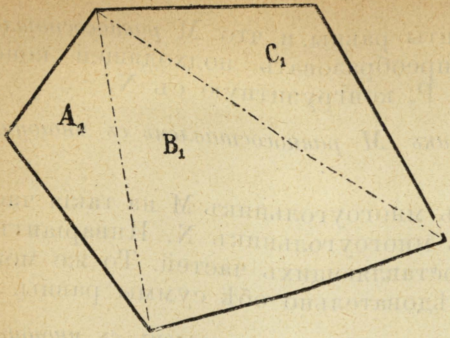
Разобьемъ P на части какъ по сплошнымъ, такъ и по пунктирнымъ линіямъ (фиг. 5). Этимъ процессомъ мы разобьемъ, съ



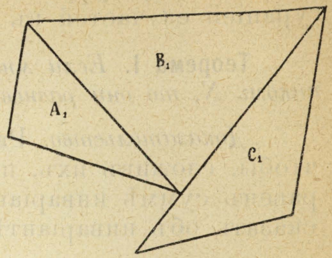
Фиг. 1.



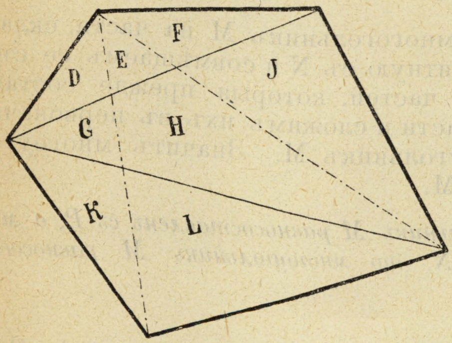
Фиг. 2.



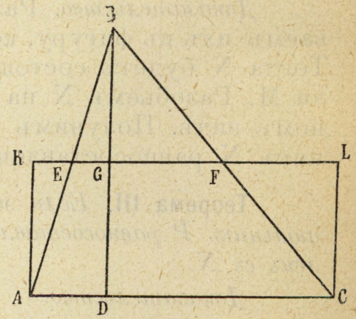
Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

одной стороны, A на части D, E и F, B на G, H, J и C на K и L,— съ другой стороны: A_1 на D, G и K,—B_1 на E, H и L — и C_1 на F и J.

Легко видѣть, что изъ частей D, E, F, G, H, J, K и L можно составить какъ M, такъ и N.

Чтобы получить M, сначала составимъ A изъ D, E, F, — B изъ G, H, J—и C изъ K, L, затѣмъ A, B и C сложимъ въ многоугольникъ M. Ясно, какъ поступить, чтобы составить N. Такъ какъ M и N состоятъ изъ тѣхъ же частей, то можно, разбивши снова M на эти части, составить N, а это значитъ, что M и N равносоставлены.

Теорема IV. *Равновеликіе треугольники съ равными основаніями равносоставлены.*

Доказательство. Возьмемъ произвольный тр-къ ABC (фиг. 6) съ высотой BD. На прямую, проходящую черезъ середины E, F и G сторонъ BA и BC и высоты BD, опускаемъ перпендикуляры AK и CL.

Тогда прямоугольные тр-ки BGF и CLF равны. Также и прямоугольные тр-ки BGE и AKE равны.

Отсѣчемъ отъ даннаго треугольника два верхнихъ тр-ка: EBG и GBF. Первый совмѣстимъ съ AKE, второй съ FLC. Видимъ, что $\triangle$ ABC преобразовывается въ прямоугольникъ AKLC. Отсюда такой выводъ: *каждый треугольникъ равносоставленъ съ прямоугольникомъ того же основанія и высоты вдвое меньшей, чѣмъ высота тр-ка.*

Но этотъ же прямоугольникъ равносоставленъ со всякимъ другимъ тр-комъ того же основанія и высоты равной высотѣ перваго тр-ка. Отсюда и на основаніи теоремы III, заключаемъ, что тр-ки съ равными основаніями и высотами равносоставлены.

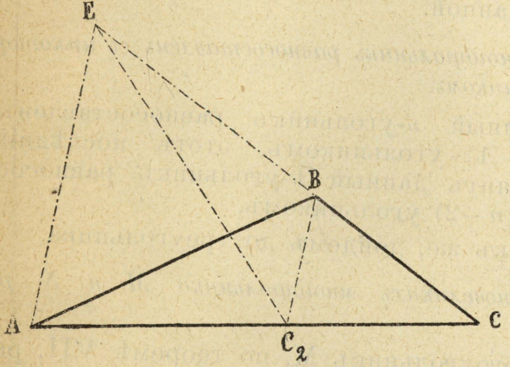
Теорема V. *Всякіе два равновеликихъ тр-ка равносоставлены.*

Доказательство. Пусть имѣемъ $\triangle$ ABC съ высотой BD и $\triangle$ $A_1B_1C_1$, равновеликій первому, съ высотой B_1D_1. Вслѣдствіе равенства инваріантовъ

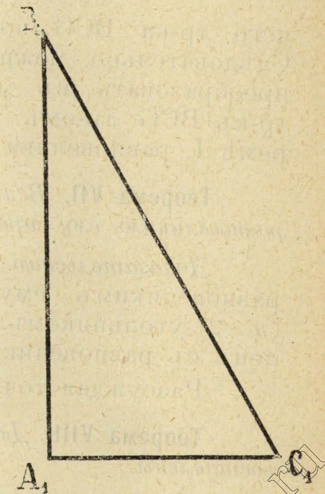
$$AC.BD = A_1C_1.B_1D_1.$$

Первый случай: $AC = A_1C_1$. Тогда $BD = B_1D_1$ и теорема сводится къ предыдущей.

