Обложка
ищется

Обложка
пщется

XXXIX Сем. № 9—10.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 465-466.

Новый выводъ формулъ сферической тригонометріи.

Г. Цезаро,

профессоръ университета въ Льежѣ.

Этотъ выводъ, въ которомъ не дѣлается никакихъ предположеній относительно плоскихъ угловъ a, b, c, образующихъ трехгранный уголъ, даетъ намъ формулы вполнѣ общія и имѣетъ еще то преимущество, что позволяетъ намъ прямо выводить эти формулы изъ двухъ прямолинейныхъ треугольниковъ, стороны и углы которыхъ суть функціи элементовъ трехграннаго угла. Примѣняя формулы прямолинейной тригонометріи, мы прямо получаемъ формулы тригонометріи сферической, не имѣя надобности для вывода одной изъ нихъ знать другія. Аналогіи Непера и формулы Деламбра читаются, если можно такъ выразиться, на самомъ трехгранномъ углѣ. Формулы Эйлера и Люильера получаются путемъ примѣненія къ одному изъ этихъ треугольниковъ формулъ прямолинейной тригонометріи, которыя выражаютъ косинусъ угла или тангенсъ половины угла треугольника въ зависимости отъ его сторонъ.

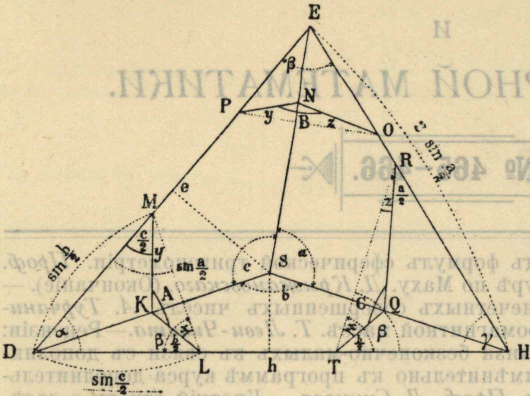
* * *

Треугольникъ элементовъ.

Отложимъ на ребрахъ трехграннаго угла, считая отъ вершины S (фиг. 1), разстоянія

$$SD = SE = SH = 1;$$

сторонами треугольника DEH будутъ: $2\,sin\frac{a}{2}$, $2\,sin\frac{b}{2}$, $2\,sin\frac{c}{2}$. Построимъ въ точкѣ K линейный уголъ двухграннаго угла A. Прямыя KL и KM, перпендикулярныя къ ребру SD, встрѣтятъ основанія равнобедренныхъ треугольниковъ SDH, SDE, каковы бы ни были плоскіе углы трехграннаго угла.



Фиг. 1.

1) Докажемъ, что прямыя ML и EH антипараллельны *). Въ самомъ дѣлѣ, если мы проведемъ медіаны Sh и Se въ треугольникахъ SDH и SDE, то четыреугольники $SKLh$ и $SKMe$ могутъ быть вписаны въ окружность, а потому:

$$Dh\,.\,DL = DS\,.\,DK = De\,.\,DM;$$

слѣдовательно:

$$DH\,.\,DL = DE\,.\,DM.$$

Если предположимъ, что $ML = sin\frac{a}{2}$, то

$$DL = sin\frac{c}{2},\; DM = sin\frac{b}{2}\,.$$

2) Докажемъ теперь, что углы L и M треугольника LKM суть простыя функціи двухгранныхъ угловъ трехграннаго угла. Въ самомъ дѣлѣ: построимъ въ точкѣ Q линейный уголъ двухграннаго угла C; вмѣстѣ съ тѣмъ мы получимъ прямую RT, антипараллельную DE; трехгранные углы $LMKD$ и $TRQH$ имѣютъ по два плоскихъ угла, порознь равныхъ между собою [β и $KLD = QTH = \frac{b}{2}$]**) и заключающихъ одинъ и тотъ же двухгранный уголъ (уголъ, образуемый плоскостями DSH и DEH); слѣдовательно, третьи плоскіе углы трехгранныхъ угловъ, обозначенные на чертежѣ черезъ x, тоже равны между собою. Можно такимъ же образомъ, построивъ линейный уголъ двухграннаго угла B

---

*) Если прямая ML параллельна EH, то треугольникъ MDL подобенъ треугольнику EDH, при чемъ сходственными являются вершины въ порядкѣ ихъ обозначенія. Если же треугольники эти подобны, но сходственными оказываются вершины въ порядкѣ обозначенія MDL и HDE, то говорятъ, что сторона ML антипараллельна сторонѣ EH. Ред.

**) Стороны угла KLD перпендикулярны къ сторонамъ угла DSh, который равенъ $\frac{b}{2}$. Углы же (β) MLD и RTH равны углу DEH по антипараллельности сторонъ. Ред.

въ точкѣ N, доказать, что углы y, а также и углы z равны между собою.

Отсюда слѣдуетъ, что

$$x+y=180^0-A,$$
$$y+z=180^0-B,$$
$$x+z=180^0-C.$$

Откуда, принимая, по обыкновенію,

$$A+B+C-180^0=2E,$$

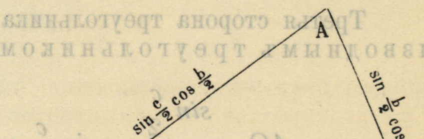
мы выводимъ:

$$x+y+z=180^0-E,$$
$$x=B-E,$$
$$y=C-E,$$
$$z=A-E.$$

Мы видимъ, что треугольникъ KLM содержитъ всѣ элементы трехграннаго угла; углы этого треугольника равняются: A, $B-E$, $C-E$; что касается его сторонъ, мы имѣемъ:

$$KL=\sin\frac{c}{2}\cos\frac{b}{2},\ KM=\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cdot$$

Этотъ треугольникъ, представленный отдѣльно на фиг. 2, мы будемъ называть треугольникомъ элементовъ. Приложивъ къ нему соотношенія изъ прямолинейной тригонометріи, мы получаемъ непосредственно формулы сферической тригонометріи.



Фиг. 2.

Итакъ, если представимъ себѣ прямолинейный треугольникъ, углы котораго равняются двухграннымъ угламъ трехграннаго угла, при чемъ два изъ нихъ уменьшены на половину сферическаго избытка, A, $B-E$, $C-E$, то противулежащія стороны будутъ соотвѣтственно пропорціональны:

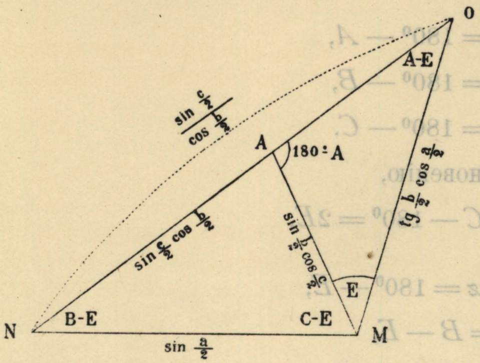
$$\sin\frac{a}{2},\ \sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\ \text{ и }\ \sin\frac{c}{2}\cos\frac{b}{2}\cdot$$

* * *

Производный треугольникъ.

Сочетаніе двухъ треугольниковъ элементовъ намъ даетъ очень простой прямолинейный треугольникъ, одинъ изъ угловъ котораго равняется половинѣ сферическаго избытка.

Черезъ вершину M (фиг. 3) треугольника элементовъ NAM, соотвѣтствующаго углу A, проведемъ прямую MO, образующую съ AM уголъ E; треугольникъ NMO будетъ треугольникомъ элементовъ по отношенію къ C, потому что его углы равны



Фиг. 3.

$$C,\ A-E,\ B-E.$$

Противулежащія стороны должны быть соотвѣтственно пропорціональны

$$\sin\frac{c}{2},\ \sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2},\ \sin\frac{b}{2}\cos\frac{a}{2},$$

и такъ какъ сторона, противулежащая углу $A-E$,

$$MN=\sin\frac{a}{2},$$

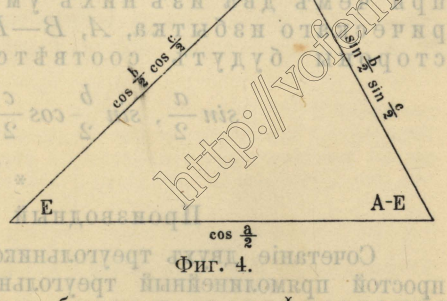
то отсюда слѣдуетъ, что другія стороны должны быть раздѣлены на $\cos\frac{b}{2}$; такъ что

$$NO=\frac{\sin\frac{c}{2}}{\cos\frac{b}{2}},\quad MO=tg\frac{b}{2}\cos\frac{a}{2}\cdot$$

Третья сторона треугольника MAO, который мы назовемъ п р о и з в о д н ы м ъ т р е у г о л ь н и к о м ъ, будетъ равняться:

$$AO=\frac{\sin\frac{c}{2}}{\cos\frac{b}{2}}-\sin\frac{c}{2}\cos\frac{b}{2}=\sin\frac{c}{2}\sin\frac{b}{2}\,tg\frac{b}{2}\cdot$$

Раздѣливши всѣ три стороны производнаго треугольника на $tg\frac{b}{2}$, мы получимъ результатъ, представленный фигурой 4-й:



Фиг. 4.

Е с л и п р е д с т а в и м ъ т р е у г о л ь н и к ъ, в ъ к о т о р о м ъ у г л ы б у д у т ъ р а в н я т ь с я: д о п о л н и т е л ь н о м у к ъ 180^0 о т ъ д в у х г р а н н а г о у г л а, э т о м у ж е д в у х г р а н н о м у у г л у б е з ъ п о л о в и н ы с ф е р и ч е с к а г о и з б ы т к а и п о л о в и н ѣ с ф е р и ч е с к а г о и з б ы т к а, т. е. $180-A$, $A-E$, E, т о п р о т и в у л е ж а щ і я с т о р о н ы б у д у т ъ с о о т в ѣ т с т в е н н о пропорціональны

$$\cos\frac{a}{2},\ \cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} \text{ и } \sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}.$$

Таковы тѣ два треугольника, посредствомъ которыхъ мы можемъ вывести всѣ формулы сферической тригонометріи, каждую въ отдѣльности, независимо отъ другихъ.

*
* *

Аналогіи Непера.

Замѣтивъ, что разность угловъ при основаніи въ треугольникѣ элементовъ (фиг. 2) равна $B-C$, и что въ прямолинейномъ треугольникѣ тангенсъ полуразности двухъ угловъ относится къ тангенсу ихъ полусуммы (или котангенсу половины третьяго угла), какъ разность противулежащихъ сторонъ къ ихъ суммѣ, мы будетъ имѣть:

$$\frac{tg\,\frac{B-C}{2}}{cotg\,\frac{A}{2}}=\frac{\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}-\sin\frac{c}{2}\cos\frac{b}{2}}{\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}+\sin\frac{c}{2}\cos\frac{b}{2}}=\frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{b+c}{2}}.$$

То же свойство въ приложеніи къ производному треугольнику даетъ:

$$\frac{tg\,\frac{B+C}{2}}{cotg\,\frac{A}{2}}=\frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}}.$$

Приложивши эти формулы къ дополнительному трехгранному углу, мы получимъ остальныя двѣ аналогіи.

*
* *

Формулы Деламбра.

Пропорціональность сторонъ синусамъ противолежащихъ угловъ даетъ намъ въ треугольникѣ элементовъ:

$$\frac{\sin\frac{a}{2}}{\sin A}=\frac{\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}{\sin(B-E)}=\frac{\sin\frac{c}{2}\cos\frac{b}{2}}{\sin(C-E)}=$$

$$=\frac{\sin\frac{b+c}{2}}{\sin(B-E)+\sin(C-E)}=\frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin(B-E)-\sin(C-E)},$$

или $$\frac{\sin\frac{a}{2}}{\sin A}=\frac{\sin\frac{b+c}{2}}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}=\frac{\sin\frac{b-c}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}},$$

откуда

$$\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{\sin\frac{b+c}{2}}{\sin\frac{a}{2}}$$

и

$$\frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{a}{2}}.$$

Этотъ же способъ въ приложенiи къ производному треугольнику даетъ остальныя двѣ формулы Деламбра.

*
* *

Формула Ейлера.

$$\cos E=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}.$$

Чтобы получить эту формулу, достаточно вычислить въ производномъ треугольникѣ (фиг. 4) косинусъ угла E въ зависимости отъ сторонъ. Мы имѣемъ:

$$\sin^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{c}{2}=\cos^2\frac{b}{2}\cos^2\frac{c}{2}+\cos^2\frac{a}{2}-2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos E,$$

$$4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos E=2\cos^2\frac{a}{2}+2\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{b-c}{2}=$$

$$=1+\cos a+\cos b+\cos c.$$

*
* *

Формула Люильера.

$$tg^2\frac{E}{2}=tg\frac{p}{2}\,tg\frac{p-a}{2}\,tg\frac{p-b}{2}\,tg\frac{p-c}{2}.$$

Чтобы получить эту формулу, нужно вычислить въ производномъ треугольникѣ тангенсъ половины угла $\frac{E}{2}$ въ зависимости отъ сторонъ. Для этого можно либо, по предыдущему, вычислить $\sin^2\frac{E}{2}$ и $\cos^2\frac{E}{2}$ въ зависимости отъ сторонъ, либо прямо воспользоваться формулой:

$$tg^2\frac{A'}{2}=\frac{(p'-b')(p'-c')}{p'(p'-a')},$$

опредѣляющей уголъ A' прямолинейнаго треугольника, стороны котораго равняются a', b', c', а периметръ $2p'$. Въ данномъ случаѣ

$$2p' = \cos\frac{a}{2} + \cos\frac{b-c}{2}, \quad 2p' - 2a' = \cos\frac{a}{2} + \cos\frac{b+c}{2},$$

$$2p' - 2b' = \cos\frac{b-c}{2} - \cos\frac{a}{2}, \quad 2p' - 2c' = \cos\frac{a}{2} - \cos\frac{b+c}{2};$$

слѣдовательно,

$$tg^2\frac{E}{2} = \frac{\cos\frac{b-c}{2} - \cos\frac{a}{2}}{\cos\frac{b-c}{2} + \cos\frac{a}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{a}{2} - \cos\frac{b+c}{2}}{\cos\frac{a}{2} + \cos\frac{b+c}{2}},$$

и такъ какъ

$$\frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = tg\frac{\beta+\alpha}{2}\, tg\frac{\beta-\alpha}{2},$$

то

$$tg^2\frac{E}{2} = tg\frac{a+b-c}{4}\, tg\frac{a-b+c}{4}\, tg\frac{a+b+c}{4}\, tg\frac{b+c-a}{4}.$$

* * *

Соотношенія между четырьмя элементами.

a) Соотношенія между тремя сторонами и однимъ угломъ. Достаточно написать соотношеніе между тремя сторонами и угломъ A въ прямолинейномъ треугольникѣ элементовъ:

$$\sin^2\frac{a}{2} = \sin^2\frac{b}{2}\cos^2\frac{c}{2} + \sin^2\frac{c}{2}\cos^2\frac{b}{2} - \frac{1}{2}\sin b \sin c \cos A,$$

откуда, помноживъ обѣ части равенства на 2, получимъ:

$$1 - \cos a = (1 + \cos c)\sin^2\frac{b}{2} + (1 - \cos c)\cos^2\frac{b}{2} - \sin b \sin c \cos A =$$

$$= 1 - \cos c \cos b - \sin b \sin c \cos A,$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Примѣчаніе. Если бы намъ нужно было выразить уголъ въ зависимости отъ сторонъ, мы могли бы прямо приложить къ треугольнику элементовъ одну изъ формулъ, выражающихъ половину угла въ зависимости отъ сторонъ,—напримѣръ, формулу

$$\cos^2\frac{A'}{2} = \frac{p'(p'-a')}{b'c'}.$$

Въ данномъ случаѣ

$$2p' = \sin\frac{b+c}{2} + \sin\frac{a}{2} = 2\sin\frac{p}{2}\cos\frac{p-a}{2},$$

$$2p' - 2a' = \sin\frac{b+c}{2} - \sin\frac{a}{2} = 2\sin\frac{p-a}{2}\cos\frac{p}{2},$$

откуда

$$\cos^2\frac{A}{2} = \sin p\,\frac{\sin(p-a)}{\sin b \sin c}.$$

b) Соотношенія между двумя сторонами и противулежащими углами. Мы имѣемъ въ треугольникѣ (A) элементовъ:

$$\frac{\sin\frac{a}{2}}{\sin A} = \frac{\sin\frac{c}{2}\cos\frac{b}{2}}{\sin(C-E)}$$

и въ треугольникѣ (B):

$$\frac{\sin\frac{b}{2}}{\sin B} = \frac{\sin\frac{c}{2}\cos\frac{a}{2}}{\sin(C-E)}\ ^{*});$$

раздѣливъ почленно первое равенство на второе, получаемъ:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B}.$$

c) Соотношенія между тремя углами и одной стороной. Въ формулѣ

$$\frac{\sin\frac{a}{2}}{\sin A} = \frac{\sin\frac{c}{2}\cos\frac{b}{2}}{\sin(C-E)}$$

замѣнимъ a на c и обратно:

$$\frac{\sin\frac{c}{2}}{\sin C} = \frac{\sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}}{\sin(A-E)}$$

и, перемноживъ почленно оба равенства, получимъ:

$$\cos^2\frac{b}{2} = \frac{\sin(A-E)\sin(C-E)}{\sin A \sin C}.$$

Чтобы представить эту формулу въ обыкновенномъ видѣ, уничтожимъ знаменателя, удвоимъ обѣ части равенства и замѣнимъ удвоенное произведеніе синусовъ во 2-й части равенства суммою косинусовъ:

$$(1+\cos b)\sin A \sin C = \cos(A-C) + \cos B,$$

$$\cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b.$$

d) Соотношенія между двумя сторонами, заключеннымъ между ними угломъ и угломъ противулежащимъ.

---

*) Т. е. замѣнивъ a на b и обратно.

