Обложка
ищется

Обложка
ищется

XXVII Сем. № 11.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
Элементарной Математики.

15 Іюня № 323. 1902 г.

Приготовленіе ожиженныхъ газовъ и ихъ важнѣйшія примѣненія. *)

E. Mathias, профессора физики въ Тулузѣ.

(Переводъ съ французскаго Д. Шора).

Существуетъ не мало веществъ, которыя еще недавно считались *научными диковинками*, нынѣ же перешли въ разрядъ продуктовъ промышленнаго производства; къ этой категоріи тѣлъ относятся *ожиженные газы*. Такъ называются жидкости, упругость паровъ которыхъ при средней температурѣ нашего климата ($+15^0$) выше давленія атмосферы. Такъ что, съ точки зрѣнія приблизительнаго закона Павлевскаго, по которому разность между температурой нормальнаго кипѣнія и критической для всѣхъ тѣлъ равна 165^0—170^0, къ этой категоріи тѣлъ относятся такія тѣла, критическая температура которыхъ меньше 180^0—185^0C.

Этому условію удовлетворяетъ довольно большое число веществъ, въ чемъ не трудно убѣдиться, просматривая таблицу критическихъ постоянныхъ; но лишь немногія изъ нихъ доступны промышленному производству. А именно, слѣдующія, которыя мы

*) Оригиналъ настоящей статьи былъ напечатанъ въ журналѣ „Revue générale des Sciences pures et appliquées", XII, №№ 20, 21.

приводимъ въ порядкѣ, соотвѣтствующемъ температурамъ ихъ нормальнаго кипѣнія или, что сводится къ тому же, въ порядкѣ ихъ критическихъ температуръ: 1) атмосферный воздухъ, 2) закись азота, 3) углекислота, 4) ацетиленъ, 5) амміакъ, 6) хлоръ, 7) хлористый метилъ, 8) сѣрнистая кислота и 9) хлористый этилъ. Въ нижеслѣдующемъ изложеніи мы будемъ разсматривать эти газы въ томъ же порядкѣ.

При этомъ мы разсмотримъ слѣдующія стороны дѣла: I) приготовленіе ожиженныхъ газовъ; II) сохраненіе ихъ; III) физическія и химическія примѣненія жидкихъ газовъ; и наконецъ, поскольку это возможно, IV) ихъ экономическое значеніе.

I. — Приготовленіе ожиженныхъ газовъ.

Вообще говоря, эта операція состоитъ изъ двухъ частей: химическаго приготовленія газа и затѣмъ ужъ его ожиженія. Что касается воздуха, которымъ мы займемся прежде всего, то задача сводится, понятно, исключительно къ ожиженію.

§ 1. — *Жидкій воздухъ.*

Всѣ машины, употребляемыя въ настоящее время для приготовленія жидкаго воздуха, построены по слѣдующему принципу: *сжатый воздухъ медленно освобождаютъ отъ давленія,* такъ что охлажденіе происходитъ, какъ въ явленіи Joule—Thomson'a [1]); далѣе—*полученный многократнымъ примѣненіемъ этого пріема холодъ какъ бы накопляютъ;* именно, при помощи воздуха, охлажденнаго вслѣдствіе расширенія, понижаютъ температуру того воздуха, который еще находится въ сжатомъ состояніи; для этой послѣдней цѣли расширяющійся воздухъ пропускаютъ по особому аппарату въ обратномъ направленіи. При этихъ условіяхъ температура заключающагося въ машинѣ воздуха, равно какъ и всѣхъ ея частей, постоянно понижается, пока не достигнетъ точки ожиженія воздуха.

Я опишу прежде всего аппараты, которые были экспонированы на всемірной выставкѣ 1900-го года, т. е., машины Linde, и Tripler'a.

1. — Приборъ Linde. — На фиг. 1. изображенъ схематическій чертежъ машины, фигурировавшей на выставкѣ. Внѣшній воздухъ поступаетъ въ аппаратъ справа, куда онъ накачивается, въ количествѣ 19 кубическихъ метровъ въ часъ, при помощи перваго поршня нагнетательнаго насоса *A;* послѣдній состоитъ изъ трехъ

---

[1]) Напомню читателямъ, что явленіе это состоитъ въ слѣдующемъ: въ то время, какъ *идеальный газъ* долженъ былъ бы при отсутствіи внѣшняго давленія безпредѣльно расширяться, *сохраняя свою температуру, реальный газъ, расширяясь, теряетъ часть своей тепловой энергіи.* Съ точки зрѣнія кинетической теоріи газовъ, явленіе Joule'я и W. Thomson'a объясняется тѣмъ, что при расширеніи газа молекулы должны затрачивать часть своей живой силы на преодолѣніе взаимнаго притяженія. *Прим. перев.*

цилидровъ, окропляемыхъ водой [2]). Въ первомъ цилиндрѣ воздухъ приводится къ давленію въ 7 килограммовъ на квадратный центиметръ [3]). Затѣмъ онъ поступаетъ черезъ змѣевикъ, погруженный въ водяную ванну, гдѣ онъ охлаждается до своей первоначальной температуры, во второй цилиндръ насоса; сѣченіе этого цилиндра меньше сѣченія перваго, и онъ пропускаетъ черезъ себя только $2{,}9m^3$ въ часъ, при чемъ давленіе возрастаетъ съ 7 килограммовъ до 50. Наконецъ, воздухъ поступаетъ въ третій, еще болѣе узкій цилиндръ, черезъ который проходитъ въ часъ лишь $1{,}9m^3$ воздуха, а давленіе поднимается отъ 50 до 200 килограммовъ.

Сжатый такимъ образомъ воздухъ, послѣ охлажденія въ змѣевикѣ, поступаетъ въ сосудъ *B*, служащій для освобожденія воздуха отъ заключающихся въ немъ паровъ воды; металлическій манометръ, соединенный съ этимъ сосудомъ, измѣряетъ давленіе. Кранъ, находящійся внизу этого сосуда, даетъ возможность отъ времени до времени удалять накопившуюся воду. Изъ *B* сжатый воздухъ поступаетъ въ сосудъ *C*, гдѣ онъ окончательно высушивается при посредствѣ хлористаго кальція. Для того, чтобы аппаратъ Linde функціонировалъ правильно, необходимо удалить изъ воздуха *весь* заключавшійся въ немъ водяной паръ; въ противномъ случаѣ, затвердѣвая, онъ засоряетъ змѣевики, и дѣйствіе прибора прекращается. Изъ трубки *C* воздухъ поступаетъ въ такъ называемый *воздушный холодильникъ D*; узкая трубка, по которой онъ здѣсь движется, окружена болѣе широкой, концентрической трубкой; по этой послѣдней въ обратномъ направленіи проходитъ токъ холоднаго воздуха, ускользнувшаго отъ ожиженія и не успѣвшаго еще отдать весь свой холодъ въ подобномъ же холодильникѣ *F*. Этотъ воздухъ достигаетъ въ холодильникѣ *D* почти обыкновенной температуры и возвращается по особой трубѣ въ насосъ *A*; при этомъ давленіе его равно 50 килограммамъ, т. е., приблизительно тому давленію, которое господствуетъ между вторымъ и третьимъ цилидромъ, соотвѣтственно чему онъ поступаетъ въ насосъ именно въ этомъ мѣстѣ.

Непосредственно за *воздушнымъ холодильникомъ D* слѣдуетъ другой холодильникъ *E*, въ которомъ воздухъ замѣненъ *аммiакомъ* и который приводится въ дѣйствіе особой машиной *LM* системы Linde [4]) Пары амміака, ожиженные въ насосѣ *L*, поступаютъ

---

[2]) Капли воды подъ дѣйствіемъ протекающаго мимо потока воздуха сильно испаряются, при чемъ компенсируется бо́льшая часть развивающейся при сжатіи воздуха теплоты. При всей своей простотѣ, этотъ способъ успѣшно устраняетъ чрезмѣрное нагрѣваніе сжимаемаго воздуха.

[3]) На языкѣ инженеровъ давленіе, выраженное въ килограммахъ на квадратный центиметръ, означаетъ на самомъ дѣлѣ избытокъ давленія по сравненію съ атмосфернымъ.

[4]) Охлажденіе въ *D* могло бы безъ этого приспособленія оказаться недостаточнымъ, въ особенности, въ слабыхъ машинахъ, самоохлажденіе которыхъ сперва идетъ очень медленно; поэтому цѣлесообразно охлаждать въ особомъ аппаратѣ воздухъ еще значительно раньше, чѣмъ онъ успѣлъ по-

въ змѣевикъ M, гдѣ они охлаждаются въ водяной ваннѣ; отсюда амміакъ поступаетъ въ трубку, окружающую ту, по которой проходитъ сухой воздухъ, и здѣсь, подъ вліяніемъ тяги насоса L, испаряется; холодные пары его проходятъ по внѣшней широкой трубкѣ холодильника въ обратномъ направленіи, чѣмъ воздухъ, и сильно охлаждаютъ послѣдній. Изъ аппарата DE воздухъ поступаетъ, наконецъ, во внутреннюю трубку послѣдняго змѣевика F. Достигнувъ перваго *регулирующаго крана* G, воздухъ преодолѣваетъ сопротивленіе клапана, при чемъ давленіе сильно уменьшается и достигаетъ 50 атмосферъ; соотвѣтственно этому, и температура значительно падаетъ, а именно, приблизительно до —130°. Бóльшая часть воздуха, охлажденнаго такимъ образомъ, возвращается обратно по второй изъ концентрическихъ трубокъ змѣевика, охлаждая, въ свою очередь, вновь поступающій въ F воздухъ; отсюда, какъ мы видѣли, воздухъ поступаетъ въ D, а затѣмъ въ A.

