Обложка
пщется

Обложка
ищется

XXVII Сем. № 6.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

31 Марта № 318. 1902 г.

Первый съѣздъ преподавателей физики

С.-Петербургскаго учебнаго округа.

Какъ извѣстно, на рождественскихъ вакаціяхъ 1899—1900 учебнаго года въ Москвѣ происходилъ первый съѣздъ преподавателей физико-химическихъ наукъ Московскаго учебнаго округа.

Въ настоящее же зимнее каникулярное время, а именно, со 2-го по 10-ое января сего 1902 года былъ созванъ первый съѣздъ преподавателей физики С.-Петербургскаго учебнаго округа. Съѣздъ открылъ попечитель С.-Петербургскаго округа В. К. фонъ-Анрепъ рѣчью, въ которой выяснилъ задачи преподавательскихъ съѣздовъ вообще и предстоявшаго въ частности. Онъ сообщилъ также, что Министерство Народнаго Просвѣщенія предполагаетъ устраивать такіе съѣзды періодически по всѣмъ округамъ и для всѣхъ предметовъ средней школы. Послѣ попечителя говорилъ завѣдующій съѣздомъ проф. О. Д. Хвольсонъ, который указалъ на ближайшія цѣли этого перваго съѣзда физиковъ и привелъ распредѣленіе занятій на каждый день. По программѣ, изложенной профессоромъ, предметы занятій должны были состоять въ слѣдующемъ: 1) демонстрація приборовъ учебнаго курса средней школы, 2) выставка и объясненіе приборовъ, конструированныхъ отдѣльными лицами для цѣлей преподаванія физики, 3) лекціи проф. И. И. Боргмана научнаго характера и пр.-доц. В. В. Лермантова — практическаго, 4) доклады и вопросы о наиболѣе раціональной постановкѣ преподаванія физики и наконецъ 5) посѣщеніе 1-го реальнаго училища и Александровскаго кадетскаго корпуса.

Прежде всего скажу нѣсколько словъ о демонстраціяхъ. Извѣстно, что многіе кабинеты учебныхъ заведеній недостаточно снабжены приборами, необходимыми на урокахъ физики какъ для того, чтобы ввести учащихся въ извѣстный кругъ явленій, такъ и для того, чтобы иллюстрировать извѣстный законъ. Поэтому весьма интересно было видѣть множество такихъ аппаратовъ и при томъ въ дѣйствіи. Кромѣ такихъ приборовъ есть масса другихъ, представляющихъ либо новизну конструкцій, либо удачное видоизмѣненіе существующаго. Затѣмъ даже самые употребительные и общеизвѣстные аппараты—и тѣ могли остановить вниманіе членовъ съѣзда, желавшихъ знать мнѣніе компетентныхъ лицъ о прочности и пригодности ихъ, какъ предметовъ изготовленія различныхъ фирмъ. Помимо приборовъ, выставленныхъ русскими и иностранными фирмами, предъ нами были демонстрируемы также работы отдѣльныхъ лицъ. Такъ напримѣръ, укажу на универсальный свѣтовой приборъ В. Л. Розенберга, пригодный какъ для катоптрики и діоптрики, такъ и для дисперсіи свѣта, опредѣленія скорости свѣта по способамъ Фуко и Физо и для указанія хода лучей въ телескопѣ и Галилеевой трубѣ. Этотъ приборъ замѣчателенъ тѣмъ, что воспроизводитъ свѣтовыми линіями геометрическіе чертежи хода лучей и даетъ возможность показать всѣ опыты по оптикѣ въ объемѣ гимназическаго курса. Кромѣ демонстраціи этого прибора, г. Розенбергъ показалъ рядъ интересныхъ и вмѣстѣ съ тѣмъ простыхъ опытовъ по теплотѣ, свѣту и метеорологіи. Я не буду ихъ здѣсь перечислять; скажу лишь, что умѣло представленная и объясненная картина изучаемаго явленія на этихъ простенькихъ аппаратахъ даетъ вполнѣ правильное понятіе о серьезныхъ вещахъ, знаніе которыхъ столь необходимо въ жизни. Перехожу теперь къ приборамъ Я. И. Ковальскаго и К. В. Дубровскаго. Первый опытъ Я. И. Ковальскаго иллюстрировалъ то явленіе, что температура плавленія сплава ниже температуры плавленія входящихъ въ него металловъ. Дѣлалось это такъ: въ жестяной коробкѣ, приготовленной на нашихъ глазахъ, нагрѣвались олово, свинецъ и третникъ (сплавъ 2 частей олова и 1 части свинца) и выливались расплавленные на бѣлую бумагу, на которой получались слѣды прожиганія у свинца и олова (менѣе) въ отдѣльности и ничего не было замѣтно на томъ мѣстѣ, куда выливался третникъ. Такихъ простыхъ опытовъ, не требующихъ ни сложныхъ приборовъ, ни затруднительныхъ манипуляцій, было сдѣлано Я. И. Ковальскимъ не мало, но я не стану ихъ перечислять, а отошлю интересующихся къ его книжкѣ: „Сборникъ элементарныхъ опытовъ по физикѣ и химіи“.

Еще болѣе замѣчательны въ смыслѣ простоты и въ то же время идейности приборы К. В. Дубровскаго. Его аппараты, какъ-то: самодѣльная центробѣжная машина, разрѣжающій и нагнетающій насосъ изъ спринцовки, оригинальное сегнерово колесо и др., а равно цѣлый рядъ опытовъ, демонстрирующихъ идею пульверизатора, резонатора, дающихъ понятіе о звукѣ, какъ механическомъ колебаніи, указывающихъ явленія конвекціи и сравнительную теплопроводность желѣза и мѣди и т. д.—вызвали живое одобреніе присутствовавшихъ. Они чрезвычайно наглядно показали, какъ легко можно оживить преподаваніе физики большимъ количествомъ очень простыхъ и доступныхъ пониманію опытныхъ данныхъ. Скажу больше: эти простенькіе аппаратцы упоминаемыхъ мною лицъ сослужили еще одну службу, выяснивъ лишній разъ то обстоятельство, которое часто упускается изъ виду, что физическія явленія окружаютъ насъ повсюду и могутъ быть воспроизведены при помощи многихъ предметовъ обыденной жизни извѣстной комбинаціей ихъ, а не принадлежатъ исключительно тѣмъ приборамъ, которые мы получаемъ изъ спеціальнаго магазина. Тѣ же идеи и мысли проводилъ Н. С. Дрентельнъ, учитель физики въ Александровскомъ корпусѣ. При посѣщеніи этого заведенія членами съѣзда, онъ демонстрировалъ рядъ простыхъ опытовъ, описанныхъ имъ въ „Педагогическомъ сборникѣ" за 1901 годъ въ №№ 11 и 12. Конечно, намъ были показаны не всѣ 40 опытовъ, разновременно демонстрированныхъ Н. С. Дрентельномъ на засѣданіяхъ отдѣла физики при Педагогическомъ музеѣ военно-учебныхъ заведеній, а лишь нѣкоторые. Я не буду перечислять и разсказывать опыты, которые видѣлъ, а остановлюсь лишь на демонстраціяхъ интерференціи звука, опытномъ подтвержденіи закона Архимеда для жидкостей и извлеченіи горючихъ газовъ изъ внутренней части пламени свѣчи. Изъ нихъ приборъ для интерференціи звука, представляющій видоизмѣненіе аппарата Квинке, весьма простъ и дешевъ и уже вошелъ въ продажу въ изготовленіи фирмой Max Kohl *) въ Хемницѣ (Австро-Венгрія). Что же касается двухъ другихъ опытовъ, то они интересны въ слѣдующемъ отношеніи. Приборъ для иллюстраціи закона Архимеда демонстрировался Н. С. Дрентельномъ и описанъ въ „Вѣстникѣ Опытной Физики" въ одномъ изъ нумеровъ 1887 г., а въ слѣдующемъ году проф. Weinholdt придумываетъ этотъ же аппаратъ, о чемъ свидѣтельствуетъ „Zeitschrift für den physikal. und chem. Unterricht" за 1888 г. Съ другой стороны, наоборотъ, способъ извлеченія горючихъ веществъ изъ внутренняго пламени свѣчи былъ придуманъ Н. С. Дрентельномъ послѣ описанія аналогичнаго пріема въ упомянутомъ нѣмецкомъ журналѣ. Этимъ я хочу сказать, что потребность въ такихъ приборахъ,

*) См. Максъ Коль. Нормальный списокъ аппаратамъ для физическихъ кабинетовъ. Стр. 50. Фиг. 185.

упрощенныхъ и согласованныхъ со средствами учебнаго заведенія, очевидно, ощущается не только у насъ въ Россіи, но и заграницей, гдѣ въ этой области много работаетъ такое авторитетное лицо, какъ проф. Вейнгольдъ *).