Второй случай. $AC > A_1C_1$. По CA отложимъ $CC_2 = A_1C_1$.



Фиг. 7.



Фиг. 8.

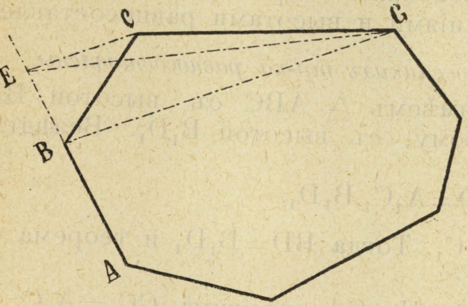
Черезъ A проведемъ прямую, параллельную C_2B, до пересѣченія съ продолженіемъ CB въ точкѣ E. Полученные тр-ки BAC_2 и BEC_2 имѣющіе общее основаніе BC_2 и равныя высоты, въ силу теоремы IV, равносоставлены.

Присоединяя къ каждому изъ нихъ одинъ и тотъ же тр-къ CBC_2, получимъ два тр-ка ABC и CEC_2, также равносоставленныхъ, и—по теоремѣ I—равновеликихъ. И такъ какъ тр-къ ABC равновеликъ тр-ку $A_1B_1C_1$, то и тр-къ CEC_2 равновеликъ тр-ку $A_1B_1C_1$; и какъ равновеликіе тр-ки съ равными основаніями CC_2 и

C_1A_1, они, по теоремѣ IV, равносоставлены. А такъ какъ $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ оба равносоставлены съ однимъ и тѣмъ же тр-комъ CEC_2, то они, по теоремѣ III, равносоставлены другъ съ другомъ.

Теорема VI. *Всякій многоугольникъ о $n+1$ сторонахъ равноставленъ съ равновеликимъ ему многоугольникомъ о n сторонахъ.*

Доказательство. Отъ даннаго многоугольника діагональю BG отсѣчемъ тр-къ BCG. Этотъ тр-къ можно превратить въ такой тр-къ BEG, котораго вершина E лежитъ на продолженіи AB. Для этого, черезъ C проводимъ прямую параллельную BG до пересѣченія съ продолженіемъ AB въ точкѣ E. Тр-ки BEG и BCG, какъ имѣющіе общее основаніе и равныя высоты, равносоставлены. Придавъ къ обоимъ тр-камъ одну и ту же фигуру, полученную изъ даннаго многоугольника посредствомъ отсѣченія отъ него тр-ка BCG, получимъ двѣ фигуры равносоставленныхъ. Слѣдовательно, можно нашъ многоугольникъ объ $n+1$ сторонахъ преобразовать въ многоугольникъ объ n сторонахъ, замѣнивъ тр-къ BCG тр-омъ BEG. Полученная фигура будетъ, по теоремѣ I, равновелика съ данной.



Фиг. 9.

Теорема VII. *Всякій многоугольникъ равносоставленъ съ нѣкоторымъ равновеликимъ ему треугольникомъ.*

Доказательство. Данный n-угольникъ равносоставленъ съ равновеликимъ ему $(n-1)$-угольникомъ, этотъ послѣдній съ $(n-2)$ угольникомъ. Значитъ данный n-угольникъ равносоставленъ съ равновеликимъ $(n-2)$ угольникомъ.

Разсуждая точно такъ же, дойдемъ до треугольника.

Теорема VIII. *Два равновеликихъ многоугольника M и N равносоставлены.*

Доказательство. Многоугольникъ M, по теоремѣ VII, равносоставленъ съ нѣкоторымъ равновеликимъ ему тр-комъ P_1, многоугольникъ N равносоставленъ съ нѣкоторымъ равновеликимъ ему тр-комъ P_2. Тогда тр-ки P_1 и P_2, какъ равновеликіе, по теоремѣ V, равносоставлены. Имѣемъ: M равносоставленъ съ P_1, P_1 равносоставленъ съ P_2, значитъ, многоугольникъ M, по теоремѣ III, равносоставленъ съ P_2, а такъ какъ P_2 равносоставленъ съ N, то и M, по той же теоремѣ, равносоставленъ съ N.

Выводъ. *Теоремы I и VIII обнаруживаютъ, что опредѣленія равенства площадей, даваемыя обычной теоріей и теоріей г. Шатуновскаго, вполнѣ эквивалентны.*

Теперь разсмотримъ, можно ли то же сказать и о понятіяхъ „больше" и „меньше", какъ они устанавливаются въ одной и въ другой теоріи.

Теорема IX. a) *Если многоугольникъ M можетъ быть превращенъ въ фигуру, заключающую въ себѣ многоугольникъ N, то инваріантъ многоугольника M больше инваріанта многоугольника N.*

b) *Если многоугольникъ M можетъ быть сдѣланъ частью многоугольника N, то инваріантъ многоугольника M меньше инваріанта многоугольника N.*

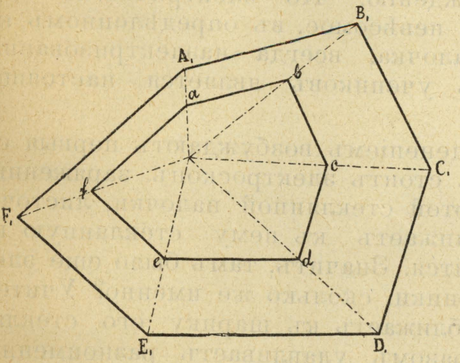
Доказательство. a) Преобразовавъ многоугольникъ M въ такую фигуру P, чтобы многоугольникъ N помѣстился внутри ея, видимъ, что $J_P > J_N$ (потому что инваріантъ цѣлаго многоугольника больше инваріанта его части). Кромѣ того, $J_M = J_P$ (по теоремѣ I, ибо многоугольникъ M равносоставленъ съ P). Значитъ, $J_M > J_N$.

b) Доказательство сходно съ предыдущимъ.