Только небольшая часть воздуха, преодолѣвшаго сопротивленіе клапана G, достигаетъ второго *регулирующаго крана* H, и здѣсь повторяется то же самое: воздухъ прорывается черезъ клапанъ, давленіе его мгновенно падаетъ и онъ сильно охлаждается; при этомъ давленіе становится приблизительно равнымъ атмосферному. При этихъ условіяхъ ожиженный воздухъ собирается въ *коллекторъ* J, въ то время какъ не перешедшій въ жидкость ускользаетъ черезъ отверстіе клапана и поступаетъ въ *третью* изъ концентрическихъ трубокъ змѣевика F, окружающую обѣ другія; этотъ послѣдній потокъ воздуха прежде, чѣмъ выступить наружу, образуетъ вокругъ внутреннихъ трубокъ аппарата F какъ бы оболочку, защищающую его отъ нагрѣванія со стороны окружающей атмосферы. Полученный такимъ путемъ жидкій воздухъ переливаютъ при помощи *сифонообразнаго крана* K въ приспособленные сосуды. Всѣ части этой машины состоятъ изъ мѣди.

Объемъ воздуха, поступающаго изъ насоса A въ змѣевикъ F, равняется, такимъ образомъ, если привести его къ атмосферному давленію, $1{,}9 \times 50 = 95$ кубическимъ метрамъ. Изъ этихъ кубическихъ метровъ 19 выходятъ безполезно черезъ *регуляторы* G и H; треть остального количества обращается въ жидкость [5]), а двѣ трети возвращаются въ атмосферу, какъ было показано выше.

Остающіяся $76 (= 95 - 19)$ кубическихъ метровъ возвращаются къ третьему насосу A послѣ того, какъ они прошли первый регуляторъ; конечно, воздухъ находится при этомъ не подъ атмосфернымъ давленіемъ, а подъ давленіемъ въ 50 килограммовъ на квадратный центиметръ.

ступить въ трубки, ведущія его въ обратномъ направленіи. Въ небольшихъ машинахъ и, вообще, въ томъ случаѣ, когда располагаютъ лишь одной силой, охлажденіе въ E можно производить обыкновенными охладительными растворами—ледъ и морская соль, ледъ и хлористый кальцій.

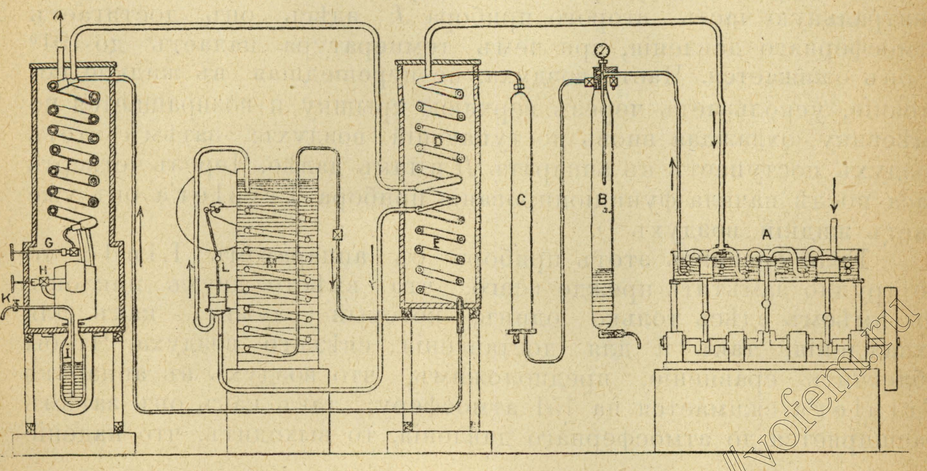
[5]) Что даетъ для средней работоспособности машины величину въ 8 литровъ жидкаго воздуха въ часъ.

Какъ не трудно заключить изъ предыдущаго, машина Linde состоитъ изъ двухъ цикловъ: первый циклъ *охлажденія*, требуетъ въ часъ сжатія отъ 50 до 200 килограммовъ воздуха, объемъ котораго, разсчитанный для атмосфернаго давленія, равенъ 76 кубическимъ метрамъ, откуда можно вычислить, что этотъ циклъ поглощаетъ въ часъ работу въ 4 лошадиныхъ силы; второй циклъ, служащій для *питанія* машины воздухомъ, долженъ поглотить 19 кубическихъ метровъ въ часъ и сжать ихъ до 200 килограммовъ, чтобы возмѣстить потерю воздуха черезъ краны *G* и *H*; это даетъ работу 3,8 лошадиныхъ силъ въ часъ. Такъ что въ суммѣ мы получаемъ теоретическую работу въ 7,8 лошадиныхъ силъ. Въ дѣйствительности же, фигурировавшая на Парижской Выставкѣ машина поглощала въ часъ 12 лошадиныхъ силъ, т. е., коэффиціентъ полезнаго дѣйствія машины составлялъ 64%.

Кромѣ того, слѣдуетъ еще прибавить работу въ 3 лошадиныхъ силы, которую поглощаетъ машина съ амміакомъ, благодаря дѣйствію которой получаются 8 литровъ жидкаго воздуха въ часъ; безъ нея аппаратъ Linde давалъ бы только 5 литровъ. Такимъ образомъ, добыча выражается въ самомъ дѣлѣ слѣдующей величиной:

$$\frac{8}{12+3}=\frac{8\ \text{литровъ}}{15\ \text{лошадиныхъ силъ}}\ \text{въ часъ} =$$

$$= 0{,}533\ \text{литровъ при помощи одной лошадиной силы въ часъ.}$$



Фиг. 1.—*Схема машины Linde для ожиженія воздуха.* — *A* —насосъ, состоящій изъ трехъ цилиндровъ; онъ всасываетъ воздухъ извнѣ и прогоняетъ его въ самую машину. *B*—сосудъ для очищенія воздуха отъ водяныхъ паровъ. *C*—трубка съ хлористымъ кальціемъ. *D*—воздушный холодильникъ. *E*—холодильникъ съ амміакомъ. ***L***—принадлежащій къ нему насосъ. ***M***—змѣевикъ, въ которомъ амміакъ охлаждается въ водяной ваннѣ. ***F***—послѣдній змѣевикъ, состоящій изъ трехъ концентрическихъ трубокъ. *G*—первый регулирующій кранъ. *H*—второй регулирующій кранъ. *J*—коллекторъ для ожиженнаго воздуха. *K*—отводной кранъ.

2. — *Приборъ Tripler'а.*

Воздухъ, поступающій въ этотъ аппаратъ, проводится предварительно черезъ водяную ванну и насыщается здѣсь парами; послѣ этого онъ поступаетъ въ насосы *A*, *B*, *C* (см. фиг. 2), гдѣ подвергается послѣдовательному сжатію. Въ первомъ цилиндрѣ давленіе достигаетъ 5,3 атмосферъ, во второмъ 27,7, и въ третьемъ, наконецъ, 160 атмосферъ [6]). Послѣ каждаго изъ первыхъ двухъ сжиманій воздухъ поступаетъ въ *D*, гдѣ онъ охлаждается протекающей водой и приводится къ первоначальной температурѣ въ 13⁰ приблизительно.

Послѣ третьяго сжатія воздухъ приводится въ *E* къ температурѣ-17,8⁰ и освобождается отъ паровъ воды, которые превращаются въ ледъ; по всей вѣроятности, это достигается примѣненіемъ воднаго раствора хлористаго кальція, который охлаждается воздухомъ ускользнувшимъ отъ ожиженія, но не потерявшимъ еще всего заключающагося въ немъ холода. Сжатый до 170 атмосферъ воздухъ очищается, прежде всего, отъ заключавшейся въ немъ пыли и жировъ въ *сепараторѣ F*; затѣмъ онъ поступаетъ, наконецъ, въ *аппараты для ожиженія H* и *J*. Первый изъ нихъ состоитъ, вѣроятно, изъ мѣдныхъ концентрическихъ трубокъ, въ которыхъ поступающій изъ *F* воздухъ охлаждается возвращающимся, ускользнувшимъ отъ ожиженія. Снѣгъ, образующійся при охлажденіи водяныхъ паровъ, заключающихся въ воздухѣ, собирается на днѣ аппарата; высушенный же воздухъ, охладившись до-73,3⁰, проходитъ черезъ особый клапанъ въ центральную часть второго прибора *J*; здѣсь онъ достигаетъ атмосфернаго давленія, при чемъ температура падаетъ до-191⁰ и онъ ожижается. Часть воздуха, не перешедшая въ жидкое состояніе, ускользаетъ черезъ верхнюю крышку и возвращается по змѣевику, охлаждая вновь поступающій воздухъ; затѣмъ этотъ воздухъ поступаетъ въ аппаратъ *H* и такъ далѣе. Черезъ четверть часа послѣ начала функціонированія прибора Tripler'а онъ уже даетъ жидкій воздухъ [7]).

