№ 509.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

издаваемый

В. А. ГЕРНЕТОМЪ

подъ редакціей

Привать-Доцента В. Ф. КАГАНА.

XLIII-го Семестра № 5-й.

ОДЕССА.
Типографія Акц. Южно-Русскаго О-ва Печ. Дѣла. Пушкинская, 18.
1910.

ПРИНИМАЕТСЯ ПОДПИСКА на 1910 годъ (XXXI годъ изданія)

НА ДВУХНЕДѢЛЬНЫЙ ЖУРНАЛЪ

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО.

Органъ VI Отдѣла Императорскаго Русскаго Техническаго О-ва.
Органъ Всероссійскихъ Электротехническихъ Съѣздовъ.
Органъ Общества Электротехниковъ въ Москвѣ.

Журналъ „Электричество" издается VI (Электротехническимъ) Отдѣломъ Императорскаго Русскаго Техническаго Общества съ цѣлью распространенія свѣдѣній о современ. состояніи ученія объ электрическ. энергіи и о ея приложен. къ потребност. жизни, техники и промышл.

Журн. редактируется особымъ редакц. комитет., избраннымъ VI Отдѣломъ,

ПРИ БЛИЖАЙШЕМЪ УЧАСТІИ Г.Г.:

преподават. СПБ. Политехн. Инстит. А. В. Вульфа, инж.-эл. Б. П. Вьюшкова, проф. Н. Н. Георгіевскаго, инж.-эл. С. Д. Гефтера, инж. пут. сообщ. Г. О. Графтіо, инж. Л. Г. Гуревича, инж. пут. сообщ. П. П. Дмитренко, инж. Л. В. Дрейера, инж. В. П. Гольденберга, инж. М. Л. Кершнера, инж. Н. Н. Константинова, инж. Р. Р. Ліандера, инж. Д. М. Майзеля, С. О. Майзеля, инж.-техн. Т. Ф. Макарьева, инж.-эл. А. Л. Оренбаха, инж. І. Д. Павлицкаго, инж. Б. Петерса, преп. технолог. инст. Б. Л. Розинга, инж. Н. М. Сокольскаго, Д. М. Сокольцова, инжен. Г. Н. Шароева, инжен. Е. Я. Шульгина.

Съ 1-го января 1910 г. (за исключ. лѣтн. мѣсяц.)

журналъ выходитъ 2 раза въ мѣсяцъ—всего 20 №№ въ годъ.

ОБЪЕМЪ ЖУРНАЛА ЗНАЧИТЕЛЬНО УВЕЛИЧЕНЪ.

Къ журналу прилагаются Труды Всероссійскихъ Электротехнич. Съѣздовъ.

Подписка принимается въ Редакціи, въ Техническомъ Обществѣ **(Пантелеймоновская, 2)** и во всѣхъ книжныхъ магазинахъ.

Подписная цѣна на годовой экземпляръ съ доставкой и пересылкой внутри Россіи **8** руб., за полгода—**5** руб. За границу **12** р. При перемѣнѣ адреса необходимо указать № бандероли и уплат. **50** к. РАЗСРОЧКА допускается лишь по взаимному соглашенію съ редакціею. СТУДЕНТАМЪ высш. технич. учебн. завед. журн. высыл. за 4 р. въ годъ.

Журналъ и его изданія по электротехникѣ на Всерос. Художеств.-Пром. выставкѣ 1896 г. въ Нижнемъ Новгородѣ удостоены высшей награды—диплома перв. разряда. Журналъ „Электричество" рекомендованъ Учебн. Комитет. Министерства Народнаго Просвѣщенія для фундаментальн. библіотекъ мужскихъ гимназій и реальн. училищъ.

Въ редакціи продаются изданія журн. „Электричество".

АДРЕСЪ РЕДАКЦІИ:

С.-Петербургъ, 7-я Рождественская, № 4, кв. 12.

XLIII Сем. № 5.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

№ 509.

Развитіе понятія о числѣ въ его исторіи и въ школѣ.

С. Виноградова.

(Докладъ, прочитанный въ засѣданіи Московскаго Математическаго Кружка 30 декабря 1909 года).

Существуетъ мнѣніе, что при обученіи извѣстному предмету дѣтямъ приходится въ короткое время переживать то, что было пережито человѣчествомъ за весь, иногда весьма длинный періодъ развитія этого предмета*).

Можно не соглашаться съ этимъ мнѣніемъ во всемъ его объемѣ, но нельзя оспаривать справедливость скрытой въ немъ мысли о томъ, что исторія развитія предмета имѣетъ громадную важность въ дѣлѣ выработки методовъ обученія.

При обученіи, которое является какъ бы принудительнымъ и сокращеннымъ переживаніемъ длинной исторіи предмета, переживаніемъ, совершаемымъ подъ руководствомъ спеціалиста, необходимо, чтобы руководитель пользовался уроками исторіи какъ положительными, такъ и отрицательными, чтобы онъ устранялъ то, что въ исторіи задерживало развитіе предмета, и выдвигалъ тѣ пріемы, которые способствовали его уясненію и прогрессу.

Въ настоящее время во всѣхъ странахъ идетъ дѣятельная работа по пересмотру какъ программъ, такъ и методовъ обученія математикѣ, и попытка прослѣдить тѣ уроки, которые даетъ преподавателямъ математики исторія развитія понятія о числѣ, мнѣ кажется не излишней и своевременной.

---

*) Г. Спенсеръ. Воспитаніе умственное, нравственное и физическое. Пер. Федоровой. С.-Петербургъ, 1894. Стр. 95.

1.

Первые шаги — устное счисленіе — въ ариѳметикѣ исторической и школьной являются тождественными: человѣчество училось считать конкретные предметы и постепенно дифференцировало понятіе „много"; дѣти также начинаютъ со счета окружающихъ ихъ предметовъ и постепенно заучиваютъ числительныя. На конкретныхъ же примѣрахъ и на практическихъ задачахъ дѣлается первое знакомство съ основными ариѳметическими дѣйствіями.

Въ письменномъ счисленіи школа беретъ только то, что въ историческомъ ходѣ развитія ученія о числѣ оказалось наиболѣе пригоднымъ, а именно — индусскія цифры и десятичную систему, и устраняетъ изъ первоначальнаго обученія какъ другія обозначенія, такъ и другія системы счисленія. При этомъ, какъ это было и въ исторіи, дѣлается первое обобщеніе понятія о числѣ: вводится „нуль", сначала какъ цифра, а потомъ и какъ число, предшествующее 1 въ натуральномъ ряду.

Изученіе 4-хъ дѣйствій надъ цѣлыми числами происходитъ въ школѣ также соотвѣтственно исторіи этихъ дѣйствій: сначала на примѣрахъ обучаютъ складывать, вычитать, умножать и дѣлить, а затѣмъ уже заботятся, насколько возможно, и о логической сторонѣ дѣйствій.

2.

Вторымъ обобщеніемъ понятія о числѣ являются дроби. Объ историческомъ происхожденіи дробей въ статьѣ Шуберта (Schubert), І. Таннери (J. Tannery) и І. Молька (J. Molk) „Principes fondamentaux de l'Arithmètique" *) читаемъ слѣдующее: „исторически дроби появились тогда, когда захотѣли измѣрять непрерывныя величины, напримѣръ, длины, которыхъ нельзя было разсматривать, какъ составленныя изъ извѣстнаго числа единицъ. Въ такомъ случаѣ единица (величина) дѣлится на нѣкоторое число равныхъ частей, и если одна изъ этихъ частей содержится точно извѣстное число разъ въ разсмариваемой величинѣ, то получается мѣра этой величины, выражающаяся двумя натуральными числами, изъ которыхъ одно, знаменатель, указываетъ, на сколько равныхъ частей раздѣлена единица, другое, числитель,— сколько такихъ частей содержитъ измѣряемая величина. Эта мѣра называется также отношеніемъ измѣряемой величины къ величинѣ, принятой за единицу".

Описавъ затѣмъ обозначеніе дробей, авторы продолжаютъ: „Понятно, что по отношенію къ новому роду чиселъ всѣ опредѣленія должны быть установлены вновь. Въ выборѣ опредѣленій можно съ этой точки зрѣнія руководиться конкретнымъ происхожденіемъ дробей, такъ чтобы равныя дроби измѣряли равныя величины, чтобы ихъ сложеніе соотвѣтствовало сложенію величинъ и умноженіе — перемѣнѣ единицы величины. Вычитаніе и дѣленіе остаются операціями,

*) „Encyclopédie des sciences mathématiques", t. I, vol. 1. fasc. 1, § 23. Paris, 1904.

обратными сложенію и умноженію. Такимъ образомъ, оказываются сохраненными основныя свойства дѣйствій".

Въ этихъ немногихъ строкахъ ясно указана вся программа ученія о дробяхъ, пригодная для школы. Но для выработки этой короткой и ясной программы, напечатанной въ началѣ XX вѣка, потребовался весьма длинный періодъ времени, и теорія дробей очень долго представляла громадныя трудности для изученія.

Историки математики указываютъ*) 4 главныхъ центра, изъ которыхъ распространялось ученіе о дробяхъ. Этими центрами были Египетъ, Вавилонъ, Римъ и Индія. Древніе египетскіе ученые имѣли понятіе о дробяхъ вообще, но не знали способа изображенія дробей съ произвольнымъ числителемъ. Поэтому главныя ихъ усилія были направлены на выраженіе дробей черезъ элементарныя, т. е. такія, которыя имѣютъ числителемъ единицу.

Изъ дробей съ числителемъ, отличнымъ отъ 1, у египтянъ была только дробь $^2/_3$. Съ помощью элементарныхъ дробей производились и 4 дѣйствія съ дробями. Отъ египтянъ вычисленія съ дробями перешли къ грекамъ, которые пополнили египетское ученіе о дробяхъ изобрѣтеніемъ способа изображать произвольныя дроби, и къ арабамъ.

Вторымъ самостоятельнымъ центромъ развитія ученія о дробяхъ служитъ Вавилонъ, гдѣ въ основу этого ученія были положены система счисленія при основаніи 60 и дроби съ знаменателемъ 60^m. Изъ Вавилона ученіе о дробяхъ приблизительно за 200 лѣтъ до Р. Х. перешло въ Александрію, затѣмъ къ арабамъ, отъ нихъ къ средневѣковымъ ученымъ и держалось до 15 столѣтія по Р. Х., когда появились десятичныя дроби.

Третьимъ центромъ ученія о дробяхъ является Римъ, создавшій свою особую систему дробей, внушенную существовавшей тамъ мѣрою вѣса (as) и подраздѣленіями ея на 12 частей (uncia). Вслѣдствіе сложности названій эта система оказалась крайне неудачной и неспособной къ развитію, но самую мысль разсматривать конкретныя дроби и изучать дроби въ связи съ мѣрами вѣса, денегъ и т. п. нужно отмѣтить, какъ имѣющую большую педагогическую цѣнность**).