Теорема X. a) *Если инваріантъ J_M многоугольника M, больше чѣмъ инваріантъ J_N многоугольника N, то многоугольникъ M равносоставленъ съ нѣкоторой фигурой P, которая можетъ заключать въ себѣ N.*

b) *Если многоугольникъ M имѣетъ инваріантъ меньшій, чѣмъ инваріантъ многоугольника N, то многоугольникъ M можетъ быть сдѣланъ частью многоугольника N.*

Доказательство. Случай a). Принявъ любую точку внутри фигуры N (*abcdf*) за центръ подобія, строимъ, по извѣстному изъ элементарной геометріи способу, подобную фигуру P, которой стороны относятся къ сходственнымъ сторонамъ фигуры N, какъ $\sqrt{J_M} : \sqrt{J_N}$.



Фиг. 10.

Такъ какъ инваріанты подобныхъ фигуръ относятся между собой, какъ квадраты сходственныхъ сторонъ, то $J_P : J_N = J_M : J_N$, —откуда $J_P = J_M$ и, слѣдовательно, многоугольникъ M, по теоремѣ VIII, равносоставленъ съ фигурой P, внутри которой помѣщается фигура N.

Случай b) Доказательство сходно съ доказательствомъ предыдущаго случая.

Вышеприведенными 10-тью теоремами исчерпывается вопросъ въ примѣненіи къ площадямъ. Дѣйствительно, теоремы I и VIII показываютъ, что выраженія „многоугольники равносоставлены" и выраженіе „многоугольники равновелики" вполнѣ покрываютъ другъ друга, т. е., понятія „равно" въ смыслѣ опредѣленія г. Шатуновскаго и въ смыслѣ обычнаго опредѣленія имѣютъ одно и тоже значеніе. Тотъ же выводъ относительно понятія „больше“ слѣдуетъ изъ теоремъ IXa и Xa, и относительно понятія „меньше“ изъ теоремъ IXb и Xb.

Такъ какъ даваемыя обычной теоріей измѣренія площадей понятія „равно“, „больше“ и „меньше“ имѣютъ то же значеніе, что и таковыя же въ опредѣленіи г. Шатуновскаго, то между ними устанавливается полная дизъюнкція, и они обладаютъ формальными свойствами, перечисленными на стр. 224.

Изъ всего вышесказаннаго слѣдуетъ, что тѣ опредѣленія, которыя даются обычною теоріей, вполнѣ достаточны для построенія системы измѣренія площадей и въ этомъ смыслѣ равноцѣнны съ опредѣленіями г. Шатуновскаго.

(Продолженіе слѣдуетъ).

Наведенные заряды.

А. Вольфензона въ Варшавѣ.

Вопросъ о природѣ электричества послѣ первыхъ уроковъ начинаетъ тревожить умы учащихся. Объясненія же, которыми сопровождаются опыты или которыя ученики находятъ въ учебникахъ, приводятъ ихъ къ убѣжденію, что электричество есть нѣчто матеріальное, пожалуй и невѣсомое, въ опредѣленномъ количествѣ заполняющее тѣла; палочка, всегда наэлектризованная въ рукахъ учителя, въ глазахъ учениковъ является настоящей магической палочкой.

Опыты электризаціи наведененіемъ возбуждаютъ первыя сомнѣнія и поражаютъ: на столѣ стоитъ электроскопъ, заряженный раньше прикосновеніемъ натертой стеклянной палочки, листочки его полуопали, учитель приближаетъ къ нему стеклянную палочку, листочки вновь расходятся. Значитъ, тамъ было еще электричество, соображаютъ и ученики, сколько же именно? Учитель разряжаетъ электроскопъ, приближаетъ къ шарику его стеклянную палочку, извѣстнымъ образомъ улавливаетъ разноименный зарядъ, вновь разряжаетъ и вновь заряжаетъ. Ученики просятъ еще и еще повторить опытъ или спрашиваютъ, сколько разъ можно такимъ образомъ зарядить электроскопъ и получивши въ отвѣтъ: „сколько угодно“, чувствуютъ себя глубоко неудовлетворенными: старая теорія разрушена, новой нѣтъ.

Первая попытка объясненія описанныхъ явленій приурочивается обыкновенно въ учебникахъ къ теоріи электрофора, именно указывается, что однимъ и тѣмъ же зарядомъ на смоляномъ кругѣ можно зарядить крышку электрофора произвольное число разъ, затрачивая при каждомъ ея поднятіи опредѣленную работу на преодолѣніе притяженія между $-E$ крышки и $-E$ смоляного круга. Нужно думать, что учениковъ, только что прослушавшихъ объясненіе электрофора съ точки зрѣнія разряженія нейтральнаго электричества и интересующихся главнымъ образомъ появленіемъ электрическихъ зарядовъ, подобное объясненіе не удовлетворитъ. Дѣйствительно, имъ говорятъ, что при наложеніи крышки электрофора на смоляной кругъ, въ ней появляются 2 заряда, изъ которыхъ одинъ отрицательный отводится къ землѣ или можетъ быть использованъ какъ нибудь иначе, другой же положительный существуетъ въ крышкѣ все время, пока она лежитъ на смоляномъ кругѣ, а затѣмъ появленіе этого и слѣдующихъ однородныхъ зарядовъ относятъ на счетъ работы, производимой при поднятіи крышки, т. е. каждый разъ post factum.