Если сравнить этотъ приборъ съ аппаратомъ Linde, то не трудно замѣтить прежде всего, что вмѣсто двухъ цикловъ, мы имѣемъ здѣсь только одинъ, который служитъ какъ для охлажденія, такъ и для доставленія свѣжаго воздуха. Чтобы облегчить сравненіе, предположимъ, что воздухъ въ аппаратѣ Tripler'а сжимается на 151 атмосферу; такъ какъ онъ затѣмъ расширяется до атмосфернаго давленія, то выходитъ, что паденіе

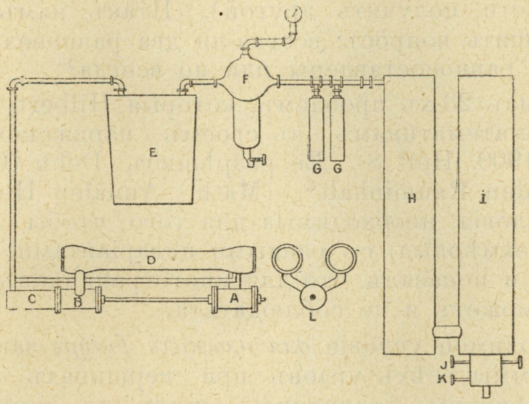
---

[6]) Давленія эти равны по Siebert'у соотвѣтственно 80, 415 и 2500 *фунтамъ* на квадратный футъ; атмосферному же давленію соотвѣтствуетъ приблизительно 15 *фунтовъ* на кв. футъ. См. книгу A. Siebert'а: *Ice and Refrigeration*, octobre 1900, pp. 117—120,— изъ которой я заимствовалъ многія свѣдѣнія о машинѣ Tripler'а.

[7]) Приборъ Tripler'а, по всей вѣроятности, въ усовершенствованномъ видѣ, былъ недавно описанъ въ „*Zeitschrift für comprimirte und flüssige Gase*“, B. IV, стр. 157.

давленія такое же точно, какъ въ машинѣ Linde, гдѣ давленіе падаетъ съ 200 килограммовъ на квадратный центиметръ до 50 [8]). Слѣдовательно, для того же количества циркулирующаго въ аппаратѣ воздуха количество ожиженнаго воздуха должно быть точно такое же какъ и въ машинѣ Linde, т. е. 5 литровъ въ часъ, что давалъ описанный выше приборъ безъ особаго холодильника, требующаго отдѣльной силы; при этомъ мы предполагаемъ, что части *H* и *J* машины Tripler'а такъ же хорошо изолированы отъ дѣйствія внѣшняго тепла, какъ часть *F* (см. фиг. 1) машины Linde. Машина Tripler'а, въ которой воздухъ не возвращается въ насосъ, какъ въ приборѣ Linde, требуетъ, такимъ образомъ, затраты энергіи, достаточной для того, чтобы сжать 95 кубическихъ метровъ воздуха отъ 1 до 151 атмосферъ, т. е. теоретически работы 18,2 лошадиныхъ силъ въ то время, какъ аппаратъ Linde требуетъ лишь 7,8 лошадиныхъ силъ, или въ 2,3 раза меньше.

Машина Tripler'а, экспонированная на Выставкѣ, производила круглымъ числомъ 10 литровъ жидкаго воздуха въ часъ и поглощала почти 55 лошадиныхъ силъ; это даетъ добычу 0,182 литра въ часъ при помощи одной лошадиной силы, машина же Linde безъ независимаго холодильнаго аппарата даетъ 5 литровъ при помощи 12 лошадиныхъ силъ, или 0,417 литра въ часъ при помощи одной лошадиной силы. Такъ что отношеніе практическихъ добычъ приблизительно то же, что и отношеніе теоретически вычисленныхъ работъ обоихъ приборовъ.



Фиг. 2.—*Схема машины Tripler'а для ожиженія воздуха.* — *ABC*—насосъ. *D*—холодильникъ съ проточной водой. *E*—второй холодильникъ. *F*—сепараторъ. *G*, *G*—трубки, въ которыхъ собирается ожиженный воздухъ. *H*—аппаратъ для пониженія температуры. *i*—аппаратъ для ожиженія воздуха. *J*—кранъ, управляющій освобождающимъ клапаномъ. *K*—отводный кранъ.

[8]) При чемъ мы подставили вмѣсто 1,033 килограмма, равныхъ одной атмосферѣ, давленіе въ 1 килограммъ на кв. центиметръ.

(Продолженіе слѣдуетъ).

Этюды по основаніямъ геометріи.

Преобразованіе многоугольниковъ и многогранниковъ.

С. Рейтера въ Одессѣ.

*(Продолженіе *).*

Теперь намъ предстоитъ изслѣдовать: достаточны или недостаточны обычныя опредѣленія равенства и неравенствъ въ примѣненіи къ трехмѣрнымъ фигурамъ для того, чтобы на нихъ можно было построить систему измѣренія объемовъ многогранниковъ? Другими словами: при данныхъ на стр. 224 опредѣленіяхъ будетъ ли изъ всякихъ двухъ многогранниковъ одинъ либо равенъ, либо больше, либо меньше другого? Быть можетъ, встрѣчаются случаи, когда между ними нельзя установить ни одного изъ разсматриваемыхъ соотношеній: такой случай, напримѣръ, имѣлъ бы мѣсто, если бы существовали два равновеликихъ, но не равносоставленныхъ многогранника. Что ни одинъ изъ нихъ не могъ бы быть въ этомъ случаѣ больше или меньше другого, это (какъ показано въ № 319 „В. О. Ф.“ на стр. 154—155) слѣдуетъ изъ равенства ихъ инваріантовъ. А равными ихъ также нельзя было бы назвать, такъ какъ мы предположили ихъ неравносоставленными (т. е., такими, что мы никакъ не можемъ, разбивъ одинъ изъ многогранниковъ на конечное число частей и затѣмъ сложивъ эти части, получить другой). Итакъ, намъ нужно для нашей цѣли рѣшить вопросъ: всегда-ли два равновеликихъ многогранника также равносоставлены или не всегда?

Это одна изъ 23-хъ проблемъ, которыя Hilbert предложилъ на разрѣшеніе математикамъ въ своемъ парижскомъ докладѣ (Gött. Nachr. 1900. Heft 8). Ее разрѣшилъ Dehn (Carlsruhe) въ статьѣ „Ueber den Rauminhalt“ (Math. Annalen Heft 3. 1901). Онъ нашелъ условія, необходимыя для того, чтобы двѣ фигуры (плоскія или трехмѣрныя) съ равными инваріантами были равносоставленными, и показалъ, что для многогранниковъ это необходимое условіе можетъ и не соблюдаться.

Это необходимое условіе *для плоскихъ фигуръ* заключается въ томъ, чтобы суммы всѣхъ угловъ при вершинахъ той и другой сравниваемой фигуры отличались другъ отъ друга на четное число прямыхъ угловъ, а для многогранниковъ въ томъ, чтобы между всѣми двугранными углами σ_1, σ_2, ..., σ_n перваго и всѣми двугранными углами σ'_1, σ'_2, ..., σ'_p второго существовало соотношеніе вида:

$$\nu_{\sigma_1}\sigma_1+\nu_{\sigma_2}\sigma_2+\ldots-(\nu_{\sigma'_1}\sigma'_1+\nu_{\sigma'_2}\sigma'_2+\ldots)=\nu\pi, \quad \text{(I)}$$

гдѣ всѣ коэффиціенты (ν съ указателями и ν безъ указателя) суть нѣкоторыя цѣлыя положительныя числа.

*) См. № 322 „Вѣстника“.

Что касается плоскихъ фигуръ, то для нихъ вышеуказанное условіе выполняется всегда, ибо сумма угловъ при вершинахъ многоугольника равна четному числу прямыхъ угловъ, и разность двухъ подобныхъ суммъ также равна четному числу прямыхъ угловъ. Это условіе само по себѣ не представляетъ никакого интереса и важности, такъ какъ мы, не пользуясь имъ, исчерпали вопросъ о равносоставленныхъ многоугольникахъ. Но, въ виду того, что выводъ его представляетъ сходство съ выводомъ необходимаго условія для равносоставленности многогранниковъ, будучи гораздо проще этого послѣдняго, мы приведемъ и его.

Пусть многоугольникъ P разложенъ какимъ-либо образомъ на составляющіе многоугольники. Найдемъ, чему равна сумма угловъ при вершинахъ всѣхъ ихъ. Будемъ производить сложеніе угловъ слѣдующимъ образомъ: сначала соберемъ въ отдѣльныя группы всѣ углы, прилежащіе къ каждой вершинѣ, а потомъ сложимъ всѣ эти частныя суммы. Вершины многоугольниковъ лежатъ либо внутри фигуры P, либо на периферіи, но не на вершинахъ P, либо на самихъ вершинахъ фигуры P. Въ первомъ случаѣ сумма угловъ при вершинахъ равна либо 2π, либо π(π — когда разсматриваемая вершина лежитъ на сторонѣ одного изъ смежныхъ многоугольниковъ), во второмъ случаѣ она равна π, и въ третьемъ—углу нашего многоугольника P. Сложивъ всѣ частныя суммы, отвѣчающія первому и второму случаю, получимъ нѣкоторое цѣлое число угловъ π, $n\pi$. Сложивъ группы, отвѣчающія третьему случаю, получимъ сумму S угловъ многоугольника P. Поэтому, искомая сумма Σ всѣхъ угловъ составляющихъ многоугольниковъ равна $S+n\pi$.