Самый простой способъ получить формулу

$$cotg\, a \sin b = \cos b \cos C + \sin C\, cotg\, A$$

состоитъ въ томъ, чтобы исключить B изъ двухъ аналогій, которыя читаются на треугольникѣ элементовъ и на производномъ треугольникѣ:

$$\frac{tg\,\frac{A+B}{2}}{cotg\,\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}},\quad \frac{tg\,\frac{A-B}{2}}{cotg\,\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}.$$

Это исключеніе дѣлается очень быстро, если исходить изъ равенства

$$A=\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}.$$

Имѣемъ послѣдовательно:

$$tg\,A = cotg\,\frac{C}{2}\cdot\frac{\dfrac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}+\dfrac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}}{1-cotg^2\frac{C}{2}\cdot\dfrac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)}}=$$

$$=\sin C\cdot\frac{\sin a}{\sin(a+b)\sin^2\frac{C}{2}-\sin(a-b)\cos^2\frac{C}{2}}=$$

$$=\sin C\cdot\frac{\sin a}{\cos a\sin b-\sin a\cos b\cos C};$$

$$cotg\, a\sin b=\cos b\cos C+\sin C\, cotg\, A.$$

Примѣчаніе. Соотношеніе b) между двумя сторонами и противулежащими углами можно также получить слѣдующими способами.

α) Производный треугольникъ (фиг. 4) даетъ намъ:

$$\frac{\cos\frac{a}{2}}{\sin A}=\frac{\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}{\sin E};$$

умноживъ обѣ части равенства на $2\sin\frac{a}{2}$, получимъ:

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}{\sin E}.$$

β) Исключивъ C изъ двухъ аналогій Непера, въ которыя входятъ A, B, C, a, b, получимъ:

$$\frac{tg\,\frac{A+B}{2}}{tg\,\frac{A-B}{2}}=\frac{tg\,\frac{a+b}{2}}{tg\,\frac{a-b}{2}}.$$

Отсюда, замѣтивъ, что

$$\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{tg\,\alpha-tg\,\beta}=\frac{sin\,(\alpha+\beta)}{sin\,(\alpha-\beta)},$$

получимъ:

$$\frac{sin\,A}{sin\,B}=\frac{sin\,a}{sin\,b}.$$

*
* *

Посредствомъ предыдущаго способа, мы можемъ также составить формулы, относящіяся къ сферическимъ радіусамъ окружностей, вписанной и описанной около сферическаго треугольника, не прибѣгая къ помощи формулъ изъ сферической тригонометріи, такъ какъ высоты треугольниковъ элементовъ и ихъ площади суть простыя функціи этихъ радіусовъ.

*
* *

Площадь треугольниковъ элементовъ и производныхъ треугольниковъ.

Легко убѣдиться, что всѣ шесть прямолинейныхъ треугольниковъ, которые мы построили*), имѣютъ одну и ту же площадь. Дѣйствительно, каждый треугольникъ элементовъ равновеликъ своему производному, площадь котораго

$$S=\frac{1}{8}\,sin\,b\,sin\,c\,sin\,A, \tag{1}$$

если считать вершинами A или 180^0-A; съ другой стороны, всѣ три производныхъ треугольника имѣютъ общую площадь, если считать вершиною уголъ E:

$$S=\frac{1}{2}\,cos\,\frac{a}{2}\,cos\,\frac{b}{2}\,cos\,\frac{c}{2}\,sin\,E\ ^{**}). \tag{2}$$

Эта площадь, вычисленная въ зависимости отъ сторонъ въ одномъ изъ шести прямолинейныхъ треугольниковъ, выражается формулой:

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{sin\,p\,sin\,(p-a)\,sin\,(p-b)\,sin\,(p-c)}. \tag{3}$$

Чтобы получить S въ зависимости отъ угловъ, можно выразить въ формулѣ (2) произведеніе $cos\,\frac{a}{2}\,cos\,\frac{b}{2}\,cos\,\frac{c}{2}$ въ зависимости отъ

*) Т. е. имѣющіе основаніями $sin\,\frac{a}{2}$ и $cos\,\frac{a}{2}$.

**) Площадь каждаго изъ шести прямолинейныхъ треугольниковъ дополнительнаго трехгран. угла дается формулой: $S_p=\frac{1}{8}\,sin\,B\,sin\,C\,sin\,a=\frac{sin\,A}{sin\,a}\cdot S$.

угловъ: производный треугольникъ намъ даетъ:

$$\frac{\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a}{2}}=\frac{\sin(A-E)}{\sin A}.$$

Почленнымъ перемноженіемъ этихъ трехъ аналогичныхъ формулъ находимъ искомое произведеніе и

$$S=\frac{\sin E\sin(A-E)\sin(B-E)\sin(C-E)}{2\sin A\sin B\sin C}.$$

* * *

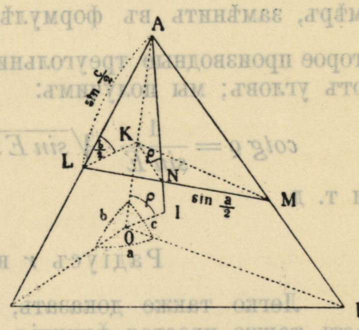
Радіусъ ϱ описанной окружности.

Отложимъ на ребрахъ трехграннаго угла, считая отъ вершины O (фиг. 5), разстоянія

$$OA=OB=OC=1$$

и построимъ при точкѣ K треугольникъ элементовъ съ основаніемъ, равнымъ $\sin\frac{a}{2}$. Прямая OI, перпендикулярная къ плоскости ABC, будетъ одинаково наклонена ко всѣмъ тремъ ребрамъ трехграннаго угла подъ угломъ ϱ, противулежащимъ радіусу малой окружности, которая проходитъ черезъ точки A, B, C на шарѣ, имѣющемъ центромъ O и радіусъ, равный 1. Плоскость AOI, опредѣленная перпендикулярами къ плоскостямъ ABC, KLM, перпендикулярна къ линіи пересѣченія этихъ плоскостей LM, такъ что KN будетъ высотою треугольника элементовъ. Имѣемъ:

$$KN=AK\operatorname{cotg}\varrho,\ \text{и}\ AK=\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}.$$



Фиг. 5.

Итакъ, высота, исходящая изъ вершины A треугольника элементовъ (фиг. 6), выражается

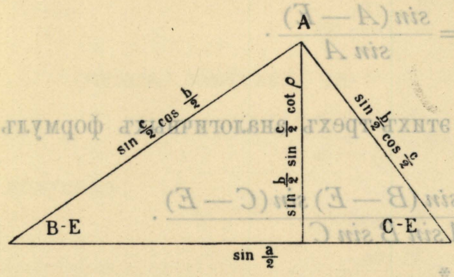
$$h_a=\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\operatorname{cotg}\varrho. \tag{4}$$

Можно, значитъ, вычислить въ треугольникѣ элементовъ, помощью формулъ прямолинейной тригонометріи, сферическій радіусъ окружности, описанной около сферическаго треугольника.

Помноживъ обѣ части равенства (4) на $\sin\frac{a}{2}$, можно также написать:

$$2S=\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\operatorname{cotg}\varrho. \tag{5}$$

Приравнявъ вторую часть этого равенства произведенію какихъ-либо двухъ сторонъ одного изъ шести прямолинейныхъ треугольниковъ на синусъ угла между ними, мы получимъ различныя выраженія для ϱ. Такъ:



Фиг. 6.

a) Выразивъ $2S$ по углу E въ одномъ изъ производныхъ треугольниковъ, мы получимъ:

$$cotg\,\varrho = \\ = cotg\frac{a}{2}\,cotg\frac{b}{2}\,cotg\frac{c}{2}\,sin\,E. \qquad (6)$$

b) Можно получить ϱ въ зависимости отъ сторонъ, если мы въ формулѣ (5) выразимъ площадь треугольника элементовъ въ зависимости отъ его сторонъ (3):

$$cotg\,\varrho = \frac{\sqrt{sin\,p\,sin\,(p-a)\,sin\,(p-b)\,sin\,(p-c)}}{2\,sin\frac{a}{2}\,sin\frac{b}{2}\,sin\frac{c}{2}}. \qquad (7)$$

c) Чтобы получить ϱ въ зависимости отъ угловъ, можно, напримѣръ, замѣнить въ формулѣ (6) произведеніе $cotg\frac{a}{2}\,cotg\frac{b}{2}\,cotg\frac{c}{2}$, которое производные треугольники даютъ непосредственно въ зависимости отъ угловъ; мы получимъ:

$$cotg\,\varrho = \frac{1}{sin\,E}\cdot\sqrt{sin\,E\,sin\,(A-E)\,sin\,(B-E)\,sin\,(C-E)} \qquad (8)$$

и т. д.

* * *

Радіусъ r вписанной окружности.

Легко также доказать, что площадь S треугольника элементовъ есть также простая функція отъ радіуса вписанной окружности*); но r выводится такъ просто изъ выраженія для ϱ, что безполезно прибѣгать къ этому свойству. Чтобы перейти отъ ϱ къ r, мы основываемся на слѣдующей теоремѣ, почти очевидной.

Теорема. Центръ вписанной въ сферическій треугольникъ окружности совпадаетъ съ центромъ окружности, описанной вокругъ полярнаго треугольника, и радіусы этихъ окружностей дополняютъ другъ друга до 90^0.

Изъ этого слѣдуетъ, что для перехода отъ ϱ къ r нужно замѣнить ϱ на $90^0 - r$, и a, b, c, A, B, C соотвѣтственно на $180^0 - A$, $180^0 - B$, $180^0 - C$, $180^0 - a$, $180^0 - b$, $180^0 - c$**); такимъ образомъ, формулы (6), (7) и (8) примутъ видъ:

---

*) $S = \frac{1}{4}\,sin\,p\,tg\,r$.

**) E замѣнено на $180^0 - p$, $A - E$ на $p - a$ и т. д.

$$tg\, r = tg\frac{A}{2}\, tg\frac{B}{2}\, tg\frac{C}{2}\, sin\, p,$$

$$tg\, r = \frac{\sqrt{sin\, E\, sin\,(A-E)\, sin\,(B-E)\, sin\,(C-E)}}{2\, cos\frac{A}{2}\, cos\frac{B}{2}\, cos\frac{C}{2}} \tag{9}$$

$$tg\, r = \frac{1}{sin\, p}\cdot\sqrt{sin\, p\, sin\,(p-a)\, sin\,(p-b)\, sin\,(p-c)}.$$

* * *

Продоложивъ стороны сферическаго треугольника до взаимнаго пересѣченія, мы получимъ три новыхъ треугольника; обозначимъ черезъ ϱ_a и r_a радіусы описанной и вписанной окружности вокругъ одного изъ треугольниковъ, который получился отъ продолженія сторонъ b и c. Этотъ треугольникъ отличается отъ первоначальнаго тѣмъ, что въ немъ стороны b и c замѣнены черезъ $(\pi - b)$ и $(\pi - c)$ и углы B и C черезъ $\pi - B$ и $\pi - C$. Мы получаемъ, слѣдовательно, общія формулы:

$$\varrho = f(a,\ b,\ c,\ A,\ B,\ C),$$

$$\frac{\pi}{2} - r = f(a,\ \pi - b,\ \pi - c,\ A,\ \pi - B,\ \pi - C),$$

$$\varrho_a = f(a,\ \pi - b,\ \pi - c,\ A,\ \pi - B,\ \pi - C),$$

$$\frac{\pi}{2} - r_a = f(\pi - A,\ B,\ C,\ \pi - a,\ b,\ c).$$

Итакъ, формула (6) даетъ формулу (9) и

$$cotg\, \varrho_a = cotg\frac{a}{2}\, tg\frac{b}{2}\, tg\frac{c}{2}\, sin\,(A - E),$$

$$tg\, r_a = tg\frac{A}{2}\, cotg\frac{B}{2}\, cotg\frac{C}{2}\, sin\,(p - a)$$

т. д.

* * *

Примѣчаніе. Треугольникъ, который мы назвали производнымъ, можно еще получить совершенно другимъ образомъ:

Производный треугольникъ—это треугольникъ элементовъ трехграннаго угла, который имѣетъ общую сторону съ разсматриваемымъ трехграннымъ угломъ, и третье ребро котораго есть продолженіе третьяго ребра этого трехграннаго угла.

Дѣйствительно, предположивъ, что b есть общая сторона, мы получимъ для элементовъ второго трехграннаго угла:

$$180^0 - a,\ b,\ 180^0 - c,\ 180^0 - A,\ B,\ 180^0 - C;$$

его сферическій избытокъ

$$2E' = 2(B - E)\ ^{*)}.$$

*) Это видно безъ всякаго вычисленія на самомъ шарѣ, такъ какъ оба сферическихъ треугольника, опредѣляющіе трехгранные углы, о которыхъ идетъ рѣчь, образуютъ вырѣзокъ B, площадь котораго равняется $2B$.

Одинъ изъ треугольниковъ элементовъ этого трехграннаго угла будетъ имѣть углы

$$180^0 - A,\ B - (B - E) = E,\ 180^0 - C - (B - E) = A - E.$$

Что касается сторонъ, то ихъ можно получить, замѣнивъ a и c ихъ дополнительными до 180^0, выразивъ ихъ въ зависимости отъ сторонъ треугольника элементовъ (A) перваго трехграннаго угла; получимъ:

$$cos\frac{a}{2},\ sin\frac{b}{2}\cdot sin\frac{c}{2},\ cos\frac{b}{2}cos\frac{c}{2}.$$

Ученіе о температурѣ по Маху.

Д. Крыжановскаго.

(*Окончаніе* *).

§ 12. Употребленіе воздушнаго термометра, съ постояннымъ давленіемъ или постояннымъ объемомъ, содержитъ такое опредѣленіе температуры: въ согласіи съ уравненіями:

$$p = p_o(1 + at) \quad \text{или} \quad v = v_o(1 + at)$$

произвольно полагаемъ, что температура t выражается уравненіемъ:

$$t = \frac{p - p_o}{ap_o} \quad \text{или} \quad t = \frac{v - v_o}{av_o}.$$

Температура Амонтона T, называемая обыкновенно абсолютной, дается уравненіемъ

$$T = \frac{273p}{p_o}$$

Она находится въ слѣдующемъ соотношеніи съ предыдущей:

$$T = \frac{273p}{p_o} = \frac{p}{ap_o} = \frac{p - p_o + p_o}{ap_o} = \frac{p - p_o}{ap_o} + \frac{1}{a},$$

или

$$T = t + \frac{1}{a} = t + 273.$$

§ 13. Вспоминая тотъ путь, которымъ мы пришли къ понятію температурнаго числа, или просто температуры, мы видимъ, что намъ пришлось сдѣлать три произвольныхъ соглашенія относительно: 1) выбора объема, какъ признака теплового состоянія, 2) термоскопическаго вещества и 3) принципа сопряженія чиселъ съ объемами, или принципа градуированія термометра.

---

*) См. № 464 „Вѣстника".

Въ этомъ номерѣ замѣчены опечатки: стр. 170, строка 6—„книги" вмѣсто „книгъ"; стр. 176, строка 7—„выражаемыми" вмѣсто „выражаемаго", тамъ же строка 2 снизу—„Амонтонсомъ" вмѣсто „Амонтономъ".

Пониманіе *условности* обозначенія теплового состоянія *числомъ* лишь постепенно становилось достояніемъ физиковъ. Еще и въ наше время многіе ищутъ, болѣе или менѣе безсознательно, „естественной мѣры“ температуры, „настоящей“ температуры, своего рода Платоновой *идеи* температуры, по отношенію къ которой температуры, отсчитываемыя на термометрѣ, представляли бы лишь „неполное, тусклое выраженіе“.

Подобные взгляды и цѣлыя разсужденія на тему о „равномѣрности“ или „неравномѣрности“ (по сравненію съ чѣмъ?) расширенія тѣлъ можно найти у такихъ замѣчательныхъ физиковъ, какъ *Дальтонъ* (Dalton), *Гэ-Люссакъ* (Gay-Lussac), *Дюлонгъ* (Dulong) и *Пти* (Petit), *Клаузіусъ* (Clausius). И лишь съ трудомъ устанавливается тотъ взглядъ, что рѣчь можетъ быть только объ установленіи точно-опредѣленной, всеобще-сравнимой температурной скалы, а не о какой-то *истинной* или *натуральной* скалѣ температуръ.

Чтобы не быть голословными, ознакомимся ближе съ мнѣніями упомянутыхъ физиковъ.

Ламбертъ (Lambert) (Pyrometrie, 1779, S. 52) такъ характеризуетъ взгляды своихъ современниковъ: „Не было увѣренности въ томъ, дѣйствительно ли *настоящіе* градусы (eigentliche Grade) теплоты пропорціональны градусамъ расширенія. И если бы даже это и было несомнѣнно такъ, то все же оставался вопросъ о томъ, съ котораго слѣдуетъ начинать вести счетъ“.

Дальтонъ („A new system of chemical philosophy“, 1808) выражается такъ: „Дѣлались опыты съ жидкостями, но оказывалось, что онѣ расширяются *неравномѣрно*. Всѣ онѣ расширялись сильнѣе при высокихъ, чѣмъ при низкихъ температурахъ... Среди всѣхъ другихъ ртуть обнаруживала, повидимому, наименьшее уклоненіе, или наиболѣе приближалась къ *равномѣрному* расширенію“.

Гэ-Люссакъ говоритъ: „Le thermomètre, tel qu'il est aujourd'hui ne peut servir à indiquer des rapports exacts de la *chaleur*, parce que l'on ne sait pas encore quel rapport il y a entre les degrés du thermomètre et les *quantités* de chaleur qu'ils peuvent indiquer. On croit, il est vrai, généralement, que des divisions égales de son échelle représentent des *tensions* égales de calorique; mais cette opinion n'est fondée sur aucun fait bien positif“ *).

Болѣе всѣхъ способствовали устраненію предвзятыхъ мнѣній относительно расширенія тѣлъ *Дюлонгъ* и *Пти*. Своими точными измѣреніями они обнаружили, что характеръ расширенія тѣлъ при нагрѣваніи представляетъ индивидуальное качество каждаго тѣла (ср. § 8).

---

*) „Термометръ, въ томъ видѣ, въ какомъ онъ теперь существуетъ, не можетъ служить для указанія точныхъ соотношеній *теплоты*, такъ какъ еще неизвѣстно, какое соотношеніе существуетъ между градусами термометра и *количествами* теплоты, на которыя послѣднія указываютъ. Правда, общепринято думать, что равныя дѣленія термометрической скалы представляютъ равныя *напряженія* теплорода; но это мнѣніе не основано ни на какомъ положительномъ фактѣ“.