Объясенія же явленія приращеніемъ электрической энергіи электрофора, разсматриваемаго какъ конденсаторъ съ постояннымъ зарядомъ, съ увеличеніемъ разстоянія между обкладками — начинающимъ не доступно. Поэтому чтобы выяснить недоразумѣнія пришлось бы прибѣгнуть къ аналогіямъ, сравнивая связанный зарядъ съ грузомъ, лежащимъ на землѣ, освобожденный — съ грузомъ приподнятымъ; такимъ образомъ ученики стали бы различать четыре электричества и тѣмъ не менѣе вопросъ, при какихъ условіяхъ можно получить наведеніемъ произвольное количество электричества, остался бы для нихъ неяснымъ.

Между тѣмъ вслѣдъ за электрофоромъ въ курсѣ показываются опыты съ машиной Гольца и одинъ изъ нихъ, а именно опытъ Поггендорфа—Гольца обратимости электрической машины даетъ прямой отвѣтъ на вопросъ, интересующій учениковъ. Опытъ долженъ быть произведенъ съ небольшимъ измѣненіемъ, кстати наглядно выясняющимъ такъ называемое всасывающее дѣйствіе остріевъ.

Предварительно слѣдуетъ показать извѣстнымъ способомъ (сосчитавъ числа оборотовъ), что на вращеніе дѣйствующей машины съ раздвинутыми кондукторами затрачивается значительный излишекъ работы.

Къ каждому изъ кондукторовъ небольшой машины Гольца присоединяемъ *) по металлическому острію (1—1,5 dcm длиной, коническія съ закругленными основаніями) и ставимъ её, снявши шнуръ, остріями противъ кондукторовъ другой машины посильнѣе, такъ чтобы разстоянія конусовъ остріевъ отъ кондукторовъ составляли 5—10 cm. При этихъ условіяхъ вращеніе большой машины вызываетъ вращеніе подвижнаго круга малой въ томъ же направленіи и съ тѣмъ же успѣхомъ, какъ и при непосредственномъ соединеніи кондукторовъ.

Въ полузатемненной комнатѣ можно видѣть свѣтлую полоску, соединяющую отрицательный кондукторъ большой ма-

*) Въ металлическихъ зажимахъ или подвязать шелковыми шнурами.

шины съ противостоящимъ остріемъ и свѣтлыя точки у соотвѣтствующей гребенки—и обратно кисти и точки у другой гребенки и другого острія. Придержимъ подвижной кругъ малой машины, продолжая вращать большую; свѣтовыя явленія прекращаются, острія не дѣйствуютъ: нѣтъ работы и нѣтъ спроса на электричество. Толкнемъ кругъ:о гоньки и свѣтлыя точки вновь вспыхиваютъ.

Заключенія очевидны и могутъ быть сдѣланы самими учащимися: острія приводятъ къ движущемуся кругу малой машины произвольно большое количество электричества, но при непремѣнномъ условіи *одновременной* затраты работы на вращеніе большой машины. Электричество, являясь результатомъ работы, въ свою очередь прозводитъ работу, т. е. обладаетъ энергіей.

Опытъ можетъ производиться какъ угодно долго: электричество не матеріально и врядъ ли заполняетъ тѣла, вѣроятнѣе, что и металлъ и стекло являются въ данномъ случаѣ лишь условіями необходимыми для превращенія механической работы въ электрическую энергію и обратно. Этотъ выводъ—ученикамъ вполнѣ доступенъ.

Варшава. 4-го Декабря.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

О самоэлектризаціи человѣческаго тѣла. — Еще *E. du Bois—Reymond* установилъ, что движеніе мускуловъ вызываетъ электрическіе токи. Послѣдніе служатъ причиной возникновенія статическихъ зарядовъ человѣческаго тѣла; этотъ фактъ изслѣдовалъ въ рядѣ опытовъ *Adolf Heydweiller* (Мюнстеръ) вмѣстѣ съ врачемъ *Adler'омъ* *). — Фактъ электризаціи человѣческой кожи интересенъ для физика уже съ той точки зрѣнія, что онъ долженъ при точныхъ электрическихъ измѣреніяхъ служить источникомъ ошибокъ.—Результаты опытовъ *Heydweiller'a* состоятъ въ слѣдующемъ: Поверхность человѣческаго тѣла заряжается при движеніи различными мускулами вообще различно. Притомъ одновременно различныя части тѣла бываютъ заряжены противоположными электричествами. Отсюда слѣдуетъ, между прочимъ, что человѣческая кожа далеко не столь хорошій проводникъ электричества, какъ принято думать. Такимъ образомъ, часть работы движенія членовъ нашего тѣла переходитъ въ потенціальную электрическую энергію, которая при полной изоляціи тѣла возвращается намъ при соединеніи противоположныхъ электричествъ; если же статическіе заряды уходятъ въ землю, то мы безполезно этимъ путемъ теряемъ энергію, правда, въ совершенно незамѣтномъ количествѣ.