Индусское ученіе о дробяхъ, перешедшее затѣмъ къ арабамъ и отъ нихъ въ Западную Европу, даетъ основы для современнаго ученія о дробяхъ, какъ въ смыслѣ ихъ изображенія двумя числами, такъ и въ смыслѣ установленія правилъ дѣйствій надъ ними.

Въ средневѣковыхъ ариѳметикахъ глава о дробяхъ отличалась такой запутанностью изложенія и такимъ обиліемъ правилъ, что изученіе ея представляло для учениковъ почти неодолимыя трудности, засвидѣтельствованныя у нѣмцевъ поговоркой: „in die Brüche geraten". Причинами этой запутанности служили, повидимому, слѣдующія обстоятельства: 1) отсутствовало или, по крайней мѣрѣ, не было достаточно

*) Tropfke. Geschichte der Elementarmathematik. Bd. I. Leipzig, 1902.

**) См. Кэджори, Ф. „Исторія элементарной математики". Одесса, 1910. Стр. 43.

выдвинуто и использовано точное определеніе дроби; 2) правила дѣйствій сообщались, какъ заповѣди, безъ надлежащихъ объясненій; 3) авторы учебниковъ для начинающихъ и преподаватели были далеко не на высотѣ своей задачи, а видные математики въ своихъ сочиненіяхъ имѣли въ виду не начинающихъ, а ученыхъ.

Въ настоящее время методика преподаванія ученія о дробяхъ основательно разработана и изученіе ихъ перестало считаться вѣнцомъ премудрости. Но и въ современномъ начальномъ изложеніи теоріи дробей есть пункты, которые возбуждаютъ сомнѣніе въ ихъ цѣнности. Укажу, не вдаваясь въ подробности, на два такихъ пункта: 1) выдѣленіе вопроса о нахожденіи частей цѣлаго и цѣлаго по части въ нѣкоторыя отдѣльныя дѣйствія, изучаемыя раньше 4-хъ дѣйствій; 2) отвлеченныя опредѣленія дѣйствій, какъ формулы, печатаемыя жирнымъ шрифтомъ и заучиваемыя наизустъ. Къ свѣтлымъ сторонамъ современнаго преподаванія теоріи дробей слѣдуетъ отнести все болѣе и болѣе распространяющееся пользованіе графическимъ методомъ при выясненіи происхожденія дробей и при изученіи измѣненій дроби въ зависимости отъ кратнаго увеличенія и уменьшенія числителя и знаменателя.

3.

Введеніе въ науку отрицательныхъ чиселъ совершилось очень медленно. У греческихъ математиковъ чисто отрицательныхъ чиселъ нѣтъ. У Діофанта (ум. около 330 г. по Р. Х.), выдающагося александрійскаго алгебраиста, встрѣчаются дѣйствія надъ разностями и при ихъ умноженіи указывается правило знаковъ, но самыя разности разсматриваются лишь въ томъ случаѣ, когда уменьшаемое болѣе вычитаемаго. Кромѣ того, Діофантъ не признаетъ и отрицательныхъ корней уравненія. Получивъ такой корень, онъ старается измѣнить коэффиціенты уравненія такъ, чтобы корни были положительны.

Впервые отрицательныя числа появляются у индусовъ. У насъ же въ первый разъ встрѣчается знакъ для отрицательныхъ чиселъ въ видѣ точки, поставленной надъ числомъ, и толкованіе соотношенія между положительными и отрицательными числами въ видѣ представленія первыхъ имуществомъ, а вторыхъ долгомъ. Для квадратнаго уравненія у индусовъ имѣются два корня, только отрицательный, въ случаѣ таковаго, отбрасывается, потому что „люди не любятъ отвлеченныхъ отрицательныхъ чиселъ“ (Бхаскара, 1150 г.). Арабы не допускаютъ отрицательныхъ корней уравненія. Около 1225 г. Леонардо изъ Пизы приводитъ въ одной задачѣ отрицательное рѣшеніе и даетъ ему толкованіе въ смыслѣ долга.

Въ 16 столѣтіи французъ Шюке (Chuquet) при рѣшеніи одной задачи получаетъ отрицательное число и признаетъ его рѣшеніемъ, „хотя бы другіе авторы и считали такія числа за невозможныя“. Объясненія своей рѣшительности и настойчивости онъ не даетъ. Штифель (Stiefel, 1487—1567) объясняетъ отрицательныя или, по его номенклатурѣ, абсурдныя числа, какъ меньшія нуля, который отдѣляетъ положительныя числа отъ отрицательныхъ.

Несмотря на успѣхи, достигнутые, повидимому, въ ученіи объ отрицательныхъ числахъ, въ 16 и 17 столѣтіяхъ встрѣчаются ученые, не признающіе отрицательныхъ корней уравненія. Такъ, Віетъ (Viète, 1540—1603) отбрасывалъ отрицательныя рѣшенія, а Гарріотъ (Harriot, 1560—1621) полагалъ возможнымъ доказать, что уравненіе допускаетъ лишь положительные корни.

Но въ 17-мъ же вѣкѣ былъ сдѣланъ послѣдній шагъ къ укрѣпленію положенія отрицательныхъ чиселъ въ наукѣ. Этотъ шагъ былъ сдѣланъ Декартомъ (Descartes, 1596—1650), который сталъ употреблять буквы для обозначенія какъ положительныхъ, такъ и отрицательныхъ чиселъ, а, главное, указалъ способъ строить ихъ геометрическія изображенія и такимъ образомъ наглядно выяснилъ указанныя Штифелемъ соотношенія между отрицательными числами, нулемъ и числами положительными. Попытки протеста противъ отрицательныхъ чиселъ встрѣчаются и позднѣе, но въ 18-мъ вѣкѣ Эйлеръ (Euler, 1707—1783) освѣтилъ послѣдній пунктъ, дававшій поводъ къ недоразумѣніямъ: онъ указалъ на возможность перехода отъ чиселъ положительныхъ къ отрицательнымъ не только черезъ нуль, но и черезъ безконечность.

Изъ этого краткаго очерка развитія ученія объ отрицательныхъ числахъ ясно видно, что мѣшало и что способствовало выработкѣ правильнаго пониманія отрицательныхъ чиселъ: препятствіемъ служило отсутствіе способа наглядно интерпретировать эти числа; средствомъ для устраненія недоразумѣній, возникавшихъ по поводу отрицательныхъ чиселъ, явился указанный Декартомъ способъ строить ихъ изображеніе. По этому поводу Ф. Кэджори въ своей „Исторіи элементарной математики" (стр. 250) говоритъ: „Исторія подчеркиваетъ важность графическаго представленія отрицательныхъ чиселъ для преподаванія алгебры. Если опустить всѣ иллюстраціи отрицательныхъ чиселъ линіями или посредствомъ термометра, то числа эти покажутся современнымъ учащимся настолько же нелѣпыми, насколько они казались таковыми старымъ алгебраистамъ".

Но этимъ урокомъ исторіи стали пользоваться при изложеніи ученія объ отрицательныхъ числахъ въ школѣ лишь весьма недавно. Геометрическое представленіе отрицательныхъ чиселъ отсутствуетъ во многихъ учебникахъ алгебры, которые употребляются и въ настоящее время (изъ русскихъ учебниковъ, напримѣръ, въ учебникахъ Ю. Давидова, А. Киселева). Въ теоріи отрицательныхъ чиселъ слѣдуетъ указать еще на одинъ пунктъ, являющійся результатомъ недоразумѣнія и, къ сожалѣнію, довольно распространенный и въ наше время. Я имѣю въ виду стремленіе нѣкоторыхъ учебниковъ, а за ними и преподавателей, доказать правило знаковъ. Это правило есть условіе, вводимое при расширеніи понятія о числѣ и распространенія дѣйствій на вновь введенныя числа, и, какъ таковое, доказано быть не можетъ*).

4.

Слѣдующимъ обобщеніемъ понятія о числѣ въ школьной практикѣ являются ирраціональныя числа. Въ исторіи они появляются

*) См. Duhamel. Des méthodes dans les sciences de raisonnement 2 partie, Ch. XIX, Paris, 1878; F. Klein. Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. I. Leipzig, 1908.

раньше отрицательныхъ. Открытіе ирраціональныхъ чиселъ принадлежитъ Пиѳагору (6-ое столѣтіе до Р. Х.) и было сдѣлано чисто геометрическимъ путемъ изъ разсмотрѣнія діагонали квадрата со стороною, равной единицѣ длины. Но греки не признавали ирраціональнаго количества числомъ. Они лишь замѣтили, что отношенія между нѣкоторыми величинами не выражаются отношеніемъ двухъ натуральныхъ чиселъ, т. е. пришли къ понятію о несоизмѣримыхъ величинахъ; но, замѣтивъ этотъ недостатокъ въ области натуральныхъ чиселъ, они приписали его безсилію ариѳметики и совершенно отдѣлили изученіе натуральныхъ чиселъ отъ изученія величинъ. Ученіе о числахъ получило названіе ариѳметики, а ученіе о величинахъ — логистики. Для изученія этихъ послѣднихъ создана была замѣчательная теорія пропорцій между величинами, изложеніе которой составляетъ предметъ 5-й книги „Началъ“ Евклида. Кромѣ того, греческіе ученые изучали только нѣкоторые типы ирраціональностей, получаемыхъ при геометрическихъ построеніяхъ.

Индусы не обращали вниманія на различіе между раціональными и ирраціональными количествами. По словамъ Ф. Кэджори*), „ирраціональныя количества подвергались тѣмъ же дѣйствіямъ, что и обыкновенныя числа; индусы разсматривали ихъ, какъ настоящія. Поступая такъ, они въ большей мѣрѣ содѣйствовали прогрессу математики: они допускали результаты, къ которымъ приходили инстинктивно; достиженіе тѣхъ же результатовъ путемъ строго логическихъ процессовъ потребовало бы значительно большихъ усилій“.

Геометрическій характеръ теорія ирраціональныхъ чиселъ сохраняла весьма долго. Только въ началѣ 19-го столѣтія пражскій математикъ Больцано**) обратилъ вниманіе на необходимость строго ариѳметическихъ доказательствъ тѣхъ теоремъ анализа, которыя до сихъ поръ доказывались только геометрически, а во второй половинѣ этого столѣтія появились чисто ариѳметическія теоріи ирраціональныхъ чиселъ. Эти теоріи принадлежатъ Вейерштрассу, Кантору и Дедекинду.