Допустимъ теперь, что мы имѣемъ два равносоставленныхъ многоугольника P и P′. Разобьемъ и тотъ и другой на одинаковое число соотвѣтственно конгруэнтныхъ частей. Тогда будемъ имѣть: $\Sigma=S+n\pi$ и $\Sigma_1=S_1+n_1\pi$, гдѣ Σ и Σ_1 обозначаютъ суммы угловъ при вершинахъ многоугольниковъ, составляющихъ P и P′, S и S_1 суть суммы угловъ при вершинахъ P и P′, а n и n_1—нѣкоторыя цѣлыя числа, но суммы Σ и Σ_1 различаются развѣ только порядкомъ своихъ слагаемыхъ и поэтому равны.

Въ такомъ случаѣ

$$S+n\pi=S_1+n_1\pi$$

или

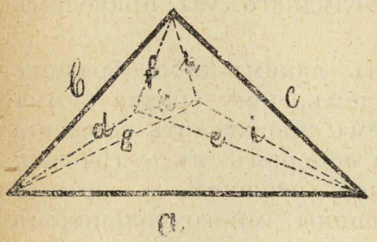
$$S-S_1=(n_1-n)\pi=k\pi,$$

что мы и имѣли въ виду доказать.

Теперь перейдемъ къ многогранникамъ.

Разобьемъ многогранникъ P на составляющіе многогранники, и подобно тому, какъ мы это дѣлали въ предыдущемъ случаѣ, будемъ складывать ихъ двугранные углы при всѣхъ ребрахъ. Каждая группа двугранныхъ угловъ при общемъ ребрѣ дастъ въ суммѣ либо 2π, либо π, либо одинъ изъ двугранныхъ угловъ многогранника P: 2π, когда общее ребро со всѣхъ сторонъ окружено углами многогранниковъ; π, когда оно лежитъ на грани одного изъ составляющихъ, либо на грани даннаго многогранника—т. е., когда приходится складывать двугранные углы лишь по одну сторону плоскости; наконецъ, одинъ изъ угловъ P получится тогда, когда разсматриваемое ребро совпадаетъ съ ребромъ P.

Рис. I. Тетраэдръ P (котораго ребрамъ a, b, c, d, e, f отвѣчаютъ числа 1, 2, 3, 4, 5, 6) разбитъ на части: I ($bfdghk$—1, 2, 3, 4, 5, 6), II ($cefihk$ — 7, 8, 9, 10, 11, 12), III ($aedgki$ — 13, 14, 15, 16, 17, 18) и IV ($abcghi$—19, 20, 21, 22, 23, 24). Обозначивъ каждый двугранный уголъ тетраэдра P буквой σ, имѣющей указателемъ то число, которое относится къ ребру разсматриваемаго двуграннаго угла, каждый двугранный уголъ составляющаго тетраэдра обозначивъ подобнымъ же образомъ при помощи буквы τ, получимъ:



Фиг. 1.

$$\tau_6+\tau_{12}+\tau_{17}=2\pi \text{ (при ребрѣ } k)$$

$$\tau_5+\tau_{11}+\tau_{23}=2\pi \text{ (при ребрѣ } h)$$

$$\tau_{10}+\tau_{18}+\tau_{24}=2\pi \text{ (при ребрѣ } i)$$

$$\tau_4+\tau_{16}+\tau_{22}=2\pi \text{ (при ребрѣ } g)$$

$$\tau_1+\tau_{20}=\sigma_2 \text{ (при ребрѣ } b)$$

$$\tau_{13}+\tau_{19}=\sigma_1 \text{ (при ребрѣ } a)$$

$$\tau_7+\tau_{21}=\sigma_3 \text{ (при ребрѣ } c)$$

$$\tau_3+\tau_{15}=\sigma_4 \text{ (при ребрѣ } d)$$

$$\tau_8+\tau_{14}=\sigma_5 \text{ (при ребрѣ } e)$$

$$\tau_2+\tau_9=\sigma_6 \text{ (при ребрѣ } f)$$

Отсюда $\tau_1+\tau_2+ \ldots\ldots +\tau_{24}=\sigma_1+\sigma_2+ \ldots\ldots +\sigma_6+4\,.\,2\pi$.

Разобранный примѣръ характеризуется тѣмъ, что ребро составляющаго многогранника, прилегая къ ребру многогранника P или къ ребру другого составляющаго мнзгогранника, всегда совпадаетъ съ нимъ цѣликомъ; иными словами, здѣсь ребра не могутъ совпадать частями, а всегда совпадаютъ цѣликомъ. При такомъ расположенiи сумма двугранныхъ угловъ составляющихъ многогранниковъ отличается отъ суммы двугранныхъ угловъ многогранника P на цѣлое число π. Отсюда выводъ совершенно аналогичный тому, который былъ сдѣланъ относительно многоугольниковъ:

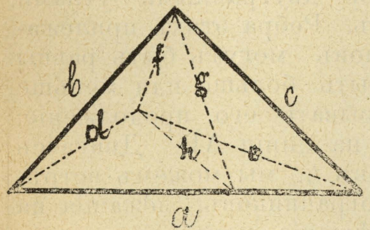
Теорема XI. *Если два многогранника равносоставленны и, при разложенiи ихъ на одинаковые составляющiе многогранники, два ребра никогда не прилегаютъ другъ къ другу частями, а всегда покрываютъ другъ друга цѣликомъ, то суммы Σ и Σ' двугранныхъ угловъ этихъ многогранниковъ отличаются другъ отъ друга на цѣлое число* π.

Но при разложенiи многогранника на составляющiе многогранники случается иногда, что два ребра покрываютъ другъ друга не цѣликомъ, а *частями;* въ такомъ случаѣ, складывая двугранные углы, прилежащiе къ общему ребру, приходится считать одинъ и тотъ-же уголъ нѣсколько разъ. Это становится яснымъ при разсмотрѣнiи многогранниковъ, изображенныхъ на рисункахъ (2) и (3).

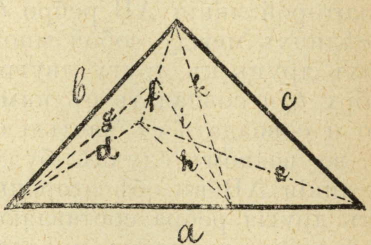
Тетраэдръ P, котораго ребрамъ *abcdef* соотвѣтствуютъ числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, разбитъ на тетраэдры: I (*abgdfh*—1, 2, 3, 4, 5, 6) и II (*agcfhe*—7, 8, 9, 10, 11, 12):

$$\tau_6+\tau_{11}=\pi;\ \tau_3+\tau_8=\pi;\ \tau_5+\tau_{10}=\sigma_6;\ \tau_1=\tau_7=\sigma_1;\ \tau_2=\sigma_2; \text{ и т. д.}$$

$$\tau_1+\tau_2+\ \ldots\ +\tau_{12}=2\sigma_1+\sigma_2+\ \ldots\ +\sigma_6+2.\pi.$$



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Тетраэдръ P (*abcdef* — 1, 2, 3, 4, 5, 6) разбитъ на 3 тетраэдра: I (*ackfhe*—1, 2, 3, 4, 5, 6), II (*abkgfi* —7, 8, 9, 10, 11, 12) и III (*adhgfi*—13, 14, 15, 16, 17, 18):

$$\tau_3+\tau_9=\pi;\ \tau_{10}+\tau_{16}=\pi;\ \tau_{12}+\tau_{18}=\pi;\ \tau_5+\tau_{15}=\pi;\ \tau_1=\tau_7+\tau_{13}=\sigma_1;$$

$$\tau_4+\tau_{11}=\sigma_6;\ \tau_4+\tau_{17}=\sigma_6; \text{ и т. д.}$$

$$\tau_1+\tau_2+\tau_3+2\tau_4+\tau_5+\tau_6+\tau_7+\ \ldots\ +\tau_{18}=2\sigma_1+\sigma_2+\ \ldots\ +2\sigma_6+4\pi.$$

Такимъ образомъ, при сложенiи двугранныхъ угловъ получается равенство вида:

$$a_1\tau_1+a_2\tau_2+\ \ldots\ =b_1\sigma_1+b_2\sigma_2+\ \ldots\ +b\pi,$$

котораго лѣвая часть есть однородная линейная функцiя съ цѣлыми коэффицiентами отъ угловъ, обозначаемыхъ посредствомъ буквы τ, а правая часть есть также однородная цѣлая функцiя съ цѣлыми коэффицiентами отъ угловъ, обозначаемыхъ посредствомъ буквы σ и отъ угла π.