Такого рода мысли вызвало посѣщеніе Александровскаго корпуса и осмотръ его физическаго кабинета. Совершенно другое впечатлѣніе произвело на членовъ съѣзда посѣщеніе 1-го реальнаго училища. Прежде всего, надо сказать, что кабинетъ состоитъ изъ пяти комнатъ (классъ, препараточная, лабораторія и двѣ комнаты для храненія аппаратовъ) и массы физическихъ приборовъ на сумму, по крайней мѣрѣ, тысячъ въ 15; въ классѣ электрическое освѣщеніе, прекрасное „затемненіе", электрическій фонарь, питаемый энергіей съ одной изъ станцій въ городѣ, и т. п. Кромѣ того, присутствіе ассистентовъ, состоящихъ лаборантами высшихъ учебныхъ заведеній и солидная сумма денегъ, ежегодно ассигнуемая, даетъ возможность имѣть наилучшіе по чувствительности и дорогіе приборы и показывать тонкіе опыты, которые, разумѣется, при другихъ условіяхъ выходятъ не такъ рельефно. Изъ демонстрацій, продѣланныхъ предъ посѣтителями, укажу на слѣдующія: 1) критическое состояніе эѳира (190^0), сѣрнистаго газа (140^0) и углекислоты (31^0), 2) тепловой спектръ, 3) магнитный спектръ при послѣдовательномъ и параллельномъ соединеніяхъ, 4) сложеніе движеній на особомъ приборѣ и 5) сравненіе теплопроводности ртути и воды. Особенно эффектны и рѣдки для учащихся средней школы первые два опыта, которые большинству молодежи приходится видѣть въ первый разъ лишь въ высшемъ учебномъ заведеніи.

Теперь мы должны сказать нѣсколько словъ о лекціяхъ проф. Боргмана и пр.-доц. Лермантова. Какъ было упомянуто выше, лекціи проф. были научнаго характера, что видно изъ темъ: „О жидкомъ воздухѣ" и „О радіактивныхъ веществахъ". Излагать первую лекцію я не буду въ виду того, что читатели „Вѣстника" уже знакомы съ ней по изложенію автора статьи, трактующей о занятіяхъ членовъ физической секціи XI съѣзда естествоиспытателей. Что же касается радіактивныхъ веществъ, то и о нихъ много не приходится говорить, такъ какъ это въ существенныхъ чертахъ уже знакомо по статьѣ проф. Пильчикова „Радій и его лучи" („Вѣстникъ Оп. Физ." № 286). Скажу лишь, что намъ были показаны не только основныя свойства радія, какъ-то: способность вызывать флуоресценцію, разряжать заряженныя электричествомъ тѣла, фотографировать, давать видимый глазу свѣтъ, — но и сходство этихъ лучей съ катодными и рентгеновскими. При видѣ этихъ опытовъ, произведшихъ на всѣхъ сильное впечатлѣніе, у каждаго изъ участниковъ съѣзда невольно возникала мысль высказать

---

*) Что и русскіе проф. не чуждаются этого дѣла, видно изъ № 314 „Вѣстника", гдѣ приводятся динамометръ и нѣкоторые аппараты по гидростатикѣ проф. Шведова въ Одессѣ.

пожеланіе, чтобы впредь на будущихъ съѣздахъ профессоры высшихъ учебныхъ заведеній не забывали своихъ младшихъ собратій по педагогической дѣятельности и дѣлились съ ними познаніями относительно новѣйшихъ научныхъ вопросовъ и тѣмъ самымъ расширяли ихъ умственный кругозоръ, что такъ необходимо въ дѣлѣ воспитанія и образованія. Совершенно другой характеръ носили лекціи прив.-доц. Лермантова, что видно уже изъ заглавія ихъ: 1) чистка приборовъ, 2) починка ихъ, 3) обработка стекла *), 4) обработка металла и 5) пробки. Въ такого рода лекціяхъ тоже ощущается насущная потребность въ виду того, что большинство молодыхъ учителей, не имѣя соотвѣтствующей практики въ высшемъ учебномъ заведеніи, начинаетъ работать въ физическомъ кабинетѣ безъ всякаго знакомства съ уходомъ за приборами и элементарнымъ исправленіемъ ихъ въ случаѣ надобности. Въ этомъ отношеніи указанія В. В. Лермантова, какъ лица, всю жизнь проведшаго въ лабораторіи, были очень цѣнны. Разумѣется, еще болѣе пользы вынесли бы преподаватели, если бы получили не только теоретическія свѣдѣнія, но и нѣкоторый практическій навыкъ, какъ то дѣлается заграницей на такъ называемыхъ лѣтнихъ курсахъ. Къ сожалѣнію, этотъ вопросъ не былъ затронутъ на съѣздѣ; впрочемъ, за недостаткомъ времени онъ не могъ бы быть разобранъ, такъ какъ съѣзду предстояло обсудить слѣдующимъ вопросы: 1) о нормальномъ распредѣленіи 9 уроковъ и матеріала по классамъ въ будущей средней школѣ, 2) о рѣшеніи задачъ, 3) о практическихъ занятіяхъ для учащихся, 4) о расходахъ, необходимыхъ для физическаго кабинета, 5) объ устройствѣ класса и кабинета, 6) объ учебникахъ, 7) о добавочномъ вознагражденіи преподавателей физики за производство опытовъ. Я не буду приводить мнѣній отдѣльныхъ лицъ по различнымъ предложеннымъ здѣсь вопросамъ, а сообщу лишь на окончательныя постановленія. Такъ, по вопросу объ раціональномъ устройствѣ физическаго кабинета и класса было высказано пожеланіе имѣть въ классѣ скамьи, расположенныя амфитеатромъ, воду, газъ и электричество, а также „затемненіе“ для соотвѣтственныхъ опытовъ по оптикѣ; чтобы рядомъ съ классомъ была препараточная со столярнымъ станкомъ и паяльнымъ приборомъ, и треть комната отводилась бы подъ шкафы съ приборами. Что же касается до необходимыхъ расходовъ для кабинета, то этотъ вопросъ вызвалъ весьма много разговоровъ и, въ концѣ концовъ, былъ рѣшенъ въ томъ смыслѣ, что порядочный кабинетъ для своего пополненія требуетъ ежегоднаго расхода въ 500 рублей, а для оборудованія новаго необходимо 6—7 тысячъ рублей.

Въ связи съ вопросомъ о расходахъ на кабинетъ г. предсѣдателемъ было предложено на разсмотрѣніе съѣзда постановленіе коммиссіи объ улучшеніи преподаванія физики, высказавшейся за необходимость добавочнаго вознагражденія преподавателю фи-

---

*) См. Лермантовъ и Дьяконовъ. Руководство къ обработкѣ стекла.

зики за опыты по 48 руб. за каждый годовой урокъ. Означенное предложеніе было принято единогласно и найдено вполнѣ справедливымъ въ виду массы подготовительной работы предъ эксперементированіемъ. Всѣ эти вопросы были разобраны въ одномъ засѣданіи, остальные подверглись обсужденію въ слѣдующій разъ. Прежде всего занялись распредѣленіемъ уроковъ и матеріала по классамъ и послѣ цѣлаго ряда разсужденій, за недостаткомъ времени, даже не разобрали этого вопроса детально; постановили: считая въ 3-хъ послѣднихъ классахъ по 3 урока, отнести преподаваніе оптики къ курсу послѣдняго класса, а акустику, если позволятъ обстоятельства, проходить въ концѣ перваго года обученія физикѣ, остальное оставить согласно существующей программѣ. Въ дополненіе же теоретическаго курса преподаватели полагали необходимымъ упражнять учащихся въ числовыхъ примѣрахъ и вопросахъ, а по возможности озаботиться введеніемъ въ кругъ занятій практическихъ работъ по физикѣ. Къ сожалѣнію, это еще новое дѣло не успѣло настолько войти въ сознаніе начальствующихъ и учащихъ, чтобы ему удѣлили достаточно времени въ школѣ. Всѣ попытки нѣкоторыхъ петербургскихъ учителей организовать занятія являются дѣломъ, такъ сказать, личнымъ и не выходятъ изъ узкихъ предѣловъ, заключающихся въ томъ, что ходить на занятія предоставляется лишь желающимъ и при томъ изрѣдка. Единственный округъ въ Россіи, гдѣ, по словамъ одного преподавателя изъ гор. Маріуполя, введены обязательныя практическія занятія,—это Одесскій (?). Выслушавъ все это, собраніе высказалось за желательность практическихъ занятій по физикѣ въ средней школѣ. Наконецъ, послѣдній вопросъ объ учебникахъ вполнѣ просто былъ рѣшенъ, такъ какъ съѣздъ согласился съ мнѣніемъ проф. Хвольсона, что учебникъ долженъ быть кратокъ, содержать въ себѣ все необходимое, ясно и точно изложенъ, снабженъ цѣлымъ рядомъ численныхъ примѣровъ и вопросовъ и т. д.