Въ школѣ обыкновенно дается лишь на примѣрахъ понятіе объ ирраціональномъ числѣ и указывается возможность вычисленія его приближенныхъ значеній. Клейнъ въ своихъ лекціяхъ по элементарной математикѣ***) говоритъ, что бо̀льшаго для средней школы и не нужно, такъ какъ логическая теорія ирраціональныхъ чиселъ и не по силамъ среднему ученику и не соотвѣтствуетъ его запросамъ. Что же касается учениковъ выдающихся, желающихъ ближе ознакомиться съ ирраціональными числами, то здѣсь „педагогическому искусству преподавателя представляется благодарная задача не скупиться на дальнѣйшія указанія, не нанося ущерба интересамъ большинства“.

---

*) „Исторія элементарной математики“, стр. 108.

**) См. А. В. Васильевъ. „Введеніе въ анализъ“. Вып. II, стр. 68. Казань, 1908.

***) F. Klein, l. c., S. 94.

5.

Пятымъ обобщеніемъ понятія о числѣ являются комплексныя числа.

Исторія ихъ представляетъ большую аналогію съ исторіей отрицательныхъ чиселъ. Въ первый разъ мнимыя числа встрѣтились при извлеченіи квадратнаго корня изъ отрицательнаго числа. Невозможность рѣшенія этой задачи была уже извѣстна индусскому ученому Бхаскара (въ 12 столѣтіи по Р. Х.). Но настоящая исторія мнимыхъ чиселъ начинается тогда, когда, признавая ихъ невозможными, нелѣпыми, начали оперировать съ ними, какъ съ дѣйствительными числами. Это случилось въ 16 столѣтіи. Италіанскій математикъ Карданъ, рѣшая задачу о разложеніи числа 10 на двѣ части, произведеніе которыхъ было бы равно 40, получилъ мнимое рѣшеніе: $5+\sqrt{-15}$ и $5-\sqrt{-15}$. Перемноживъ эти числа по правиламъ для дѣйствительныхъ чиселъ, онъ получилъ въ произведеніи 40. Сознавая, повидимому, смѣлость сдѣланнаго шага, онъ объявилъ эти числа софистическими, а результатъ, полученный имъ при умноженіи, приписалъ доходящей до безполезности тонкости ариѳметики. Мысль Кардана производить надъ мнимыми числами дѣйствія по правиламъ, установленнымъ для дѣйствительныхъ чиселъ, нашла послѣдователей, и съ 16-го столѣтія до конца 18 употребленіе мнимыхъ чиселъ постепенно учащалось, хотя нѣкоторые математики считали унизительнымъ вводить въ вычисленія мнимыя числа и оправдывали пользованіе ими только удобствами, которыя они доставляютъ при вычисленіяхъ.

Оправданіе дѣйствій надъ мнимыми числами и, въ нѣкоторомъ смыслѣ, доказательство ихъ реальности относится къ концу 18 столѣтія и было сдѣлано съ двухъ точекъ зрѣнія: геометрической и чисто алгебраической. Геометрическую теорію комплексныхъ чиселъ создали: Каспаръ Вессель (Caspar Wessel), Арганъ (Argand), Франсэ, (Français), Гомпертцъ (Gompertz), Мурей (Mourey), Варренъ (Warren), Гауссъ (Gauss), которому принадлежитъ названіе „комплексное число“, и Коши (Cauchy), а алгебраическую — Гамильтонъ (Hamilton) и Морганъ (Morgan)*).

Въ геометрической теоріи задача заключалась не только въ геометрическомъ изображеніи комплексныхъ чиселъ, но и въ нахожденіи способа аналитически изображать векторы на плоскости и въ надлежащемъ опредѣленіи дѣйствій надъ ними и надъ соотвѣтствующими имъ числами.

Ариѳметическая теорія выходитъ изъ разсмотрѣнія паръ дѣйствительныхъ чиселъ. Эти пары разсматриваются, какъ числа новаго рода; для нихъ устанавливаются условія равенства и правила дѣй-

*) См. Encyclopédie des sciences mathématiques, T. I, vol. 1, fasc. 3. Paris, 1908.

Tropfke, „Geschichte der Elementarmathematik“, Bd. I. Leipzig. 1902.

ствій, при чемъ руководящею нитью служитъ стремленіе сохранить *основныя свойства* дѣйствій, имѣющія мѣсто при дѣйствіяхъ надъ дѣйствительными числами, и сдѣлать возможнымъ рѣшеніе задачи извлеченія квадратнаго корня изъ отрицательнаго числа.

Средняя школа въ области комплексныхъ чиселъ остается, за рѣдкими исключеніями, на той ступени, на которой находились математики 17 и 18 столѣтій. Комплексныя числа и дѣйствія надъ ними имѣются и въ программахъ, и въ учебникахъ, но, насколько мнѣ извѣстно, нѣтъ въ нихъ того, что помогло выясненію понятія о комплексномъ числѣ и укрѣпило его въ наукѣ, нѣтъ *геометрическаго изображенія* какъ самыхъ чиселъ, такъ и результатовъ дѣйствій надъ ними. Остались одни вычисленія, сопровождаемыя иногда запоминаніемъ формулъ въ родѣ формулы извлеченія квадратнаго корня изъ комплекснаго числа.

По мнѣнію *Клейна**) въ средней школѣ слѣдуетъ при изложеніи ученія о комплексныхъ числахъ обратить вниманіе на *два* пункта: 1) не вдаваясь въ теоретическія подробности, выяснить, что комплексныя числа являются результатомъ расширенія понятія о числѣ и 2) пріучить учениковъ къ образамъ на плоскости комплекснаго перемѣннаго.

6.

Въ заключеніе необходимо указать еще на одинъ урокъ исторіи, оставшійся, какъ мнѣ кажется, неиспользованнымъ въ педагогическомъ отношеніи.

Въ первой половинѣ 19-го столѣтія, когда математика уже владѣла комплекснымъ числомъ, какъ высшей ступенью обобщенія, явилась потребность въ пересмотрѣ понятія о числѣ, потребность, такъ сказать, *повторительнаго курса* о числѣ. Этотъ пересмотръ привелъ къ разработкѣ формальныхъ законовъ основныхъ дѣйствій и выяснилъ самый ходъ обобщенія понятія о числѣ, выдвинувъ такъ называемый *принципъ сохраненія формальныхъ законовъ*. При этомъ выяснилась также возможность дальнѣйшаго обобщенія понятія о числѣ, возможность новыхъ *гиперкомплексныхъ* чиселъ и новыхъ *алгебръ*, законы которыхъ отличны отъ законовъ обычной алгебры.

Въ большинствѣ среднихъ школъ, по преимуществу въ старшихъ классахъ, намѣчаются повторительные курсы по всѣмъ отдѣламъ математики. Я думаю, что повторительными курсами по ариѳметикѣ и алгебрѣ слѣдовало бы воспользоваться для приведенія въ порядокъ и въ связь отдѣльныхъ главъ о числахъ разнаго рода и выяснить посте-

---

*) F. *Klein*, l. c., стр. 175 и слѣд. „О дѣйствительной и желательной постановкѣ преподаванія теоріи комплексныхъ чиселъ“. См. также статью Oskar Janzen: „Die komplexen Zahlen im Unterricht der höheren Lehranstalten“ въ „Zeitschrift für mathem. und naturwissenschaft. Unterricht“. 40 Jahrgang, 10 und 11 Hefte. 1909.

пенное развитіе понятія о числѣ, какъ результатъ стремленія освободить отъ ограниченій возможность выполненія обратныхъ дѣйствій.

Мнѣ кажется, что въ области ученія о числѣ уроки исторіи можно формулировать такъ: конкретное изученіе чиселъ разнаго рода въ связи съ ихъ геометрическими изображеніями, для которыхъ необходимо постепенное ознакомленіе учащихся съ методомъ координатъ сначала на полупрямой, потомъ на прямой и, наконецъ, на плоскости.

Марсъ и Сатурнъ.

И. Мессершмита.

(Окончаніе).*

Теперь обратимся къ планетѣ Сатурнъ. Марсъ бросается въ глаза своимъ красноватымъ цвѣтомъ и искрящимся блескомъ; Сатурнъ же, напротивъ, испускаетъ холодный, бѣлый, какъ бы свинцовый свѣтъ. Эта звѣзда первой величины отличается поразительной особенностью, которая, однако, видна лишь вооруженному глазу. Въ отличіе отъ всѣхъ другихъ планетъ, которыя въ телескопѣ кажутся маленькими кружками, дискъ Сатурна обладаетъ боковыми придатками; первымъ наблюдателямъ эти придатки казались тѣмъ болѣе загадочными, что съ теченіемъ времени они измѣнялись. Галилея эти явленія привели въ такое безпокойство, что, въ концѣ концовъ, онъ отказался отъ наблюденій. Гассенди, наблюдавшій эту планету больше двадцати лѣтъ (съ 1633 г.), говоритъ о подвѣскахъ, повидимому, не соединенныхъ съ планетой. Современикъ Гассенди, данцигскій астрономъ Гевель (Hevel) тоже не могъ выяснить значенія обоихъ придатковъ. Это удалось лишь Гюйгенсу, который въ 1655 г. открылъ также и перваго спутника этой планеты, Титана. Около этого времени онъ открылъ дѣйствительную форму Сатурна, хотя онъ лишь позже опубликовалъ свое открытіе. 26 декабря 1657 года онъ пишетъ астроному Бульяльдусу (Bullialdus): „17 декабря я увидѣлъ въ свою большую зрительную трубу (съ 23-футовымъ фокуснымъ разстояніемъ) Сатурна въ первый разъ послѣ его соединенія съ солнцемъ и радъ былъ убѣдиться, что онъ имѣетъ въ точности такой видъ, какой я предвидѣлъ сообразно съ моей гипотезой о кольцѣ, окружающемъ Сатурна“.

Это кольцо виситъ вокругъ экватора и представляетъ собой плоскій тонкій дискъ не болѣе 100 *км.* въ толщину; плоскость его наклонена подъ значительнымъ угломъ какъ къ плоскости орбиты

---

*) См. „Вѣстникъ“, № 507.

Сатурна, такъ и къ плоскости земной орбиты. Плоскости этихъ двухъ орбитъ, въ свою очередь, тоже наклонены другъ къ другу подъ небольшимъ угломъ, такъ что въ теченіе полнаго оборота эти три тѣла занимаютъ другъ относительно друга различныя положенія: при этомъ Сатурнъ во время одной половины оборота находится надъ плоскостью земной орбиты, а въ теченіе другой половины — подъ плоскостью. Въ одномъ случаѣ наблюдатель видитъ южную сторону, въ другомъ — сѣверную сторону кольца. Вблизи же линіи пересѣченія плоскостей обѣихъ орбитъ происходитъ замѣна одной видимой стороны кольца другою, и къ намъ обращенъ тогда край кольца. Въ этомъ случаѣ кольцо представляется намъ въ видѣ узкой тонкой полосы или линіи, которая, какъ показалъ опытъ, либо совершенно невидна, либо, въ лучшемъ случаѣ, при помощи самыхъ сильныхъ телескоповъ можетъ быть замѣчена въ видѣ тонкой линіи на дискѣ Сатурна.