Одни только газы расширяются по одному и тому же закону, на что указалъ еще Гэ-Люссакъ.

Одинаковымъ тепловымъ состояніямъ соотвѣтствуютъ такія значенія увеличенія объема:

Воздухъ	Желѣзо	Мѣдь	Платина
100	100	100	100
300	372,6	328,8	311,6

Сами Дюлонгъ и Пти дѣлаютъ отсюда заключеніе о зависимости термометрической скалы отъ выбора термометрическаго вещества. Въ частности, газовые термометры оказываются всеобще сравнимыми, что заставляетъ ихъ предпочитать, не лишая, впрочемъ, значенія и другіе термометры.

Съ другой стороны, у Делюка (Deluc) и Крауфорда (Crowford) мы встрѣчаемъ поиски тѣла, котораго расширеніе было бы пропорціонально количеству поглощенной теплоты. Дюлонгъ и Пти тоже считаютъ раціональной такую скалу температуръ, градусы которой одновременно измѣряли бы количество теплоты, поглощенной термометромъ. Но они прекрасно понимаютъ, что такая скала имѣла бы значеніе лишь въ томъ случаѣ, если бы и для другихъ тѣлъ имѣла мѣсто независимость теплоемкости отъ такой скалы температуръ, или же—что̀ въ сущности все равно—если бы теплоемкости всѣхъ тѣлъ съ одинаковымъ измѣненіемъ теплового состоянія измѣнялись бы пропорціонально другъ другу. И вотъ Дюлонгъ и Пти предприняли рядъ точныхъ измѣреній теплоемкостей различныхъ тѣлъ въ широкихъ предѣлахъ. Получились такіе результаты:

	Средняя теплоемкость между 0° и 100° (возд. терм.)	Средняя теплоемкость между 0° и 300° (возд. терм.)
Ртуть	0,0330	0,0350
Цинкъ	0,0927	0,1015
Сурьма	0,0507	0,0549
Серебро	0,0557	0,0611
Мѣдь	0,0949	0,1013
Платина	0,0355	0,0355
Желѣзо	0,1098	0,1218
Стекло	0,177	0,190

Изъ этой таблицы видно, что теплоемкости растутъ вмѣстѣ съ градусами воздушнаго термометра, но въ разной степени для разныхъ тѣлъ; онѣ бы росли у всѣхъ тѣлъ съ ростомъ температуры и по сравненію съ градусами ртутнаго термометра. Такимъ образомъ, законъ измѣненія теплоемкости также является индивидуальнымъ качествомъ каждаго тѣла. Поэтому и мысль Дюлонга о раціональномъ термометрѣ отпадаетъ, какъ не оправдываемая опытомъ.

Тѣмъ болѣе приходится удивляться, что даже у Дюлонга и Пти можно встрѣтить разсужденія вродѣ слѣдующаго: „По тому уклоненію, какое наблюдается уже при 300°, видно, какъ далеко расширеніе стекла отъ того, чтобы быть равномѣрнымъ (uniforme)“.

Спрашивается, какой критерій позволяетъ судить о „равномѣрности“ или „неравномѣрности“ расширенія газовъ, и какъ ее измѣрить?

Въ другомъ мѣстѣ мы встрѣчаемъ соображенія, которыя „дѣлаютъ весьма правдоподобнымъ, что... у газовъ измѣненія объема, производимыя дѣйствіемъ теплоты, находятся въ болѣе непосредственной зависимости отъ силы, которая ихъ производитъ“.

Это колебаніе между физической и метафизической точками зрѣнія встрѣчается и въ наше время. Такъ, въ одномъ превосходномъ современномъ учебникѣ (Махъ не называетъ автора) читаемъ: „Показанія воздушнаго термометра являются, такимъ образомъ, во всякомъ случаѣ сравнимыми. Но это еще не доказываетъ того, что воздушный термометръ дѣйствительно измѣряетъ то, что мы представляемъ себѣ подъ температурой; въ частности, не доказано, пропорціонально-ли увеличеніе упругости газа повышенію его температуры, такъ какъ до сихъ поръ мы это только допускали“.

Даже у Клаузіуса (Mechanische Wärmetheorie, 1864, I, S. 248) находимъ утвержденіе о томъ, что внѣшнее давленіе газа (на стѣнки сосуда) приблизительно (angenähert) пропорціонально абсолютной температурѣ, и что, въ виду „внутренней вѣроятности“ этой пропорціональности, многіе физики, начиная съ Гэ-Люссака и Дальтона, пользовались ею для „вычисленія“ (!) абсолютной температуры. Повидимому, по мнѣнію Клаузіуса, наряду съ упругостью газа существуетъ, какъ нѣчто вполнѣ реально-самостоятельное, абсолютная температура, только приблизительно (!) пропорціональная упругости.

Приведенныя выдержки заставляютъ думать, что предыдущее изложеніе — какимъ бы очевиднымъ оно ни казалось инымъ физикамъ — является далеко не излишнимъ.

§ 14. Аналогичные примѣры изъ другихъ отдѣловъ физики показываютъ, что людямъ свойственно стремленіе гипостазировать ими же созданныя абстрактныя понятія, приписывать имъ реальность помимо сознанія. Платонъ въ своемъ ученіи объ идеяхъ сдѣлалъ лишь нѣсколько слишкомъ свободное употребленіе изъ этого стремленія. Въ этомъ отношеніи не всегда бывали достаточно предусмотрительны даже такіе испытатели природы, какъ Ньютонъ, вопреки своимъ собственнымъ принципамъ изслѣдованія. Небезынтересно поэтому прослѣдить на нашемъ примѣрѣ, чѣмъ вызывается такое стремленіе.

Исходя при нашихъ наблюденіяхъ изъ тепловыхъ ощущеній, мы видимъ себя вскорѣ вынужденными замѣнить этотъ признакъ проявляемыхъ тѣломъ свойствъ (или его „поведенія“, Verhalten) другими признаками. Послѣдніе, однако, измѣняются не вполнѣ параллельно другъ другу. Въ силу именно этого обстоятельства, то первичное тепловое ощущеніе, которое мы замѣнили такими, не вполнѣ согласованными между собой признаками, остается въ насъ, безсознательно для насъ самихъ, ядромъ нашихъ представленій. И хотя теоретически намъ ясно, что это тепловое ощущеніе является не болѣе, какъ однимъ изъ многочисленныхъ проявленій тѣла, которыя мы все еще продолжаемъ познавать, однако, мы чувствуемъ себя вынужденными все это связать въ одно цѣлое и обозначить однимъ символомъ: тепловое состоянiе.

Провѣряя самихъ себя, мы обнаруживаемъ опять-таки, что безсознательнымъ ядромъ этого символа является тепловое ощущенiе, какъ первый и естественный представитель цѣлой группы представленiй. И вотъ намъ представляется, что мы обязаны приписать реальность этому символу, который вѣдь является не вполнѣ нашимъ произвольнымъ созданiемъ. Такъ возникаетъ впечатлѣнiе нѣкоторой „дѣйствительной температуры", лишь болѣе или менѣе неточнымъ выраженiемъ которой является температура, отсчитанная на термометрѣ.

Совершенно подобнымъ образомъ возникаютъ Ньютоновы представленiя объ „абсолютномъ времени", „абсолютномъ пространствѣ" и т. д. (см. Mach, Mechanik etc., 209 ff.). Ощущенiе длительности (Dauer) играетъ въ представленiяхъ о времени и его измѣренiи роль, аналогичную роли тепловыхъ ощущенiй въ нашемъ случаѣ.

§ 15. Заблужденiе иного рода мы встрѣчаемъ въ общепринятыхъ разсужденiяхъ о такъ называемомъ „абсолютномъ нулѣ температуръ". Если условиться считать температуру пропорцiональной упругости газа, при постоянномъ его объемѣ, то ясно, что такую температуру можно мыслить безконечно-большой. Но, какъ величина существенно положительная, упругость, а вмѣстѣ съ нею и температура, не можетъ упасть ниже нуля. Уравненiе

$$p = p_0 (1 + at)$$

показываетъ, что при $p = 0$ температура $t = -\frac{1}{a} = -273^0$С. Принято считать, что при такой температурѣ газъ совершенно лишенъ „теплоты" и не можетъ быть болѣе охлаждаемъ. Такимъ образомъ, рядъ тепловыхъ состоянiй, повидимому, сверху неограниченъ, а снизу встрѣчаетъ границу при -273^0С.

Но примемъ другую скалу температуръ, а именно скалу Дальтона (см. § 11) — вѣдь всѣ онѣ съ принципiальной точки зрѣнiя равноправны, какъ одинаково произвольныя по самой своей природѣ — и повторимъ тѣ же разсужденiя. По Дальтону, температура увеличивается на 10^0, если упругость измѣняется въ отношенiи 1:1,0179, температура падаетъ на 10^0, если упругость измѣняется въ обратномъ отношенiи. Ясно, что, сколько бы разъ мы ни дѣлили упругость на 1,0179, мы никогда не получимъ нулевой упругости. Слѣдовательно, при Дальтоновой скалѣ температура газа можетъ неограниченно измѣняться и вверхъ и внизъ, отъ $-\infty$ до $+\infty$. Впрочемъ, это не значитъ, что Дальтонова скала температуръ исключаетъ возможность нулевой упругости газа. Нѣтъ! Дальтонъ только не въ состоянiи, со своей скалой, достигнуть этой нулевой упругости, ибо онъ преслѣдуетъ её, какъ Ахиллесъ черепаху, все уменьшающимися шагами.

Уже этотъ примѣръ показываетъ, какъ неблагоразумно переносить безъ дальнѣйшаго свойства системы обозначенiй — въ данномъ случаѣ скалы температуръ — на самое обозначаемую вещь.

§ 16. Амонтонъ при установленiи своей скалы (см. § 11) исходилъ изъ того мнѣнiя, что упругость газа вызывается „теплотой“ (тепломъ, теплородомъ). Но его абсолютный нуль не единственный, который былъ установленъ, и даже не единственный, какой можно установить на основанiи столь же оправдываемыхъ воззрѣнiй. Если, напримѣръ, повторить тѣ же разсужденiя (§ 15) относительно коэффицiента расширенiя ртути, то найдемъ, что абсолютный нуль температуры лежитъ около — 5000°C. Впрочемъ, если картина, такъ сказать, „безобъемнаго“ тѣла придется не по душѣ комунибудь, то вѣдь и въ случаѣ ртути можно оперировать съ коэффицiентомъ упругости.

Но вотъ разсужденiе Дальтона и Гадолина (Gadolin), представляющее примѣръ совершенно иного метода нахожденiя абсолютнаго нуля.

При плавленiи 1 kg. льда при 0° поглощаетъ 80 большихъ калорiй. Дальтонъ объясняетъ это поглощенiе тѣмъ обстоятельствомъ, что теплоемкость воды вдвое больше теплоемкости льда. Слѣдовательно, эти 80 cal. идутъ на то, чтобы возмѣстить въ 1 kg. образующейся воды весь недостатокъ теплоты. Такъ какъ при нагрѣванiи на каждый градусъ 1 kg. воды поглощаетъ вдвое больше теплоты, чѣмъ 1 kg. льда, то, при нагрѣванiи отъ абсолютнаго нуля — когда ни у воды, ни у льда нѣтъ никакого запаса теплоты — до 0°C, вода получаетъ вдвое большiй запасъ теплоты, чѣмъ ледъ. Эту разницу между количествомъ теплоты у 1 kg. воды и 1 kg. льда при 0°C и составляютъ 80 cal. Слѣдовательно, весь тепловой запасъ 1 kg. воды при 0°C равенъ $2 \times 80 = 160$ cal. А такъ какъ при отнятiи каждой калорiи 1 kg. воды охлаждается на 1°C, то, отнявъ всѣ 160 калорiй, мы получили бы воду при — 160°C, и въ то же время лишенную теплоты. Слѣдовательно, абсолютный нуль лежитъ на 160°C ниже точки таянiя льда.

Подобный расчетъ относительно ртути приводитъ къ тому, что абсолютный нуль равенъ — 2021°C. Другой путь къ нахожденiю абсолютныхъ нулей состоитъ въ сравненiи теплоемкостей двухъ тѣлъ A и B и ихъ смѣси $A + B$ съ той теплотой, которая развивается при смѣшенiи A и B (напримѣръ, воды и сѣрной кислоты).

§ 17. Такимъ образомъ, можно получить цѣлый рядъ „абсолютныхъ нулей температуры“. Въ настоящее время употребляется одинъ лишь нуль Амонтона (— 273°C), который, соотвѣтственно динамической теорiи газовъ, приводятъ въ связь съ нулевой скоростью движенiя газовыхъ молекулъ. Впрочемъ, всѣ выводы покоятся въ равной степени на тѣхъ или иныхъ гипотезахъ относительно процессовъ, вызывающихъ тепловыя явленiя. Но какую бы цѣнность ни приписывать этимъ гипотетическимъ представленiямъ, приходится согласиться съ тѣмъ, что они не доказаны и не могутъ быть доказаны и ничего не могутъ предсказать относительно того фактическаго положенiя вещей, которое можно обнаружить только опытомъ.

§ 18. Какой же реальный смыслъ имѣютъ „абсолютные нули"? Возьмемъ для примѣра Амонтоновъ нуль. Это есть обозначенiе того теплового состоянiя, при которомъ упругость газа становится равной нулю. Но изъ того, что упругость газа, служащая примѣтой теплового состоянiя, исчезаетъ, слѣдуетъ только то, что принятая нами примѣта отсутствуетъ, газъ перестаетъ служить въ качествѣ термоскопа, и мы вынуждены обзавестить другой примѣтой теплового состоянiя. Но чтобы вмѣстѣ съ примѣтой исчезла и обозначаемая ею вещь,— это отнюдь не являются логически обязательнымъ.

Температурныя числа представляютъ собой знаки знаковъ, обозначенiя другихъ обозначенiй. Но изъ ограниченности случайно выбранной системы обозначенiй ничего не вытекаетъ относительно границъ обозначаемаго. Такъ, звуковыя ощущенiя можно условиться обозначать числами колебанiй (въ сек.). Эти числа, какъ существенно положительныя, имѣютъ опредѣленную нижнюю границу — нуль, но не имѣютъ верхней границы. Но мы можемъ тѣ же звуковыя ощущенiя обозначать и логарифмами чиселъ колебанiй, что даетъ лучшiй образъ музыкальныхъ интерваловъ. Такая система обозначенiй неограниченно простирается и вверхъ (до $+\infty$) и внизъ (до $-\infty$). Но система звуковыхъ ощущенiй остается все той же,—ограниченной и сверху и снизу.

Изъ того, что я могу, при помощи моей системы обозначенiй, дать опредѣленiе безконечно-высокаго или безконечно-низкаго тона, еще не слѣдуетъ, что подобный тонъ существуетъ.

Такой выводъ напоминалъ бы такъ называемое онтологическое доказательство существованiя божества—этотъ блестящiй образчикъ схоластическаго разсужденiя: опредѣляютъ нѣкоторое понятiе, къ числу признаковъ котораго принадлежитъ бытiе, а отсюда ужъ слѣдуетъ и бытiе опредѣляемаго. Въ современной физикѣ врядъ ли умѣстна подобная логическая безцеремонность.

Такимъ образомъ, мы можемъ такъ сказать: если бы даже было возможнымъ довести охлажденiемъ упругость газа до нуля, то такой результатъ обнаружилъ бы лишь непригодность газа въ качествѣ термоскопа, начиная съ этого момента. Но относительно ограниченности или неограниченности ряда тепловыхъ состоянiй снизу, отсюда ничего не слѣдуетъ.

Точно такъ же ничего нельзя заключить относительно неограниченности того же ряда сверху изъ того обстоятельства, что упругость газа можно мыслить неограниченно возрастающей, и что, слѣдовательно, рядъ температурныхъ чиселъ продолжается кверху безгранично. Вѣдь тѣло при извѣстной температурѣ плавится, кипитъ. Спрашивается, можетъ ли газъ достигнуть сколь угодно высокой температуры безъ коренного измѣненiя его свойствъ.

§ 19. Одинъ только опытъ можетъ рѣшить вопросъ о томъ, ограниченъ ли рядъ тепловыхъ состоянiй сверху или снизу. Если бы по отношенiю къ тѣлу, находящемуся въ нѣкоторомъ опредѣленномъ тепловомъ состоянiи, невозможно было подобрать болѣе горячаго (или болѣе холоднаго) тѣла, то этимъ — и только этимъ — было бы доказано существованіе верхней (или нижней) границы ряда тепловыхъ состояній.

Впрочемъ, этотъ взглядъ не исключаетъ примѣненія Амонтонова нуля температуры въ качествѣ научной фикціи, благодаря которой многіе законы (напримѣръ Маріотта-Гэ-Люссака) и разсужденія значительно упрощаются.

§ 20. Итакъ, температура является ничѣмъ инымъ, какъ характеристикой, обозначеніемъ тепловаго состоянія при помощи числа. Это температурное число играетъ роль простого инвентарнаго, или каталожнаго номера; благодаря ему, можно распознать одно и то же тепловое состояніе и, если нужно, разыскать его и возсоздать. Въ то же время эти числа — именно въ силу своей природы чиселъ — указываютъ, въ какомъ порядкѣ слѣдуютъ другъ за другомъ обозначенныя ими тепловыя состоянія и между какими другими тепловыми состояніями находится данное состояніе.

§ 21. Укажемъ въ заключеніе, что понятіе температуры есть такое же понятіе уровня, какъ, напримѣръ высота (надъ землей) тяжелаго тѣла, скорость движущагося тѣла, электрическій и магнитный потенціалъ, химическая разность. Термическій токъ имѣетъ мѣсто между тѣлами различной температуры, какъ электрическій токъ между тѣлами разнаго потенціала. Но въ то время, какъ понятіе потенціала было установлено цѣлесознательно, съ заранѣе извѣстными выгодами, съ понятіемъ температуры удалось это лишь случайно и приблизительно выгодно.