*) *Ann. d. Phys.*, **8**, S. 227. — См. также статью *Wiener'a*. — „Расширеніе нашихъ чувствъ"—№ 305 „Вѣстника Оп. Физ."; стр. 109—110.

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Юбилей Galle.—9-го іюня (н. с.) сего года профессоръ астрономіи Бреславльскаго Университета *Galle*, извѣстный тѣмъ, что онъ первый открылъ Нептуна, празднуетъ 90 лѣтъ со дня рожденія.

Праздникъ въ память Abel'я.—Академія Наукъ въ Христіаніи отпразднуетъ 5-го сентября (н. с.) 100 лѣтъ со дня рожденія *N. Abel'я.*

Архивъ Gauss'а.—Въ Геттингенской Обсерваторіи учрежденъ архивъ *Gauss'а*, въ комнатѣ, въ которой великій геометръ жилъ и работалъ. Здѣсь будутъ храниться, между прочимъ, манускрипты *Gauss'а.*

Бунзеновское Общество Физической Химіи.—Съѣздъ Германскаго электрохимическаго общества, происходившій отъ 8—10 мая въ Вюрцбургѣ, рѣшилъ переименовать это общество въ „Бунзеновское Общество Физической Химіи" и соотвѣтственно этому расширить его программу. Иниціатива такой перемѣны принадлежитъ *Ostwald'у.*

Назначенія и избранія.—*А. Д. Граве* назначенъ профессоромъ математики Университета Св. Владиміра, на мѣсто покойнаго *П. М. Покровскаго.* До сихъ поръ *А. Д. Граве* былъ профессоромъ Харьковскаго Университета.

Профессоръ *А. М. Ляпуновъ* избранъ въ члены Императорской Академіи Наукъ.

МАТЕМАТИЧЕСКІЯ МЕЛОЧИ.

О прогрессіяхъ.

Геометрическая прогрессія можетъ быть опредѣлена, помимо обычнаго опредѣленія, какъ рядъ чиселъ

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n,$$

удовлетворяющихъ ряду равенствъ:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{a_3}=\frac{a_3}{a_4}=\ldots\ldots=\frac{a_{n-1}}{a_n}. \qquad (I)$$

Отношеніе, обратное какому-нибудь изъ этихъ равныхъ отношеній, назовемъ *знаменателемъ* геометрической прогрессіи и означимъ черезъ q, такъ что: $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_k}{a_{k-1}}=q$. Отсюда слѣдуетъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{a_1}{a_2}&=\frac{1}{q}\\ \frac{a_2}{a_3}&=\frac{1}{q}\\ &\cdots\cdots\\ \frac{a_{n-1}}{a_n}&=\frac{1}{q}\end{aligned}\right\}$$

Перемножая эти равенства, послѣ сокращенія, найдемъ:

$$\frac{a_1}{a_n}=\frac{1}{q^{n-1}};\ a_n=a_1q^{n-1}$$

— первая основная формула геометрической прогрессіи, выражающая любой ея членъ чрезъ 1-й и знаменателя ея и позволяющая, слѣдовательно, продолжать прогрессію до безконечности.

Возведемъ теперь отношенія ряда (1) въ одну и ту-же степень p; будемъ имѣть:

$$\frac{a_1^p}{a_2^p}=\frac{a_2^p}{a_3^p}=\cdots\cdots=\frac{a_{n-1}^p}{a_n^p}=\frac{1}{q^p}.$$

Пользуясь извѣстнымъ свойствомъ ряда равныхъ отношеній, найдемъ отсюда:

$$\frac{a_1^p+a_2^p+\cdots+a_{n-1}^p}{a_2^p+a_3^p+\cdots+a^p}=\frac{1}{q^p},$$

или, обозначая сумму n членовъ прогрессіи, возвышенныхъ въ степень p, черезъ $S_n^{(p)}$, получимъ:

$$\frac{S_n^{(p)}-a_n^p}{S_n^{(p)}-a_1^p}=\frac{1}{q^p},\ \text{откуда}\ S_n^{(p)}=\frac{a_n^pq^p-a_1^p}{q^p-1}.$$

При $p=1$ имѣемъ сумму 1-хъ степеней членовъ прогрессіи:

$$S_n=\frac{a_nq-a_1}{q-1}=\frac{a_{n+1}-a_1}{q-1}.$$

Послѣднему выраженію можно придать и иную форму, умножая числителя и знаменателя дроби на q; именно, получимъ:

$$S_n=\frac{a_{n+1}q-a_1q}{q^2-q}=\frac{a_{n+2}-a_2}{q^2-q}.$$

Такимъ же образомъ будемъ имѣть:

$$S_n=\frac{a_{n+1}-a_1}{q-1}=\frac{a_{n+2}-a_2}{q^2-q}=\frac{a_{n+3}-a_3}{q^3-q^2}=\cdots=\frac{a_{n+p}-a_p}{q^p-q^{p-1}}.$$

Возьмемъ опять отношеніе суммы предыдущихъ членовъ къ суммѣ послѣдующихъ:

$$S_n=\frac{(a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p})-(a_1+a_2+\ldots+a_p)}{q^p-1},$$