Этимъ были болѣе или менѣе исчерпаны всѣ вопросы, предложенные г. предсѣдателемъ, другія же предложенія г.г. членовъ съѣзда не могли быть разобраны за отсутствіемъ свободнаго времени. Особенно важны были для преподавателей вопросы методическаго характера, рѣшеніе которыхъ приходится, такимъ образомъ, отложить до болѣе благопріятнаго времени. Будемъ надѣяться, что ждать придется не долго.

П. Смирновъ.

Этюды по основаніямъ геометріи.

Измѣреніе объемовъ многогранниковъ.

С. Шатуновскаго въ Одессѣ.

*(Продолженіе *).*

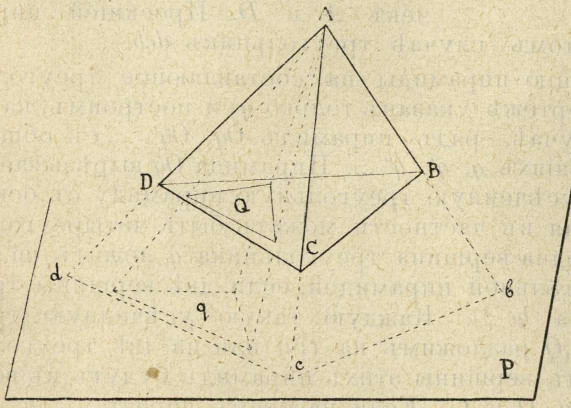
4-й способъ. (Разложеніе при помощи центральной проекціи).

Въ пространствѣ возьмемъ точку O, которая либо находится *внѣ* пирамиды $ABCD$, либо совпадаетъ съ одною изъ ея вершинъ, напр., съ вершиною A. Проведемъ лучи OA, OB, OC, OD [1]) и плоскость P, встрѣчающую *продолженія* этихъ лучей за точки A, B, C, D соотвѣтственно въ точкахъ a, b, c, d. Точки a, b, c, d будутъ центральными проекціями вершинъ пирамиды $ABCD$ на плоскость P. Прямыя ab, ac, ad, bc, bd будутъ центральными проекціями реберъ этой пирамиды на плоскости P. Фигура, составленная изъ проекцій реберъ, будетъ центральной проекціей пирамиды на плоскость P изъ центра O.

Такъ какъ четыре вершины A, B, C, D не лежатъ въ одной плоскости, то четыре луча OA, OB, OC, OD не могутъ лежать въ одной плоскости, а потому 4 точки a, b, c, d не могутъ лежать на одной прямой. Между 4-мя точками a, b, c, d найдутся три, которыя лежатъ въ вершинахъ треугольника, не сводящагося къ прямой. Пусть эти три точки будутъ b, c, d.

Разсмотримъ различные случаи, которые здѣсь могутъ представиться.

Первый случай. Лучъ OA, а слѣдовательно и проекція a точки A, не существуетъ. Это значитъ, что центръ проекцій O совпадаетъ съ A. Проекціей пирамиды будетъ треугольникъ abc (фиг. 3). Разложимъ проекцію какимъ-нибудь образомъ на составляющіе треугольники q, q_1 .... и построимъ рядъ пирамидъ Oq, Oq_1 .... [2]) такимъ образомъ, чтобы онѣ имѣли общую вершину въ A и чтобы ихъ основаніями служили составляющіе треугольники. (На нашемъ чертежѣ указанъ одинъ такой тре-



Фиг. 3.

[1]) Если O совпадаетъ съ A, то луча OA нѣтъ.

[2]) Вообще пирамиду, имѣющую основаніе F и вершину O, будемъ означать черезъ OF.

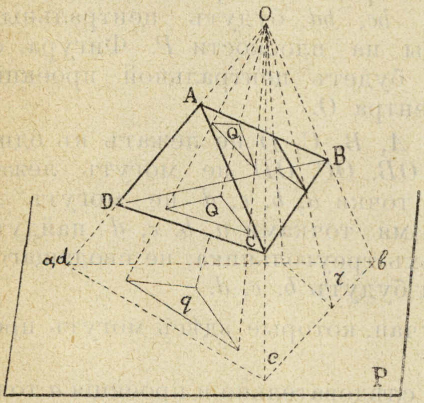
*) См. № 317 „Вѣстника“.

угольникъ q). Разложенію проекціи abc на составляющіе треугольники q соотвѣтствуетъ разложеніе грани BCD на составляющіе треугольники Q, причемъ q есть центральная проекція Q на плоскости P. Пирамиды Oq_1, Oq_2, ... разлагаютъ пирамиду $ABCD$ на пирамиды OQ, OQ_2, ..., которыя имѣютъ общую вершину A и для которыхъ основаніями служатъ составляющіе треугольники Q грани BCD.

Въ разсматриваемомъ случаѣ разложеніе можетъ быть сдѣлано по *первому способу* разложеніемъ грани BCD на треугольники, а потому имѣемъ

$$J(ABCD) = J(OQ_1) + J(OQ_2) + \dots$$

Второй случай. Вершина A имѣетъ проекцію a, совпадающую съ одной изъ вершинъ треугольника bcd, напримѣръ, съ d (фиг. 5).



Фиг. 5.

Въ этомъ случаѣ лучи OA и OD совпадаютъ. Четыре точки O, A, D, d лежатъ на прямой, а слѣдовательно центръ проекцій O лежитъ на ребрѣ AD, а такъ какъ точка d, которая есть вмѣстѣ съ тѣмъ и точка a, по условію лежитъ на продолженіи лучей OD и OA, то точки O и d лежатъ на прямой AD по разныя стороны отрѣзка AD. Мы будемъ предполагать, что O лежитъ на продолженіи DA, а d на продолженіи AD, такъ какъ въ противномъ случаѣ можно перемѣнить названія точекъ A и D. Проекціей пирамиды будетъ и въ этомъ случаѣ треугольникъ dcb.

Разложимъ проекцію пирамиды на составляющіе треугольники q, q', q'' .... (На чертежѣ указанъ только q) и построимъ, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, рядъ пирамидъ Oq, Oq', ... съ общей вершиной O, на основаніяхъ q, q', q'' ,.... Пирамида Oq вырѣзываетъ изъ пирамиды $ABCD$ усѣченную треугольную пирамиду съ основаніями Q и Q_1, которая въ частности можетъ быть четыреугольной пирамидой, если одна вершина треугольника q лежитъ на bc, или даже полной треугольной пирамидой, если двѣ вершины треугольника q лежатъ на bc [1]). Каждую такую усѣченную треугольную пирамиду Q_1Q разложимъ на три или на двѣ треугольныя пирамиды, причемъ вершины этихъ пирамидъ будутъ въ вершинахъ треугольниковъ Q и Q_1. Если назовемъ черезъ

$$\overset{(m)}{p_1}, \quad \overset{(m)}{p_2}, \quad \overset{(m)}{p_3}$$

три пирамиды, получаемыя отъ разложенія усѣченной пирамиды съ основаніями $\overset{(m)}{Q}$ и $\overset{(m)}{Q_1}$, то пирамида $ABCD$ будетъ разложена

[1]) Въ этомъ случаѣ одно или два ребра усѣченной пирамиды равны нулю.

на рядъ пирамидъ

$$p_1,\ p_2,\ p_3$$

$$p'_1,\ p'_2,\ p'_3$$

. . . .

$$\overset{(m)}{p_1},\ \overset{(m)}{p_2},\ \overset{(m)}{p_3} \cdot$$

. . . .

Легко показать, что инваріантъ пирамиды $ABCD$ равенъ суммѣ инваріантовъ пирамидъ p_1, p_2, p_3, ... , на которыя она распалась.

Для этого замѣтимъ, во 1-хъ, что каждая пирамида OQ распалась на четыре или меньшее число пирамидъ OQ_1, p_1, p_2, p_3, вершины которыхъ лежатъ на *трехъ* ребрахъ пирамиды OQ, исходящихъ изъ O, а потому имѣемъ (*второй способъ*)

$$J(OQ) = J(OQ_1) + J(p_1) + J(p_2) + J(p_3)$$

$$J(OQ') = J(OQ'_1) + J(p'_1) + J(p'_2) + J(p'_3)$$

. . . .