Въ большинствѣ физическихъ явленій играютъ роль лишь разности значеній уровня, въ области же тепловыхъ явленій имѣютъ значеніе абсолютныя величины значеній уровня, что сближаетъ тепловыя явленія съ химическими. Примѣрами могутъ служить постоянныя точки плавленія, кипѣнія, критическія температуры и т. д.

Къ вопросу о несуществованіи нечетныхъ совершенныхъ чиселъ.

А. Турчанинова.

(*Продолженіе* *).

Въ дополненіе къ доказанному нами предложенію, по которому простой множитель, входящій въ нечетной степени, долженъ имѣть видъ $4n+1$, докажемъ слѣдующую теорему.

Теорема X. Если $N=a^{2\alpha-1}b^{2\beta}c^{2\gamma}\ldots l^{2\lambda}$ есть нечетное совершенное число, то число α непремѣнно должно быть нечетнымъ, т. е. нечетный показатель $2\alpha-1$ такъ же, какъ и число a, долженъ имѣть видъ $4n+1$.

---

*) См. № 461 „Вѣстника“.

Имѣемъ:

$$2a^{2\alpha-1}b^{2\beta}c^{2\gamma}\ldots l^{2\lambda}=\frac{a^{2\alpha}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{2\beta+1}-1}{b-1}\cdot\frac{c^{2\gamma+1}-1}{c-1}\cdots\frac{l^{2\lambda+1}-1}{l-1}=$$

$$=(a+1)\cdot\frac{a^{2\alpha}-1}{a^2-1}\cdot\frac{b^{2\beta+1}-1}{b-1}\cdot\frac{c^{2\gamma+1}-1}{c-1}\cdots\frac{l^{2\lambda+1}-1}{l-1},$$

откуда мы усматриваемъ, что число

$$\frac{a^{2\alpha}-1}{a^2-1}=1+a^2+a^4+\cdots+a^{2(\alpha-1)}$$

должно быть нечетнымъ, ибо $a+1$ есть число четное. Но это число есть сумма α нечетныхъ слагаемыхъ. Слѣдовательно, число α должно быть нечетнымъ.

Послѣдующія теоремы даютъ нѣкоторыя свѣдѣнія о видѣ простыхъ дѣлителей, входящихъ въ четныхъ степеняхъ, и о соотвѣтствующихъ имъ показателяхъ. При доказательствѣ этихъ теоремъ мы примемъ во вниманіе тождество

$$\frac{y^{2n+1}+z^{2n+1}}{y+z}=E(y+z)^2+(-1)^n\cdot(yz)^n\cdot(2n+1),$$

вытекающее изъ формулы Варинга, которымъ мы уже имѣли случай пользоваться*). При помощи этого тождества уравненіе совершенныхъ чиселъ принимаетъ видъ:

$$a^{2\alpha-1}b^{2\beta}c^{2\gamma}\ldots l^{2\lambda}=\frac{a+1}{2}\cdot[E_a(a^2-1)^2+\alpha a^{\alpha-1}][E_b(b-1)^2+(2\beta+1)b^\beta]\cdot$$

$$\cdot[E_c(c-1)^2+(2\gamma+1)c^\gamma]\ldots[E_l(l-1)^2+(2\lambda+1)l^\lambda]. \qquad (!)$$

Такимъ образомъ, мы придемъ къ слѣдующимъ теоремамъ.

Теорема XI. Если $N=a^{2\alpha-1}b^{2\beta}c^{2\gamma}\ldots l^{2\lambda}$ есть нечетное совершенное число, то числа $b, c, \ldots, l$ могутъ всѣ одновременно имѣть видъ $4n+1$ лишь тогда, когда α имѣетъ видъ $8n+1$.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ уравненія (!) усматриваемъ, что число $\frac{a+1}{2}$ не можетъ имѣть простыхъ дѣлителей, не заключающихся среди чиселъ $b, c, \ldots, l$. Стало быть, если всѣ эти послѣднія числа имѣютъ видъ $4n+1$, то и число $\frac{a+1}{2}$ будетъ имѣть тотъ же видъ. А это равносильно тому, что число a имѣетъ видъ $8n+1$.

Теорема XII. Если $N=a^{2\alpha-1}b^{2\beta}c^{2\gamma}\ldots l^{2\lambda}$ есть нечетное совершенное число, то числа $b, c, \ldots, l$ могутъ всѣ одновременно имѣть видъ $4n-1$ лишь тогда, когда либо a имѣетъ видъ $8n+1$, либо a имѣетъ видъ $4n-1$.

*) См. № 454 „Вѣстника“ (XXXVIII сем., № 10).

Очевидно, что

$$E_b(b-1)^2+(2\beta+1)b^\beta\equiv(2\beta+1)b^\beta \text{ (мод. 4)};$$

если же $b\equiv-1$ (мод. 4), то

$$E_b(b-1)^2+(2\beta+1)b^\beta\equiv(2\beta+1)\,.\,(-1)^\beta \text{ (мод. 4)};$$

послѣднее число, очевидно, $\equiv 1$ (мод. 4). Итакъ, если $b\equiv-1$ (мод. 4), то $E_b(b-1)^2+(2\beta+1)b^\beta\equiv 1$ (мод. 4). Допуская же, что всѣ числа $b, c, \ldots, l$ имѣютъ видъ $4n-1$, будемъ имѣть, слѣдовательно, рядъ такихъ сравненій:

$$E_b(b-1)^2+(2\beta+1)b^\beta\equiv 1 \text{ (мод. 4)};$$

$$E_c(c-1)^2+(2\gamma+1)c^\gamma\equiv 1 \text{ (мод. 4)};$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$E_l(l-1)^2+(2\lambda+1)l^\lambda\equiv 1 \text{ (мод. 4)}.$$

Принимая же во вниманіе, что $N=a^{2a-1}\,b^{2\beta}\,c^{2\gamma}\ldots l^{2\lambda}\equiv 1$ (мод. 4), обращая равенство (!) въ сравненіе по модулю 4 и подставляя сравнимыя числа, найдемъ:

$$1\equiv\frac{a+1}{2}\cdot[E_a(a^2-1)^2+a\,a^{a-1}] \text{ (мод. 4)}.$$

Но $a\equiv 1$ (мод. 4); значитъ,

$$E_a(a^2-1)^2+a\,a^{a-1}\equiv a \text{ (мод. 4)}$$

и, слѣдовательно, $1\equiv\frac{a+1}{2}\cdot a$ (мод. 4); помножая это сравненіе на a, найдемъ:

$$a\equiv\frac{a+1}{2}\cdot a^2 \text{ (мод. 4)}.$$

Но a есть число нечетное; значитъ, $a^2\equiv 1$ (мод. 4), и мы приходимъ къ сравненію

$$a\equiv\frac{a+1}{2} \text{ (мод. 4)},$$

которое и доказываетъ нашу теорему.

Теорема XIII. Если $N=a^{2a-1}\,b^{2\beta}\,c^{2\gamma}\ldots l^{2\lambda}$ есть нечетное совершенное число и между числами $b, c, \ldots, l$ есть и такія, которыя имѣютъ видъ $4n+1$, и такія, которыя имѣютъ видъ $4n-1$, причемъ число первыхъ четное, то могутъ представиться лишь слѣдующіе случаи: 1) a имѣетъ видъ $8n+1$, 2) a имѣетъ видъ $4n-1$ и 3) по крайней мѣрѣ, одинъ изъ показателей, съ которыми входятъ числа вида $4n+1$ въ N, кратенъ четыремъ

Ясно, что если $b\equiv 1$ (мод. 4), то

$$E_b(b-1)^2+(2\beta+1)\,b^\beta \equiv 2\beta+1 \text{ (мод. 4).}$$

Убѣдившись въ этомъ, обозначимъ показателей, соотвѣтствующихъ числамъ вида $4n+1$, черезъ $2\beta_1$, $2\beta_2, \ldots, 2\beta_k$. Тогда будетъ имѣть мѣсто слѣдующее сравненіе:

$$[E_b(b-1)^2+(2\beta+1)b^\beta][E_c(c-1)^2+(2\gamma+1)c^\gamma]\ldots[E_l(l-1)^2+(2\lambda+1)l^\lambda] \equiv$$
$$\equiv (2\beta_1+1)(2\beta_2+1)\ldots(2\beta_k+1) \text{ (мод. 4),}$$

ибо, если $b\equiv -1$ (мод. 4), то

$$E_b(b-1)^2+(2\beta+1)b^\beta \equiv 1 \text{ (мод. 4).}$$

Но

$$(2\beta_1+1)(2\beta_2+1)\ldots(2\beta_k+1) \equiv 2(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_k)+1 \text{ (мод. 4).}$$

Обращаясь же теперь къ уравненію (!), получимъ сравненіе:

$$1 \equiv \frac{a+1}{2}\cdot a\cdot[2(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_k)+1] \text{ (мод. 4).}$$

Отсюда очевидно, что, если сумма $\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_k$ есть число четное, то $1\equiv\frac{a+1}{2}\cdot a$, т. е. $a\equiv\frac{a+1}{2}$ (мод. 4). Нечетною же сумма $\beta_1+\beta_2+$ $+\ldots+\beta_k$ при k четномъ можетъ быть лишь тогда, когда среди чиселъ β_1, $\beta_2, \ldots, \beta_k$ одно, по крайней мѣрѣ, четное.

Теорема XIV. Если число a имѣетъ видъ 2^n+1, то одно, по крайней мѣрѣ, изъ чиселъ $2\beta+1$, $2\gamma+1, \ldots, 2\lambda+1$ должно на него раздѣлиться.

Изъ равенства

$$2a^{2a-1}\,b^{2\beta}\,c^{2\gamma}\ldots l^{2\lambda} = \frac{a^{2a}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{2\beta+1}-1}{b-1}\cdot\frac{c^{2\gamma+1}-1}{c-1}\ldots\frac{l^{2\lambda+1}-1}{l-1}$$

усматриваемъ, что одно, по крайней мѣрѣ, изъ чиселъ $\frac{b^{2\beta+1}-1}{b-1}$, $\frac{c^{2\gamma+1}-1}{c-1}, \ldots, \frac{l^{2\lambda+1}-1}{l-1}$ должно раздѣлиться на a. Не нарушая общности, можемъ предположить, что удовлетворилось сравненіе:

$$\frac{b^{2\beta+1}-1}{b-1} = E_b(b-1)^2+(2\beta+1)b^\beta \equiv 0 \text{ (мод. } a).$$

Отсюда слѣдуетъ, что $2\beta+1$ должно быть кратно показателя, которому принадлежитъ b по модулю a. Но $a-1=2^n$, $2\beta+1$ есть нечетное число; значитъ, этотъ показатель необходимо есть 1, и $b-1$ необходимо должно дѣлиться на a. Но если сумма $E_b(b-1)^2+$ $+(2\beta+1)b^\beta$ и слагаемое $E_b(b-1)^2$ дѣлится на a, то и другое слагаемое, т. е. $(2\beta+1)b^\beta$, должно раздѣлиться на a. А такъ какъ b и a суть числа взаимно простыя, то $2\beta+1$ дѣлится на a.

Теорема XV. Если среди чиселъ $b, c, \ldots, l$ какое-нибудь, напримѣръ b, имѣетъ видъ 2^n+1, то одно, по крайней мѣрѣ, изъ чиселъ $a+1$, a, $2\gamma+1, \ldots$, $2\lambda+1$ должно на него раздѣлиться.

Если воспользоваться уравненіемъ совершенныхъ чиселъ въ видѣ (!), то доказательство будетъ буквальнымъ повтореніемъ разсужденій предыдущей теоремы.

Теорема XVI. Нечетное совершенное число должно имѣть, по крайней мѣрѣ, четырехъ простыхъ дѣлителей.

Я показалъ, что, если нечетное совершенное число имѣетъ трехъ простыхъ дѣлителей, то оно приводится къ одному изъ слѣдующихъ двухъ типовъ: $5^{2a-1}.3^{2\beta}.11^{2\gamma}$ и $13^{2a-1}.3^{2\beta}.5^{2\gamma}$, при чемъ тамъ же я показалъ, что въ послѣднемъ случаѣ число a непремѣнно должно быть четнымъ. Такимъ образомъ, второй типъ $13^{2a-1}.3^{2\beta}.5^{2\gamma}$ отпадаетъ самъ собою, ибо a всегда есть число нечетное. Стало быть, вся суть въ томъ, чтобы исчерпать типъ $5^{2a-1}.3^{2\beta}.11^{2\gamma}$. Къ этому-то мы и перейдемъ.

Имѣемъ:

$$2.5^{2a-1}.3^{2\beta}.11^{2\gamma}=\frac{5^{2a}-1}{5-1}\cdot\frac{3^{2\beta+1}-1}{3-1}\cdot\frac{11^{2\gamma+1}-1}{11-1},$$

откуда мы усматриваемъ, что на 5 раздѣлятся либо одно изъ чиселъ $\frac{3^{2\beta+1}-1}{3-1}$ и $\frac{11^{2\gamma+1}-1}{11-1}$, либо оба числа. Разсмотримъ оба случая отдѣльно.

1) На 5 раздѣлились оба числа $\frac{3^{2\beta+1}-1}{3-1}$ и $\frac{11^{2\gamma+1}-1}{11-1}$.

Имѣемъ:

$$\frac{5^{2a}-1}{5-1}=2.3^p.11^q;\ \frac{3^{2\beta+1}-1}{3-1}=5^m.11^l \text{ и } \frac{11^{2\gamma+1}-1}{11-1}=5^k.3^h,$$

при чемъ ни одно изъ чиселъ m и k не равно нулю. А, слѣдовательно, оба сравненія $3^{2\beta+1}\equiv 1$ (мод. 5) и $11^{2\gamma+1}\equiv 1$ (мод. 5) имѣютъ мѣсто. Обратимся теперь къ равенству:

$$\frac{5^{2a}-1}{5-1}=2.3^p.11^q=1+5+5^2+\ldots+5^{2a-1};$$

оно намъ показываетъ, что

$$2.3^p.11^q\equiv 1 \text{ (мод. 5), т. е. } 4.3^p.11^q\equiv 2 \text{ (мод. 5).}$$

Далѣе, если p и q суть оба числа нечетныя, то мы помножимъ это сравненіе на каждое изъ сравненій $3^{2\beta+1}\equiv 1$ (мод. 5) и $11^{2\gamma+1}\equiv 1$ (мод. 5). Если p есть число нечетное, а q—четное, то мы помножимъ его только на сравненіе $3^{2\beta+1} \equiv 1$ (мод. 5). Наконецъ, если p есть число четное, а q—нечетное, то мы помножимъ его только на сравненіе $11^{2\gamma+1} \equiv 1$ (мод. 5). Во всѣхъ этихъ случаяхъ мы этими помноженіями достигнемъ того, что удовлетворится сравненіе $x^2 \equiv 2$ (мод. 5), т. е. мы показали, что 2 есть квадратичный вычетъ по модулю 5. А это нелѣпость, ибо 5 не есть простое число вида $8n \pm 1$.

2) На 5 раздѣлилось одно изъ чиселъ $\frac{3^{2\beta+1}-1}{3-1}$, $\frac{11^{2\gamma+1}-1}{11-1}$.

Имѣемъ:

$$2 \,.\, 5^{2\alpha-1} \,.\, 3^{2\beta} \,.\, 11^{2\gamma} = \frac{5^{2\alpha}-1}{5-1} \cdot \frac{3^{2\beta+1}-1}{3-1} \cdot \frac{11^{2\gamma+1}-1}{11-1},$$

откуда усматриваемъ слѣдующее: если $\frac{3^{2\beta+1}-1}{3-1}$ раздѣлится на 11, то $\frac{11^{2\gamma+1}-1}{11-1}$ на 3 уже не раздѣлится,—и наоборотъ. Дѣйствительно, если $3^{2\beta+1} \equiv 1$ (мод. 11), т. е. $3^{2\beta+2} \equiv 3$ (мод. 11), то это равносильно тому, что $\left(\frac{3}{11}\right) = 1$. Но каждое изъ чиселъ 3 и 11 имѣетъ видъ $4n-1$; значитъ, по закону взаимности, $\left(\frac{11}{3}\right) = -1$, т. е., слѣдовательно, ни въ какомъ случаѣ не можетъ удовлетвориться сравненіе $11^{2\gamma+1} \equiv 1$ (мод. 3), равносильное сравненію $11^{2\gamma+2} \equiv 11$ (мод. 3). Замѣтимъ далѣе, что не можетъ случиться такъ, что ни число $\frac{3^{2\beta+1}-1}{3-1}$ не раздѣлится на 11 ни число $\frac{11^{2\gamma+1}-1}{11-1}$ не раздѣлится на 3, ибо, въ такомъ случаѣ, принимая во вниманіе, что на 5 дѣлится, по условію, только одно изъ чиселъ $\frac{3^{2\beta+1}-1}{3-1}$, $\frac{11^{2\gamma+1}-1}{11-1}$, мы пришли бы къ выводу, что одно изъ чиселъ $\frac{3^{2\beta+1}-1}{3-1}$ или $\frac{11^{2\gamma+1}-1}{11-1}$ ни на что не дѣлится, т. е. по сокращеніи оно оказалось бы равнымъ 1.

Итакъ, предположимъ, что число $\frac{3^{2\beta+1}-1}{3-1}$ раздѣлилось на 11. Тогда число $\frac{11^{2\gamma+1}-1}{11-1}$ на 3 не раздѣлится, и, слѣдовательно, число $\frac{5^{2\alpha}-1}{5-1}$ раздѣлится на $3^{2\beta}$. Слѣдовательно, мы будемъ имѣть:

$$\frac{5^{2\alpha}-1}{5-1} = 2 \,.\, 3^{2\beta} \,.\, 11^{m}; \quad \frac{3^{2\beta+1}-1}{3-1} = 11^{n}; \quad \frac{11^{2\gamma+1}-1}{11-1} = 5^{2\alpha-1},$$

гдѣ для насъ важно то, что $2 \,.\, 3^{2\beta} \,.\, 11^{m} \equiv 1$ (мод. 5) и $11^{2\gamma+1} \equiv 1$ (мод. 5). Далѣе, смотря по тому, будетъ ли m нечетнымъ или четнымъ, мы перемножимъ или не перемножимъ оба эти сравненія. Въ обоихъ случаяхъ окажется, что 2 есть квадратичный вычетъ по модулю 5, что невозможно.