Возможно еще и другое расположеніе, при которомъ наблюдатель, находящійся на землѣ, не можетъ увидѣть кольца—именно, когда кольцо оказывается какъ разъ въ плоскости, проходящей черезъ солнце. Тогда бываетъ освѣщена лишь узкая сторона кольца, а обыкновенно видимая широкая поверхность кольца остается въ темнотѣ. То же самое имѣетъ мѣсто въ томъ случаѣ, когда земля и солнце находятся на противоположныхъ сторонахъ плоскости кольца. Тогда Сатурнъ бываетъ обращенъ къ землѣ лишь темной, неосвѣщенной стороной своего кольца, такъ что мы не можемъ видѣть послѣдняго. Описанныя три положенія слѣдуютъ другъ за другомъ въ короткое время, такъ что въ теченіе каждаго полугодія можно два раза наблюдать исчезновеніе узкаго кольца и его вторичное появленіе.

Такъ какъ время обращенія Сатурна вокругъ солнца составляетъ около 29 лѣтъ, то въ теченіе 14 лѣтъ мы видимъ сѣверную сторону кольца, а въ теченіе остальныхъ 14 лѣтъ — южную сторону его. При переходѣ отъ одной стороны къ другой кольцо становится все уже, пока оно не суживается въ тонкую свѣтлую линію, о которой мы только-что говорили. Отсюда видно, что въ сравненіи съ Сатурномъ кольцевой дискъ имѣетъ очень малую толщину, примѣрно, какъ листъ бумаги. Послѣ короткаго промежутка, въ теченіе котораго кольцо остается невидимымъ, оно снова постепенно открывается все болѣе и болѣе, пока черезъ семь лѣтъ не достигаетъ своихъ полныхъ размѣровъ, и затѣмъ вновь начинаетъ убывать.

Подобное исчезновеніе имѣло мѣсто въ 1907 г., а именно — 17 апрѣля; но такъ какъ къ тому времени Сатурнъ находился слишкомъ близко къ солнцу, то его вообще нельзя было наблюдать. Начиная съ іюля, планету можно было сперва видѣть незадолго до восхода солнца на восточной половинѣ неба; затѣмъ планета постепенно упреждала солнце, такъ что осенью она была видима цѣлую ночь. Отъ апрѣля до іюля планета имѣла видъ обыкновеннаго диска, и лишь 26 іюля кольцо снова показалось, хотя, конечно, открылось небольшой лишь своей частью. 4 октября оно вторично скрылось, такъ какъ солнце освѣщало лишь узкій край его, и оставалось невидимымъ до

7 января 1908 г. Затѣмъ кольцо открылось довольно быстро, и Сатурнъ снова получилъ свой обычный видъ.

Поверхность кольца при ближайшемъ наблюденіи распадается на различныя части, отдѣленныя другъ отъ друга линіями; послѣднія суть прорѣзы въ кольцѣ, такъ что въ извѣстные моменты сквозь нихъ можно видѣть шаръ самой планеты; американскій астрономъ Уитмель (C. T. Whitmell) первый обратилъ на это обстоятельство вниманіе изслѣдователей. Въ дѣйствительности же это было замѣчено еще въ 1852 г. Ласселемъ (Lassel) и въ 1883 г. Йонгомъ и Гэлемъ; въ послѣднее же время явленіе опять наблюдалось въ 1902 г. согласно предсказанію Уитмеля. Такимъ образомъ, само кольцо состоитъ изъ нѣсколькихъ отдѣльныхъ колецъ. Самое наружное рѣзко выдѣляется на небесномъ фонѣ, изъ чего можно заключить, что оно имѣетъ довольно большую плотность. На немъ и на второмъ, среднемъ кольцѣ часто наблюдаются различные свѣтовые оттѣнки, которые, однако, не всегда остаются постоянными. Наиболѣе замѣчательно самое внутреннее кольцо, такъ называемое „темное кольцо“. Въ отличіе отъ обоихъ наружныхъ колецъ, которыя непрозрачны и отбрасываютъ весьма яркій свѣтъ, который мало лишь уступаетъ шару планеты, „темное кольцо“ имѣетъ весьма слабый свѣтъ, такъ что сквозь него можно еще видѣть поверхность планеты.

Замѣчательна также и тѣнь, которую Сатурнъ въ опредѣленное время отбрасываетъ на кольцо. Форма тѣни доказываетъ, что поверхность кольца не можетъ быть вполнѣ плоской. Это явленіе еще недостаточно выяснено. Согласно изслѣдованіямъ д-ра Гутника (Guthnik) форма тѣни, наблюдавшейся въ 1904 г., заставляетъ предполагать, что на поверхности кольца съ сѣверной стороны въ то время должно было существовать возвышеніе; далѣе, по формѣ тѣни видно было, что это возвышеніе было особенно значительно въ серединѣ свѣтлаго кольца, и наименѣе велико у краевъ его; его можно поэтому сравнить съ полями шляпы.

Что касается поверхности самаго диска планеты, то и въ самые большіе телескопы мы видимъ на немъ лишь нѣсколько слабыхъ полосокъ красноватаго цвѣта, идущихъ параллельно экватору. Полярныя зоны, въ особености южная, имѣютъ болѣе темный оттѣнокъ, чѣмъ остальная часть диска, въ противоположность планетѣ Марсъ, на которомъ во время его зимы мы видимъ блестящія бѣлыя полярныя пятна. По описанію нѣкоторыхъ наблюдателей поверхность диска по своему виду напоминаетъ шерстяную матерію; отсюда можно вывести заключеніе о существованіи плотнаго облачного покрова.

Вслѣдствіе большого разстоянія Сатурна отъ солнца, которое составляетъ въ среднемъ 1400 милліоновъ километровъ, мы не можемъ, несмотря на большіе размѣры планеты, діаметръ которой въ 9 разъ превышаетъ діаметръ земли, различить на ея поверхности отдѣльныя подробности; такимъ образомъ, важнѣйшимъ объектомъ наблюденія остается система колецъ.

Что касается этой послѣдней, то еще въ 1705 г. парижскій астрономъ Ж. Кассини высказалъ предположеніе, что кольцо состоитъ изъ роя очень малыхъ тѣлъ; позднѣйшія изслѣдованія подтвердили это предположеніе. Основываясь на такъ называемой теоріи возмущеній, можно было непосредственно доказать, что ни твердое ни жидкое кольцо не могли бы долго существовать. Относящіяся сюда изслѣдованія были начаты впервые въ 1851 г. Бондомъ (G. P. Bond); позже въ этой области работали Максвеллъ и Гирнъ, а новѣйшія работы Зейлигера (H. Seeliger) и другихъ окончательно подтвердили правильность теоріи. Съ другой стороны, спектроскопическія наблюденія доставили новое прямое доказательство: они показали, что внутреннія части кольца движутся быстрѣе наружныхъ, что̀ возможно лишь въ томъ случаѣ, если кольцо составлено изъ отдѣльныхъ частицъ. Если бы оно вращалось, какъ одно цѣлое, то наружныя части, напротивъ, должны были бы двигаться быстрѣе внутреннихъ, такъ какъ за одинаковое время онѣ должны были бы пройти болѣе длинную дугу.

Сатурнъ замѣчателенъ еще тѣмъ, что онъ имѣетъ десять лунъ; большинство ихъ настолько слабо освѣщены, что могутъ быть видимы лишь съ помощью самыхъ сильныхъ оптическихъ средствъ. Единственный спутникъ, видимый и въ меньшіе телескопы, это упомянутый уже нами Титанъ, имѣющій яркость звѣзды восьмой величины. Двѣ луны, открытыя позже другихъ, найдены были въ самое послѣднее время лишь фотографическимъ путемъ: по своей яркости онѣ стоятъ еще на самой границѣ того, что доступно самымъ большимъ и сильнымъ телескопамъ. Возможно, что существуютъ еще и другіе подобные спутники, которые чрезвычайно трудно открыть вслѣдствіе ихъ малой яркости. Можно надѣяться, что фотографическому методу, который оказался столь счастливымъ во многихъ другихъ задачахъ, удастся преодолѣть и эти трудности.

О разложеніи въ ряды функцій sin x и cos x.

Е. Григорьева.

Возможность составленія таблицъ натуральныхъ тригонометрическихъ функцій основываютъ въ элементарной тригонометріи обыкновенно на двухъ неравенствахъ:

$$\sin x < x \quad \text{и} \quad \sin x > x - \frac{x^3}{4},$$

изъ которыхъ первое выводится при помощи нѣкоторыхъ геометрическихъ соображеній, а второе представляетъ слѣдствіе перваго.

Существуютъ элементарные пріемы, позволяющіе это второе неравенство замѣнить нѣсколько болѣе точнымъ:

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6}.$$

Напримѣръ, намъ приходилось встрѣчать доказательства, основанныя на формулахъ:

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \quad \text{и} \quad \lim_{n=\infty} \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}.$$

Съ той же цѣлью можно употреблять болѣе простую формулу:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x.$$

Пріемы эти доступны обобщенію. Цѣль нашей замѣтки показать, какъ, исходя изъ неравенства

$$\sin x < x \tag{1}$$

и пользуясь формулами:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x, \tag{2}$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x, \tag{3}$$

можно получить при условіи $0 < x \leqq 2\pi$ сколько угодно членовъ извѣстныхъ разложеній въ ряды функцій $\sin x$ и $\cos x$.