Складывая всѣ эти равенства и замѣчая, что, съ одной стороны, (*первый способъ*)

$$J(OQ) + J(OQ') + \dots = J(OBCD),$$

а съ другой

$$J(OQ_1) + J(OQ'_1) + \dots = J(OABC),$$

находимъ

$$J(OBCD) = J(OABC) + J(p_1) + J(p_2) + J(p_3) + \dots$$

Далѣе, пирамида $OBCD$ разсѣкается плоскостью ABC, проходящею черезъ ребро BC, на двѣ пирамиды $OABC$ и $ABCD$, поэтому

$$J(OBCD) = J(OABC) + J(ABCD).$$

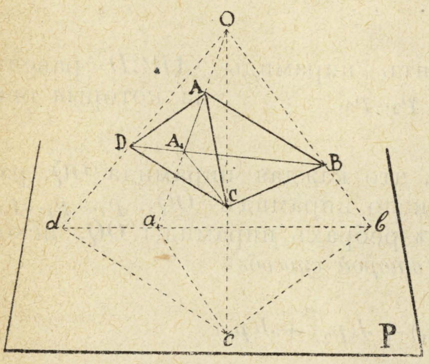
Изъ послѣднихъ двухъ равенствъ слѣдуетъ, что

$$J(ABCD) = J(p_1) + J(p_2) + J(p_3) + \dots$$

Способъ разложенія пирамиды $ABCD$ на составляющія пирамиды p_1, p_2, ... и въ этомъ случаѣ состоитъ въ разложеніи проекціи пирамиды на составляющіе треугольники и построеніи ряда пирамидъ съ общей вершиной въ центрѣ проекцій и т. д. Мы видимъ, что и въ этомъ случаѣ инваріантъ пирамиды равенъ суммѣ инваріантовъ составляющихъ пирамидъ.

Третій случай. Проекція a вершины A (фиг. 6) лежитъ на сторонѣ треугольника bcd, напр., на bd. Мы можемъ предположить, что a лежитъ *между* точками b и d, такъ какъ въ противномъ случаѣ мы можемъ перемѣнить названія точекъ.

Такъ какъ три точки d, a, b лежатъ на прямой, то три луча Od, Oa, Ob лежатъ въ одной плоскости. Эта плоскость имѣетъ три общія точки A, B, C съ гранью ABC и слѣдовательно содержитъ эту грань. Итакъ, въ разсматриваемомъ случаѣ центръ проекцій O лежитъ въ плоскости одной изъ граней.



Фиг. 6.

Проекція пирамиды представляется теперь въ видѣ двухъ, не наложенныхъ другъ на друга, треугольниковъ acb и acd. Разложимъ каждый изъ этихъ треугольниковъ на составляющіе треугольники, а именно, треугольникъ abc на составляющіе треугольники Q_1, Q_2, ..., треугольникъ abd — на составляющіе треугольники q_1, q_2, ... Построимъ вновь рядъ пирамидъ OQ_1, OQ_2,...., Oq_1, Oq_2 .... Каждая изъ этихъ пирамидъ выдѣлитъ изъ пирамиды $ABCD$ усѣченную пирамиду или ея частный видъ. Всѣ эти усѣченныя пирамиды разложимъ на пирамиды. Такимъ образомъ получимъ разложеніе пирамиды $ABCD$ на составляющія пирамиды p_1, p_2, ... и легко видѣть, что

$$J(ABCD) = J(p_1) + J(p_2) + \dots.$$

Дѣйствительно, плоскость, проходящая черезъ лучи Oa и Oc, а слѣдовательно, и черезъ ребро AC, раздѣляетъ пирамиду $ABCD$ на двѣ пирамиды AA_1BC, и AA_1CD, коихъ проекціи суть abc и abd. Наше разложеніе приводится, очевидно, къ разложенію каждой изъ этихъ двухъ пирамидъ при помощи проектированія изъ центра O, лежащаго на ребрѣ AA_1. Мы находимся, слѣдовательно, въ условіяхъ предыдущаго случая. При этомъ (*первый способъ*)

$$J(ABCD) = J(AA_1BC) + J(AA_1CD).$$

Совокупность пирамидъ, на которыя распались пирамиды AA_1BC и AA_1CD, составляютъ разсматриваемое разложеніе пирамиды $ABCD$ на пирамиды p_1, p_2, ... А такъ какъ инваріантъ каждой изъ пирамидъ AA_1BC и AA_1CD равенъ суммѣ инваріантовъ пирамидъ, на которыя она распалась, то изъ послѣдняго равенства и слѣдуетъ, что

$$J(ABCD) = J(p_1) + J(p_2) + \dots$$

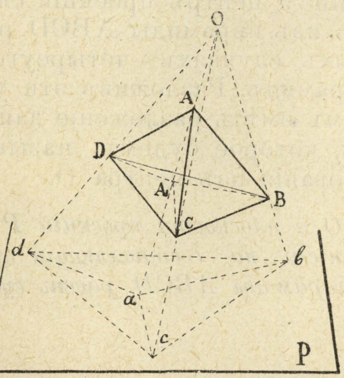
Четвертый случай. Проекція a вершины A находится (фиг. 7) внутри треугольника bcd, образуемаго проекціями трехъ другихъ вершинъ. (Этотъ случай обнимаетъ, очевидно, всѣ тѣ случаи, когда проекція одной вершины падаетъ внутрь треугольника, образуемаго проекціями трехъ остальныхъ вершинъ).

Въ этомъ случаѣ проекція представится въ видѣ трехъ, не покрывающихъ другъ друга, треугольниковъ abc, abd и acd. Эти треугольники суть проекціи трехъ пирамидъ AA_1BC, AA_1BD, AA_1CD, которыхъ основанія A_1BC, A_1BD, A_1CD имѣютъ общей вершиной точку A_1 встрѣчи луча OA съ плоскостью BCD. Имѣемъ очевидно (*первый способъ*)

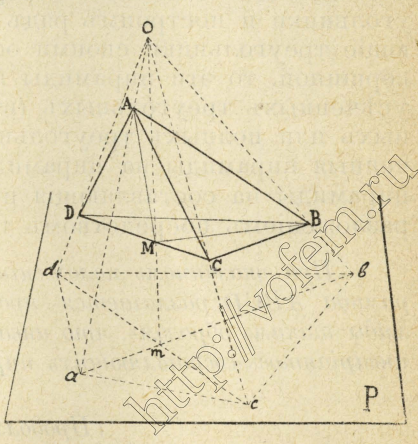
$$J(ABCD) = J(AA_1BC) + J(AA_1BD) + J(AA_1CD).$$

Станемъ теперь разлагать треугольники abc, abd, acd на составляющіе треугольники; построимъ пирамиды, имѣющія основаніями эти составляющіе треугольники и общей вершиной центръ проэкцій O и т. д.; мы придемъ, такимъ образомъ, окончательно къ разложенію каждой изъ пирамидъ AA_1BC, AA_1BD, AA_1CD на составляющія пирамиды и къ разложенію всей пирамиды ABCD на группу пирамидъ, представляющую совокупность всѣхъ пирамидъ p_1, p_2, ..., на которыя распались пирамиды AA_1BC, AA_1BD, AA_1CD. Такъ какъ центръ проекцій O лежитъ на ребрѣ AA_1 каждой изъ этихъ пирамидъ, то (второй случай) инваріантъ каждой изъ трехъ пирамидъ равенъ суммѣ инваріантовъ тѣхъ пирамидъ, на которыя она распалась. Отсюда, согласно послѣднему равенству, слѣдуетъ, что инваріантъ пирамиды ABCD равенъ суммѣ инваріантовъ тѣхъ пирамидъ p_1, p_2, ..., на которыя она распалась.

Пятый случай. Каждая изъ четырехъ проекцій a, b, c, d не лежитъ внутри треугольника, образуемаго тремя другими проекціями. (Фиг. 8). Проэкція пирамиды ABCD представляется



Фиг. 7.



Фиг. 8

въ видѣ 4-хъ треугольниковъ mac, mbc, mad, mbd, гдѣ m точка встрѣчи діагоналей 4-угольника $abcd$. Проведемъ плоскость черезъ центръ проекцій O и одну изъ діагоналей, напр., ab. Эта плоскость, *проходя черезъ ребро AB*, разлагаетъ пирамиду ABCD на двѣ пирамиды AMBC и AMBD, причемъ

$$J(ABCD)=J(AMBC)+J(AMBD).$$

Такъ какъ центръ проэкцій O лежитъ въ плоскости общей грани MAB двухъ пирамидъ AMBC и AMBD, то проекція каждой изъ нихъ представляется въ видѣ двухъ треугольниковъ, а именно, проекціей AMBC служитъ фигура abc, составленная изъ двухъ треугольниковъ mac и mbc; проекція пирамиды AMBD представляется треугольникомъ abd, разложеннымъ на два треугольника mad и mbd. Если теперь каждый изъ треугольниковъ mab, mbc, mad, mbd разложимъ на составляющіе треугольники, построимъ рядъ пирамидъ съ общей вершиной O и т. д., то каждая изъ пирамидъ AMBC и AMBD, а вмѣстѣ съ ними и пирамида ABCD разложится на пирамиды, причемъ инваріантъ каждой изъ пирамидъ AMBC и AMBD будетъ равенъ суммѣ инваріантовъ составляющихъ ее пирамидъ (третій случай). Предыдущее равенство показываетъ, что инваріантъ пирамиды ABCD также будетъ равенъ суммѣ инваріантовъ всѣхъ составляющихъ ее пирамидъ.