Если два данныхъ многогранника P и P′ могутъ быть разбиты на одинаковое число соотвѣтственно конгруэнтныхъ многогранниковъ, то, въ силу вышесказаннаго, будутъ существовать такія соотношенія:

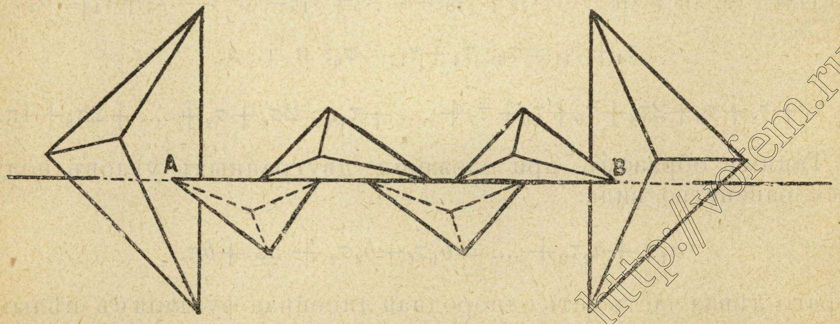
$$(\alpha) \ldots\ldots a_1\tau_1 + a_2\tau_2 + \ldots\ldots = b_1\sigma_1 + b_2\sigma_2 + \ldots + b\pi$$

$$(\alpha') \ldots\ldots a'_1\tau_1 + a'_2\tau_2 + \ldots\ldots = b'_1\sigma'_1 + b'_2\sigma'_2 + \ldots + b'\pi.$$

Если бы коэффиціенты a_1, a_2 .... были соотвѣтственно равны коэффиціентамъ a'_1, a'_2, ..., то мы, приравнявъ правыя части двухъ написанныхъ равенствъ, получили бы требуемое соотношеніе (I).

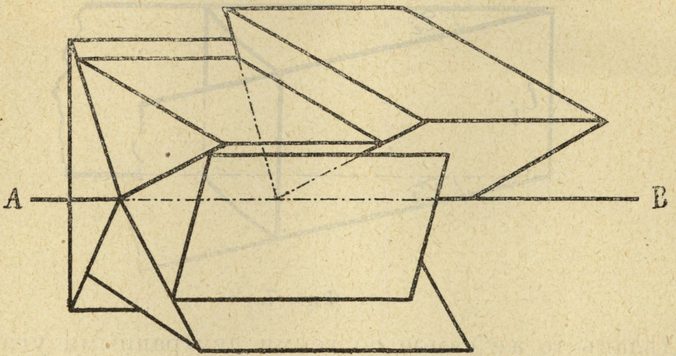
Мы покажемъ, что въ случаѣ, если данные многогранники равносоставлены, можно, дѣйствительно, всегда получить два такихъ соотношенія вида (α) и (α'), что лѣвыя ихъ части будутъ тожественны одна съ другой.

Пусть многогранникъ P съ двугранными углами σ_1, σ_2, ... и соотвѣтствующими имъ ребрами S_1, S_2, ... разложенъ на составляющіе многогранники, которыхъ двугранные углы суть τ_1, τ_2,... и соотвѣтствующія имъ ребра t_1, t_2, ... Возьмемъ лежащее на нѣкоторой линіи AB ребро t_i, окруженное двугранными углами сосѣднихъ между собой многогранниковъ. Ребра этихъ прилежащихъ другъ къ другу двугранныхъ угловъ могутъ быть равны ребру t_i и совпадать съ ними, могутъ быть больше или меньше его и совпадать съ частью его или покрывать его продолженіе; но, во всякомъ случаѣ, будутъ лежать на линіи AB. Двигаясь по линіи AB въ обѣ стороны отъ концовъ t_i, мы можемъ встрѣчать другія ребра составляющихъ многогранниковъ, лежащія на этой линіи, и будемъ продолжать перемѣщеніе, пока мы можемъ двигаться по какому-нибудь ребру; наконецъ, непрерывная послѣдовательность реберъ, покрывающихъ безъ промежутка линію AB, должна прекратиться; это случится тогда, когда линія AB упрется въ какую-нибудь плоскость грани составляющаго или даннаго многогранника, какъ это изображено на рис. 4.



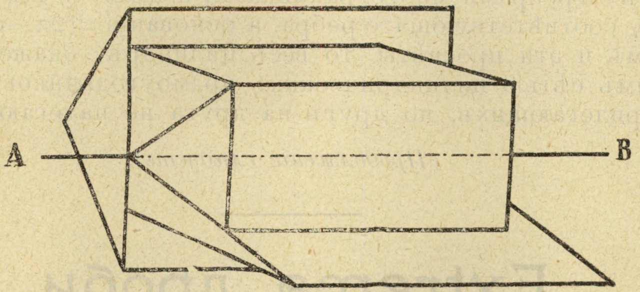
Фиг. 4.

Въ точкахъ встрѣчи поставимъ буквы A и B и отрѣзокъ AB назовемъ *осью реберъ*. Эта „ось реберъ“ въ нѣкоторыхъ своихъ частяхъ можетъ быть окружена двугранными углами группы сосѣднихъ многогранниковъ, которые (углы), такимъ образомъ, составляютъ въ суммѣ 2π (см. рис. 5); въ нѣкоторыхъ же частяхъ



Фиг. 5.

оси, а именно, въ тѣхъ, которыя совпадаютъ съ плоскостью грани какого-нибудь составляющаго или даннаго многогранника—но не совпадаютъ съ ребромъ, принадлежащимъ этой грани—она можетъ быть окружена двугранными углами, лежащими по одну сторону этой плоскости, которыхъ сумма въ такомъ случаѣ равна π (см. рис. 6). Наконецъ, часть линіи AB можетъ совпасть съ ребромъ S_i даннаго многогранника P.

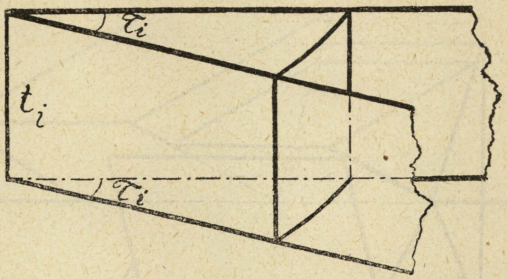


Фиг. 6.

Въ этомъ случаѣ сложеніе двугранныхъ угловъ, прилегающихъ къ этой части, даетъ уголъ σ_i многогранника P.

Вокругъ оси AB опишемъ прямой круглый цилиндръ, котораго радіусъ равенъ единицѣ.

Если мы затѣмъ на любомъ ребрѣ t_i, отвѣчающемъ двугранному углу τ_i, построимъ, какъ на основаніи, двѣ прямоугольныя полосы, лежащія въ прямыхъ этого угла, то такія полосы вырѣжутъ на поверхности цилиндра цилиндрическій прямоугольникъ, имѣющій высотой прямую, равную ребру t_i, и основаніемъ дугу окружности, равную τ_i (рис. 7).



Фиг. 7.

Сдѣлавъ то же самое со всѣми двугранными углами, прилегающими къ линіи AB, мы покроемъ часть поверхности нашего цилиндра цилиндрическими прямоугольниками, отвѣчающими этимъ угламъ, при чемъ высота каждаго равна ребру соотвѣтствующаго угла, а длина основанія численно равна этому углу. Но цилиндръ будетъ покрытъ, можетъ быть, не весь. На немъ могутъ оказаться просвѣты въ формѣ цилиндрическихъ прямоугольниковъ: одни изъ нихъ лежатъ противъ тѣхъ частей оси, которыя совпадаютъ съ плоскостью (но не съ ребромъ) какой-нибудь грани (рис. 6) и имѣютъ высотами длины h_1, h_2 и т. д., этихъ частей, а основаніями дуги, равныя π; другіе прямоугольники—просвѣты—лежатъ противъ тѣхъ частей оси, которыя совпадаютъ съ ребрами многогранника P, и имѣютъ высоту, равную длинѣ S_i соотвѣтствующаго ребра, а основаніе $=(2\pi-\sigma_i)$. Если мы заполнимъ и эти просвѣты, то весь цилиндръ окажется сплошь покрытымъ сѣтью цилиндрическихъ прямоугольниковъ, другъ къ другу прилегающихъ, но другъ на друга не налегающихъ.

(Продолженіе слѣдуетъ).

Extrema дроби

$$\frac{ax^2+bx+c}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}.$$

А. Мошковича въ Одессѣ.

Вопросы о наибольшихъ и наименьшихъ значеніяхъ выраженій являются несомнѣнно труднѣйшими въ математическомъ анализѣ, и исторически рѣшеніе ихъ связано съ созданіемъ величайшихъ математическихъ методовъ. Въ предѣлахъ же элементарной математики, ограничивающейся въ области рѣшенія уравненій уравненіями 2-ой степени, вопросы эти могутъ быть рѣшены вполнѣ въ очень ограниченномъ числѣ случаевъ.

Мы имѣемъ въ виду въ настоящей замѣткѣ предложить новое рѣшеніе вопроса о наибольшихъ и наименьшихъ значеніяхъ дроби

$$\frac{ax^2+bx+c}{\alpha x^2+\beta x+\gamma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

представляющееся намъ сравнительно довольно простымъ *).

Мы будемъ исходить изъ слѣдующей леммы.