Замѣняя въ правой части равенства (2) $\sin x$ черезъ x, мы обращаемъ его въ неравенство:

$$\cos 2x > 1 - 2x^2,$$

откуда послѣ подстановки $\frac{x}{2}$ вмѣсто x имѣемъ:

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2!} \tag{4}$$

Формула (3) можетъ быть представлена въ видѣ:

$$\frac{1}{2}\sin 2x = \sin x - \sin x(1 - \cos x), \tag{5}$$

но неравенства (1) и (4) даютъ:

$$\sin x(1 - \cos x) < x \cdot \frac{x^2}{2!}$$

или, что то же самое,

$$\sin x(1 - \cos x) < (2^2 - 1)\frac{x^3}{3!}.$$

Вслѣдствіе этого равенство (5) переходитъ въ неравенство:

$$\frac{1}{2}\sin 2x > \sin x - (2^2 - 1)\frac{x^3}{3!}. \tag{6}$$

Замѣняя здѣсь x послѣдовательно черезъ $\frac{x}{2}, \frac{x}{2^2} \cdots \frac{x}{2^n}$, имѣемъ:

$$\frac{1}{2}\sin x > \sin\frac{x}{2} - (2^2-1)\frac{x^3}{3!}\cdot\frac{1}{2^3},$$

$$\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} > \sin\frac{x}{2^2} - (2^2-1)\frac{x^3}{3!}\cdot\frac{1}{2^6},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2^{n-1}} > \sin\frac{x}{2^n} - (2^2-1)\frac{x^3}{3!}\cdot\frac{1}{2^{3n}}.$$

Умножая теперь эти неравенства по порядку, начиная съ (6), на 1, 2, $2^2 \ldots 2^n$ и складывая, получаемъ послѣ удаленія изъ обѣихъ частей равныхъ членовъ:

$$\frac{1}{2}\sin 2x > 2^n\sin\frac{x}{2^n} - (2^2-1)\frac{x^3}{3!}\cdot S_1, \tag{7}$$

гдѣ

$$S_1 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{2n}},$$

или послѣ раздѣленія обѣихъ частей неравенства (7) на x имѣемъ:

$$\frac{\sin 2x}{2x} > \frac{2^n\sin\frac{x}{2^n}}{x} - (2^2-1)\frac{x^2}{3!}\cdot S_1. \tag{8}$$

Пусть теперь n неопредѣленно возрастаетъ; извѣстно въ такомъ случаѣ, что

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{2^n\sin\frac{x}{2^n}}{x}\right| = \lim_{n=\infty}\left|\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\left(\frac{x}{2^n}\right)}\right| = 1$$

$$\text{и } \lim S_1 = \frac{2^2}{2^2-1};$$

послѣ чего неравенство (8) даетъ:

$$\frac{\sin 2x}{2x} > 1 - \frac{2^2x^2}{3!},$$

или, измѣняя x въ $\frac{x}{2}$:

$$\sin x > x - \frac{x^3}{3!}. \tag{9}$$

Отсюда можно получить новое неравенство для функціи $\cos x$.

Изъ формулы (2) посредствомъ неравенства (9) имѣемъ:

$$\cos 2x < 1 - 2\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2 \tag{10}$$

Для того, чтобы обнаружить общій пріемъ, лежащій въ основѣ вывода, послѣднее возвышеніе въ квадратъ сдѣлаемъ, умножая двучленъ на самого себя, слѣдующимъ образомъ:

$$\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}\right)\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}\right)=\frac{x^2}{1!1!}-\left[\frac{1}{1!3!}+\frac{1}{3!1!}\right]x^4+\frac{x^6}{3!3!},$$

откуда посредствомъ извѣстнаго соотношенія

$$\frac{1}{k!m!}=\frac{C_{m+k}^k}{(m+k)!}, \tag{11}$$

гдѣ C_{m+k}^k есть символъ числа сочетаній, имѣемъ:

$$\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}\right)^2=C_2^1\frac{x^2}{2!}-(C_4^1+C_4^3)\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{3!3!}.$$

Но замѣчая, что послѣдній членъ здѣсь положителенъ и что по свойству коэффиціентовъ бинома Ньютона $C_2^1=2$, $C_4^1+C_4^3=2^3$, находимъ:

$$\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}\right)^2>\frac{2x^2}{2!}-\frac{2^3x^4}{4!}.$$

Вслѣдствіе этого неравенство (10) даетъ:

$$\cos 2x<1-\frac{2^2x^2}{2!}+\frac{2^4x^4}{4!}$$

или, замѣняя x черезъ $\frac{x}{2}$, получаемъ:

$$\cos x<1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}. \tag{12}$$

Обращаемся снова къ формулѣ (5). Пользуясь неравенствами (9) и (12), имѣемъ:

$$\sin x\,(1-\cos x)>\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}\right)\left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}\right).$$

Умноженіе, показанное здѣсь въ правой части, совершимъ, какъ и выше, не дѣлая приведенія, а вынося степени x за скобки въ членахъ одного измѣренія:

$$\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}\right)\left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}\right)=\frac{x^3}{1!2!}-\left[\frac{1}{1!4!}+\frac{1}{3!2!}\right]x^5+\frac{x^7}{3!4!}.$$

Пользуясь опять формулой (11), представляемъ послѣднее выраженіе въ видѣ:

$$C_3^1\frac{x^3}{3!}-[C_5^1+C_5^3]\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{3!4!}.$$

Замѣчая, что послѣдній членъ положителенъ, находимъ:

$$\sin x\,(1-\cos x) > (2^2-1)\frac{x^3}{3!}-(2^4-1)\frac{x^5}{5!},$$

такъ какъ $C_3^1+1=2^2$ и $C_5^1+C_5^3+1=2^4$.

Вслѣдствіе послѣдняго неравенства формула (5) даетъ:

$$\frac{1}{2}\sin 2x < \sin x-(2^2-1)\frac{x^3}{3!}+(2^4-1)\frac{x^5}{5!}\cdot \tag{13}$$

— неравенство, аналогичное (6), но имѣющее одинъ лишній членъ въ правой части. Совершая надъ этимъ неравенствомъ (13) тотъ же рядъ операцій, который мы примѣняли къ неравенству (6), т. е. замѣняя въ немъ x послѣдовательно черезъ $\frac{x}{2}, \frac{x}{2^2}, \ldots, \frac{x}{2^n}$ и складывая полученныя неравенства послѣ умноженія ихъ по порядку на $1, 2, 2^2, \ldots, 2^n$, получимъ подобно неравенству (8):

$$\frac{\sin 2x}{2x} < \frac{2^n \sin\frac{x}{2^n}}{x}-(2^2-1)\frac{x^2}{3!}S_1+(2^4-1)\frac{x^4}{5!}S_2, \tag{14}$$

гдѣ S_1 имѣетъ прежнее значеніе, а $S_2=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^8}+\cdots+\frac{1}{2^{4n}}\cdot$

Переходя къ предѣлу при $n=\infty$ и замѣчая, что $\lim S_2=\frac{2^4}{2^4-1}$, находимъ:

$$\frac{\sin 2x}{2x} < 1-\frac{2^2x^2}{3!}+\frac{2^4x^4}{5!},$$

или послѣ подстановки $\frac{x}{2}$ вмѣсто x:

$$\sin x < x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cdot \tag{15}$$

Выведемъ еще по одному неравенству для $\cos x$ и $\sin x$. Изъ формулы (2) при помощи неравенства (15) имѣемъ:

$$\cos 2x > 1-2\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\right)^2$$

Возвышеніе въ квадратъ дѣлаемъ посредствомъ умноженія многочлена на самого себя слѣдующимъ образомъ:

$$\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\right)^2=\frac{x^2}{1!1!}-\left(\frac{1}{1!3!}+\frac{1}{3!1!}\right)x^4+\left(\frac{1}{1!5!}+\frac{1}{3!3!}+\frac{1}{5!1!}\right)x^6-$$
$$-\left(\frac{1}{3!5!}+\frac{1}{5!3!}\right)x^8+\frac{x^{10}}{5!5!}, \tag{16}$$

или, пользуясь формулой (11) и замѣчая, что алгебраическая сумма двухъ послѣднихъ членовъ при $x \leqslant 2\pi$ представляетъ величину отрицательную, получаемъ:

$$\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)^2 < C_2^1 \frac{x^2}{2!} - (C_4^1 + C_4^3)\frac{x^4}{4!} + (C_6^1 + C_6^3 + C_6^5)\frac{x^6}{6!};$$

слѣдовательно,

$$\cos 2x > 1 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \frac{2^6 x^6}{6!},$$

откуда

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}. \tag{17}$$

Составимъ при помощи неравенствъ (15) и (17) произведенiе:

$$\sin x\,(1 - \cos x) < \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)\left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!}\right). \tag{18}$$

Совершая умноженiе въ правой части послѣдняго неравенства, находимъ:

$$\frac{x^3}{1!2!} - \left(\frac{1}{1!4!} + \frac{1}{3!2!}\right)x^5 + \left(\frac{1}{1!6!} + \frac{1}{3!4!} + \frac{1}{5!2!}\right)x^7 - \left(\frac{1}{3!6!} + \frac{1}{5!4!}\right)x^9 + \frac{x^{11}}{5!6!}.$$

Пользуясь здѣсь свойствами символа C_{m+k}^k и принимая во вниманiе, что алгебраическая сумма двухъ послѣднихъ членовъ при $x \leqslant 2\pi$ есть величина отрицательная, получаемъ:

$$\sin x\,(1 - \cos x) < (2^2 - 1)\frac{x^3}{3!} - (2^4 \quad 1)\frac{x^5}{5!} + (2^6 - 1)\frac{x^7}{7!}.$$

Слѣдовательно, по формулѣ (5) имѣемъ:

$$\frac{1}{2}\sin 2x > \sin x - (2^2 - 1)\frac{x^3}{3!} + (2^4 - 1)\frac{x^5}{5!} - (2^6 - 1)\frac{x^7}{7!},$$

— неравенство, аналогичное (6) и (13). Поэтому послѣ ряда операцiй, который примѣнялся нами къ неравенствамъ (6) и (13), найдемъ подобно неравенству (14):

$$\frac{\sin 2x}{2x} > \frac{2^n \sin \frac{x}{2^n}}{x} - (2^2 - 1)\frac{x^2}{3!}S_1 + (2^4 - 1)\frac{x^4}{5!}S_2 - (2^6 - 1)\frac{x^6}{7!}S_3,$$

гдѣ $S_3 = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^{12}} + \cdots + \frac{1}{2^{6n}}$, или, переходя къ предѣлу, получаемъ послѣ замѣны x черезъ $\frac{x}{2}$:

$$\sin x > x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}. \tag{19}$$

Отсюда можно было вывести новое неравенство для функцiи $\cos x$, затѣмъ слѣдующее для $\sin x$ и т. д. Если бы мы желали обобщить предлагаемый здѣсь выводъ, то слѣдовало бы предположить существованіе неравенства, составленнаго по тому же закону, какъ и неравенство (19), но содержащее въ правой части n членовъ; изъ него, возвышая въ квадратъ, подобно неравенству (16), и сохраняя n первыхъ членовъ, получили бы неравенство съ $n+1$ членами для $\cos x$, а отсюда посредствомъ умноженія, сходнаго съ тѣмъ, которое мы примѣняли къ неравенству (18), нашли бы неравенство для $\sin x$, содержащее $n+1$ членовъ. При этомъ пришлось бы въ общей формѣ сдѣлать два умноженія многочленовъ, упростить полученныя произведенія, пользуясь свойствами символа C^k_{m+k}, и показать, что, сохраняя въ произведеніяхъ первые n членовъ, мы отбрасываемъ знакоперемѣнную сумму, значеніе которой при $x \leqslant 2\pi$ будетъ вполнѣ опредѣленнаго знака, благодаря чему неравенства, содержащія эти произведенія, усиливаются. Все это послѣ того, что изложено выше, дѣлается безъ затрудненія въ самой общей формѣ.