Резюмируя все сказанное, приходимъ къ слѣдующему заключенію. Если изъ точки O, либо совпадающей съ одной изъ вершинъ пирамиды ABCD, либо лежащей внѣ пирамиды ABCD, будемъ проектировать пирамиду ABCD на плоскость P, встрѣчающую продолженіе лучей OA, OB, OC, OD, то проекція пирамиды представится въ видѣ одного, двухъ, трехъ или четырехъ не наложенныхъ другъ на друга треугольниковъ. Если разложимъ каждый изъ этихъ треугольниковъ на составляющіе треугольники и построимъ рядъ пирамидъ, имѣющихъ эти составляющіе треугольники своими основаніями и центръ проекцій своей вершиной, то эти пирамиды выдѣлятъ изъ пирамиды ABCD рядъ усѣченныхъ треугольныхъ (въ частныхъ случаяхъ—четыреугольныхъ или полныхъ треугольныхъ) пирамидъ. Разложивъ эти усѣченныя пирамиды на пирамиды, будемъ имѣть разложеніе данной пирамиды на составляющія пирамиды, которое будемъ называть разложеніемъ посредствомъ проектированія изъ центра O.

При указанномъ положеніи центра O и плоскости проекцій P пирамида ABCD разлагается проектированіемъ на составляющія пирамиды такимъ образомъ, что инваріантъ пирамиды ABCD равенъ суммѣ инваріантовъ составляющихъ пирамидъ.

(Продолженіе слѣдуетъ).

Объ извлеченіи квадратнаго корня.

П. Долгушина въ г. Ровно.

Въ августѣ 1898 г. на съѣздѣ естествоиспытателей и врачей въ Кіевѣ я сдѣлалъ маленькій докладъ, въ которомъ показалъ приложеніе принципа линейнаго интерполированія къ извлеченію квадратныхъ и кубическихъ корней. Дальнѣйшее упрощеніе теоретическихъ соображеній дало мнѣ поводъ къ настоящей замѣткѣ объ извлеченіи квадратныхъ корней изъ чиселъ.

Если $\sqrt{N}=A$, то $\sqrt{N.10^{2n}}=A.10^n$ и обратно, т. е., перенесеніе запятой въ подкоренномъ числѣ на четное число знаковъ, не измѣняя цыфръ корня, вліяетъ только на постановку въ немъ запятой (аналогія съ независимостью мантиссы логариѳма отъ перенесенія запятой въ числѣ). Такъ, изъ равенства $\sqrt{1,6129}=1,27$ вытекаетъ $\sqrt{161,29}=12,7$, $\sqrt{1612900}=1270$, $\sqrt{0,016129}=0,127$ и т. д. Это замѣчаніе позволяетъ намъ всегда легко опредѣлить первую цыфру корня: вмѣсто $\sqrt{5852,25}$ ученикъ беретъ $\sqrt{58,5225}$ и говоритъ: $7^2<58,5225<8^2$.

Пусть N точный квадратъ и $a<\sqrt{N}<a+1$, или

$0<N-a^2<2a+1$. Положимъ $\sqrt{N}=a+x$.

По опредѣленію корня $N=(a+x)^2=a^2+2ax+x^2$, или

$x(2a+x)=N-a^2$, откуда $x=\frac{N-a^2}{2a+x}\cdot$ Такъ какъ $0<x<1$, то

$$\frac{N-a^2}{2a+1}<x<\frac{N-a^2}{2a}\cdot \text{ Вычислимъ}$$

$$\sqrt{5852,25}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{58\cdot52,25}\quad 7\cdot6 \\
 & 49 \\
14\cdot6 & 9\cdot5225 \ldots r_1 \\
0\cdot6 & 8\cdot76 \ldots (2a+x_1)x_1 \\
 & 0\cdot7625 \ldots r_2
\end{array}
\quad 0\cdot6<\frac{r_1}{15}<x<\frac{r_1}{14}<0\cdot7;\ x_1=0\cdot6.$$

Во взятомъ примѣрѣ $a_1=7$, вмѣсто временной запятой точка наверху, $N-a^2=r_1=9\cdot5225$, $0\cdot6<\frac{r_1}{2a_1+1}<x<\frac{r_1}{2a_1}<0\cdot7$; принимая $x_1=0\cdot6$, видимъ, что $7\cdot6<\sqrt{N}<7\cdot7$ или $76<\sqrt{5852,25}<77$, $r_2=(N-a_1{}^2)-(2a_1+x_1)x_1=N-(a_1+x_1)^2$; $r_2.10^2=76\cdot25=5852,25-76^2$.

Полученный результатъ даетъ возможность опредѣлить путемъ такихъ же разсужденій и слѣдующія цыфры. Помѣщаю французскій шаблонъ, который мнѣ кажется удобнѣе шаблона нашихъ учебниковъ

```
0,58·52·25  0,765
 49         146|1525
  9·52        6|   5
  8 76
    76·25
    76 25
```

Такъ какъ при этомъ вычисленіи N всегда заключается между квадратами двухъ чиселъ, отличающихся на единицу въ послѣдней цыфрѣ, то шаблонъ годенъ и для извлеченія корня изъ неточныхъ квадратовъ.

Этого достаточно для начальнаго курса извлеченія квадратныхъ корней изъ какихъ угодно чиселъ.

При вычисленіи корня учебники опираются только на верхній предѣлъ $\left(x < \frac{N - a^2}{2a}\right)$, при этомъ для ученика остается неяснымъ, насколько пониженіе верхняго предѣла зависитъ отъ числа цыфръ въ a. Правда, въ учебникахъ помѣщается дополнительная теорема (см. Алгебру Киселева, § 157), изъ которой слѣдуетъ, что если въ a не менѣе n цыфръ, то въ x и въ десятичной дроби, представляющей частное $\frac{N - a^2}{2a}$, первые n—1 десятичные знаки одинаковы,—только послѣдній изъ нихъ въ частномъ можетъ превышать соотвѣтствующій въ x на единицу. Но обыкновенно теорема эта опускается преподавателями, какъ преслѣдующая спеціальную цѣль,—сокращеніе шаблоннаго вычисленія, когда опредѣлено болѣе половины цыфръ корня; а если проходится, то усваивается учениками съ трудомъ, и, кажется, изъ нея не дѣлается указаннаго мною вывода, что, при дѣленіи остатка на удвоенную найденную часть корня, цыфры корня, начиная съ третьей, опредѣляются съ такою же легкостью, какъ при обыкновенномъ дѣленіи многозначныхъ чиселъ.

Теорема эта излишня при моемъ изложеніи. Въ самомъ дѣлѣ, $\frac{N - a^2}{2a+1} < x < \frac{N - a^2}{2a}$ и x отличается отъ $\frac{N - a^2}{2a}$ менѣе, чѣмъ предѣлы между собою, а разность между предѣлами

$$(N - a^2)\left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{2a+1}\right) < \frac{1}{2a} \leqq \frac{1}{2.10^{x-1}},$$ такъ какъ $N - a^2 < 2a + 1$.

Можно показать, что x къ нижнему предѣлу гораздо ближе, чѣмъ къ верхнему $x - \frac{N - a^2}{2a+1} = \frac{(2a+1)x - (2a+x)x}{2a+1} = \frac{x(1-x)}{2a+1}$.

Произведеніе $x(1-x) \leqq \frac{1}{4}$, такъ какъ $0 < x < 1$ и $x + (1-x) = 1$, слѣдовательно, $0 < x - \frac{N - a^2}{2a+1} \leqq \frac{1}{4(2a+1)}$ (меньше $\frac{1}{10^n}$, если $a \geqq 1{,}25.10^{n-1}$). Поэтому выгоднѣе для опредѣленія x дѣлить остатокъ на $2a+1$, чѣмъ на $2a$; особенно это замѣтно при опредѣленіи второй цыфры, когда первая цыфра корня мала. Этимъ обстоятельствомъ для устраненія напрасныхъ попытокъ всегда можно пользоваться при *устномъ* опредѣленіи второй цыфры, хотя бы письменно мы и пользовались общепринятымъ шаблономъ.

Если при дѣленіи $N-a^2$ на $2a+1$ получается въ частномъ x_1 и въ остаткѣ r_1, то

$$N-a^2=(2a+1)x_1+r_1=(2a+x_1)x_1+r_1+x_1(1-x_1) \text{ и}$$

$N=(a+x_1)^2+r+x_1(1-x_1)$, т. е., *чтобы отъ остатка при дѣленіи $N-a^2$ на $2a+1$ перейти къ остатку при извлеченіи квадратнаго корня изъ N, достаточно къ первому изъ нихъ прибавить произведеніе частнаго x_1 на дополненіе его до 1.* Прибавляемое произведеніе никогда не превышаетъ 0·25. Для правильности вычисленія, конечно, нужно слѣдить, чтобы $r_1+x_1(1-x_1)\leq 2a\,.\,10^{-n}$ (n число десятичныхъ знаковъ въ x_1).