Лемма. *Сумма двухъ перемѣнныхъ y и z, произведеніе которыхъ есть величина постоянная c, имѣетъ значенія extrem'a въ томъ и только въ томъ случаѣ, если $c>0$. Эти extrem'a достигаются для равныхъ значеній перемѣнныхъ $y=z$ и представляютъ maximum, если при этомъ значенія перемѣнныхъ отрицательны, minimum въ противномъ случаѣ.*

Въ самомъ дѣлѣ, принимая во вниманіе, что, согласно условію леммы, произведеніе yz сохраняетъ постоянное значеніе c, мы получимъ изъ тождествъ:

$$(y+z)^2=(y-z)^2+4yz=(y-z)^2+4c$$

неравенство

$$(y+z)^2 \geqq 4c,$$

причемъ знакъ $=$ имѣетъ мѣсто въ томъ и только въ томъ случаѣ, когда $x=y$. Отсюда слѣдуетъ, что

$$(y+z)^2$$

достигаетъ наименьшаго значенія для значенія $y=z$, и слѣдовательно, въ томъ и только въ томъ случаѣ, когда $c>0$; при тѣхъ же условіяхъ достигаетъ наименьшаго значенія аблолютная величина суммы $(y+z)$. Ч. и т. д.

Задача. *Найти extrem'a выраженія*

$$mx+n+\frac{C}{mx+n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Рѣшеніе. Обозначивъ $mx+n$ черезъ y, а $\frac{C}{mx+n}$ черезъ z, замѣтимъ, что

$$yz=C$$

т. е., произведеніе yz сохраняетъ постоянную величину C. Примѣняя поэтому къ рѣшенію этой задачи доказанную лемму, мы приходимъ къ заключенію, что выраженіе (2) имѣетъ значенія extrem'a въ томъ и только въ томъ случаѣ, когда постоянная C больше нуля, и достигаетъ ихъ для значенія перемѣнной x, удовлетворяющихъ уравненію

$$mx+n=\frac{C}{mx+n},$$

*) Идея этого рѣшенія сообщена автору С. О. Шатуновскимъ.

т. е., для значеній

$$x_1 = \frac{-n+\sqrt{C}}{m},\ x_2 = \frac{-n-\sqrt{C}}{m}.$$

Такъ какъ при этомъ для значеній $x=x_1$, сумма

$$y+z=\frac{2C}{+\sqrt{C}}=2\sqrt{C}$$

положительна, а для значенія $x=x_2$, сумма

$$y+z=\frac{2C}{-\sqrt{C}}=-2\sqrt{C}$$

отрицательна, то въ первомъ случаѣ имѣетъ мѣсто minimum, а во второмъ maximum.

Сопоставляя предыдущіе результаты, мы можемъ высказать слѣдующее положеніе:

Теорема I. *Выраженіе (2) вовсе не достигаетъ extrem'а, если $C<0$; если же $C>0$, то это выраженіе имѣетъ какъ minimum $2\sqrt{C}$, такъ и maximum $-2\sqrt{C}$, которыхъ достигаетъ перваго для значенія $x=x_1$, а второго для значенія $x=x_2$.*

Рѣшеніе этой задачи является въ то же время рѣшеніемъ вопроса объ extrem'ѣ дроби (1). Дѣйствительно, обративъ ее въ непрерывную:

$$\frac{ax^2+bx+c}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=\frac{a}{\alpha}+\cfrac{1}{m_1x+n_1+\cfrac{C}{mx+n}} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

гдѣ

$$m_1=\frac{\alpha^2}{b\alpha-a\beta},\quad n_1=\frac{\alpha\beta(b\alpha-a\beta)-\alpha^2(c\alpha-a\gamma)}{(b\alpha-a\beta)^2},$$

$$m=\frac{b\alpha-a\beta}{\alpha},\quad n=\frac{c\alpha+a\gamma}{\alpha} \qquad (4)$$

$$C=\frac{\alpha^2(c\alpha-a\gamma)^2-\alpha\beta(c\alpha-a\gamma)(b\alpha-a\beta)+\gamma\alpha(b\alpha-a\beta)^2}{(b\alpha-a\beta)^2},$$

произведемъ въ правой части слѣдующія простыя преобразованія

$$\frac{a}{\alpha}+\cfrac{1}{m_1x+n_1+\cfrac{C}{mx+n}}=\frac{a}{\alpha}+\cfrac{\cfrac{m}{m_1}}{\left(m_1x+n_1+\cfrac{C}{mx+n}\right)\cfrac{m}{m_1}}=$$

$$=\frac{a}{\alpha}+\cfrac{\cfrac{m}{m_1}}{\left(m_1x+n_1+\cfrac{C}{mx+n}\right)\cfrac{m}{m_1}+n-n}=$$

$$=\frac{a}{\alpha}+\frac{\dfrac{m}{m_1}}{mx+n+\dfrac{C\dfrac{m}{m_1}}{mx+n}+\dfrac{mn_1-m_1n}{m_1}}.$$

Очевидно, что послѣднее выраженіе достигаетъ maximum'a, когда выраженіе

$$mx+n+\frac{C\cdot\dfrac{m}{m_1}}{mx+n}\quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

достигаетъ minimum'a и, наоборотъ, достигаетъ minimum'a, когда выраженіе (5) достигаетъ maximum'a, а потому (см. теорему):

Дробь (1) имѣетъ значенія extrem'a въ томъ и только въ томъ случаѣ, когда

$$C\frac{m}{m_1}=\frac{\alpha(c\alpha-a\gamma)^2-\beta(c\alpha-a\gamma)(b\alpha-a\beta)+\gamma(b\alpha-a\beta)^2}{\alpha^2}$$

больше нуля и притомъ достигаетъ ихъ: maximum'a $2\sqrt{C}$, для значенія

$$x_1=\frac{-n+\sqrt{C}}{m}$$

и minimum'a $-2\sqrt{C}$ для значенія

$$x_2=\frac{-n-\sqrt{C}}{m}.$$

При разложеніи дроби (1) въ непрерывную, какъ извѣстно, пользуются операціей послѣдовательнаго дѣленія, а потому соотношенія (4) теряютъ смыслъ въ случаяхъ $\alpha=0$, и $b\alpha-a\beta=0$. Остановимся подробнѣй на одномъ изъ нихъ, именно, на случаѣ

$$\alpha=0.$$

Случай 1. $\beta\neq 0$ и $\gamma\neq 0$. Дробь (1) обращается въ дробь

$$\frac{ax^2+bx+c}{\beta x+\gamma}$$

и по разложеніи въ непрерывную:

$$\frac{a}{\beta}x+\frac{b\beta-a\gamma}{\beta^2}+\frac{\dfrac{c\beta^2-b\beta\gamma+a\gamma^2}{\beta^2}}{\beta x+\gamma}.$$

Вопросъ объ extrem'ѣ подобныхъ выраженій уже разсмотрѣнъ нами.

Случай 2. $\alpha=\beta=0$. Дробь (1) обращается въ цѣлый трехчленъ

$$\frac{a}{\gamma}x^2+\frac{b}{\gamma}x+\frac{c}{\gamma}=a_1x^2+b_1x+c_1,$$

тождественно равный выраженію

$$\frac{(a_1x^2+b_1x+c_1)4a_1+b_1^2-b_1^2}{4a_1}=\frac{(2a_1x+b_1)^2+(4a_1c_1-b_1^2)}{4a_1}.$$

Если $4ac-b^2\geqq 0$, т. е., если корни разсматриваемаго трехчлена мнимые или равные, то абсолютная величина послѣдняго выраженія, очевидно, достигаетъ minimum'а, когда

$$2a_1x+b_1=0$$

т. е., когда

$$x=-\frac{b_1}{2a_1}$$

а самое выраженіе достигаетъ minimum'а, если $a_1>0$ и maximum'а, если $a_1<0$.

Если же $4ac-b^2<0$, т. е., корни вещественные и различные, то абсолютная величина разсматриваемаго выраженія достигаетъ maximum'а при тѣхъ же условіяхъ, и слѣдовательно, трехчленъ

$$a_1x^2+b_1x+c_1$$

достигаетъ maximum'а, если $a_1>0$ и minimum'а, если $a_1<0$.

Остальные же случаи не представляютъ затрудненія и приводятся тѣмъ же путемъ дѣленія числителя на знаменателя либо къ одному изъ разсмотрѣнныхъ, либо къ изслѣдованію extrem'а выраженія вида

$$mx+n.$$

Извѣстно, что это послѣднее не достигаетъ вовсе значеній extrem'а.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Наблюденія полярныхъ сіяній въ Геттингенѣ.—Проф. Wiechert, директоръ геофизической обсерваторіи въ Геттингенѣ, опубликовалъ недавно результаты своихъ *наблюденій надъ полярными сіяніями* *). При помощи спектроскопа ему удалось констатировать,

*) *Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, mathem.-physik. Kl., 1902, Heft 2; а также: *Physikalische Zeitschrift*, 3. Jahrgang, № 16, 1902.