Приведемъ одинъ примѣръ примѣненія на практикѣ доказанныхъ неравенствъ. Сравнивая неравенства (9) и (15) находимъ, что, если принять, что

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6}, \tag{20}$$

то допускаемая при этомъ ошибка $\delta < \dfrac{x^5}{120}$.

Пусть надо вычислить $\sin 1^0$. Тогда, выражая въ радіанахъ 1^0, имѣемъ:

$$\sin 1^0 = \frac{\pi}{180} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3.$$

Но $\dfrac{\pi}{180} = 0,\ 01745329252$ и $\left(\dfrac{\pi}{180}\right)^3 = 0,\ 0000053\,1658$; поэтому

$$\sin 1^0 = 0,\ 0174524064,$$

при чемъ всѣ 10 десятичныхъ знаковъ вѣрны. Дѣйствительно,

$$\delta < \frac{\pi^5}{120\,.\,180^5};$$

пользуясь здѣсь неравенствомъ $\pi^5 < 320$, такъ какъ $\pi < \sqrt{10} < 3,2$, имѣемъ:

$$\delta < \frac{320}{120\,.\,180^5}, \text{ или } \delta < \frac{1}{7\,.\,10^{10}}.$$

Отсюда также видно, что формулу (20) можно примѣнять до 10^0, если довольствоваться точностью до 5 десятичныхъ знаковъ, ибо въ этомъ случаѣ $\delta < \dfrac{1}{7\,.\,10^5}$.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Полоній. Г-жа Кюри (Curie) и Дебьернъ (Debierne) сообщили о результатахъ предпринятаго ими совмѣстнаго изслѣдованія радіоактивнаго элемента полонія, открытаго супругами Кюри еще одновременно съ радіемъ. Полоній содержится въ томъ же минералѣ, смоляной обманкѣ, который является источникомъ для полученія радія. Но если уже радій въ этой урановой рудѣ находится въ ничтожномъ количествѣ, то полонія въ ней еще несравнимо меньше. Полоній, какъ полагаютъ въ настоящее время, есть продуктъ распаденія радія, т. е. одно изъ тѣхъ тѣлъ, которыя послѣдовательно образуются изъ радія (такъ же, какъ радій, въ свою очередь, образуется изъ открытаго недавно Больтвудомъ (Boltwood) іонія, а іоній — изъ урана). Въ урановой рудѣ всѣ послѣдовательные продукты въ цѣпи этого разложенія урана находятся въ равновѣсіи. Это значитъ, что количество каждаго изъ нихъ, находящееся въ рудѣ, остается постояннымъ. Образуется, напримѣръ, столько же радія изъ урана (черезъ промежуточный членъ — іоній), сколько одновременно распадается на дальнѣйшіе продукты. Точно такъ же и полоній одновременно распадается и образуется вновь, при чемъ потеря отъ разложенія какъ разъ возмѣщается новообразованіемъ. Отсюда слѣдуетъ, что въ данной рудѣ количество урана опредѣляетъ количество всѣхъ другихъ содержащихся въ ней же радіоактивныхъ продуктовъ разложенія урана. А изъ количества радія (въ свою очередь, зависимаго отъ количества урана) можно заранѣе опредѣлить, сколько минералъ можетъ содержать полонія. Для этого только требуется знать время распаденія какъ радія, такъ и полонія. Радій распадается на половину своего первоначальнаго количества въ теченіе болѣе тысячи лѣтъ, а полоній — въ теченіе всего 140 дней. Распавшаяся въ теченіе 140 дней половина всего количества полонія въ то же время, какъ указано, возмѣщается отъ разложенія радія. Но разложеніе радія въ 140 дней совсѣмъ ничтожно. Слѣдовательно, возмѣщаемая „половина всего количества полонія" должна быть очень мала. Равновѣсіе должно установиться при количествѣ полонія, очень маломъ по сравненію съ количествомъ радія. По разсчету въ одной тоннѣ смоляной обманки, содержащей 0,2 *гр.* радія, находится всего 0,04 *мг.* полонія. Изъ этихъ количественныхъ данныхъ уже ясно, какую трудную задачу поставили себѣ г-жа Кюри и Дебьернъ, когда они приступили къ выдѣленію по возможности чистаго полонія изъ смоляной обманки. Изъ нѣсколькихъ тоннъ этого минерала путемъ продолжительной химической обработки имъ удалось выдѣлить 2 *мг.* вещества, обладающаго концентрированной радіоактивностью, но, конечно, не чистаго полонія. Препаратъ содержитъ золото, платину, ртуть, палладій, радій, иридій, и полонія въ немъ, должно быть, лишь около 0,1 *мг.*, т. е. 5%. Но для дальнѣйшей очистки уже не нашлось химической реакціи, которая отдѣляла бы полоній отъ всѣхъ или отъ нѣкоторыхъ изъ перечисленныхъ металловъ. Все же и этотъ 5%-ный препаратъ полонія представляетъ выдающійся интересъ, такъ какъ онъ впервые даетъ возможность подробнѣе изучить это вещество, относительно элементарнаго характера котораго еще существовали сомнѣнія. Количество его въ препаратѣ должно быть вполнѣ достаточно для опредѣленія его спектра. Дѣйствительно, г-жа Кюри и Дебьернъ въ спектрѣ своего препарата нашли помимо линій перечисленныхъ металловъ еще 7 линій неизвѣстнаго происхожденія, изъ которыхъ, какъ они полагаютъ, по крайней мѣрѣ, 4 надо приписать полонію. (Остальныя три линіи съ нѣкоторой натяжкой можно, пожалуй, объяснить, какъ линіи уже извѣстныхъ элементовъ). Если это дѣйствительно такъ, то въ распоряженіи изслѣдователей имѣется отличный способъ провѣрки, благодаря сравнительно быстрому распаденію полонія. Вѣдь въ теченіе 140 дней уже половина первоначальнаго количества полонія въ препаратѣ должна распасться; слѣдовательно, черезъ достаточно долгій промежутокъ времени эти спектральныя линіи, если онѣ дѣйствительно характерны для полонія, должны значительно ослабѣть и, въ концѣ концовъ, исчезнуть. Г-жа Кюри и Дебьернъ такъ и заявляютъ о своемъ намѣреніи изслѣдовать спектръ препарата вторично послѣ распаденія полонія.

Это изслѣдованiе можетъ дать крайне интересный результатъ и въ другомъ отношенiи. Полонiй въ цѣпи извѣстныхъ намъ продуктовъ разложенiя радiя помѣщается у самаго конца. Можно предполагать, что, разлагаясь въ свою очередь, онъ уже даетъ неактивный, обыкновенный элементъ, думаютъ - свинецъ. Линiи свинца имѣются уже въ первоначальномъ спектрѣ препарата, но въ очень слабомъ видѣ. Если свинецъ образуется изъ полонiя, то черезъ полгода, черезъ годъ и т. д. эти линiи должны становиться все ярче Это было бы самое блестящее подтвержденiе теорiи превращенiя элементовъ. Вотъ какiя чудеса намъ сулитъ, можетъ быть, крошечный двухмиллиграммный препаратъ г-жи Кюри. Единственнымъ строго установленнымъ случаемъ образованiя элементовъ до сихъ поръ остается образованiе гелiя изъ эманацiи радiя, найденное впервые Рамзаемъ. Г-жѣ Кюри и Дебьерну удалось получить гелiй также изъ полонiя. И здѣсь частицы α-лучей, въ изобилiи испускаемыхъ полонiемъ, суть не что иное, какъ заряженные положительнымъ электричествомъ атомы гелiя. Въ теченiе 100 дней было собрано количество гелiя, равное 1,3 *кб. мм.* при атмосферномъ давленiи.

А. Iоллосъ.

РЕЦЕНЗIИ.

М. В. Пономаренко. *Физика.* Ученiе о движенiи электричества въ связи съ первоначальными свѣдѣнiями объ электрическомъ потенцiалѣ (гальванизмъ). Выпускъ I. Для среднихъ учебныхъ заведенiй и для лицъ, готовящихся къ конкурснымъ испытанiямъ. Москва. 1910. IV+104 стр. Цѣна 50 коп.

Книжка г. Пономаренко вызываетъ по прочтенiи весьма большое недоумѣнiе; очень трудно понять, для какой цѣли она предназначена. Она не можетъ служить учебникомъ для средней школы, такъ какъ изложенiе по своей сжатости совершенно недоступно для учениковъ; книгу г. Пономаренко можетъ понять только тотъ, кто уже знакомъ, по крайней мѣрѣ, съ гимназическимъ курсомъ гальванизма. Кромѣ того, представляется очень страннымъ, что учебникъ физики начинается съ гальванизма и что продолженiемъ служитъ отдѣлъ о движенiи и силахъ и о теплотѣ (Выпускъ II; см. обложку). Не можетъ книга г. Пономаренко служить для болѣе подробнаго усвоенiя курса учениками, интересующимися физикой, такъ какъ матерiала въ ней значительно меньше, чѣмъ въ любомъ гимназическомъ учебникѣ физики, хотя бы Краевича. По изложенiю она скорѣе всего походитъ на конспектъ, какъ это можно было бы также заключить изъ указанiя на обложкѣ: „для лицъ, готовящихся къ конкурснымъ испытанiямъ". Но во-первыхъ разсматриваемая книга не является конспектомъ къ какому-либо учебнику, а во-вторыхъ въ ней, какъ указано, слишкомъ мало матерiала для того, чтобы пользующiеся ею могли выдержать экзамены. Наконецъ, недоумѣнiе еще усиливается отъ указанiя автора на стр. 18: см. физику проф. Хвольсона. Для того, кто пользуется курсомъ проф. Хвольсона (хотя бы и краткимъ), книжка г. Пономаренко безусловно безполезна.

Переходя къ самой книгѣ, слѣдуетъ указать, что въ ней встрѣчается не малое количество ошибокъ и неточностей. На стр. 8 имѣется слѣдующее опредѣленiе работы: „если сила, приложенная къ какому-нибудь тѣлу, заставляетъ его перемѣщаться, то такой процессъ называется механической работой".

Авторъ иногда смѣшиваетъ работу съ мощностью. Такъ, напримѣръ, на стр. 9 сказано: „единица работы равна 75 *кгм.* въ 1 секунду". На стр. 47 читаемъ: „энергiя элемента, выраженная въ уаттахъ", вмѣсто джауляхъ. Та же ошибка повторяется на стр. 78—79.