Такимъ образомъ, получается для извлеченія корня второй шаблонъ, который удобнѣе перваго: устраняется колебаніе при опредѣленіи второй цыфры, число цыфръ корня удваивается простымъ дѣленіемъ, и, если нужно продолжать вычисленіе, полученный остатокъ легко исправляется (ср. Serret, Traité d'Arithmétique, 1887, §§ 252, 253).

Примѣръ $\sqrt{16253,4587}$.

```
16253,4587              127,4 8905
 144                2a+1...25|2549
  18·53              1—x1...26|1095
  175
   103   x1(1—x1)<0·21
   100
    345·87
    444
   148
    2269·87
    20392
     23067
     22941
      1·2600  x3(1—x3)>0·09
      12745
         r>0   или
     1·2600 ....
          44225
        80145
        8905
     135750975
     12745
      8300975
```

Это вычисленіе можно опустить, если не нужно продолжать извлеченія корня.

Возьмемъ еще примѣръ изъ Serret, Traité d'Arithmétique, 1887, § 296, 4⁰: „Calculer $\sqrt{\dfrac{4{,}723}{3{,}1416}}$ avec la plus grande approximation possille, sachant que les deux termes de la fraction placée sous le radical sont approchés à moins d'une unité de l'ordre de leur dernier chiffre, sans qu'on connaisse le sens des erreurs commises".

$$\frac{4{,}722}{3{,}1417} > 1{,}503 \qquad \begin{array}{l} 1{,}50'3 \\ 144 \\ \hline 63 \\ 50 \\ \hline 1\cdot 30 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 1{,}226 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\frac{4{,}724}{3{,}1415} < 1{,}504$$

$$-0\cdot 0076 < r < 0\cdot 0076.$$

Получили 1,226 вмѣсто 1,2 у Serret. Если принять вмѣстѣ съ Serret, что частное заключается между 1,49 и 1,52, то все-таки $\sqrt{1{,}49} > 1{,}22$ и $\sqrt{1{,}52} < 1{,}24$, т. е., $\sqrt{\dfrac{4{,}723}{3{,}1416}} = 1{,}23$ съ точностью до 0,01.

Можно поставить вопросъ, *какъ подобрать b при дѣленіи $N-a^2$ на $2a+b$, чтобы поправка остатка была наименьшая при измѣненіи x между 0 и 1.*

$$N-a^2=(2a+b)x+r=(2a+x)x+r+x(b-x).$$

Пока $x \leqslant b$, произведеніе $x(b-x) \leqslant \dfrac{1}{4}b^2$. Когда $1 \geqslant x > b$ произведеніе отрицательно, абсолютная величина его $x(x-b)$ возрастаетъ вмѣстѣ съ x, и, слѣдовательно, $x(x-b) \leqslant 1-b$.

Сравнимъ полученные предѣлы.

$$\frac{1}{4}b^2-(1-b)=\frac{1}{4}\left[b-2(\sqrt{2}-1)\right].\left[b+2(\sqrt{2}+1)\right].$$

Если $b \geqslant 2(\sqrt{2}-1)$, то первый предѣлъ не меньше второго и можемъ утверждать, что абсолютная величина произведенія $x(b-x)$ измѣняется между нулемъ и $\dfrac{1}{4}b^2$, при чемъ наименьшее значеніе верхняго предѣла $(\sqrt{2}-1)^2$, или $3-2\sqrt{2}$.

Если $0 < b < 2(\sqrt{2}-1)$, то второй предѣлъ $(1-b)$ больше перваго и превосходитъ $1-2(\sqrt{2}-1)$, или $3-2\sqrt{2}$.

Наивыгоднѣйшее значеніе $b=2(\sqrt{2}-1)$, т. е., $0\cdot 82 < b < 0\cdot 83$, тогда произведеніе $[x(b-x)] \leqslant 3-2\sqrt{2} < 0{,}18$.

Во второмъ шаблонѣ $b-1$ и $x(1-x) \leqslant 0\cdot 25$; въ первомъ шаблонѣ $b=0$ и $[x(b-x)] \leqslant 1$.

Еще разъ видимъ, насколько второй шаблонъ выгоднѣе перваго.

Тѣ же идеи можно было бы приложить и къ изслѣдованію шаблона для извлеченія кубичнаго корня.

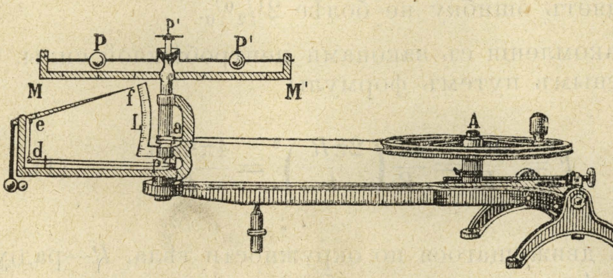
Г. Ровно. 2-го марта 1902 г.

ОПЫТЫ и ПРИБОРЫ.

Приборы, выработанные Коммиссіей Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей.

Центробѣжная машина I. А. Тимченко.

Центробѣжная машина, построенная университетскимъ механикомъ I. А. Тимченко, состоитъ изъ металлическаго станка, на которомъ укрѣплено большое колесо *A*, приводимое въ движеніе



рукою; движеніе этого колеса передается посредствомъ шнурка малому колесу *a*, ось котораго состоитъ изъ трубки, вращающейся вмѣстѣ съ *a*. Къ верхней части трубчатой оси прикрѣплены двѣ вилки, большая *MM'* и меньшая, повыше. Свободно проходящій сквозь трубку стержень *pp'* въ верхней части снабженъ чашечкою *p'*, а нижнимъ заостреннымъ концомъ *p* упирается въ систему чувствительныхъ рычажковъ *pdef*. Въ прорѣзъ, находящійся подъ чашкою *p'*, входятъ одними своими концами ломанные рычажки, имѣющіе точки опоры на концахъ малой вилки и соединенные другими концами, посредствомъ шариковъ, съ линеечками, которыя выходятъ въ прорѣзы вилки *MM'*. На линейки эти могутъ быть надѣты одинаковыя массы *P* и *P'* *), которыя можно закрѣпить на произвольныхъ разстояніяхъ отъ оси вращенія *pp'*. При вращеніи колеса нижніе концы ломанныхъ рычажковъ, вслѣдствіе развивающейся центробѣжной силы массъ *P* и *P'*, стремятся удалиться отъ оси вращенія; а верхніе концы рычажковъ, находящіеся въ прорѣзѣ подъ чашкою *p'*, станутъ нажимать на стержень *pp'* внизъ. Незначительныя перемѣщенія этого стержня вызываютъ значительныя перемѣщенія стрѣлки *f* вдоль дуги *L*. Чтобы колесо *A* можно было вращать равномѣрно,

*) Массы *P* и *P'* должны быть взяты одинаковыми и помѣстить ихъ надо на одинаковыхъ разстояніяхъ отъ оси вращенія, потому что иначе центробѣжная сила, дѣйствуя на ось *pp'* преимущественно въ одну сторону, будетъ опрокидывать приборъ.

съ постоянною (приблизительно) скоростью, устроено приспособленіе, не замѣтное, къ сожалѣнію, на рисункѣ, и состоящее изъ ряда штифтиковъ, опредѣленнымъ образомъ насаженныхъ на нижней сторонѣ спицъ колеса, и пружины, щелкающей при задѣваніи за нее этихъ штифтиковъ. Пружина можетъ быта установлена такъ, что при полномъ оборотѣ колеса она можетъ быть задѣта одинъ, два и четыре раза. Если хотятъ привести колесо *A* въ равномѣрное движеніе, то, установивъ пружину, пускаютъ въ ходъ метрономъ и вращаютъ колесо съ такою быстротою, чтобы удары пружины совпадали съ ударами метронома. При нѣкоторомъ навыкѣ удается колесо *A* вращать настолько равномѣрно, что конецъ стрѣлки *f* колеблется въ предѣлахъ одного дѣленія на дугѣ *L*, что, при отклоненіи стрѣлки въ 20—30 дѣленій, составляетъ ошибку не болѣе $2^1/_2{}^0/_0$.

Для ознакомленія съ законами центробѣжной силы, т. е., для повѣрки опытнымъ путемъ формулы

$$F = \frac{mv^2}{R} = \frac{m}{R}\left(\frac{2\pi R}{t}\right)^2 = \frac{4\pi^2 mR}{t^2} \qquad (1),$$

гдѣ *m*—масса движущагося по окружности тѣла, *R*—радіусъ этой окружности и *t*—время одного оборота этого тѣла, поступаютъ слѣдующимъ образомъ: помѣщаютъ два одинаковыхъ шарика *P* и *P'*, масса которыхъ въ суммѣ равна *m*, на какомъ-нибудь опредѣленномъ разстояніи отъ оси вращенія *pp'* и, вращая возможно равномѣрно колесо *A*, замѣчаютъ положеніе стрѣлки *f*; затѣмъ, помѣщая на то же мѣсто шарики, масса которыхъ будетъ m_1, m_2, . . . , вращая колесо *A* съ тою же скоростью и замѣчая каждый разъ отклоненія стрѣлки *f*, демонстрируютъ, что эти отклоненія, а слѣдовательно, центробѣжныя силы прямо пропорціональны массамъ.