что замѣтная часть ночного свѣта неба въ среднихъ широтахъ зависитъ отъ электрическихъ явленій въ верхнихъ слояхъ атмосферы. Наблюденія свои Wiechert производилъ съ 1-го ноября (н. ст.) 1901 года, и въ большое число ночей въ спектроскопѣ можно было наблюдать линію полярныхъ сіяній. Тѣ части неба, изъ которыхъ исходили лучи, наблюдаемые при помощи спектроскопа, были лишь незначительно свѣтлѣе остальныхъ и значительно менѣе свѣтлы, чѣмъ млечный путь. Только одинъ разъ, а именно, 3-го марта, яркость неба въ мѣстѣ, изъ котораго исходили лучи полярныхъ сіяній, пожалуй, превышала даже яркость млечнаго пути. Наибольшая яркость наблюдалась на высотѣ 15^0—18^0, на высотѣ 45^0 она была ужъ почти незамѣтна. Свѣтлое пятно не было ограничено рѣзкими краями, а имѣло расплывчатый видъ. Wiechert полагаетъ, что въ многія ночи земля окутана оболочкой, свѣтящейся полярнымъ свѣтомъ; если предположить, что эта оболочка лежитъ на высотѣ 40 километровъ, то полярныя сіянія должны были бы быть видимыми при помощи спектроскопа еще подъ 38^0 широты, т. е., въ Южной Италіи.

Собраніе сочиненій H. A. Rowland'a. — John-Hopkins-Университетъ въ Балтиморѣ предпринялъ изданіе Собранія всѣхъ работъ Rowland'a; изданіе это будетъ снабжено портретомъ покойнаго американскаго физика и къ нему будетъ приложена рѣчь проф. Mendenholl'я, посвященная памяти Rowland'a.— Цѣна по подпискѣ 10 рублей. Заказы слѣдуетъ направлять по адресу проф. Joseph S. Ames, John Hopkins University, Baltimore, Maryland, U. S. A.—(Physik. Zeitschr.).

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Присужденіе преміи супругамъ Curie. — *Institut de France* присудилъ изъ премій имени Desbrousses 20000 франковъ супругамъ Curie. При этомъ Академія высказала желаніе, чтобы присужденная сумма была употреблена на продолженіе изслѣдованія радія и другихъ минераловъ, испускающихъ лучи.—(Physik. Zeitschr.).

Присужденіе преміи Marconi —Academia dei Lincei присудила Marconi *за изобрѣтеніе телеграфа безъ проводовъ* 10000 лиръ.

Назначеніе Bolzmann'a.—Проф. теоретической физики Лейпцигскаго Университета Bolzmann назначенъ профессоромъ того же предмета въ Вѣнскомъ Университетѣ.

РЕЦЕНЗІИ

Успѣхи астрономіи въ XIX столѣтіи. *К. Д. Покровскаго.* Изданіе редакціи журнала „Образованіе“. Спб. 1902. 274+2 стр.

Имя К. Д. Покровскаго, автора цѣлаго ряда талантливо написанныхъ научно-популярныхъ статей, уже достаточно извѣстно всѣмъ, интересующимся въ Россіи астрономіей. Особенной извѣстностью пользуется его „Путеводитель по небу“, служащій настольной книгой русскаго любителя астрономіи.

Разсматриваемая книга уже извѣстна части публики, такъ какъ она представляетъ собою собраніе статей, печатавшихся въ журналѣ „Образованіе“.

Послѣ разсмотрѣнія наслѣдія, оставленнаго XIX вѣку по астрономіи его предшественникомъ, съ упоминаніемъ обо всѣхъ существенныхъ результатахъ, извѣстныхъ астрономамъ въ концѣ XVIII-го вѣка, авторъ переходитъ къ разсмотрѣнію развитія наблюдательныхъ средствъ въ минувшемъ столѣтіи. Извѣстно, что именно развитіе наблюдательныхъ средствъ и было причиной значительнаго прогресса въ наблюдательной астрономіи. Усовершенствованіе въ конструкціи инструментовъ было естественнымъ порядкомъ вещей, и оно и повлекло за собою главные результаты, добытые такъ называемыми визуальными наблюденіями. Разсмотрѣніе этихъ результатовъ и составляетъ содержаніе III главы книги г. Покровскаго.

Но въ XIX вѣкѣ къ визуальнымъ методамъ прибавились методы фотографическій и спектроскопическій и получилъ большое развитіе примѣнявшійся уже и въ прежнее время методъ фотометрическій.

Въ IV главѣ авторъ говоритъ объ астрофотографіи. Познакомивши съ основаніями примѣненія фотографіи къ астрономіи, г. Покровскій разсматриваетъ существенные результаты, добытые примѣненіемъ астрофотографіи къ изученію Солнца, Луны и другихъ свѣтилъ, а также и къ измѣрительной астрономіи въ разныхъ ея отдѣлахъ.

V-ая глава посвящена астрофотометріи. Въ ней авторъ знакомитъ читателя съ инструментами и методами, употребляемыми въ астрофотографіи, а затѣмъ разсказываетъ о добытыхъ результатахъ, останавливаясь особенно подробно на фотометріи планетъ.

Спектральный анализъ въ примѣненіи его къ астрономіи играетъ столь важную роль, что становится яснымъ, почему г. Покровскій посвятилъ этому вопросу двѣ слѣдующія главы. Послѣ разсмотрѣнія началъ спектральнаго анализа, г. Покровскій довольно подробно говоритъ о результатахъ, добытыхъ примѣненіемъ этого метода къ Солнцу, а затѣмъ и къ другимъ свѣтиламъ.

Въ VI-й главѣ разсмотрѣнъ вопросъ о примѣненіи спектральнаго анализа визуально, въ слѣдующей же главѣ авторъ излагаетъ результаты совмѣстнаго примѣненія спектральнаго анализа и фотографіи, т. е., спектрографіи. Достаточно вниманія авторомъ удѣляется спектрографической дѣятельности Пулковской Обсерваторіи.

Наконецъ, VIII глава посвящена теоретической астрономіи. Эта глава является, безъ сомнѣнія, самой трудной для автора, ибо не легко изложить популярно столь сложный вопросъ, требующій пониманія хотя бы началъ высшей математики и механики, даже и въ популярномъ чтеніи. Намъ кажется, что авторъ весьма удовлетворительно справился съ этой задачей. Въ разсматриваемой главѣ г. Покровскій довольно подробно излагаетъ крайне важныя работы по теоріи кометныхъ формъ и образованія метеорныхъ потоковъ нашего маститаго академика Ѳ. А. Бредихина.

Таково, въ краткихъ словахъ, содержаніе книги К. Д. Покровскаго. Особенностью въ ней является широкое вниманіе, удѣляемое авторомъ работамъ по астрономіи, произведеннымъ въ Россіи. Вообще же книга написана очень живымъ языкомъ, иллюстрирована множествомъ портретовъ и рисунковъ и довольно удачна въ чисто типографскомъ отношеніи.

Мы не сомнѣваемся въ ея широкомъ распространеніи, какъ среди любителей астрономіи, такъ и въ библіотекахъ среднихъ учебныхъ заведеній.

В. Стратоновъ.

12-го мая 1902.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 202 (4 сер.). Наименьшее кратное двухъ чиселъ равно 8100, сумма квадратныхъ корней изъ этихъ чиселъ равна 48. Найти эти числа.

Н. Готлибъ (Митава).

№ 203 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій:

$$x^2-y^2+xy+3\sqrt[3]{xy}\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}\right)^2=a,$$

$$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=b.$$

Найти дѣйствительные корни этой системы, полагая $a=1331$, $b=13$.

Н. Готлибъ (Митава).

№ 204 (4 сер.). Изъ нѣкоторой точки M ребра даннаго двуграннаго угла проведены на его граняхъ двѣ прямыя, образующія съ соотвѣственными сторонами линейнаго угла даннаго двуграннаго угла углы α и β, расположенные на граняхъ этого двуграннаго угла. 1) Вычислить уголъ между этими прямыми; 2) разсмотрѣть случай, когда данный двугранный уголъ прямой.

І. Бергеръ (Янушполь).

№ 205 (4 сер.). Найти *minimum* периметра прямоугольнаго треугольника, въ которомъ перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла на гипотенузу, имѣетъ данную длину a.

(*Bacc. lettres-math. Poitiers, novembre 1901*).

№ 206 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій:

$$a+x-y-z=b+y-z-x=c+z-x-y=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Заимств. изъ *Casopis.*

№ 207 (4 сер.). Малый поршень гидравлическаго пресса, діаметромъ въ 25 миллиметровъ, производитъ давленіе съ силою въ 50 килограммовъ. Каковъ долженъ быть діаметръ бо́льшаго поршня, чтобы производимое имъ давленіе равнялось 2500 килограммовъ?