Глава о потенцiалѣ (стр. 18) изложена неудачно. „Необходимость познакомиться" съ потенцiаломъ ставится въ зависимость отъ „недостаточной общности" закона Кулона; само понятіе потенціала не выясняется, а дается только опредѣленіе.

На стр. 29 авторъ говоритъ: „когда металлъ прикасается къ химически дѣйствующей на него жидкости, то металлъ электризуется отрицательно, а жидкость положительно", а на стр. 30 указывается безъ всякихъ поясненій: „*Zn,* прикасаясь къ кислотѣ, заряжается отрицательно, а кислота и вмѣстѣ съ ней *Cu* — положительно". (Примѣчаніе къ этой фразѣ также ничего не выясняетъ).

На стр. 31 читаемъ: „элементъ непрерывно работаетъ до тѣхъ поръ, пока внутри его происходитъ химическій процессъ", а на стр. 35 авторъ самъ указываетъ на существованіе поляризаціоннаго тока и его дѣйствіе.

На стр. 33 утверждается, будто „растворы кислотъ лучше проводятъ токъ, чѣмъ растворы солей".

Приведенное на стр. 41 уравненіе химической реакціи, происходящей въ элементѣ Лекланше, невѣрно. На той же страницѣ сказано, что этотъ элементъ употребляется для звонковъ и для случаевъ „открытой цѣпи", но что надо понимать подъ послѣднимъ выраженіемъ, не пояснено.

Въ статьѣ о примѣненіи закона Ома къ батареямъ (стр. 44) не указывается, когда каждое изъ разсматриваемыхъ соединеній является выгоднымъ.

Рисунокъ 30 на стр. 51 неправиленъ, такъ какъ силовая линія не можетъ имѣть указаннаго направленія.

На стр. 51 авторъ, разсматривая прямолинейный токъ, указываетъ, что силовыя линіи имѣютъ видъ концентрическихъ окружностей, но на стр. 52 и 82 онъ неправильно утверждаетъ это относительно всякаго тока.

На стр. 52 неправильно сказано, что при дѣйствіи тока магнитная стрѣлка „можетъ прійти въ равновѣсіе только при перпендикулярномъ положеніи ея къ направленію тока"; между тѣмъ на стр. 58 положеніе равновѣсія магнитной стрѣлки въ гальваноскопѣ опредѣлено правильно.

Для объясненія электролиза авторъ приводитъ устарѣвшую гипотезу Гротхуса (стр. 73).

Книжка г. Пономаренко напечатана крайне небрежно. Помимо большого количества обыкновенныхъ типографскихъ опечатокъ, представляется вѣроятнымъ, что авторъ не читалъ корректуры; въ противномъ случаѣ трудно объяснить такіе опечатки: граммъ вездѣ сокращенъ въ *gm.* вмѣсто *gr.* Рядъ Вольты (стр. 28) и всѣ преобразованія пишутся въ такомъ родѣ: $Zn\,[Fe = Zn]$ $Pb + Pb\ [Sn + Sn]\ Fe$. Одно и то же примѣчаніе къ стр. 30 напечатано въ видѣ двухъ отдѣльныхъ примѣчаній къ стр. 30 и 31. Электродвижущая сила напечатана по французски такъ (стр. 33): „la force èlèctrometrice", сопротивленіе (стр. 34) — resistence. Ѣдкій натръ обозначенъ на стр. 68 формулой *NaHQ*.

М. Л.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей приватъ-доцента **Е. Л. Буницкаго.**

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 264 (5 сер.) На данномъ отрѣзкѣ BC построенъ треугольникъ ABC съ даннымъ угломъ A при вершинѣ. Отъ точекъ B и C на сторонахъ BA и CA отложены отрѣзки $BD = m$ и $CE = n$. Опредѣлить геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія прямыхъ, соединяющихъ середины противоположныхъ сторонъ четырехугольника $BDEC$.

Е. Григорьевъ (Саратовъ).

№ 265 (5 сер.). Найти сумму n членовъ ряда

$$\operatorname{arctg}\frac{2}{1^2}+\operatorname{arctg}\frac{2}{2^2}+\operatorname{arctg}\frac{2}{3^2}+\cdots+\operatorname{arctg}\frac{2}{n^2}+\cdots$$

Л. Богдановичъ (Ярославль).

№ 266 (5 сер.). Доказать, что

$$\operatorname{tg}^2 A\,.\operatorname{tg}^2 B\,.\operatorname{tg}^2 C=$$

$$=\frac{1}{abc}\left(\frac{c}{\cos B}+\frac{b}{\cos C}-a\right)\left(\frac{a}{\cos C}+\frac{c}{\cos A}-b\right)\left(\frac{b}{\cos A}+\frac{a}{\cos B}-c\right),$$

гдѣ a, b, c, A, B, C — стороны и соотвѣтственно противолежащіе углы нѣкотораго треугольника.

А. Радевъ (Ботево, Болгарія).

№ 267 (5 сер.). Въ выпукломъ четырехугольникѣ $ABCD$ діагонали AC и BD образуютъ со сторонами восемь угловъ, которые мы обозначимъ въ круговомъ порядкѣ черезъ α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6, α_7, α_8. Доказать, что

$$\sin\alpha_1\,.\sin\alpha_3\,.\sin\alpha_5\,.\sin\alpha_7=\sin\alpha_2\,.\sin\alpha_4\,.\sin\alpha_6\,.\sin\alpha_8.$$

Я. Назаревскій (Харьковъ).

№ 268 (5 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^{4,5m}-7x^{3m}+16x^{1,5m}-12=0.$$

В. Тюнинъ (Уфа).

№ 269 (5 сер.). Рѣшить неравенство

$$2(2x+1)>3\sqrt{-x^2-x+6}.$$

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 180 (5 сер.). *Доказать слѣдующую теорему: если нѣкоторую точку* A *окружности соединить съ вершинами* $A_1, A_2\ldots, A_{2n+1}$ *вписаннаго въ нее правильнаго многоугольника съ нечетнымъ числомъ сторонъ, то сумма*

$$AA_2+AA_4+\ldots+AA_{2n}$$

хордъ четнаго порядка равна суммѣ

$$AA_1+AA_3+\ldots+AA_{2n+1}$$

хордъ нечетнаго порядка.

Пусть точка A лежитъ на дугѣ $A_{2n+1}A_1$ (меньшей полуокружности); строго говоря, это слѣдовало бы добавить въ условіи задачи, въ противномъ же случаѣ мы предположимъ, что, оставляя за собой право нумеровать вершины многоугольника послѣдовательно, начиная съ любой вершины, мы перенумеруемъ ихъ именно такъ, чтобы точка A лежала на дугѣ $A_{2n+1}A_1$. Замѣчая, что $\smile A_k A_{k+1} = \frac{2\pi}{2n+1}$ $(k = 1,\ 2, \ldots 2n+1$, при чемъ вмѣсто $2n+2$ надо положить указатель равнымъ 1), называя дугу $\frac{2\pi}{2n+1}$ черезъ $2a$ и обозначая дугу AA_1 черезъ $2x$, имѣемъ:

$$\smile AA_1 = 2x, \quad \smile AA_2 = 2x + 2a, \quad \smile AA_3 = 2x + 4a, \ldots,$$
$$\smile AA_k = 2x + 2(k-1)a, \ldots, \quad \smile AA_{2n+1} = 2x + 4na.$$

Тогда вообще $AA_k = 2r \sin \frac{2x + 2(k-1)a}{2} = 2r \sin [x + (k-1)a]$, гдѣ r — радіусъ круга, въ который вписанъ правильный многоугольникъ. Такимъ образомъ,

$$AA_2 + AA_4 + \ldots + AA_{2n} = 2r[\sin(x+a) + \sin(x+3a) + \ldots + \sin(x+(2n-1)a)], \quad (1)$$

$$AA_1 + AA_3 + \ldots + AA_{2n+1} = 2r[\sin x + \sin(x+2a) + \ldots + \sin(x+2na)]. \quad (2$$

Сложивъ тожества (ср. рѣшеніе задачи № 126 въ № 491—492 „Вѣстника“)

$$\cos\left(a - \frac{b}{2}\right) - \cos\left(a + \frac{b}{2}\right) = 2 \sin \frac{b}{2} \sin a,$$

$$\cos\left(a + \frac{b}{2}\right) - \cos\left(a + \frac{3b}{2}\right) = 2 \sin \frac{b}{2} \sin (a + b),$$

$$\cos\left(a + \frac{3b}{2}\right) - \cos\left(a + \frac{5b}{2}\right) = 2 \sin \frac{b}{2} \sin (a + 2b),$$

. . . .

$$\cos\left[a + \left(m - \frac{3}{2}\right) b\right] - \cos\left[a + \left(m - \frac{1}{2}\right) b\right] = 2 \sin \frac{b}{2} \sin[a + (m-1) b]$$

и раздѣливъ обѣ части на $\sin \frac{b}{2}$, находимъ:

$$\sin a + \sin (a+b) + \ldots + \sin [a + (m-1) b] =$$

$$= \frac{\cos\left(a - \frac{b}{2}\right) - \cos\left[a + \left(m - \frac{1}{2}\right) b\right]}{\sin \frac{b}{2}} = \frac{\sin \frac{mb}{2} \sin\left[a + \frac{(m-1)b}{2}\right]}{\sin \frac{b}{2}} \quad (3)$$

Полагая въ формулѣ (3) $a = x$, $b = 2a$, $m = n + 1$, а затѣмъ $a = x + a$, $b = 2a$, $m = n$, получимъ [см. (1), (2)]:

$$AA_2 + AA_4 + \ldots + AA_{2n} = 2r \frac{\sin (n+1) a \sin (x + na)}{\sin a}, \quad (4)$$

$$AA_1 + AA_3 + \ldots + AA_{2n+1} = 2r \frac{\sin na \sin [x + a + (n-1)a]}{\sin a} =$$

$$= 2r \frac{\sin na \sin (x + na)}{\sin a}. \quad (5)$$

Такъ какъ $(n+1)\alpha + n\alpha = (2n+1)\alpha = (2n+1)\frac{\pi}{2n+1} = \pi$, то $\sin(n+1)\alpha = \sin n\alpha$, а потому [см. (1), (2), (4), (5)]

$$AA_2 + AA_4 + \ldots + AA_{2n} = AA_1 + AA_3 + \ldots + AA_{2n+1}.$$

Н. Казариновъ (Пинега); *В. Богомоловъ* (Шацкъ); *Л. Богдановичъ* (Ярославль).

№ 187 (5 сер.). *Найти* maximum *и* minimum *выраженія* y − 2x *при условіи* $16y^2 + 36x^2 = 9$.