Чтобы показать, что центробѣжная сила измѣняется, при прочихъ равныхъ условіяхъ, прямо пропорціонально радіусу круга, по которому тѣло движется, помѣщаютъ одни и тѣ же шарики на разныхъ разстояніяхъ отъ оси *pp'*, вращаютъ колесо *A* все время съ одною и тою же скоростью и убѣждаются, что отклоненія стрѣлки будутъ прямо пропорціональны радіусамъ.

Наконецъ, оставляя на мѣстѣ шарики, но мѣняя скорость вращенія, демонстрируютъ, что показанія стрѣкки мѣняются пропорціонально квадратамъ временъ обращенія колеса *a*.

Чтобы составить себѣ представленіе о томъ, насколько описанный приборъ пригоденъ для классныхъ демонстрацій, ниже приведены числа одного изъ опытовъ.

Въ приборѣ, находящемся въ физическомъ кабинетѣ Новороссійскаго университета, имѣется три пары шариковъ, которыя будемъ для краткости обозначать такъ: I, II, III. Отношеніе массъ этихъ шариковъ слѣдующее

$$\mathrm{I}:\mathrm{II}:\mathrm{III} = 1:1{,}9:2{,}8 \ ^{*)}$$

отношеніе показаній стрѣлки f въ этихъ трехъ случаяхъ соотвѣтственно были пропорціональны числамъ:

$$1:1{,}8:2{,}3.$$

При демонстраціи пропорціональности центробѣжной силы радіусамъ круговъ, по которымъ двигались массы получены такія значенія:

Отношеніе радіусовъ

$$\mathrm{I}:\mathrm{II}:\mathrm{III} = 1:2:2{,}9$$

отношеніе показаній стрѣлки пропорціональны числамъ

$$1:2:2{,}6.$$

Наконецъ, въ послѣднемъ случаѣ, чтобы убѣдиться, что величина центробѣжной силы измѣняется обратно пропорціонально квадрату времени одного оборота, колесо a вращали такъ, что времена относились между собою какъ

$$1:2:4$$

а квадраты временъ, какъ $1:4:16$,

соотвѣтственныя отношенія показаній стрѣлки были

$$15:4:1.$$

Приведенные примѣры показываютъ, кажется, съ достаточною очевидностью, что приборъ даетъ результаты для класснаго опыта весьма удовлетворительные.

Посредствомъ этого прибора легко опредѣлить величину центробѣжной силы опытнымъ путемъ и показать, такимъ образомъ, справедливость формулы (1). Для этой цѣли помѣщаютъ любыя двѣ массы на какомъ угодно разстояніи отъ оси pp', равномѣрно вращаютъ колесо A съ произвольною скоростью и замѣчаютъ положеніе стрѣлки f. Опредѣливъ массу шариковъ въ граммахъ, разстояніе ихъ центровъ отъ оси вращенія въ сантиметрахъ и время одного оборота колеса a въ секундахъ и вставляя эти значенія въ ур. (1), получимъ величину центробѣжной силы въ абсолютныхъ единицахъ (динахъ). Съ другой стороны, если мы на чашечку p' положимъ грузъ, который отклонитъ стрѣлку f на ту же величину, и найденное количество граммовъ помножимъ на ускореніе силы тяжести, то получимъ, очевидно,

---

*) Имѣющійся приборъ представляетъ собою первый экземпляръ, построенный І. А. Тимченко, поэтому отношенія массъ и радіусовъ выражаются сложными числами; въ позднѣйшихъ экземплярахъ этотъ недостатокъ устраненъ.

ту же силу, выраженную въ тѣхъ же единицахъ. Поэтому оба полученныя числа должны быть одинаковы. Результаты одного изъ опытовъ дали для этой силы:

по формулѣ (1) — 1755100 динъ

изъ вѣса, отклоняющаго стрѣлку — 1819580

числа, разнящіяся другъ отъ друга лишь на 4%.

Пользуясь тѣмъ, что данный приборъ по своему устройству допускаетъ опредѣлить силу F въ граммахъ, имъ можно воспользоваться для опредѣленія ускоренія силы тяжести g.

Дѣйствительно, если одни и тѣ же отклоненія стрѣлки f вызываются центробѣжною силою F и грузомъ въ P граммовъ, то

$$F = Pg \qquad (2),$$

откуда

$$g = \frac{F}{P} \cdot \qquad (3)$$

Численный примѣръ:

$$m = 214.4 \text{ гр.}$$

$$R = 10.8 \text{ гр.}$$

$$t = \frac{1}{4} \text{ сек.}$$

и центробѣжная сила

$$F = 1755100 \text{ динъ } ^{*}).$$

Грузъ P, отклоняющій стрѣлку f до того же дѣленія, равенъ 1842,75 гр., слѣдовательно,

$$g = 952.4$$

на самомъ же дѣлѣ для Одессы

$$g = 980.9$$

т. е., ошибка не превосходитъ 3%. Для показыванія тѣхъ опытовъ, которые обыкновенно приводятся въ учебникахъ, колесо A со всѣми относящимися къ нему приспособленіями можетъ быть замѣненъ простымъ колесомъ, имѣющимся при приборѣ.

Двойныя ножки въ станкѣ легко могутъ быть повёрочены и приборъ установленъ въ вертикальномъ положеніи. Въ этомъ случаѣ имъ удобно пользоваться для смѣшенія цвѣтовъ на кружки Ньютона, сирены Оппельта, колесъ Савара и т. п.

Наконецъ, описанный приборъ можетъ служить для демонстрированія расширенія тѣлъ при нагрѣваніи. Для этой цѣли ме-

---

*) Величина F, полученная изъ ур. (1), была увеличена въ 1 2 раза, такъ какъ отношеніе плечъ ломаннаго рычажка не равно 1.

ханикъ прилагаетъ къ прибору дугу, которая укрѣпляется концами въ точкахъ M и M', а въ срединѣ, противъ центра чашечки p', имѣетъ небольшой винтикъ, служащій для укрѣпленія въ вертикальномъ положеніи металлическаго стерженька При незначительномъ нагрѣваніи такого стержня кусочкомъ ваты, смоченной спиртомъ, получается значительное перемѣщеніе стрѣлки f.

И. Точидловскій.

(Продолженіе слѣдуетъ).

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 172 (4 сер.). Вычислить уголъ, составленный образущей конуса съ плоскостью основанія, если извѣстно, что для этого конуса отношеніе его объема къ объему вписаннаго въ него шара имѣетъ наименьшее значеніе.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 173 (4 сер.). Въ кругъ вписанъ правильный пятиугольникъ $ABCDE$. На дугѣ AB этого круга, меньшей полуокружности, взята нѣкоторая точка M. Вычислить отношеніе

$$\frac{MA+MB}{ME+MC}.$$

Н. С. (Одесса).

№ 174 (4 сер.). Рѣшить уравненіе:

$$x^6+2x^3(1-a)-4\sqrt{ax^3}+a(a+2)=0.$$

Д. Коварскій (Двинскъ).

№ 175 (4 сер.). Если n есть число, взаимно простое съ 3 и 7, то n^6-1 кратно 168.

Заимств. изъ *Journal de Mathématiques élémentaires.*

№ 176 (4 сер.). Привести къ логариѳмическому виду выраженія:

$$\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos 2\beta}-\frac{\cos\alpha}{\cos\beta},\quad \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos 2\beta}-\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}.$$

Заимств. изъ *Casopis.*

№ 177 (4 сер.). Запаянная съ одного конца калибрированная трубка наполнена воздухомъ и затѣмъ погружена въ сосудъ со ртутью. Длина части трубки, занятой воздухомъ, равна m сантиметровъ, давленіе этого воздуха равно H сантиметровъ. Какъ въ трубкѣ, такъ и въ сосудѣ ртуть стоитъ на одномъ уровнѣ. Затѣмъ трубку подняли изъ ртути настолько, что высота ея верхняго конца надъ поверхностью ртути стала равна n сантиметровъ. Найти длину части трубки, занятой воздухомъ послѣ поднятія.

(Заимств.). Сообщилъ *В. Микшъ* (Новочеркасскъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 74 (4 сер.). *Построить треугольникъ по сторонѣ его* a, *по углу, образованному медіанами* m_b *и* m_c, *проведенными къ сторонамъ* b *и* c *этого треугольника и по отношенію* $\frac{h_a}{m_b}$.