М. Гербановскій.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 73 (4 сер.). *Рѣшить систему уравненій:*

$$\frac{x^2+x}{y^2+y}=a;\quad \frac{x^2+y}{y^2+x}=b.$$

Написавъ предложенныя уравненія въ видѣ пропорцій

$$\frac{x^2+x}{y^2+y}=\frac{a}{1},\quad \frac{x^2+y}{y^2+x}=\frac{b}{1},$$

составимъ изъ нихъ производныя пропорціи:

$$\frac{x^2+y^2+x+y}{x^2-y^2+x-y}=\frac{a+1}{a-1}\quad(1),\qquad \frac{x^2+y^2+x+y}{x^2-y^2+y-x}=\frac{b+1}{b-1}\quad(2).$$

Раздѣливъ почленно уравненія (1) и (2) одно на другое, получимъ:

$$\frac{x^2-y^2+y-x}{x^2-y^2+x-y}=\frac{(a+1)(b-1)}{(a-1)(b+1)}\quad(3),$$

или

$$\frac{x+y-1}{x+y+1}=\frac{ab+b-a-1}{ab-b+a-1}\quad(3\text{ bis}).$$

Составляя опять производящую изъ пропорціи (3 bis), находимъ:

$$\frac{x+y-1}{2}=\frac{ab+b-a-1}{2(a-b)}\quad(4),$$

откуда

$$x+y=\frac{ab-1}{a-b}\quad(5).$$

Опредѣливъ изъ уравненія (5) одно изъ неизвѣстныхъ, напр., y, подставляемъ найденныя значенія въ одно изъ предложенныхъ уравненій: получимъ квадратное уравненіе относительно y. Подставивъ найденныя изъ этого уравненія значенія y, найдемъ соотвѣтствующія значенія для x изъ уравненія (5). Сокращеніе лѣвой части равенства (3) на $x-y$ и полученіе производныхъ пропорцій изъ равенствъ (1), (2), (4) возможны лишь тогда, когда $x \neq y$, $a \neq \pm 1$, $b \neq \pm 1$, $a \neq b$. Поэтому случаи, когда $a = \pm 1$, $b = \pm 1$, $a = b$, равно какъ и предположеніе $x = y$, требуютъ особыхъ изслѣдованій, которыя предоставляемъ читателю, такъ какъ каждое изъ этихъ предположеній лишь облегчаетъ рѣшеніе предложенной системы.

П. Полушкинъ (Знаменка); *С. Кудинъ* (Москва); *Г. Огановъ* (Эривань); *Д. Коварскій* (Двинскъ); *Л. Гальперинъ* (Бердичевъ); *Б. Мерцаловъ* (Москва); *М. Поповъ* (Асхабадъ); *Н. Готлибъ* (Митава); *А. Разуваевъ* (Орелъ); *Б. Д.* (К.); *В. Гаевскій* (Луцкъ); *В. Гудковъ* (Свеаборгъ).

№ 110 (4 сер.). *Опредѣлить стороны вписуемаго въ кругъ четыреугольника* ABCD, *четыре стороны и діагональ котораго* BD, *равная данной длинѣ* a, *образуютъ ариѳметическую прогрессію. Данная діагональ, по условію, есть средній членъ этой прогрессіи, стороны же треугольниковъ (общія съ четыреугольникомъ)* ABD *и* CBD *суть соотвѣтственно два наименьшихъ и два наибольшихъ члена прогрессіи.*

Называя черезъ y знаменателя ариѳметической прогрессіи, образуемой сторонами и діагональю четыреугольника, мы можемъ всегда предположить, что члены прогрессіи расположены въ возрастающемъ порядкѣ, и потому $y > 0$.

Пусть, такимъ образомъ, $AD = a - 2y$, $AB = a - y$, $BD = a$, $BC = a + y$, $CD = a + 2y$ (1).

Пользуясь извѣстной формулой для діагонали вписаннаго въ кругъ четыреугольника, имѣемъ:

$$a = \sqrt{\frac{[(a+y)(a-y)+(a+2y)(a-2y)]\,[(a+y)(a-2y)+(a+2y)(a-y)]}{(a+y)(a+2y)+(a-y)(a-2y)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(2a^2-5y^2)\,(a^2-2y^2)}{a^2+2y^2}},$$

откуда

$$a^2 = \frac{(2a^2-5y^2)(a^2-2y^2)}{a^2+2y^2},$$

$$10y^4 - 11a^2y^2 + a^4 = 0.$$

Рѣшая это уравненіе относительно y и имѣя возможность ограничиться, какъ указано выше, положительными корнями, находимъ: $y_1 = a$, $y_2 = \frac{a\sqrt{10}}{10}$. Первый корень непригоденъ, такъ какъ, при $y = a$, (см. (1)) $AD = -a$, что не имѣетъ геометрическаго смысла. Второй же корень (см. (1)) дастъ слѣдующія значенія для четырехъ сторонъ вписаннаго четыреугольника:

$$\frac{a(5-\sqrt{10})}{5}, \quad \frac{a(10-\sqrt{10})}{10}, \quad \frac{a(10+\sqrt{10})}{10}, \quad \frac{a(5+\sqrt{10})}{5}.$$

Л. Гальперинъ (Бердичевъ); *Г. Огановъ* (Эривань); *Н. Готлибъ* (Митава); *В. Гудковъ* (Свеаборгъ); *М. Поповъ* (Асхабадъ).

№ 123 (4 сер.). *Опредѣлить температуру печи, зная, что кусокъ платины въ 20 граммовъ, вынутый изъ нея и погруженный въ сосудъ, наполненный 42 граммами воды, поднимаетъ температуру этой послѣдней съ* 12^0 *до* 22^0. *Удѣльная теплота платины равна 0,032.*

Пусть температура печи t^0. Охлаждаясь до 22^0, каждый граммъ платины теряетъ $0{,}032(t-22)$ калоріи, а 20 граммовъ платины теряютъ $20(t-22)0{,}032$ калоріи. Каждый граммъ воды, нагрѣваясь съ 12^0 до 22^0, пріобрѣтаетъ $22-12$ калорій, а 42 грамма воды пріобрѣтаютъ $(22-12)42$. Такъ какъ теплота, потерянная платиной, пріобрѣтена водой, то

$$20(t-22)0{,}032=(22-12)42,$$

откуда $t=678^{\circ}{,}25$. Рѣшая эту задачу, мы пренебрегли нагрѣваніемъ стѣнокъ сосуда.

П. Грицынъ (ст. Цымлянская); *Д. Дьяковъ* (Новочеркасскъ).

№ 128 (4 сер.). *На данной окружности даны точки* A *и* B. *Пусть* CD — *перемѣнный діаметръ этой окружности. Доказать, что геометрическое мѣсто точекъ встрѣчи прямыхъ* AC *и* BD *есть нѣкоторая окружность (предполагается, что* AB *не есть діаметръ данной окружности).*

Прямыя AC и BD не могутъ быть параллельны, такъ какъ, въ случаѣ ихъ параллельности, дуги CB и AD, содержащіяся между этими прямыми, равны, а потому дуга $ADB=\smile DBC-\smile BC+\smile AD=\smile DBC$, т. е., дуга ADB равна полуокружности, и прямая AB есть діаметръ, что противно условію. Назовемъ точку пересѣченія прямыхъ AC и BD черезъ M. При построеніи точки M можно различать четыре случая. 1) Пусть точки A и B лежатъ по одну сторону діаметра CD, и прямыя AC и DB пересѣкаются внутри круга. Тогда $\angle AMB$ измѣряется полусуммой дуги AB (меньшей полуокружности) и полуокружности CD. Поэтому

$$\angle AMB=\frac{\pi+\alpha}{2} \quad (1).$$

гдѣ α—радіальная мѣра дуги AB. 2) Пусть точки A и B лежатъ по одну сторону діаметра CD, но прямыя AC и DB пересѣкаются внѣ круга. Тогда $\angle AMB$ измѣряется полуразностью полуокружности CD и меньшей полуокружности дуги AB, т. е.,

$$\angle AMB=\frac{\pi-\alpha}{2} \quad (2).$$

3) Точки A и B лежатъ по разныя стороны діаметра CD, притомъ точка D—внутри меньшей изъ двухъ дугъ AB. Уголъ AMB измѣряется въ этомъ случаѣ полуразностью дугъ CB и AD, меньшихъ полуокружности. Но $\smile CB=\smile CBD-\smile BD$ *), $\smile CB-\smile AD=\smile CBD-\smile AD-\smile BD=\smile CBD-\smile AB$. Поэтому опять имѣетъ мѣсто равенство (2). 4) Точки A и B лежатъ по разныя стороны діаметра CD, и точка C—внутри меньшей изъ двухъ дугъ AB. Уголъ AMB измѣряется въ этомъ случаѣ полуразностью дугъ AD и CB. Но $\smile AD-\smile CB=\smile CAD-\smile AC-\smile CB=\smile CAD-\smile AB$; слѣдовательно, опять имѣетъ мѣсто равенство (2). Замѣтимъ еще (въ чемъ предлагаемъ читателю убѣдиться самостоятельно), что въ случаѣ 1) точка M лежитъ относительно прямой AB со стороны дуги ACB, а въ остальныхъ случаяхъ—со стороны меньшей полуокружности дуги AB. Такимъ образомъ искомое геометрическое мѣсто есть окружность, проходящая черезъ точки A и B, одна изъ дугъ которой, заключенныхъ между точками A и B, вмѣщаетъ уголъ $\frac{\pi+\alpha}{2}$, а другая— уголъ $\frac{\pi-\alpha}{2}$.

М. Поповъ (Асхабадъ); *Н. С.* (Одесса); *В. Гудковъ* (Свеаборгъ).

---

*) Условимся всюду дугу, меньшую полуокружности, обозначать двумя буквами.

Редакторы: **В. А. Циммерманъ** и **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса 19-го Іюня 1902 г.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.

Обложка
ищется

Обложка
ищется