или $$S_n=\frac{S_{n+p}-S_n-S_p}{q^p-1}; \text{ отсюда } S_{n+p}=S_nq^p+S_p.$$

По этой формулѣ, зная сумму n членовъ прогрессіи, начиная съ 1-го, и сумму p членовъ, можно найти сумму $(n+p)$ ея членовъ. При $n=p$, получаемъ *формулу удвоенія* суммы членовъ геометрической прогрессіи:

$$S_{2n}=S_n(q^n+1).$$

Изъ даннаго основного опредѣленія геометрической прогрессіи, какъ, ряда чиселъ, удовлетворяющихъ ряду равенствъ (I), можно вывести еще важное слѣдствіе, группируя первое отношеніе съ послѣднимъ, 2-е съ предпослѣднимъ и т. д. Именно, получимъ:

$$a_1a_n=a_2a_{n-1}=a_3a_{n-2}=\ldots..$$

т. е., *произведеніе членовъ, равно отстоящихъ отъ крайнихъ, равно произведенію крайнихъ.* Означимъ поэтому произведеніе всѣхъ членовъ прогрессіи чрезъ Π_n:

$$\Pi_n=a_1a_2a_3\ .\ .\ .\ .\ a_n,$$

и напишемъ его-же въ обратномъ порядкѣ:

$$\Pi_n=a_na_{n-1}\ .\ .\ .\ .\ .\ a_1;$$

перемножая, имѣемъ:

$$\Pi_n^2=(a_1a_n)\cdot(a_2a_{n-1})\ .\ .\ .\ .\ (a_na_1), \text{ или } \Pi_n^2=(a_1a_n)^n,$$

откуда $$\Pi_n=\sqrt{(a_1a_n)^n}.$$

Ариѳметическая прогрессія можетъ быть опредѣлена, какъ рядъ чиселъ a_1, a_2, a_3, ... a_n, удовлетворяющихъ ряду равенствъ:

$$a_1-a_2=a_2-a_3=\ .\ .\ .\ .\ =a_{n-1}-a_n \quad \text{(II)}$$

Количество, обратное по знаку какой-либо изъ написанныхъ въ рядѣ (II) разностей, назовемъ разностью ариѳметической прогрессіи и означимъ буквой d, такъ что будемъ имѣть:

$$a_1-a_2=a_2-a_3=\ .\ .\ .\ .\ =a_{n-1}-a_n=-d.$$

Отсюда, представляя тѣ-же равенства въ видѣ отношеній:

$$\frac{a_1-a_2}{1}=\frac{a_2-a_3}{1}=\ldots\ldots=\frac{a_{n-1}-a_n}{1}=-d$$

и беря отношеніе суммы всѣхъ предыдущихъ къ суммѣ всѣхъ послѣдующихъ, найдемъ:

$$\frac{a_1-a_n}{n-1}=-d;\ \text{или}\ a_n=a_1+d(n-1),$$

первая основная формула ариѳметической прогрессіи, позволяющая по первому ея члену и разности выразить любой ея членъ.

Группируя въ томъ же рядѣ (II) первую разность съ послѣдней, 2-ю—съ предпослѣдней и т. д., будемъ имѣть:

$$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\ldots$$

т. е., *сумма членовъ прогрессіи, равно отстоящихъ отъ крайнихъ, равна суммѣ крайнихъ.*

Основываясь на этомъ, легко получить сумму n членовъ прогрессіи $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$; именно, написавъ слагаемыя послѣдняго выраженія въ обратномъ порядкѣ и взявъ полусумму обоихъ выраженій для S_n, получимъ

$$S_n=\frac{1}{2}(a_1+a_n).n$$

— это 2-я основная формула ариѳметической прогрессіи.

I. Чистяковъ (Москва).

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 196 (4 сер.). Опредѣлить три цѣлыхъ числа x, y, z такъ, чтобы они удовлетворяли равенству

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{m}{n},$$

гдѣ $\frac{m}{n}$ — данная дробь. Обобщить задачу на случай большаго числа неизвѣстныхъ.

Проф. *В. Ермаковъ* (Кіевъ).

№ 197 (4 сер.). Пусть α есть отношеніе разстояній стороны BC треугольника ABC отъ ортоцентра и отъ центра круга описаннаго, β и γ—аналогичныя отношенія для сторонъ AC и AB. Показать, что

$$\alpha+\beta+\gamma \geqslant 3.$$

Е. Григорьевъ (Казань).

№ 198 (4 сер.). Построить треугольникъ ABC по сторонѣ его a, зная, что для этого треугольника отношеніе радіуса круга вписаннаго къ радіусу круга описаннаго достигаетъ *maximum*'а.

Н. С. (Одесса);

№ 199 (4 сер.). Найти числовую величину выраженія

$$\cos^2\frac{\pi}{17}+\cos^2\frac{2\pi}{17}+\cos^3\frac{3\pi}{17}+\ldots+\frac{\cos^2 8\pi}{17}.$$

Заимств. изъ *Casopis.*

№ 200 (4 сер.). Найти такое число x, чтобы сумма $1^5+2^5+3^5+\ldots+x^5$ была въ 37 разъ болѣе суммы $1^3+2^3+3^3+\ldots+x^3$.

Заимств. изъ *Supplemento al Periodico di matematica.*

№ 201 (4 сер.). Внѣшній діаметръ платиноваго полаго цилиндра d, внутренній діаметръ — d', толщина дна равна десятой части высоты цилиндра. Каково должно быть отношеніе $\frac{d}{d'}$ для того, чтобы цилиндръ этотъ плавалъ въ водѣ, будучи погруженъ на 0,9 своей высоты?