Полагая $y - 2x = z$, имѣемъ: $2x = y - z$. Подставляя значеніе $2x$ въ данное условіе, имѣемъ:

$$16y^2 + 9(2x)^2 = 16y^2 + 9(y - z)^2 = 9,$$

или

$$16y^2 + 9y^2 - 18yz + 9z^2 - 9 = 0, \quad 25y^2 - 18yz + 9z^2 - 9 = 0.$$

Прибавляя и вычитая по $\left(\frac{9}{5}z\right)^2$, можно представить послѣднее равенство въ видѣ:

$$(5y)^2 - 2(5y)\cdot\frac{9}{5}z + \left(\frac{9}{5}z\right)^2 - \frac{81}{25}z^2 + 9z^2 - 9 = \left(5y + \frac{9}{5}z\right)^2 + \left(\frac{144}{25}z^2 - 9\right) = 0,$$

$$\text{откуда} \quad \frac{144}{25}z^2 - 9 = -\left(5y + \frac{9}{5}z\right)^2 \leqq 0.$$

Итакъ, $\frac{144}{25}z^2 - 9 \leqq 0$, откуда $\frac{16}{25}z^2 - 1 \leqq 0$, т. е. $\left(\frac{4}{5}z\right)^2 \leqq 1$, $z^2 \leqq \left(\frac{5}{4}\right)^2$. Слѣдовательно, при наличности даннаго намъ условія, всѣ вещественныя значенія z лежать въ промежуткѣ между $\left(-\frac{5}{4}\right)$ и $\frac{5}{4}$. Полагая $z = y - 2x = \frac{5}{4}$ и рѣшая это уравненіе совмѣстно съ уравненіемъ $16y^2 + 36x^2 = 9$, находимъ, что эта система удовлетворяется при $x = -\frac{2}{5}$, $y = \frac{9}{20}$; наоборотъ, при $x = \frac{2}{5}$, $y = -\frac{9}{20}$, имѣемъ: $z = y - 2x = -\frac{5}{4}$, $16y^2 + 36x^2 = 9$. Такимъ образомъ, z можетъ принимать значенія $\left(-\frac{5}{4}\right)$ и $\frac{5}{4}$, а всѣ остальныя его значенія лежатъ между $\left(-\frac{5}{4}\right)$ и $\frac{5}{4}$; другими словами, значенія $\left(-\frac{5}{4}\right)$ и $\frac{5}{4}$ суть соотвѣтственно minimum и maximum z.

Л. Богдановичъ (Ярославль); *Н. С.* (Одесса).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

А. П. ОХИТОВИЧЪ. Геометрія круга (Циклометрія).

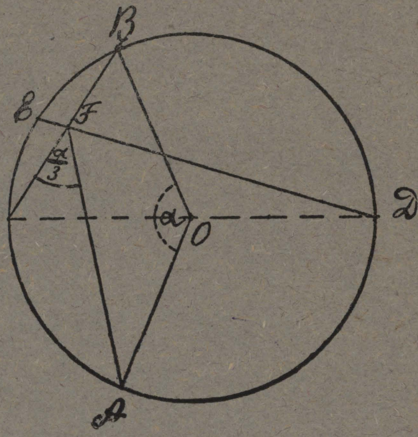
Рѣшеніе проблемы о геометрическомъ раздѣленіи дуги и угла на части пропорціональныя и равныя. Казань, 1908 г. Стр. XI+114+6=131. Цѣна 1 руб.

А. П. ОХИТОВИЧЪ. Новый (неопредѣленный) методъ рѣшенія алгебраическихъ уравненій. Ч. І-я.

Общее рѣшеніе уравненій первой степени: неопредѣленныхъ и опредѣленныхъ. Казань, 1900 г. 333 стр. Цѣна 2 р. 50 к.

Обращаться въ книжные магазины:

„Новаго Времени" (СПБ., Москва, Харьковъ, Саратовъ, Одесса), Н. Н. Карбасникова (СПБ., Москва, Варшава, Вильна), А. А. Дубровина (Казань), „Общественная Польза" (СПБ.), Оглоблина (Кіевъ), Т-ва Сытина (Москва), „Трудъ" (Москва). „Сотрудникъ Школъ" (Москва), Бельке (Кіевъ), „Товарищества" (Самара), „Волжанинъ" (Самара) и др.



$\smile AC = \smile CB$; $\smile AD = \smile DB$; $\smile CE = \smile EB$.

Открыта подписка на 1910 г. (XXI г.) на журналъ

„ВОПРОСЫ ФИЛОСОФІИ и ПСИХОЛОГІИ".

Изданіе Московскаго Психологическ. О-ва, при содѣйствіи
С.-ПЕТЕРБУРГСКАГО ФИЛОСОВСКАГО О-ВА.

Вышла 1-я (январь—февраль) книга 1910 г. Ея содержаніе: Философія исторіи Гегеля. **В. И. Герье**. Этика Д. Юма. 1. Психологическія предпосылки этики, **Н. Д. Виноградова**. Ученія софистовъ о естественномъ правѣ, **П. И. Новгородцева**. Понятія права и силы, **И. А. Ильина**. Душевныя способности какъ основныя біологическія функціи, **А. Ф. Лазурскаго**. Критика и библіографія. Библіографическій листокъ. Извѣстія и замѣтки. Московское Психологическое Общество.

Журналъ выходитъ **пять** разъ въ годъ (приблизительно въ концѣ февраля, апрѣля, іюня, октября и декабря). Книгами около 15 печатн. листовъ.

Условія подписки: на годъ (съ 1-го января 1910 г. по 1-е января 1911 г.) безъ доставки—**6 р.**, съ доставкей въ Москвѣ—**6 р. 50 к.**, съ пересылкой въ другіе города—**7 р.**, за границу—**8 р.**

Учащіеся въ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ, сельскіе учителя и сельскіе священники пользуются **скидкой** въ **2 руб**. Подписка на **льготныхъ условіяхъ** принимается **только** въ конторѣ журнала: Москва, Б. Никитская, б. Чернышевскій пер.. д. 9, кв. 5, и книжн. магаз. Нов. Времени, Карбасникова, Вольфа, Отоблина, Башмакова и др.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

Выходитъ 24 раза въ годъ отдѣльными выпусками, не менѣе 24 стр. каждый,

подъ редакціей приватъ-доцента В. Ф. Кагана.

ПРОГРАММА ЖУРНАЛА: Оригинальныя и переводныя статьи изъ области физики и элементарной математики. Статьи, посвященныя вопросамъ преподаванія математики и физики. Опыты и приборы. Научная хроника. Разныя извѣстія. Математическія мелочи. Темы для сотрудниковъ. Задачи для рѣшенія. Рѣшенія предложенныхъ задачъ съ фамиліями рѣшившихъ. Упражненія для учениковъ. Задачи на премію. Библіографическій отдѣлъ: обзоръ спеціальныхъ журналовъ; замѣтки и рецензіи о новыхъ книгахъ.

Статьи составляются настолько популярно, насколько это возможно безъ ущерба для научной стороны дѣла.

Предыдущіе семестры были **рекомендованы**: Учен. Ком. Мин. Нар. Пр. для гимн. муж. и жен., реальн. уч., прогимн., город. уч., учит. инст. и семинарій; Главн. Упр. Воен.-Учебн. Зав.—для воен.-уч. заведеній; Учен. Ком. при Св. Синодѣ — для дух. семинарій и училищъ.

Пробный номеръ высылается БЕЗПЛАТНО по первому требованію.

Важнѣйшія статьи, помѣщенныя въ 1909 г.

41-ый семестръ.

Проф. *Ф. Клейнъ.* Лекціи по ариѳметикѣ для учителей.—Проф. *В. Рамзай.* Благородные и радіоактивные газы.—Прив.-доц. *В. Каганъ.* О безконечно удаленныхъ элементахъ въ геометріи.—Проф. *А. Слаби.* Безпроволочный телефонъ.—*А. Филипповъ.* О періодическихъ дробяхъ.—*А. Мюллеръ.* Новое предложеніе о кругѣ.—*Анри Пуанкарэ.* Математическое творчество.—*П. Зееманъ.* Происхожденіе цвѣтовъ спектра.—*В. Гернетъ.* Объ единствѣ вещества.—*С. Ньюкомъ.* Теорія движенія луны.—*В. Ритцъ.* Линейные спектры и строеніе атомовъ.—*А. Кирилловъ.* Къ геометріи треугольника.—Проф. *Дж. Перри.* Преподаваніе математики въ связи съ преподаваніемъ естественныхъ наукъ.—*Э. Наннэи.* О нѣкоторыхъ замѣчательныхъ плоскихъ кривыхъ.—*Э. Борель.* Методъ работы Пуанкаре.—Литература великой теоремы Ферматa.

42-ой семестръ.

М. Зиминъ. Приближенное вычисленіе корней квадратнаго уравненія.—*П. В. Шепелевъ.* Объ изложеніи основныхъ понятій и законовъ механики.—*Э. Пикаръ.* Успѣхи динамическаго воздухоплаванія.—Проф. *Ф. Содди.* Отецъ радія.—*К. Граффъ.* Комета Галлея и ея предстоящее возвращеніе.—*А. Долговъ.* О построеніи нитяныхъ моделей многогранниковъ Пуансо.—Проф. *Ф. Содди.* Къ вопросу о происхожденіи радія.—Прив.-доц. *В. Каганъ.* Что такое алгебра?—Проф. *К. Делтеръ.* Искусственные драгоцѣнные камни.—*Л. Видеманъ.* По поводу новаго объясненія твердости тѣлъ.—Проф. *Г. Кайзеръ.* Современное развитіе спектроскопіи.—Новое сообщеніе проф. Рамзая о превращеніи химическихъ элементовъ.—*Д. Ефремовъ.* О четырехугольникахъ.—*А. Пугаченко.* Приближенное дѣленіе угла на *n* равныхъ частей при помощи циркуля и линейки.—Опыты проф. І. І. Косоногова по изслѣдованію электролиза при помощи ультра-микроскопа.—Проф. *А. Беккеръ.* Сжиженіе газовъ.

Условія подписки:

Подписная цѣна съ пересылкой: за годъ **6 руб.**, за полгода **3 руб.** Учителя и учительницы низшихъ училищъ и всѣ учащіеся, выписывающіе журналъ **непосредственно изъ конторы редакціи**, платятъ за годъ **4 руб.**, за полугодіе **2 руб.** Допускается разсрочка подписной платы по соглашенію съ конторой редакціи. Книгопродавцамъ 5% уступки.

Журналъ за прошлые годы по 2 р. 50 к., а учащимся и книгопродавцамъ по 2 р. за семестръ. **Отдѣльные номера** текущаго семестра по 30 к., прошлыхъ семестровъ по 25 коп.

Адресъ для корреспонденціи: **Одесса. Въ редакцію „Вѣстника Опытной Физики“.**