Къ совершенно такому же заключенію мы придемъ подобными разсужденіями, если предположимъ, что число $\frac{11^{2\gamma+1}-1}{11-1}$ раздѣлилось на 3.

(Окончаніе слѣдуетъ).

Объ электромагнитной массѣ*).

Т. Леви-Чивита.

Переводъ съ италіанскаго *Ю. Г. Рабиновича.*

Типичная схема, по которой методъ безконечно-малыхъ примѣняется къ изученію явленій природы, состоитъ, какъ извѣстно, изъ трехъ стадій:

1) Индукція. Изъ глубокаго анализа одного или нѣсколькихъ простыхъ случаевъ выводятся т. н. элементарные законы (чаще всего въ видѣ дифференціальныхъ соотношеній), которые характеризуютъ явленіе, сведенное нѣкоторымъ образомъ къ простѣйшимъ терминамъ, т. е. ограниченное безконечно-малымъ протяженіемъ и безконечно-малымъ промежуткомъ времени.

Въ этой первой стадіи главную роль играютъ критеріи простоты и удобства, такъ какъ обыкновенно бываетъ возможность придумать безконечное число элементарныхъ законовъ, совмѣстныхъ съ тѣми явленіями (интегралами), изъ которыхъ мы исходимъ. Остальныя стадіи подтверждаютъ, или опровергаютъ выбранную гипотезу.

2) Дедукція. Здѣсь проявляется все могущество математики, какъ орудія, позволяющаго перегруппировывать, какъ угодно, элементы пространства и времени и возстановлять въ его цѣломъ каждое явленіе, къ которому примѣнимы элементарные законы, какъ бы сложно оно ни было.

3) Повѣрка. Предвидѣнія анализа подвергаются прямому или косвенному контролю опыта.

Если согласіе удовлетворительно, то гипотезы окончательно получаютъ права гражданства въ наукѣ, пріобрѣтая цѣнность не какъ метафизическія абстракціи, а вслѣдствіе справедливой увѣренности, что и будущія ихъ приложенія приведутъ къ замѣчательнымъ слѣдствіямъ.

Такова классическая схема, господствующая во всей математической физикѣ. Я старался придерживаться ея и въ докладѣ, который я имѣю честь вамъ представить: о механическихъ дѣйствіяхъ, связанныхъ съ электромагнитными явленіями.

*) Докладъ, представленный первому Съѣзду италіанскаго Общества развитія наукъ (Парма, сентябрь, 1907).

Элементарные законы и ихъ синтезъ по Лоренцу.

Наэлектризованный шарикъ, находящійся въ электростатическомъ полѣ, подверженъ дѣйствію механической силы, характеризуемой, какъ извѣстно, закономъ Кулона.

Если на электростатическое поле налагается магнитное, то сила, дѣйствующая на шарикъ, не мѣняется, при томъ, однако, условіи, что послѣдній неподвиженъ. (Исключается при этомъ, конечно, тотъ случай, что шарикъ состоитъ изъ вещества магнитнаго, или такого, которое можетъ быть замѣтнымъ образомъ намагничено вліяніемъ). Но если шарикъ движется, то его зарядъ можно разсматривать, какъ элементъ тока, и онъ подчиняется другому извѣстному закону—закону Біо-Савара—и испытываетъ, слѣдовательно, дѣйствіе еще другой механической силы со стороны магнитнаго поля.

Комбинируя эти двѣ силы, мы получаемъ элементарный законъ механическаго дѣйствія, который легко обобщить отъ случая двухъ наложенныхъ другъ на друга полей на случай любого электромагнитнаго поля.

Обобщенный такимъ образомъ законъ цѣлесообразно называть закономъ Лоренца.

Точечные заряды.

Элементарный законъ Лоренца относится, конечно, къ зарядамъ, занимающимъ безконечно-малый объемъ.

Поэтому его непосредственно примѣнять можно въ тѣхъ и только въ тѣхъ случаяхъ, когда позволено пренебречь размѣрами заряда, или, какъ говорятъ, когда дѣло идетъ о точечныхъ зарядахъ.

Вообще говоря, этотъ переходъ къ предѣлу не дозволенъ, какъ мы сейчасъ увидимъ, но учесть должнымъ образомъ протяженіе заряда не представляетъ принципіальной трудности.

Достаточно раздѣлить его на безконечно-малые элементы, для каждаго изъ нихъ механическая сила вычисляется вышеуказаннымъ образомъ, и остается только просуммировать отдѣльныя части (или, если угодно, интегрировать).

Критическія соображенія.

Постараемся отдать себѣ отчетъ, въ какой мѣрѣ наэлектризованную частицу, движущуюся въ электромагнитномъ полѣ, можно разсматривать, какъ точечный зарядъ.

Назовемъ черезъ S пространство, занятое зарядомъ въ нѣкоторый моментъ. Ясно, что для этого необходимо и достаточно, чтобы между отдѣльными точками S не было замѣтнаго различія ни въ положеніи, ни въ скорости, ни въ электромагнитномъ состояніи.

Первыя два условія (кинематическаго характера)—это тѣ обычныя условія, при которыхъ движеніе тѣла достаточно опредѣлено, если извѣстно движеніе любой его точки. Здѣсь не мѣсто на нихъ останавливаться. Мы можемъ прямо предположить, что они съ избыткомъ выполнены и сосредоточить наше вниманіе на электромагнитномъ состояніи.

Если бы можно было утверждать, что внутри S можно пренебречь измѣненіями электромагнитнаго поля,—точнѣе, что наибольшимъ измѣненіемъ электрической силы внутри S можно пренебречь въ сравненіи съ наименьшей интенсивностью, которой она достигаетъ тамъ,—и аналогично для магнитной силы,—то можно было бы свести дѣло къ разсмотрѣнію точечнаго заряда. Къ сожалѣнію, измѣненіями внутри поля S никакъ нельзя пренебречь, и вотъ почему.

Электромагнитное поле можно себѣ представить, какъ результатъ наложенія двухъ полей.

1) Поля, которое существовало бы независимо отъ разсматриваемаго заряда,—какъ напримѣръ, поле электромагнита или плоскаго конденсатора, магнитное поле земли или просто нулевое поле, въ зависимости отъ состоянія среды, въ которой движется S. Это поле назовемъ внѣшнимъ.

2) Собственнаго поля, т. е. поля, вызваннаго самымъ разсматриваемымъ зарядомъ.

Ясно, что въ частномъ случаѣ неподвижнаго заряда это поле сводится къ простому электростатическому полю. Когда S движется, то конвекція производитъ вообще электромагнитное (перемѣнное) поле.

Внѣшнее поле, если не считать исключительныхъ случаевъ (какъ непосредственная близость острій или краевъ или вообще предметовъ, гдѣ сосредоточены электрическія или магнитныя массы) можно спокойно принять постояннымъ внутри пространства S: достаточно въ каждомъ случаѣ выбрать это пространство надлежаще малымъ.

Но этого недостаточно для собственнаго поля. Уже простой примѣръ, а именно—неподвижный шаръ съ равномѣрно распредѣленнымъ зарядомъ, дѣлаетъ очевиднымъ, что собственнымъ полемъ никакъ нельзя пренебречь. Пусть, въ самомъ дѣлѣ, e есть зарядъ, а R—радіусъ шара. Извѣстно (это, впрочемъ, и очевидно на основаніи соображеній симметріи), что электрическая сила въ центрѣ шара равна нулю; на поверхности же она имѣетъ значеніе $\frac{e}{R^2}$, какъ будто весь зарядъ сосредоточенъ въ центрѣ. Итакъ, измѣненіе есть $\frac{e}{R^2}$, т. е. какъ разъ равно наибольшему значенію въ S; еще хуже: при томъ же зарядѣ оно неопредѣленно возрастаетъ, когда мы уменьшаемъ радіусъ шара.

Движущійся зарядъ, распредѣленный произвольно, дастъ, понятно, картину, качественно не отличающуюся отъ этой.

Вообще о движеніи электричества.

Отсюда слѣдуетъ, что при изученіи силъ, дѣйствующихъ на нѣкоторое опредѣленное количество электричества, нельзя слѣдовать традиціямъ обычной механики, такъ такъ здѣсь непримѣнимо упрощеніе, соотвѣтствующее матеріальной точкѣ.

Если мы хотимъ изслѣдовать вопросъ прямо и не дѣлать легкомысленныхъ попытокъ, то нужно сразу разсматривать движеніе непрерывной массы электричества, каждый элементъ которой связанъ съ остальными обмѣномъ электромагнитныхъ дѣйствій.

Всякому ясно, что такая задача, взятая во всей своей общности, была бы очень сложна. Не говоря уже о спеціальныхъ трудностяхъ, положеніе было бы такое, какъ если бы въ обыкновенной механикѣ пришлось начать съ изслѣдованія континуума (измѣняемыхъ системъ).

Однако, истинное положеніе задачи остается такимъ, какъ указано выше; мы его не будемъ упускать изъ виду, хотя бы какъ вѣрную путеводную нить. Я скажу даже, что настоящій теоретическій успѣхъ возможенъ впредь только для того, кто рѣшительно вступитъ на прямой путь.

Но въ этомъ мы убѣдимся ниже. Пока нужно дать точныя опредѣленія и познакомиться съ достигнутыми уже результатами, идя—да будетъ мнѣ позволено это топографическое сравненіе—по тропинкамъ, которыя еще не доходятъ до вершины, но все-таки ведутъ къ нѣсколькимъ пунктамъ, дающимъ хорошій кругозоръ.

Примѣненіе основного принципа механики.

Возьмемъ опять нашу наэлектризованную частицу, и пусть она занимаетъ пространство S конечнаго протяженія. Абсолютная величина заряда частицы, который можетъ быть положительнымъ или отрицательнымъ, пусть будетъ e.

Въ каждомъ элементѣ объема dS пусть сосредоточенъ нѣкоторый элементарный зарядъ de и еще нѣкоторая матеріальная масса dm (не исключается, конечно, тотъ случай, что de или dm могутъ быть равны нулю).

Будемъ разсматривать силы, дѣйствующія на элементъ, поставивъ его на время въ возможно болѣе общія условія. Такимъ образомъ мы лучше сможемъ оцѣнить различныя упрощающія гипотезы.

Раньше всего мы имѣемъ силу f, происходящую отъ внѣшняго электромагнитнаго поля ($f=0$, если электромагнитное поле цѣликомъ вызвано зарядомъ e); затѣмъ силу φ собственнаго поля, т. е. силу, которую de испытываетъ со стороны другихъ элементовъ, составляющихъ зарядъ; и, наконецъ, еще силу ψ, подъ которой мы будемъ понимать совокупность всѣхъ другихъ дѣйствій, a priori возможныхъ (напримѣръ, вѣсъ, молекулярныя дѣйствія, реакціи связей, если таковыя имѣются и т. д.); f, φ и ψ пусть обозначаютъ соотвѣтствующіе векторы. Ихъ сумма

$$f+\varphi+\varphi$$

представляетъ, по опредѣленію, всю силу, которая дѣйствуетъ на элементъ dS.

Назвавъ черезъ a ускореніе элемента, мы будемъ имѣть по основному принципу динамики:

$$dm \,.\, a = f + \varphi + \psi. \tag{1}$$

Сложимъ это соотношеніе со всѣми аналогичными, относящимися къ другимъ элементамъ S. Если всю массу, расположенную въ S, обозначить черезъ m, а ускореніе центра тяжести черезъ a, то лѣвая часть, какъ извѣстно, выразится произведеніемъ

$$m \cdot a$$

Если затѣмъ обозначить черезъ F результирующую силъ f, вызванныхъ внѣшнимъ электромагнитнымъ полемъ, черезъ Φ—результирующую силъ φ собственнаго поля, черезъ Ψ—результирующую дополнительныхъ силъ ψ, то получится формула:

$$m \cdot a = F + \Phi + \Psi, \tag{2}$$

которая послужитъ исходнымъ пунктомъ въ нашихъ разсужденіяхъ.

Элементарная теорія Шустера[1])

Въ частномъ случаѣ неподвижнаго заряда (распредѣленнаго произвольно)

$$\Phi = 0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, электростатическія дѣйствія φ между различными элементарными зарядами характеризуются закономъ Кулона, и потому попарно равны и противоположны.

Когда дѣло идетъ о движущемся зарядѣ, то силы φ собственнаго поля не слѣдуютъ уже, вообще говоря, принципу равенства дѣйствія и противодѣйствія, такъ какъ ихъ переходъ отъ одного элемента къ другому требуетъ извѣстнаго времени, и въ связи съ измѣненіями въ положеніяхъ этихъ элементовъ это можетъ нарушить компенсацію.

Въ строгомъ изложеніи надо, слѣдовательно, точно учитывать Φ. Въ первомъ приближеніи, однако, можно разсуждать слѣдующимъ образомъ: такъ какъ Φ исчезаетъ, когда зарядъ неподвиженъ, то по непрерывности оно будетъ мало отличаться отъ нуля, когда скорость достаточно мала, и тогда имъ можно пренебречь въ сравненіи съ F.

Затѣмъ, если дѣло идетъ о движеніи заряда въ пустотѣ или въ сильно разрѣженномъ газѣ, то можно считать всѣ ψ, а слѣдовательно и Ψ равнымъ нулю. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ можно пренебречь вѣсомъ и давленіемъ, и нѣтъ никакого основанія принимать во вниманіе другія силы. Впрочемъ, можно не исключать a priori другихъ дѣйствій; достаточно предположить, что они удовлетворяютъ закону равенства дѣйствія и противодѣйствія, чтобы $\Psi = 0$.

Остается такимъ образомъ

$$m \cdot a = F, \tag{3}$$

гдѣ F опредѣляется на основаніи закона Лоренца.

Вспомнимъ, что существеннымъ препятствіемъ тому, чтобы считать зарядъ точечнымъ, является собственное поле. Такъ какъ въ равенствѣ (3)

[1]) Schuster. „The discharge of electricity through gases". Proc. of the Royal Society, 47, 20 марта 1890 года.

исчезъ всякій слѣдъ его, то ничто не мѣшаетъ уже разсматривать частицу, какъ наэлектризованную точку.

Это вполнѣ соотвѣтствуетъ тому, какъ мы поступаемъ съ небесными тѣлами, за исключеніемъ того обстоятельства, что принципъ равенства дѣйствія и противодѣйствія тогда остается справедливымъ во всѣхъ случаяхъ, и потому приравниваніе нулю члена, аналогичнаго Ф (результирующей Ньютоновыхъ притяженій внутренняго происхожденія), не является тамъ приближенной гипотезой, а слѣдствіемъ постулата.

Въ томъ частномъ случаѣ, особенно интересномъ для приложеній, когда (внѣшнее) электромагнитное поле постоянно, уравненіе (3) интегрируется вполнѣ элементарными средствами.

Изслѣдованія надъ катодными лучами[1]).

Важное примѣненіе этой точки зрѣнія можетъ быть сдѣлано по отношенію къ катоднымъ лучамъ, если ихъ разсматривать, какъ рой наэлектризованныхъ частицъ, выбрасываемыхъ катодомъ Круксовой трубки; при этомъ допускаютъ, что уравненіе (3) примѣнимо къ каждой отдѣльной частицѣ.

Сопоставляя слѣдствія изъ уравненія (3) съ обстоятельствами опытовъ, легко понять, отчего, обыкновенно, катодные лучи прямолинейны; предполагая затѣмъ—это было экспериментально доказано Перрэномъ (Perrin)[2]),—что зарядъ отрицателенъ, нетрудно вполнѣ объяснить всѣ отклоненія, которыя наблюдаются, когда внесемъ трубку въ электростатическое или магнитное поле (однородное и нормальное къ оси трубки), или когда подвергнемъ ее соединенному дѣйствію двухъ такихъ полей.

На основаніи такихъ сопоставленій удалось опредѣлить два важныхъ элемента: отношеніе $\frac{e}{m}$ между зарядомъ (точнѣе, абсолютной величиной заряда) и массой различныхъ частицъ, составляющихъ радіацію; и, во-вторыхъ, ихъ среднюю скорость.

Оказывается, что послѣдняя заключается между $^1/_{10}$ и $^1/_3$ скорости свѣта. Отношеніе $\frac{e}{m}$ найдено (въ среднемъ изъ разныхъ опредѣленій) въ 1800 разъ большимъ, чѣмъ η, такъ называемая постоянная Фарадея.

Напомнимъ, что эта постоянная η есть отношеніе между зарядомъ и матеріальной массой, которое характерно для электролитическихъ явленій. Если въ любомъ такомъ процессѣ іонъ водорода переходитъ къ какому-нибудь электроду, то отношеніе между конвективно перенесеннымъ зарядомъ и соотвѣтствующей массой всегда есть η. Для любой

---

[1]) J. J. Thomson. „On cathode rays", Phil. Mag., (5), 44, октябрь, 1897 г.; кромѣ того, Kaufmann, Lenard, Wiechert, Simon. Ср. „Annalen der Physik", томы 61—69, 1897—1899, или сборникъ „Jons, electrons, corpuscules", Paris, Gauthier Villars, 1905.

[2]) Ср., напримѣръ, статью „Electrisation des rayons cathodiques, ect." во второмъ томѣ только-что цитированнаго сборника.

другой группы, выдѣленной электролизомъ, соотвѣтствующее отношеніе равно $\frac{\eta}{v}$ (гдѣ v химическій эквивалентъ группы).

Лучи, подобные катоднымъ. Разсмотрѣніе результатовъ опытовъ и вытекающая изъ него необходимость отказаться отъ элементарной теоріи.

Основные законы электролиза вполнѣ объясняются, если предположить, что каждый матеріальный атомъ имѣетъ способность переносить вполнѣ опредѣленный зарядъ, зависящій только отъ его химическаго характера.

Эту гипотезу трудно примирить съ вышеизложеннымъ объясненіемъ катодныхъ лучей.

Въ самомъ дѣлѣ, мы принимали, что частицы, изъ которыхъ они состоятъ, имѣютъ матеріальное ядро, которое могло бы происходить отъ веществъ, находящихся въ Круксовой трубкѣ; можно, слѣдовательно, было бы говорить о газѣ, который тамъ находится въ разрѣженномъ состояніи или о мельчайшихъ обломкахъ катода.