П. Грицынъ (ст. Цымлянская).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

XXIII. *Сумма всѣхъ дѣлителей нѣкотораго цѣлаго числа N втрое больше этого числа, а частное отъ дѣленія N на 512 есть цѣлое число, не дѣлящееся ни на какой квадратъ, большій единицы. Найти N.*

Такъ такъ частное $\frac{N}{512}=\frac{N}{2^9}$ есть цѣлое число, не дѣлящееся ни на какой квадратъ кромѣ единицы, то $\frac{N}{2^9}=\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\lambda\ \ldots\ \mu$, гдѣ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \mu$—различныя между собой простыя числа. Поэтому $N=2^9\alpha\beta\ \ldots\ \mu$.

Если ни одно изъ простыхъ чиселъ $\alpha, \beta, \ldots, \mu$ не равно 2, то сумма дѣлителя и числа N по извѣстной формулѣ равна

$$\frac{2^{10}-1}{2-1}\cdot\frac{\alpha^2-1}{\alpha-1}\ \cdots\ \frac{\mu^2-1}{\mu-1}=1023(\alpha+1)\ \ldots\ (\mu+1) \qquad (1)$$

Если же одно изъ простыхъ чиселъ $\alpha, \beta, \ldots, \mu$, напр. α, равно 2, то $N=2^{10}\beta\gamma \ldots \mu$, и сумма дѣлителей числа N равна

$$\frac{2^{11}-1}{2-1}\cdot\frac{\beta^2-1}{\beta-1}\cdots\cdots\frac{\mu^2-1}{\mu-1}=2047(\beta+1)\ldots\ldots(\mu+1) \qquad (2)$$

Согласно съ условіемъ задачи (см. (1), (2)) должно выполняться одно изъ двухъ равенствъ:

$$1023(\alpha+1)(\beta+1)\ldots\ldots(\mu+1)=3.2^9.\alpha\beta\gamma\ldots\ldots\mu \qquad (a)$$

$$2047(\beta+1)(\gamma+1)\ldots\ldots(\mu+1)=3.2^{10}\beta\gamma\ldots\ldots\mu \qquad (b).$$

Предположеніе (а) даетъ

$$\frac{\alpha+1}{\alpha}\cdot\frac{\beta+1}{\beta}\cdot\frac{\gamma+1}{\gamma}\cdots\cdots\frac{\mu+1}{\mu}=\frac{3.2^9}{1023}=\frac{2^9}{341}=\frac{2^9}{31.11},$$

откуда вслѣдствіе несократимости дроби $\frac{2^9}{31.11}$ слѣдуетъ, что среди простыхъ чиселъ $\alpha, \beta, \ldots \mu$ два изъ нихъ, напр. α и β, равны соотвѣтственно 31 и 11. Поэтому

$$\frac{32}{31}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{\gamma+1}{\gamma}\cdots\cdots\frac{\mu+1}{\mu}=\frac{2^9}{31.11},$$

откуда

$$\frac{\gamma+1}{\gamma}\cdot\frac{\delta+1}{\delta}\cdots\cdots\frac{\mu+1}{\mu}=\frac{4}{3}.$$

Слѣдовательно одно изъ чиселъ $\gamma, \delta, \ldots, \mu$, напр. γ, равно 3, откуда, если только рядъ простыхъ множителей $\alpha, \beta, \ldots$ не заканчивается числомъ γ, вытекаетъ:

$$\frac{\delta+1}{\delta}\cdots\cdots\frac{\mu+1}{\mu}=1,$$

что невозможно. Слѣдовательно рядъ простыхъ множителей, на которыхъ разлагается число $\frac{N}{2^9}$, состоитъ лишь изъ чиселъ $\alpha=31$, $\beta=11$, $\gamma=3$, и это предположеніе дѣйствительно удовлетворяетъ равенству (а). Поэтому число $N=2^9.31.11.3=523776$ даетъ правильное рѣшеніе задачи. Это рѣшеніе есть и *единственное*, такъ какъ предположеніе (b) невозможно. Дѣйствительно, предположеніе (b) даетъ:

$$\frac{\beta+1}{\beta}\cdot\frac{\gamma+1}{\gamma}\cdots\cdots\frac{\mu+1}{\mu}=\frac{3.2^{10}}{2047}=\frac{3.2^{10}}{89.23},$$

откуда вслѣдствіе несократимости дроби $\frac{3.2^{10}}{89.23}$ видно, что два простыхъ числа среди ряда простыхъ чиселъ $\beta, \gamma, \ldots \mu$, напр. β и γ, равны 89 и 23. Поэтому

$$\frac{90}{99}\cdot\frac{24}{23}\cdot\frac{\delta+1}{\delta}\cdot\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}\cdots\cdots\frac{\mu+1}{\mu}=\frac{3.2^{10}}{89.23},$$

откуда

$$\frac{\delta+1}{\delta}\cdot\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}\cdot\frac{\lambda+1}{\lambda}\cdots\cdots\frac{\mu+1}{\mu}=\frac{3.2^{10}}{90.24}=\frac{64}{45}=\frac{64}{3.3.5}.$$

Вслѣдствіе несократимости дроби $\frac{64}{3.3.5}$ отсюда вытекаетъ, что два изъ ряда простыхъ чиселъ δ, ε, λ, ..., μ, напр. δ и ε равны 3 и 5. Слѣдовательно

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{\lambda+1}{\lambda}\cdots\cdots\frac{\mu+1}{\mu}=\frac{64}{3.3.5} \qquad (3),$$

откуда

$$\frac{\lambda+1}{\lambda}\cdots\cdots\frac{\mu+1}{\mu}=\frac{8}{9}.$$

Такъ какъ лѣвая часть этого равенства больше, а правая меньше единицы, то равенство (b) невозможно, если только рядъ простыхъ множителей β, γ, ... μ не заканчивается на числѣ ε; но если этотъ рядъ закачивается числомъ ε, то тогда равенство (3) даетъ $1=\frac{8}{9}$. Поэтому равенство (b) вообще невозможно.