Пусть ABC — искомый треугольникъ, $BM=m_b$ и $CN=m_c$ его медіаны, G — точка встрѣчи медіанъ, $AD=h_a$ — его высота, GK и ML — разстоянія точекъ G и M отъ отъ прямой BC. Изъ паръ подобныхъ треугольниковъ ADC и MLC и, съ другой стороны, — BML и BGK, находимъ, что

$$ML=\frac{h_a}{2},\ GK=\frac{2}{3}ML=\frac{h_a}{3}\ (1),\quad BG=\frac{2}{3}m_b\ (2).\ \text{Поэтому}$$

$$\sin\angle GBK\ ^*)=\frac{GK}{BG}=\frac{\frac{1}{3}h_a}{\frac{2}{3}m_b}=\frac{h_a}{2m_b}=\frac{p}{2q}\qquad(3),$$

гдѣ $\frac{p}{q}$ есть величина даннаго отношенія $\frac{h_a}{m_b}$. Равенство (3) даетъ возможность построить треугольникъ BGC, а затѣмъ и треугольникъ ABC.

Дѣйствительно, опишемъ на отрѣзкѣ $a=BC$, сегментъ, вмѣщающій данный уголъ между медіанами m_b и m_c; изъ точки B, какъ изъ центра, опишемъ произвольнымъ радіусомъ r полуокружность, расположенную по ту же сторону прямой BC, какъ и сегментъ, вмѣщающій данный уголъ, и проведемъ прамую, параллельную BC и отстоящую отъ нея на разстояніи $r\cdot\frac{p}{2q}$, до встрѣчи съ полуокружностью въ точкахъ G_1 и G_2 *). Пусть G есть точка встрѣчи одного изъ лучей BG_1 и BG_2 съ дугой сегмента, вмѣщающаго данный уголъ. Отложивъ на лучахъ BG и CG соотвѣтственно части $BM=\frac{3}{2}BG$ и $CN=\frac{3}{2}CG$, продолжаемъ прямыя BN и CM до встрѣчи въ точкѣ A. Треугольникъ ABC есть искомый.

А. Берковичъ (Кіевъ); *М. Поповъ* (Асхабадъ); *Б. Д.* (К.); *Е. Огородниковъ* (Ровно); *Б. Заславскій* (Полтава).

№ 89 (4 сер.). *Въ треугольникъ* ABC *провести сѣкущія* $a_1a_2 \| BC$, $b_1b_2 \| CA$, $c_1c_2 \| AB$ (*стороны* a_2b_1, b_2c_1, c_2a_1 *шестиугольника лежать соотвѣтственно на сторонахъ* AB, BC *и* AC) *такъ, чтобы шестиугольникъ* $a_1a_2b_1b_2c_1c_2$ *оказался равностороннимъ. Пусть* x *сторона этого шестиугольника, и* a, b, c — *стороны даннаго треугольника. Доказать, что*

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Изъ подобія треугольниковъ a_1a_2A, ABC и b_1b_2B имѣемъ:

$$\frac{Aa_2}{a_1a_2}=\frac{Aa_2}{x}=\frac{c}{a};\quad \frac{Bb_1}{b_1b_2}=\frac{Bb_1}{x}=\frac{c}{b}\qquad(1),$$

откуда

$$Aa_2=\frac{cx}{a},\quad Bb_1=\frac{cx}{b}.$$

*) Уголъ GBK вообще можно предположить либо острымъ, либо тупымъ.

Слѣдовательно

$$cb = AB = Aa_2 + a_2b_1 + Bb_1 = \frac{cx}{a} + x + \frac{cx}{b}.$$

Итакъ

$$\frac{cx}{a} + \frac{cx}{b} + x = bc,$$

откуда

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Уравненія (1), достаточныя для нахожденія x, составлены лишь по условіямъ: $b_1b_2 \| AC$, $a_1a_2 \| BC$, $b_1b_2 = b_1a_2 = a_1a_2$. Что это рѣшеніе дѣйствительно удовлетворяетъ вопросу, можно обнаружить, вычисляя послѣдовательно a_1c_2, c_2c_1, c_1b_2; но быстрѣе убѣждаемся въ этомъ, замѣчая, что выраженіе $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ *симметрично* по отношенію къ a, b и c.

С. Избинскій (Кіевъ); *М. Поповъ* (Асхабадъ); *Г. Огановъ* (Эривань); *Д. Дьяковъ* (Новочеркасскъ); *Н. Готлибъ* (Митава); *В. Микшъ* (Новочеркасскъ); *Б. Мерцаловъ* (Москва); *В. Гудковъ* (Свеаборгъ); *П. Полушкинъ* (Знаменка); *Б. Д.* (К).

№ 90 (4 сер.). *Доказать, что въ вышеуказанномъ шестиугольникѣ прямыя* a_1b_2, b_1c_2, c_1a_2 *встрѣчаются въ одной точкѣ, разстоянія которой отъ сторонъ треугольника* ABC *находятся въ отношеніяхъ* $(b+c):(c+a):(a+b)$.

Такъ какъ отрѣзки a_1a_2 и c_1b_2 равны и параллельны, то фигура $c_1b_2a_2a_1$ есть параллелограммъ, діагонали котораго a_1b_2 и c_1a_2 пересѣкаются и дѣлятся пополамъ въ нѣкоторой точкѣ O; такъ какъ фигура $b_1b_2c_2a_1$ есть тоже параллелограммъ, діагонали котораго суть a_1b_2 и b_1c_2, то и прямая b_1c_2 проходитъ черезъ точку O, средину a_1b_2. Итакъ три прямыя a_1b_2, b_1c_2, c_1a_2 проходятъ черезъ точку O. Пусть разстоянія точки O отъ сторонъ даннаго треугольника суть соотвѣтственно V_a, V_b, V_c, а высоты этого треугольника—h_a, h_b, h_c. Разстояніе V_a есть половина высоты d параллелограмма $c_1b_2a_2a_1$; но

$$d = h_a - h'_a \qquad (1),$$

гдѣ h'_a — высота треугольника a_1a_2A, проведенная изъ вершины A. Вслѣдствіе подобія треугольниковъ a_1a_2A и ABC, $h'_a = \frac{a_1a_2 . h_a}{a} = \frac{xh_a}{a}$ (2).

Итакъ (см. (1), (2))

$$V_a = \frac{d}{2} = \frac{1}{2}\left(h_a - \frac{xh_a}{a}\right) = \frac{h_a(a-x)}{2a}.$$

Точно также найдемъ, что

$$V_b = \frac{h_b(b-x)}{2b},$$

откуда

$$\frac{V_a}{V_b} = \frac{h_a}{h_b} \cdot \frac{(a-x)b}{(b-x).a} \qquad (3).$$

Изъ равенства (см. рѣшеніе предыдущей задачи)

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

имѣемъ

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{a} = \frac{a-x}{a} = \frac{b+c}{bc}, \quad \frac{b-x}{b} = \frac{a+c}{ac},$$

откуда

$$\frac{(a-x)b}{(b-x)a}=\frac{(b+c)a}{(a+c)b}=\frac{(b+c)h_b}{(a+c)h_a}.$$

Подставляя это выраженіе въ равенство (3) вмѣсто $\frac{(a-x)b}{(b-x)a}$, найдемъ:

$$\frac{V_a}{V_b}=\frac{b+c}{a+c} \text{ и по аналогіи } \frac{V_c}{V_b}=\frac{a+b}{a+c}.$$

Слѣдовательно

$$V_a:V_b:V_c=(b+c):(c+a):(a+b).$$

С. Избинскій (Кіевъ); *Н. С.* (Одесса); *М. Поповъ* (Асхабадъ); *Д. Дьяковъ* (Новочеркасскъ); *В. Микшъ* (Новочеркасскъ).

№ 91 (4 сер.). *Построить треугольникъ по двумъ сторонамъ, зная, что сумма соотвѣтствующихъ имъ высотъ равна третьей высотѣ.*

Пусть a, b, c и h_a, h_b, h_c стороны и соотвѣтствующія имъ высоты треугольника, S—его площадь. Тогда

$$h_a=\frac{2S}{a},\quad h_b=\frac{2S}{b},\quad h_c=\frac{2S}{c}.$$

Слѣдовательно (полагая, что даны стороны a и b) —

$$\frac{2S}{a}+\frac{2S}{b}=\frac{2S}{c},$$

откуда

$$c=\frac{ab}{a+b}.$$

Построивъ c, какъ четвертую пропорціональную къ a, b и $a+b$, строимъ искомый треугольникъ по тремъ сторонамъ.

Г. Огановъ (Эривань); *Б. Мерцаловъ* (Москва); *М. Поповъ* (Асхабадъ); *П. Полушкинъ* (Знаменка); *Б. Д.* (К.); *В. Гудковъ* (Свеаборгъ); *Б. Заславскій* (Полтава).

ПОПРАВКА. Въ статьѣ проф. Д. Н. Зейлигера въ № 316, на стр. 81, на 8 строкѣ снизу, вмѣсто слова „математики" должно быть слово „механики".

Редакторы: **В. А. Циммерманъ** и **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса 29-го Марта 1902 г.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.

Обложка
пщется

Обложка
ищется