Но въ этомъ случаѣ было бы странно, что атомы вещества несутъ заряды, далеко превосходящіе тѣ, которые они переносятъ при элетролизѣ (приблизительно въ 1800 разъ большіе, если говорить объ атомахъ водорода).

Еще болѣе страннымъ это дѣлается, если вспомнить, что законы Фарадея сами по себѣ приводятъ къ мысли объ атомной гипотезѣ и для электричества: постоянство отношенія между зарядомъ и массой дѣлаютъ, въ самомъ дѣлѣ, вѣроятнымъ существованіе первичнаго количества электричества (электрона), недѣлимаго, какъ атомъ матеріальный.

Количественный ходъ электролитическихъ явленій былъ бы только увеличеннымъ отраженіемъ того обстоятельства, что каждый атомъ вещества способенъ присоединить къ себѣ одинъ и только одинъ электронъ на каждую валентность.

Почему въ катодныхъ лучахъ эта, такъ сказать, поглотительная способность атома такъ сильно увеличилась? И отчего она измѣнилась различнымъ образомъ въ зависимости отъ химической природы атома, такъ что отношеніе $\frac{e}{m}$ приведено къ одному значенію для всѣхъ, тогда какъ при явленіяхъ электролитическихъ это отношеніе обратно пропорціонально химическому эквиваленту?

Надо замѣтить, что экспериментально установлено нѣсколькими путями то обстоятельство, что катодные лучи (для данной степени разрѣженія) не отличаются между собой, какова бы ни была природа газа и электродовъ. Если бы мы имѣли здѣсь настоящую бомбардировку матеріальными частицами, то хоть какая-нибудь разница въ зависимости отъ различія въ свойствахъ различныхъ веществъ не замедлила бы обнаружиться.

Вотъ, наконецъ, еще соображеніе, имѣющее довольно большее значеніе. Формулу (3) можно примѣнять и къ другимъ типамъ радіаціи,

—напримѣръ, къ лучамъ, изслѣдованнымъ Риги[1]), Ленаромъ[2]), Дж. Дж. Томсономъ[3]), которые испускаются отрицательно наэлектризованными металлическими поверхностями, подверженными дѣйствію ультрафіолетовыхъ лучей, или раскаленными угольными нитями въ атмосферѣ водорода.

Принимая, что и въ этомъ случаѣ радіація состоитъ въ бомбардировкѣ отрицательными частицами, всегда находили для $\frac{e}{m}$ значенія, близкія къ тѣмъ, которыя соотвѣтствуютъ катоднымъ лучамъ (1800η).

Изъ всего этого видно, что формула (3), не находясь въ явномъ противорѣчіи съ наблюденными явленіями, не доставляетъ, однако, удовлетворительной картины для самыхъ непосредственныхъ выводовъ изъ этихъ явленій.

Этому не нужно удивляться, принимая во вниманіе то черезчуръ ужъ грубое допущеніе, на основаніи котораго мы приняли $\Phi = 0$, распространивъ на случай движущагося заряда компенсацію внутреннихъ дѣйствій, имѣющую мѣсто въ электростатикѣ.

Приходится поэтому отнестись съ большимъ вниманіемъ къ вліянію собственнаго поля.

Изысканія Абрагама[4]) и Зоммерфельда[5]). Квазистаціонарныя движенія.

Вернемся къ формулѣ

$$m \, . \, a = F + \Phi + \Psi \tag{2}$$

и не будемъ теперь въ ней пренебрегать ни однимъ членомъ. Лѣвая часть есть произведеніе матеріальной массы m (съ зарядомъ e) на ускореніе соотвѣтсвующаго центра тяжести.

Правая часть гораздо болѣе сложна, въ особенности Φ, результирующая силъ, съ которыми отдѣльные элементы de дѣйствуютъ другъ на друга. Эти дѣйствія зависятъ отъ положенія и скорости, а слѣдующее обстоятельство еще болѣе усложняетъ дѣло: нельзя разсматривать только одновременныя состоянія движенія всѣхъ элементовъ, а нужно еще принять во вниманіе, что дѣйствіе каждаго элемента требуетъ времени для своего распространенія и, слѣдовательно, для того, чтобы

---

[1]) Righi. Sui fenomeni elettrici provocati dalle radiazioni, „Nuovo Cimento“, (3); томы 24—27, 1880—1890.—Sulla convezione elettrica „Rendiconti dei Lincei“, (4), 6; 2 марта 1890 г.—Sulle traiettorie percorse nella convezione fotoelettrica; тамъ же, 3 августа, 1890 г.

[2]) Lenard. Erzeugung der Kathodenstrahlen durch ultraviolettes Licht. „Annalen der Physik“, (4), 6; 1900.

[3]) J. J. Thomson. On the mass of ions ect. „Phil. Mag.“, (5), 48; декабрь, 1899.

[4]) Abraham. Theorie der Elektrizität, томъ II (Elektromagnetische Theorie der Strahlung). Leipzig, Teubner, 1906; гл. III.

[5]) Sommerfeld. Zur Elektronentheorie I, II, III. „Göttinger Nachrichten“. 1904—1905. Simplified deduction of the field etc. „Ak. van Wettenschappen te Amsterdam“. Proceedings... (Английское изданіе). Ноябрь, 1904.

въ извѣстный моментъ оно могло проявиться на нѣкоторомъ другомъ элементѣ, оно должно было возникнуть въ немъ заблаговременно. Въ общей сложности Ф зависитъ отъ состоянія движенія отдѣльныхъ точекъ заряда не только въ данный моментъ, но и въ теченіе нѣкотораго предшествующаго промежутка времени, конечно, очень короткаго, если принять во вниманіе размѣры, обыкновенно очень малые, заряда и большую скорость распространенія дѣйствій, но во всякомъ случаѣ конечнаго.

При такихъ условіяхъ нельзя ожидать, чтобы можно было, исходя изъ одного соотношенія (2), относящагося ко всей системѣ, строго логически вывести какое-нибудь опредѣленное предсказаніе хода явленія.

Взятая во всей своей общности, эта задача потребовала бы одновременнаго разсмотрѣнія всѣхъ формулъ (1), относящихся къ каждой геометрической точкѣ пространства, занятаго зарядомъ.

Для того, чтобы упростить дѣло и использовать формулу (2) какъ можно лучше, введемъ нѣсколько дополнительныхъ гипотезъ, которыя можно признать очевидными безъ большой натяжки.

Собственно говоря, первую попытку въ этомъ направленіи мы уже сдѣлали, попробовавъ предположить, что примѣнимъ принципъ равенства дѣйствія и противодѣйствія ($\Phi = 0$); но мы убѣдились въ томъ, что этого предположенія удержать нельзя. Теперь надо испробовать другое, менѣе грубое.

Вполнѣ раціональнымъ критеріемъ является слѣдующій:

Вообразимъ, что движущійся зарядъ обладаетъ матеріальнымъ ядромъ, и что послѣднимъ служитъ твердое тѣло.

Распредѣленіе заряда въ этомъ твердомъ тѣлѣ не измѣняется во время движенія. Электричество, какъ и вещество, движется такъ, какъ будто всѣ его элементы неизмѣнно связаны между собою.

Дѣло сводится, слѣдовательно, къ опредѣленію движенія неизмѣняемой системы, съ тѣмъ единственнымъ осложненіемъ противъ обычныхъ задачъ этого типа, что силы зависятъ тутъ отъ предшествующей исторіи движущагося тѣла. Система имѣетъ 6 степеней свободы, въ томъ смыслѣ, что все можетъ быть выражено въ функціяхъ шести параметровъ: трехъ, служащихъ для фиксированія положенія въ пространствѣ одной точки тѣла, скажемъ, центра тяжести, и трехъ, которые опредѣляютъ расположеніе тѣла относительно этой точки.

Для того, чтобы опредѣлить эти шесть параметровъ въ функціяхъ времени, достаточно имѣть шесть уравненій, которыя не содержатъ другихъ неизвѣстныхъ.

Въ формулахъ (1), относящихся къ каждому элементу, фигурируютъ ψ, которыя совмѣщаютъ въ себѣ все, что не имѣетъ электромагнитнаго происхожденія, Въ тѣхъ задачахъ, изученіемъ которыхъ мы ограничимся, достаточно дать ψ значеніе реакцій связей.

Ихъ можно исключить, составляя обычныя комбинаціи, называемыя уравненіями количества движенія (или движенія центра инерціи) и уравненіями моментовъ („кардинальныя уравненія“ по Маджи).

Три комбинаціи, представляющія принципъ движенія центра тяжести, выражены въ формулѣ (2); при этомъ надо еще принять во вниманіе, что слѣдуетъ положить равнымъ нулю послѣдній членъ Ψ (результирующую дѣйствій связей), такъ что остается

$$m \cdot a = F + \Phi. \tag{4}$$

Остальныя три комбинаціи (уравненія моментовъ) также выражаются однимъ векторіальнымъ соотношеніемъ, которое кратко напишемъ такъ:

$$M = 0. \tag{5}$$

Строгимъ изученіемъ соотношеній (4) и (5) мы обязаны главнымъ образомъ[1]) Зоммерфельду, который остроумными пріемами преодолѣлъ значительныя аналитическія трудности, исчерпавъ случай шара, наэлектризованнаго равномѣрно по поверхности или по объему.

Еще до этихъ изслѣдованій Зоммерфельда Абрагамъ имѣлъ счастливую мысль, позволившую ему въ высшей степени упростить изслѣдованіе вопроса, сохраняя, однако, желаемую степень точности.

Абрагамъ нашелъ, такъ сказать, золотую середину между строгимъ вычисленіемъ собственнаго поля и произвольнымъ распространеніемъ принципа равенства дѣйствія и противодѣйствія (съ электростатическаго случая на общій).

Руководящее его положеніе можно кратко резюмировать такъ:

Результирующая Φ, а также результирующій моментъ силъ собственнаго поля могутъ быть представлены (Poincaré[2]) въ видѣ производныхъ по времени нѣкоторыхъ двухъ векторовъ Q и K (результирующей и результирующаго момента такъ называемаго электромагнитнаго количества движенія). Q и K зависятъ по всей строгости, точно такъ же, какъ электромагнитныя силы, отъ состояній движеній точекъ заряда и въ предшествующіе разсматриваемому моменты.

Но мы не совершимъ грубой ошибки, если будемъ вычислять эти два вектора такъ, какъ будто движеніе заряда стаціонарно и опредѣлено тѣми же элементами, какъ въ данный моментъ. Получивъ Q и K такимъ образомъ, мы отбрасываемъ временное предположеніе стаціонарности и дифференцируемъ по времени, считая опять движеніе перемѣннымъ.

Вполнѣ естественно называть квазистаціонарными тѣ движенія, къ которымъ примѣнимъ этотъ пріемъ съ достаточной степенью точности. Абрагамъ точно опредѣлилъ предѣлы ошибокъ при этомъ.

Мы не послѣдуемъ за нимъ въ его анализѣ, ограничимся лишь указаніемъ на остроуміе его пріема.

---

[1]) Нужно, однако, упомянуть о работѣ Шварцшильда (Schwarzschild) Ueber die Bewegung des Elektrons, „Göttinger Nachrichten", 1903, главная цѣль которой изучить математически вліяніе вращенія на движеніе электрическаго заряда. Выводъ сводится къ тому, что при нашихъ опытахъ можно спокойно пренебречь вращеніемъ, не дѣлая чувствительной ошибки.

[2]) Ср., напр., Electricité et optique, Paris, Carré et Naud, 1901, стр. 448—451; или Abraham, l. c., стр. 23—36.

Разсматривать движенiе, какъ стацiонарное (т. е. пренебрегать ускоренiемъ) въ теченiе всего вычисленiя электромагнитныхъ силъ, было бы почти то же, что пренебречь собственнымъ полемъ. (Въ самомъ дѣлѣ, въ каждомъ равномѣрномъ поступательномъ движенiи результирующая и результирующiй моментъ силъ автополя строго равны нулю).

Вычисляя же при помощи прiема Абрагама, мы принимаемъ во вниманiе,—по крайней мѣрѣ, отчасти—и ускоренiя.

Для движенiй, которыя можно считать квазистацiонарными, уравненiя (4) и (5) теряютъ функцiональный характеръ, который такъ затрудняетъ обращенiе съ ними.

Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ и правыя части зависятъ отъ движенiя только черезъ посредство скоростей и ускоренiй точекъ системы въ разсматриваемый моментъ. Мы находимся, такимъ образомъ, передъ обыкновенной задачей динамики твердаго тѣла, въ которой силы зависятъ также и отъ ускоренiй. Правда, въ болѣе обычныхъ случаяхъ законъ силъ зависитъ исключительно отъ положенiя и скоростей; однако, встрѣчается и тотъ случай, когда играютъ роль ускоренiя.

Достаточно вспомнить случай движенiя твердаго тѣла въ совершенной жидкости.

Давленiя жидкости на поверхность тѣла вызываютъ дополнительныя силы (кромѣ тѣхъ, которыя приложены извнѣ), которыя зависятъ отъ ускоренiй молекулъ жидкости, а въ конечномъ счетѣ (въ виду того, что само движенiе жидкости зависитъ отъ движенiя твердаго тѣла) отъ скоростей и ускоренiй тѣла. При этихъ условiяхъ имѣетъ мѣсто типическое явленiе, которое легко можно предсказать. Влiянiе окружающей жидкости увеличиваетъ инерцiю твердаго тѣла; напримѣръ, въ случаѣ шара, движущагося прямолинейно, дѣло идетъ такъ, какъ будто бы движенiе (подъ дѣйствiемъ силъ, приложенныхъ извнѣ, и тѣхъ, которыя испытывала бы вытѣсненная жидкость) совершалось въ пустотѣ, но зато масса шара была увеличена на половину массы вытѣсненной жидкости.

Этотъ примѣръ изъ гидродинамики позволяетъ предвидѣть, каковы будутъ дѣйствiя силъ собственнаго поля.

Лонгитудинальная и трансверсальная электромагнитная масса.

Постараемся уяснить это себѣ точнѣе и примемъ для этого болѣе простыя условiя.

Предположимъ, что дѣло идетъ объ однородномъ, равномѣрно наэлектризованномъ, шарѣ. При нѣкоторыхъ условiяхъ, на которыхъ я для краткости не останавливаюсь, можно считать движенiе чисто поступательнымъ. Тогда для его опредѣленiя достаточно уравненiя (4), такъ какъ уравненiе (5) удовлетворяется тождественно. Съ векторомъ Φ не трудно справиться. Если Φ_T обозначаетъ его тангенцiальную, или лонгитудинальную слагающую (т. е. въ направленiи движенiя), а Φ_N—нормальную, или трансверсальную (т. е. въ нѣкоторомъ направленiи, перпендикулярномъ къ скорости), то найдено, что

$$\Phi_T = - m_o \cdot \chi_1(\beta) \cdot a_T,$$

$$\Phi_N = - m_o \chi_2(\beta) \cdot a_N,$$

гдѣ a_T и a_N аналогичныя слагающія ускоренія, β—отношенія скорости (вообще перемѣнной) шара къ скорости свѣта, χ_1 и χ_2—двѣ функціи [1]) отъ перемѣнной β, которыя сводятся къ 1 при $\beta = 0$; наконецъ,

$$m_o = \frac{4}{5} \frac{e^2}{c^2 R} \tag{6}$$

(e—абсолютная величина заряда въ электростатическихъ единицахъ, R—радіусъ шара).

Теперь проектируемъ векторіальное соотношеніе (4) на направленіе движенія и на нормальное направленіе, обозначивъ черезъ F_T и F_N соотвѣтствующія слагающія вектора F (результирующей силъ, вызванныхъ внѣшнимъ электромагнитнымъ полемъ). Положивъ для краткости

$$\begin{aligned} m_1 &= m + m_o \chi_1(\beta), \\ m_2 &= m + m_o \chi_2(\beta), \end{aligned} \tag{6'}$$

имѣемъ:

$$F_T = m_1 a_T, \tag{7}$$

$$F_N = m_2 a_N. \tag{8}$$

Какъ видимъ, отношеніе между силой (внѣшней) и ускореніемъ равно m_1 въ направленіи движенія, тогда какъ оно имѣетъ значеніе m_2 для нормальнаго направленія.

Въ обычной механикѣ (т. е. когда не дѣйствуютъ силы электромагнитнаго происхожденія и нѣтъ, слѣдовательно, собственнаго поля) отношеніе между силой и ускореніемъ всегда одно и то же для всѣхъ направленій; это масса, внутреннее свойство вещества, не зависящее, въ частности, отъ скорости.

Здѣсь же мы вмѣсто этого имѣемъ, пользуясь терминологіей Абрагама, лонгитудинальную массу m_1 и трансверсальную m_2, вообще отличную отъ первой. Затѣмъ обѣ зависятъ существеннымъ образомъ отъ скорости, а не только отъ внутреннихъ свойствъ тѣла.

Частный случай, уже предусмотрѣнный Дж. Дж. Томсономъ [2]). Примѣненіе къ катоднымъ и тому подобнымъ лучамъ. Возможность исключить какое бы то ни было участіе вѣсомой матеріи.

Для скоростей очень малыхъ, сравнительно со скоростью свѣта, β близко къ нулю, и тогда какъ m_1, такъ и m_2 сводятся къ общему постоянному значенію $m + m_o$.

---

[1]) $\chi_1(\beta) = \frac{3}{4\beta^2} \left\{ -\frac{1}{\beta} \log \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{2}{1-\beta^2} \right\}$

$\chi_2(\beta) = \frac{3}{4\beta^2} \left\{ \frac{1+\beta^2}{2\beta} \log \frac{1+\beta}{1-\beta} - 1 \right\}.$

[2]) J. J. Thomson. On the electric and magnetic effects produced by the motion of electrified bodies. „Phil. Mag.“, (5), 11; апрѣль, 1881.

Этотъ предѣльный случай, изслѣдованіе котораго можно произвести нѣсколькими путями[1]) имѣетъ болѣе близкое сходство съ движеніемъ шара въ совершенной жидкости.

Въ конечномъ счетѣ дѣйствіе собственнаго поля эквивалентно дополнительной инерціи электромагнитнаго происхожденія, измѣряемой выраженіемъ (6) для m_o.