Н. С. (Одесса); *Н. Артемьевъ* (Вологда).

№ 103 (4 сер.). *Рѣшить систему уравненій:*

$$x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=341$$

$$x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=330.$$

Къ первому изъ предложенныхъ уравненій прибавимъ почленно второе, помноживъ обѣ части его предварительно на 3. Тогда получимъ:

$$x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+3x\sqrt{y}+3y\sqrt{x}=341+330.3,$$

или

$$(\sqrt{x})^3+(\sqrt{y})^3+3\sqrt{x}(\sqrt{y})^2+3\sqrt{y}(\sqrt{x})^2=1331,$$

т. е.,

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^3=1331=11^3,$$

откуда

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=11\alpha \qquad (1),$$

гдѣ α—одно изъ трехъ значеній корня кубичнаго изъ единицы. Представивъ второе изъ предложенныхъ уоавненій въ видѣ

$$\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})=330,$$

раздѣлимъ его почленно на уравненіе (1). Тогда получимъ:

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=\frac{330}{11\alpha}, \text{ или } \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=\frac{30}{\alpha}=\frac{30\alpha^2}{\alpha^3}=30\alpha^2.$$

Итакъ $\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=30\alpha^2$ (2). Рѣшая совмѣстно уравненія (1) и (2), найдемъ, что $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$ суть корни квадратнаго уравнснія

$$z^2-11\alpha z+30\alpha^2=0,$$

откуда

$$z=\frac{11\alpha\pm\sqrt{121\alpha^2-720\alpha^2}}{2}=\frac{11\alpha\pm\alpha}{2}\qquad(3).$$

Пусть β и γ два различные мнимые корни кубичные изъ единицы. Согласно съ формулой (3), либо $\sqrt{x}=6\alpha$, $\sqrt{y}=5\alpha$, либо, наоборотъ, $\sqrt{x}=5\alpha$, $\sqrt{y}=6\alpha$, а потому, либо $x=36\alpha^2$, $y=25\alpha^2$, либо $x=25\alpha^2$, $y=36\alpha^2$. Слѣдовательно, полная таблица рѣшеній есть слѣдующая:

$$x_1=36;\quad x_2=36\beta^2;\quad x_3=36\gamma^2;\quad x_4=25;\quad x_5=25\beta^2;\quad x_6=25\gamma^2$$

$$y_1=25;\quad y_2=25\beta^2;\quad y_3=25\gamma^2;\quad y_4=36;\quad y_5=36\beta^2;\quad y_6=36\gamma^2.$$

Всѣ эти рѣшенія удовлетворяютъ предложенной системѣ при условіи брать значенія радикаловъ $\sqrt{36\alpha^2}$ и $\sqrt{25\alpha^2}$ соотвѣтственно равными 6α и 5α.

М. Бавыкина (Тверь); *Д. Г.* (Москва); *С. Кудинъ* (Москва); *Д. Никифоровъ* (Казань); *В. Чеботаревъ* (Калачъ); *Д. Дьяковъ* (Новочеркасскъ); *П. Полушкинъ* (Знаменка); Капитанъ *Гусевъ* (Елисаветградъ); *Д. Коварскій* (Двинскъ); *Г. Огановъ* (Эривань); *М. Поповъ* (Асхабадъ); *Л. Гальперинъ* (Бердичевъ); *М. Семеновскій* (Перновъ); *Н. Готлибъ* (Митава); *В. Микшъ* (Новочеркасскъ); *Б. Д.* (К.); *В. Гудковъ* (Свеаборгъ); *А. Разуваевъ* (Орелъ); *В. Кутше* (Елабуга); *Б. Полонскій* (Одесса).

№ 138 (4сер.). *Привести къ логариѳмическому виду выраженіе*

$$\frac{1}{\mathrm{csc}^2 2x}+\mathrm{csc}^2(45^0+x)+\mathrm{sc}^2(45^0+x)+\mathrm{tg}^2 2x.$$

Путемъ тожественныхъ преобразованій приводимъ данное выраженіе послѣдовательно къ виду:

$$\frac{1}{\mathrm{cosc}^2 2x}+\frac{1}{\sec^2 2x}+\mathrm{tg}^2 2x+\mathrm{cosc}^2(45^0+x)+\mathrm{sc}^2(45^0+x)=$$

$$=\sin^2 2x+\cos^2 2x+\mathrm{tg}^2 2x+\frac{1}{\sin^2(45^0+x)}+\frac{1}{\cos^2(45^0+x)}=$$

$$=1+\mathrm{tg}^2 2x+\frac{1}{\sin^2(45^0+x)\cos^2(45^0+x}=\frac{1}{\cos^2 2x}+\frac{4}{[2\sin(45^0+x)\cos(45^0+x)]^2}=$$

$$=\frac{1}{\cos^2 2x}+\frac{4}{\sin^2(90^0+x)}=\frac{5}{\cos^2 2x}.$$

Д. Дьяковъ (Новочеркасскъ); *М. Пучковскій* (Умань); *Д. Коварскій* (Двинскъ); *Г. Огановъ* (Эривань); *М. Поповъ* (Асхабадъ).

Редакторы: **В. А. Циммерманъ** и **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса 30-го Мая 1902 г.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.

Обложка
пщется

Обложка
ищется