Векторіальное уравненіе (4) или эквивалентныя (скалярныя) уравненія (7) и (8) получаютъ опять типическій видъ:

$$(m + m_o)\, a = F. \tag{4'}$$

Остановимся на время на этихъ ограниченныхъ скоростяхъ, для которыхъ χ_1 и χ_2 могутъ быть замѣнены 1. Раньше всего надо замѣтить, что такая замѣна допустима въ довольно широкихъ предѣлахъ. Достаточно, напримѣръ, чтобы скорость была не больше $^1/_3$ скорости свѣта (это какъ разъ наибольшая скорость, которую нашли для катодныхъ лучей, пренебрегая при вычисленіи собственнымъ полемъ) для того, чтобы ошибка оставалась меньше $5^0/_0$.

Формула (4′) отличается отъ (3) только тѣмъ, что коэффиціентъ m, фигурирующій въ (3), замѣненъ въ (4′) черезъ $m + m_o$.

Вспомнивъ, что, допустивъ справедливость соотношенія (3) для катодныхъ и тому подобныхъ лучей, мы пришли къ слѣдующимъ заключеніямъ:

a) Экспериментальные факты очень хорошо выражаются формулами.

b) Скорость частицъ заключается между $^1/_{10}$ и $^1/_3$ скорости свѣта.

c) Отношеніе между зарядомъ и матеріальной массой есть въ среднемъ $1800\,\eta$, т. е. въ 1800 разъ больше соотвѣтствующаго отношенія для явленій электролиза.

Если мы примемъ во вниманіе собственное поле (въ той ограниченной степени, какъ это мы дѣлаемъ теперь), то заключенія a) и b) остаются справедливыми, a c) даетъ значеніе $1800\,\eta$ для отношенія $\dfrac{e}{m + m_o}$ вмѣсто $\dfrac{e}{m}$.

Это измѣненіе существенно важно, такъ какъ оно устраняетъ рѣзкое разногласіе между c) и атомистическимъ пониманіемъ строенія вещества и дѣлаетъ почти неопровержимымъ заключеніе, что катодные и тому подобные лучи происходятъ отъ переноса электрическихъ зарядовъ безъ матеріальнаго ядра.

Попробуемъ, въ самомъ дѣлѣ, допустить, что есть матеріальное ядро. Дѣло пошло бы еще хуже, чѣмъ когда мы пренебрегли собственнымъ полемъ. Если тогда $1800\,\eta$ было зарядомъ на единицу матеріальной массы, то теперь тотъ же зарядъ соотвѣтствовалъ бы единицѣ кажущейся массы $m + m_o$. Но если $m + m_o = 1$,—а m_o мы отбросить не можемъ,—то

[1]) Напримѣръ, энергетическимъ, см. у Дж. Дж. Томсона. Electricity and matter; или подробнѣе въ мемуарѣ проф. Риги: Sulla massa elettromagnetica, „Nuovo Cimento“, (5), 12; 1906.

матеріальная масса m, которой соотвѣтствуетъ зарядъ $1800\,\eta$, оказывается меньшей единицы, удѣльный зарядъ былъ бы больше $1800\,\eta$.

Неудобство, состоящее въ томъ, что матеріальному атому приходится приписать зарядъ, далеко превосходящій тотъ, который онъ можетъ удержать, судя по явленіямъ электролиза, исчезаетъ, какъ только мы перестанемъ приписывать движущемуся заряду матеріальный субстратъ, а вмѣсто того допустимъ, что инерція имѣетъ электромагнитное происхожденіе.

Тогда отношеніе

$$\frac{e}{m_0} = 1800\,\eta$$

не зависитъ совсѣмъ отъ матеріальной массы, а только, на основаніи соотношенія (6), отъ заряда и его размѣровъ.

Подставляя вмѣсто m_0 его значеніе (6), мы имѣемъ изъ предыдущаго выраженія для $\frac{e}{m_0}$:

$$R = \frac{4}{5} . 1800 . \frac{e\eta}{c^2} \tag{9}$$

Отсюда можно сдѣлать интересный выводъ, если принять атомистическую гипотезу для электричества, по которой первичный недѣлимый электрическій зарядъ есть электронъ (зарядъ одновалентнаго электролитическаго іона) и электронами же являются частицы, составляющія радіаціи (катодную и тому подобныя).

Тогда e въ (9) имѣетъ неизмѣнно значеніе $3 . 10^{-10}$ (въ электростатическихъ единицахъ), свойственное электролитическому іону.

Надо замѣтить, что въ пользу атомистической гипотезы электричества сильно говоритъ то обстоятельство, что зарядъ іоновъ въ газахъ оказывается почти точно равнымъ заряду іоновъ электролитическихъ [1]).

Положивъ въ (9) $e = 3 . 10^{-10}$ и принимая во вниманіе, что въ электростатическихъ единицахъ $\eta = 9660 . 3 . 10^{-10}$ или, въ круглыхъ цифрахъ, $10^4 c$, находимъ:

$$R = \frac{72}{50} . 10^{-13}$$

т. е. порядокъ величины размѣровъ электрона 10^{-13} cm.

Размѣры атома вѣсомаго вещества оцѣниваются между тѣмъ порядкомъ 10^{-8} cm. [2]), такъ что концентрація отрицательнаго электри-

[1]) Дѣйствительное опредѣленіе такого заряда—которое Oliver Lodge (Electrons, London, Bell, стр. 79) не колеблется объявить однимъ изъ самыхъ блестящихъ результатовъ новѣйшей экспериментальной физики — сдѣлано Дж. Дж. Томсономъ и Вильсономъ (C. T. R. Wilson). Это опредѣленіе было потомъ усовершенствовано и упрощено Вильсономъ (H. A. Wilson, A determination of the charge on the Jons, etc. „Phil. Mag.", (6), 5; апрѣль, 1903 г.). Всѣ эти изслѣдованія основаны на спеціальномъ явленіи: сгущеніи и послѣдовательномъ паденіи водяного пара, которое происходитъ въ очень чистомъ пересыщенномъ воздухѣ, если въ немъ имѣютъ мѣсто электрическіе разряды, или если черезъ него проходятъ электрическіе лучи.

[2]) Ср., напримѣръ, Jeans. The dinamical theory of gases. Cambridge, University Press, 1904, стр. 340—341.

чества, лишеннаго матеріальной связи, оказывается приблизительно въ 100000 разъ большей, чѣмъ когда оно составляетъ зарядъ атома.

Незначительность размѣровъ электроновъ сравнительно съ атомами дѣлаютъ понятнымъ проникновеніе катодныхъ и тому подобныхъ лучей черезъ вещество, въ особенности въ газообразномъ состояніи.

Въ самомъ дѣлѣ, въ газахъ разстояніе между молекулами велико, и отношеніе между объемомъ промежутковъ и объемомъ, занятымъ молекулами, можно считать порядка 10^4. [1])

Кучи мельчайшихъ электроновъ могутъ такимъ образомъ проходить почти безъ препятствій.

(Окончаніе слѣдуетъ).

РЕЦЕНЗІИ.

В. Александровъ. *Основанія анализа безконечно-малыхъ въ связи съ дополнительными статьями алгебры, примѣнительно къ программѣ курса дополнительнаго класса реальныхъ училищъ.* Часть I. Алгебра. Ц. 75 к. Часть II. Начала дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія. Ц. 75 к. Изданіе книжнаго магазина В. В. Думнова.

По заявленію автора, составленный имъ курсъ „содержитъ въ себѣ больше матеріала противъ министерской программы". „Но эти лишнія прибавленія при самостоятельномъ усвоеніи дадутъ лучшимъ ученикамъ возможность получить болѣе цѣльное и глубокое знаніе предмета и тѣмъ самымъ облегчить имъ переходъ къ дальнѣйшему обогащенію себя знаніями въ области математики". Авторъ считаетъ далѣе должнымъ предупредить: „въ главѣ о перемѣнныхъ величинахъ я разсматриваю перемѣнныя вообще и безконечно-малыя въ частности не въ любой моментъ ихъ измѣненія, а близъ предѣла ихъ". Онъ дѣлаетъ это „для удобства разсужденія о предѣлахъ перемѣнныхъ". Въ заключеніе предисловія авторъ благодаритъ Н. А. Шапошникова „за его указаніе нѣкоторыхъ недосмотровъ, которые вкрались было при составленіи этого курса". Рядъ другихъ остался, однако, неисправленнымъ. Въ части I, изъ предисловія къ которой и сдѣланы предыдущія выписки, глава I трактуетъ о мнимыхъ величинахъ. Здѣсь мы узнаемъ, что „долго держался взглядъ въ наукѣ на эту величину, какъ на невозможную и потому не имѣющую никакого значенія; даже Контъ, который первый пользовался ею въ теоріи эллиптическихъ (sic) функцій, еще какъ будто сомнѣвался въ ея формальной ре-

---

[1]) Принявъ, въ самомъ дѣлѣ, для молекулы, что ея линейные размѣры порядка 10^{-8} cm., найдемъ, что объемъ будетъ порядка 10^{-24} cm.³. Съ другой стороны, если обозначить черезъ m_H массу атома водорода, то $\frac{e}{m_H} = \eta$, откуда, подставляя вмѣсто e и η ихъ значенія $(3 . 10^{-10}, 10^4 c)$, имѣемъ: $m_H = 10^{-24}$ gr.

Если N число молекулъ въ единицѣ объема, то $2m_H . N$ есть масса въ единицѣ объема, т. е плотность, которая для водорода равна 10^{-4}. Изъ равенства $2m_H\ N = 10^{-4}$ получимъ: $N = 5 . 10^{19}$ (что хорошо согласуется съ значеніемъ, доставляемымъ кинетической теоріей газовъ). Такъ какъ каждая молекула имѣетъ объемъ, сравнимый съ 10^{-24} cm³, то часть единицы объема, дѣйствительно занятая водородомъ, есть $N . 10^{-24}$, т. е. $\frac{5}{10000}$. Для другихъ газовъ имѣемъ отношеніе того же порядка, такъ какъ N остается тѣмъ же самымъ согласно гипотезѣ А в о г а д р о.

альности. Но благодаря громадной пользѣ, оказанной этой величиной при изученіи трудной теоріи эллиптическихъ функцій, мнимая величина вскорѣ послѣ этого (!) завоевала себѣ право гражданства въ математикѣ“. Интересно и далѣе: „Ей часто придаютъ геометрическій смыслъ, но она и безъ этого геометрическаго представленія имѣетъ смыслъ, какъ такой величины, четная степень которой даетъ отрицательное число“. На стр. 5 доказывается теорема: двѣ комплексныя величины равны, когда отдѣльно равны и вещественныя величины и сомножители при i“. Передъ этимъ на страницѣ 3 было просто сказано: „при сложеніи, вычитаніи и умноженіи комплексныхъ величинъ поступаютъ такъ же, какъ съ многочленами вещественными“. На стр. 12—13 указывается „при извлеченіи корня изъ комплексной величины надо извлекать корень изъ ея модуля, а аргументъ ея дѣлить на показателя степени корня“, при чемъ написано такимъ образомъ: $\sqrt[m]{r\,(Cos\,\vartheta + i\,Sin\,\vartheta)} = \sqrt[m]{r}\left(Cos\,\frac{\vartheta}{m} + i\,Sin\,\frac{\vartheta}{m}\right)$ — указано только одно значеніе корня. Глава II посвящена перемѣннымъ величинамъ, имѣющимъ предѣлъ. Здѣсь мы узнаемъ, что „перемѣнной величиной называется такая величина, которая измѣняетъ свое значеніе во время разсужденія о ней,—напримѣръ, хорда въ данномъ кругѣ; величина же, которая сохраняетъ свое значеніе во время разсужденія о ней, называется постоянной величиной,—напримѣръ, діаметръ въ данномъ кругѣ. Но діаметръ въ разныхъ кругахъ будетъ величина перемѣнная“. Дальше указывается: „постоянныя величины суть вполнѣ опредѣленныя величины, но къ числу постоянныхъ величинъ относятъ и безконечность, хотя послѣдняя не всегда отличается опредѣленностью. На той же страницѣ и слѣдующей есть и еще коечто любопытное, но я не буду на этомъ останавливаться и, пропустивъ теоремы о предѣлахъ и истинномъ значеніи неопредѣленныхъ выраженій (отмѣтимъ только терминъ „подпредѣльное количество“), перейду прямо къ опредѣленію несоизмѣримыхъ чиселъ (стр. 38). § 14 начинается абзацомъ: „Всякое число, означающее совокупность единицъ или долей единицы, называется точнымъ числомъ, или соизмѣримымъ, или раціональнымъ числомъ; число же, которое не можетъ быть точно выражено ни цѣлымъ ни дробнымъ числомъ, называется несоизмѣримымъ... Но вѣдь прежде, чѣмъ говорить о числѣ, которое есть ни цѣлое ни дробное, надо сказать, что могутъ быть подобные случаи, и что мы получаемъ числа. Самое существенное во введеніи несоизмѣримыхъ чиселъ совершенно затушевано. Черезъ пять строкъ опять неудачная фраза: „ирраціональнымъ числомъ называется корень какой-нибудь степени, не извлекающійся точно“. А корень уравненія $x^2-2x-5=0$ или $x^5-5x+7=0$, стало-быть, не ирраціональное число? При подобномъ неумѣніи точно формулировать основныя опредѣленія и положенія, авторъ отличается въ то же время стремленіемъ вводить обобщенія, совершенно излишнія, а въ учебникѣ для средней школы въ особенности. Я имѣю въ виду теорему § 20: „Математическія дѣйствія надъ ирраціональными числами совершаются по тѣмъ же правиламъ, какъ и надъ соизмѣримыми числами“. Терминъ „математическія дѣйствія“ слишкомъ всеобщъ и многообъемлющъ. „Доказательство“ такой „теоремы“ должно отличаться абстрактностью, и дѣйствительно авторъ начинаетъ его такъ: „математическія дѣйствія обозначимъ символомъ F и результатъ дѣйствій будемъ называть функціей тѣхъ величинъ, надъ которыми совершены эти дѣйствія, при чемъ этотъ результатъ долженъ обладать свойствами непрерывности“. Здѣсь авторъ дѣлаетъ сноску: „только при этихъ условіяхъ и справедлива предложенная теорема“. Сильно сомнѣваюсь, чтобы ученики поняли изложеніе г. Александрова, а для существа дѣла было бы гораздо лучше, если бы онъ ограничился распространеніемъ на несоизмѣримыя числа основныхъ операцій, т. е. именно здѣсь примѣнимъ тотъ пріемъ, который имъ употребленъ на страницѣ 55: „если предложенное уравненіе съ одной неизвѣстной будетъ цѣлой степени выше второй, то рѣшать его мы не можемъ, ибо это не входитъ въ программу нашего курса“ (разумѣется, правило это надо бы помнить, а не высказывать en toutes lettres). Вышеприведенное не исчерпываетъ, разумѣется, всѣхъ неточностей, имѣющихся въ учебникѣ (пока я говорю только о I-й части). Не могу не привести еще одной: на страницѣ 13 буквально значится:

$$\sqrt[m]{r(Cos\,\vartheta + i\,Sin\,\vartheta)} = \sqrt[m]{r}\left(Cos\frac{\vartheta}{m} + i\,Sin\frac{\vartheta}{m}\right).$$

На предыдущей страницѣ стоитъ: „при извлеченіи корня изъ комплексной величины надо извлечь корень изъ ея модуля, а аргументъ ея дѣлить на показателя корня". О многозначности результата извлеченія корня здѣсь ни слова, ни намека, хотя именно при тригонометрическомъ представленіи комплексныхъ величинъ оно само собою напрашивается.

Переходя ко II части, естественно ожидаешь найти наибольшія погрѣшности именно въ общей части, въ опредѣленіяхъ и вводныхъ разсужденіяхъ. Это ожиданіе оправдывается съ первыхъ же строкъ. На страницѣ 1 снова фигурируетъ замѣчательное опредѣленіе перемѣнной величичины, которое мы уже привели выше, только здѣсь еще прибавлено: „если измѣненіе ея не подчинено никакимъ условіямъ, кромѣ условія равномѣрности измѣненія, то она называется независимой перемѣнной, или аргументомъ". На стр. 4 читаемъ: „алебраическими функціями называются тѣ, которыя для своего образованія требуютъ конечнаго числа дѣйствій сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія, возведенія въ степень и извлеченія корня"; на сколько я понимаю, подъ это опредѣленіе не подходитъ y — корень уравненія $y^5 + xy + x^7 = 0$ и, напротивъ, подходитъ x^a, гдѣ a есть какое-нибудь несоизмѣримое число, напримѣръ, $\sqrt{2}$, да и a^x, хотя a^x и фигурируетъ далѣе, какъ примѣръ трансцедентной функціи (такъ пишетъ авторъ систематически вмѣсто трансцендентной). На стр. 5 новый терминъ: „разрывныя" функцій вмѣсто прерывныя. На стр. 6 интересенъ „способъ обнаруженія непрерывности функцій". Геометрическое представленіе при помощи прямоугольныхъ координатъ называется геометрическимъ значеніемъ функцій.

На стр. 13 внушается ложное представленіе, будто производная всегда существуетъ: „Но предѣлъ отношенія приращенія функцій къ приращенію независимой перемѣнной, когда послѣднее обращается въ нуль, есть вполнѣ опредѣленная величина"; въ концѣ страницы добавляется: „если же функція будетъ иная (т. е. не „цѣлая раціональная алгебрическая"), то производныхъ будетъ безчисленное множество". На стр. 44 (§ 25) выводится производная неявной функціи и при этомъ мимоходомъ вводится понятіе о частныхъ производныхъ. Это слѣдовало выдѣлить совершенно особо. Правда, въ программѣ не значится функцій отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ, но разъ безъ введенія частныхъ производныхъ обойтись не удалось, нужно дать имъ опредѣленіе не въ срединѣ другого отдѣла, а самостоятельно. Въ дальнѣйшемъ, конечно, когда излагаются классическіе вопросы, трактуемые во всѣхъ учебникахъ, трудно ожидать особыхъ недоразумѣній. Но и тутъ, какъ только авторъ дѣлаетъ примѣчанія отъ себя, проявляется обычная для автора неясность изложенія. На стр. 79 онъ замѣчаетъ: „отсюда видно, что примѣнимость формулъ Маклорена значительно ограничена сравнительно съ формулой Тайлора требованіемъ конечности и непрерывности функціи и ея n первыхъ производныхъ при опредѣленномъ значеніи x, именно при $x = 0$". Но вѣдь и формула Тайлора примѣняется для разложенія функцій въ степенную строку, и коэффиціенты вычисляются для опредѣленнаго каждый разъ значенія x. На стр. 112 авторъ, который вывелъ уравненіе касательной $y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$ къ кривой $y = f(x)$ въ точкѣ $(x_1 y_1)$ ея, заявляетъ: „если желаютъ точку соприкосновенія разсматривать, какъ перемѣнную точку на кривой, а другую точку на касательной, какъ произвольную данную, то уравненіе касательной приметъ одинъ изъ слѣдующихъ равносильныхъ видовъ: $y_1 - y = f'(x)(x_1 - x)$ или $y - y_1 = = f'(x)(x - x_1)$". Г. Александровъ не замѣчаетъ, что при перемѣнныхъ x, y это уже не будетъ уравненіе прямой линіи, и, слѣдовательно, это не можетъ быть уравненіемъ касательной; и дѣйствительно, это кривая, проходящая черезъ точки пересѣченія кривой $y = f(x)$ и ея первой поляры относительно точки $(x_1\ y_1)$.

Приведеннаго достаточно, чтобы показать, что и эта вторая часть такъ же нуждается въ основательномъ исправленіи.

Руководство г. Александрова издано фирмою Думнова и, слѣдовательно, можетъ разсчитывать на широкое распространеніе. Поэтому оно можетъ принести не мало вреда ученикамъ, которые должны будутъ одолѣвать и усваивать всѣ погрѣшности автора и, въ результатѣ, попавъ въ высшее учебное заведеніе, должны будутъ переучиваться заново.

Я считаю поэтому необходимымъ своей, можетъ быть, слишкомъ длинной, замѣткой обратить вниманіе на дефекты публикацій г. Александрова.

Проф. Д. Синцовъ.

Краткій отчетъ о засѣданіяхъ Московскаго Математическаго кружка въ 1908 г.

Въ февральскомъ засѣданіи кружка А. И. Жилинскій сдѣлалъ сообщеніе: „Новая программа тригонометріи для VI класса реальныхъ училищъ и попытка ей удовлетворить“.

Программа тригонометріи для реальныхъ училищъ, изданная Мин. Нар. Просв. 30-го іюня 1906 г., искусственно расчленяетъ обычный курсъ этого предмета на два самостоятельныхъ отдѣла: рѣшеніе треугольниковъ, изучаемое въ VI классѣ, и теорію тригонометрическихъ функцій — въ VII. Написанная А. И. Жилинскимъ книга является попыткой удовлетворить потребности въ учебникѣ для VI класса. При составленіи ея выяснились тѣ трудности, которыя сопряжены съ прохожденіемъ курса тригонометріи по новому плану, и которыя заключаются въ необходимости пользоваться при рѣшеніи треугольниковъ цѣлымъ рядомъ преобразованій, стоящихъ въ связи съ общей теоріей тригонометрическихъ функцій, между тѣмъ какъ эта теорія отнесена къ VII классу. Референтъ въ своей книгѣ сдѣлалъ попытку вывести всѣ необходимыя для рѣшенія треугольниковъ формулы безъ теоріи тригонометрическихъ функцій. Такъ, для вывода функцій двойного и половиннаго угла онъ пользуется свойствами равнобедреннаго треугольника; для преобразованія тригонометрическихъ выраженій къ виду, удобному для логариѳмированія, исходными формулами онъ беретъ формулы Мольвейде и пр. Въ результатѣ авторъ даетъ формулы, пригодныя не только для основныхъ, но и для многихъ особыхъ случаевъ рѣшенія треугольниковъ.

При обсужденіи доклада выяснилось, что, хотя нѣкоторые предложенные авторомъ выводы формулъ интересны, однако, въ общемъ, его трудъ обнаруживаетъ, что поставленная имъ въ связи съ требованіями программы задача должна быть признана неразрѣшимой. Дѣйствительно, референтъ пользуется исключительно свойствами функцій, выводимыми изъ разсмотрѣнія прямоугольнаго треугольника; однако, этотъ методъ, безъ обобщенія понятія о тригонометрическихъ функціяхъ, не можетъ быть примѣненъ къ выводу свойствъ функцій тупого угла. Поэтому, при переходѣ къ тупому углу, у автора появляются произвольныя ограниченія и допущенія. Отсутствіе понятія объ отрицательныхъ отрѣзкахъ и углахъ ведетъ мѣстами къ усложненію доказательствъ и необоснованнымъ выводамъ. Въ общемъ учебникъ свидѣтельствуетъ о нецѣлесообразности вновь введенной программы тригонометріи. Ея главное педагогическое неудобство состоитъ въ томъ, что учащимся придется основныя свѣдѣнія изъ тригонометріи проходить два раза: въ VI-мъ классѣ,—исходя изъ разсмотрѣнія треугольниковъ, и въ VII-мъ—на основаніи теоріи тригонометрическихъ функцій, притомъ въ 1-й разъ въ болѣе трудномъ изложеніи, чѣмъ во 2-й. Отсутствіе въ русской учебной литературѣ задачниковъ, приспособленныхъ къ подобной системѣ, еще болѣе затрудняетъ преподаваніе. Въ общемъ, учебный планъ изученія тригонометріи безъ предварительнаго прохожденія теоріи тригонометрическихъ функцій, которая такъ разработана и такъ облегчаетъ всѣ выводы, долженъ быть признанъ несовременнымъ и неудачнымъ.

Въ томъ же засѣданіи А. Ф. Гатлихъ сдѣлалъ сообщеніе „О рѣшеніи геометрическихъ задачъ на построеніе при помощи одного циркуля“. Сдѣлавъ краткую историческую справку по данному вопросу, докладчикъ остановился на способѣ, предложенномъ для этой же цѣли въ 1890 году Адлеромъ. Способъ этотъ основанъ на разсмотрѣніи свойствъ обратныхъ фигуръ; поэтому референтъ напомнилъ, что 2 точки на плоскости называются обратными, если прямая, ихъ соединяющая, проходитъ черезъ начало, и если произведеніе ихъ разстояній отъ начальной точки сохраняетъ постоянную величину; двѣ фигуры называются обратными, если состоятъ изъ взаимно-обратныхъ точекъ. Кривая, обратная прямой, есть окружность, проходящая черезъ начало; для окружности, не проходящей черезъ начало, обратной фигурой служитъ также окружность. Поэтому теоретически вполнѣ возможно для всѣхъ прямыхъ и круговъ, необходимыхъ при рѣшеніи задачи, построить обратныя фигуры, т. е. круги, а затѣмъ построить точки, обратныя полученнымъ и такимъ образомъ рѣшить задачу при помощи проведенія лишь круговъ. При этомъ необходимо умѣть рѣшать при помощи одного циркуля лишь нѣсколько основныхъ задачъ: увеличить или уменьшить отрѣзокъ въ нѣсколько разъ; построить точку, симметричную съ данной относительно прямой; построить точку, обратную данной; построить фигуру, обратную данной прямой или данной окружности. Рѣшеніе этихъ задачъ было изложено докладчикомъ. Въ заключеніе А. Ф. Гатлихъ напомнилъ о теоремѣ Штейнера, по которой всякая задача на построеніе можетъ быть выполнена при помощи проведенія только прямыхъ линій, если на плоскости данъ неподвижный кругъ. Предполагая, что всѣмъ Штейнеровскимъ прямымъ соотвѣтствуютъ обратныя фигуры—окружности, проходящія черезъ центръ неподвижнаго круга, можно теоретически утверждать, что всякая задача на построеніе сводится къ проведенію окружностей чрезъ одну общую точку—центръ Штейнеровскаго круга.

Въ засѣданіи кружка 14-го марта 1908 г. происходила педогогическая бесѣда по вопросу *объ изложеніи статьи о радикалахъ*. Вступленіе въ бесѣду сдѣлалъ *Н. А. Извольскій*. Онъ раздѣлилъ недоразумѣнія, которыя встрѣчаются при прохожденіи отдѣловъ, стоящихъ въ связи съ теоріей дѣйствій надъ радикалами, на нѣсколько категорій, привелъ интересные примѣры парадоксовъ и разъяснилъ, что источникъ недоразумѣній кроется въ теоремахъ, на которыхъ основываются дѣйствія надъ радикалами, и которыя, будучи вѣрны для ариѳметическихъ корней, безъ достаточной осторожности переносятся на корни алгебраическіе.

Въ майскомъ (2-го мая) засѣданіи кружка *М. Ф. Бергъ* сдѣлалъ докладъ „*Объ измѣреніи величинъ, опредѣляющихъ основныя свойства электроновъ*“. Въ виду того, что по этому вопросу въ послѣднее время печатались статьи въ „Вѣстникѣ Опытн. Физ. и Эл. Матем.“, мы не дѣлаемъ отчета объ этомъ докладѣ.

Въ томъ же засѣданіи *Д. Л. Волковскій* сдѣлалъ сообщеніе: „*Къ вопросу о признакѣ дѣлимости на 8*“. Признавая правильность существующаго признака дѣлимости на 8, докладчикъ, однако, находитъ его слишкомъ *общимъ* и потому требующимъ если не дополнительнаго *опредѣленія*, то, во всякомъ случаѣ, дополнительнаго *разъясненія*. Разсмотрѣвъ двухзначныя и трехзначныя числа относительно дѣлимости ихъ на 8, Д. Л. Волковскій сдѣлалъ слѣдующую *разъяснительную прибавку* къ установленной формулировкѣ признака дѣлимости на 8: на 8 дѣлится только такое число, которое оканчивается тремя нулями, или же такое у котораго три послѣднія цифры выражаютъ число, кратное 8, т. е. *когда при четномъ числѣ сотенъ, десятки и единицы раздѣлятся на 8, а при нечетномъ числѣ сотенъ въ разрядѣ десятковъ и единицъ препятствуютъ числу раздѣлиться на 8 четыре единицы*. Въ виду того, что сообщеніе это было напечатано авторомъ въ нѣсколько измѣненномъ видѣ въ журналѣ—„Педагогическій Сборникъ“ (1901 г., №3), докладчикъ кратко коснулся только теоретической стороны вопроса, отославъ за методической стороной, равно какъ и за болѣе подробнымъ разсмотрѣніемъ вопроса, вообще, къ названному журналу.

Д. В.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 49 (5 сер.). Въ данный ромбъ вписать треугольникъ, подобный данному, такъ, чтобы одна его вершина находилась въ данной на сторонѣ ромба точкѣ, а остальныя вершины на двухъ другихъ сторонахъ.

Евг. Григорьевъ (Казань).

№ 50 (5 сер.). Найти цѣлыя значенія x, при которыхъ число $5x+11$ представляетъ точный квадратъ.

Я. Назаревскій (Харьковъ).

№ 51 (5 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^3+16x^2-\frac{1}{16}x-1=0.$$

М. Подрядовъ (Троицкая гимназія).

№ 52 (5 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$x^2-2y^2-x=0,\ 2x^2-5y^2+3y=0.$$

(Заимств.).

№ 53 (5 сер.). При какихъ цѣлыхъ значеніяхъ k число

$$k(k^2-1)(k^2-4)$$

кратно 480?

(Заимств.).

№ 54 (5 сер.). Если въ чашечный барометръ ввести v кубическихъ сантиметровъ воздуха изъ окружающей среды, то высота столба ртути понижается на l сантиметровъ; если же ввести v' кубическихъ сантиметровъ воздуха, то высота столба ртути понизится на l' сантиметровъ. Зная внѣшнее давленіе H воздуха, вычислить площадь сѣченія трубки.

(Заимств.).

Поправка. Въ задачѣ № 885 въ № 442 „Вѣстника“ вмѣсто $2^{41}-1$ слѣдуетъ читать $2^{41}+1$.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 879 (4 сер.). *Доказать, что число*

$$\left(\frac{N}{d^k}\right)^{k^{k-1}N}-1$$

дѣлится на k^kN+1, *если* d^k *есть дѣлитель числа* N, *и если* k^kN+1 *есть простое число.*

Помноживъ разсматриваемое выраженіе на $(d^k\, k^k)^{k^{k-1}N}$, имѣемъ:

$$\left\{\left(\frac{N}{d^k}\right)^{k^{k-1}N}-1\right\}(d^k\, k^k)^{k^{k-1}N}=[(Nk^k)^{k^{k-1}N}-1]-[(dk)^{k^kN}-1].$$

Если простое число k^kN+1 равно 2, то $k=1$ и $N=1$, а потому и $d=1$; въ этомъ случаѣ разсматриваемое выраженіе, обращаясь въ нуль, дѣлится на $k^kN+1=2$. Если простое число k^kN+1 не равно 2, то оно нечетно, а потому k^kN четно. Число $k^{k-1}N$ въ этомъ случаѣ тоже четно. Дѣйствительно, если N четно, то и $k^{k-1}N$ четно; если же N нечетно, то k должно быть четно, и при томъ не менѣе двухъ, а потому k^{k-1} четно, и $k^{k-1}N$ также четно. Поэтому разность $(Nk^k)^{k^{k-1}N}-1$ кратна суммы Nk^k+1. Съ другой стороны, k не кратно простого числа Nk^k+1; число d, будучи дѣлителемъ числа d^k, на которое, по условію, дѣлится N, тоже не кратно числа Nk^k+1. Слѣдовательно, по теоремѣ Фермата, разность $(dk)^{k^kN}-1$ также кратна простого числа k^kN+1. Итакъ, число

$$\left\{\left(\frac{N}{d^k}\right)^{k^{k-1}N}-1\right\}(d^k\, k^k)^{k^{k-1}N}$$

также кратно k^kN+1, откуда, замѣчая, что d и k суть, какъ доказано выше, числа взаимно простыя съ k^kN+1, выводимъ, что $\left(\frac{N}{d^k}\right)^{k^{k-1}N}-1$ дѣлится на k^kN+1.

Н. Агрономовъ (Ревель).

№ 880 (4 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$\sin(a+x)+\sin a\sin x\,\mathrm{tg}(a+x)=m\cos a\cos x.$$

Представивъ данное уравненіе въ видѣ

$$\sin(a+x)\left[1+\frac{\sin a\ \sin x}{\cos(a+x)}\right]=m\cos a\cos x,$$

или

$$\frac{\sin(a+x)}{\cos(a+x)}(\cos a\cos x-\sin a\sin x+\sin a\sin x)=$$
$$=\mathrm{tg}(a+x)\cos a\cos x=m\cos a\cos x,$$

мы видимъ, что оно распадается на два уравненія:

$$\cos a\cos x=0\quad \text{и}\quad \mathrm{tg}(a+x)=m.$$

Такимъ образомъ при $\cos a=0$, т. е. при $a=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ (гдѣ k—нѣкоторое цѣлое число) данное уравненіе обращается въ тождество. Вообще же оно удовлетворяется при $\cos x=0$ или $\mathrm{tg}(a+x)=m$, откуда находимъ искомые корни для x:

$$x=(2k+1)\frac{\pi}{2},\ x=\mathrm{arc\,tg}\,m-a+k\pi.$$

В. Обуховичъ (Гродно); *Н. Агрономовъ* (Ревель); *М. Субботинъ* (Сув. корп.).

№ 881 (4 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$x^3+bx^2+cx+\frac{4bc-b^2}{8}=0,$$

и показать, что одинъ изъ его корней равенъ суммѣ двухъ другихъ.

(Заимств. изъ *Supplemento al periodico di matematica*).

Представивъ данное уравненіе въ видѣ

$$x^3+bx^2+\frac{b^2}{4}x+cx-\frac{b^2}{4}x+\frac{b}{2}\cdot\frac{4c-b^2}{4}=x\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{(4c-b^2)x}{4}+$$
$$+\frac{b}{2}\cdot\frac{4c-b^2}{4}=\left(x+\frac{b}{2}\right)\left(x^2+\frac{b}{2}x+\frac{4c-b^2}{4}\right)=0,$$

замѣчаемъ, что оно распадается на два уравненія:

$$x+\frac{b}{2}=0,\ x^2+\frac{b}{2}x+\frac{4c-b^2}{4}=0,$$

откуда

$$x_1=-\frac{b}{2},\ x_{2,3}=\frac{-b\pm\sqrt{5b^2-16c}}{4},$$

при чемъ, дѣйствительно,

$$x_1=x_2+x_3=-\frac{b}{2}.$$

В. Обуховичъ (Гродно); *Н. Субботинъ* (Сув. корп.).

№ 892 (4 сер.). *На сторонахъ даннаго угла движутся двѣ точки* A *и* B *такъ, что сумма* AO + BO = s *ихъ разстояній отъ вершины угла* O *остается постоянной. Найти геометрическое мѣсто центровъ тяжести треугольника* AOB.

Обозначимъ черезъ M средину стороны AB, а черезъ G центръ тяжести треугольника AOB. Проведши черезъ G и M прямыя, параллельныя OB, до встрѣчи съ OA соотвѣтственно въ P и Q и замѣчая, что центръ тяжести G треугольника AOB расположенъ на медіанѣ OM такъ, что $\frac{OG}{OM}=\frac{2}{3}$, находимъ:

$$\frac{OP}{OQ}=\frac{2OP}{OA}=\frac{GP}{MQ}=\frac{2GP}{OB}=\frac{OG}{OM}=\frac{2}{3},$$

откуда

$$OP=\frac{OA}{3},\ GP=\frac{OB}{3}.$$

Отложивъ на продолженіи OP отрѣзокъ $PR=PG=\frac{OB}{3}$ и продолживъ RG до встрѣчи съ OB въ S, имѣемъ:

$$OR=OP+PR=OP+PG=\frac{OA}{3}+\frac{OB}{3}=\frac{OA+OB}{3}=\frac{s}{3},\ \frac{OS}{OR}=\frac{PG}{PR}=1,$$

откуда $OS=OR=\frac{s}{3}$. Такимъ образомъ, искомое геометрическое мѣсто есть отрѣзокъ RS, концы котораго взяты на сторонахъ даннаго угла такъ, что $OR=OS=\frac{s}{3}$.

Ф. Доброхотовъ (Петербургъ); *Н. С.* (Одесса).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Обложка
ищется

Обложка
ищется