№ 613.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

Элементарной Математики,

издаваемый

В. А. ГЕРНЕТОМЪ

подъ редакцiей

Приватъ-доцента В. Ф. КАГАНА.

Второй серiи

II-го семестра № 1.

ОДЕССА

Типографiя „Техникъ“—Екатерининская, 58.

1914.

ОТКРЫТА ПОДПИСКА на 1914 г. (25-й годъ изданія).

ПРИРОДА и ЛЮДИ

ПОДПИСНОЙ ГОДЪ считается съ 1-го ноября 1913 г. по 1-ое ноября 1914 г.

52 №№ ХУДОЖЕСТВЕННО-ИЛЛЮСТРИРОВАННАГО ЖУРНАЛА

(РОМАНЫ, ПОВѢСТИ, РАЗСКАЗЫ; ОЧЕРКИ ПО ВСѢМЪ ОТРАСЛЯМЪ ЗНАНІЯ; СОВРЕМЕННАЯ ЖИЗНЬ; РАЗВЛЕЧЕНІЯ И СПОРТЪ).

БЕЗПЛАТНЫЯ ПРИЛОЖЕНІЯ: абонементъ № 1, или № 2, или № 3, по выбору г.г. подписчиковъ:

Абонементъ № 1

Цѣна этого абонем.—8 руб. съ перес.

50 КНИГЪ ПОЛНОЕ СОБРАНІЕ ИСТОРИЧЕСК. 8.400 стран. романовъ, повѣстей и разсказ.

ДАНИЛЫ ЛУКИЧА

МОРДОВЦЕВА

Сагайдачный.—Замурованная царица.—Говоръ камней.—Двѣнадцатый годъ.—Иродъ.—Царь и Гетманъ.—Господинъ Велик.Новгородъ.—Бѣглый король.—Нашъ Одиссей.—Жертвы вулкана.—Тѣни минувшаго.—За чьи грѣхи?—За всемірное владычество.—Великій расколъ.—Нильскій крокодилъ.—Романъ Александра Македонскаго.—Царь безъ царства.—Наносная бѣда.—Авантюристы.—Сидѣніе раскольниковъ.—Тимошъ.—Фанатикъ.—Державный плотникъ.—Историческ. повѣсти.—Кавказскіе курорты.—Лжедимитрій.—Послѣдніе дни Іерусалима.—Іосифъ у фараона.—Царь Петръ и правительница Софія.—Вельможная панна.—Историческіе разсказы.—Булава и бунчукъ.—Желѣзомъ и кровью.—Между Сциллой и Харибдой.—Архимандритъ-гетманъ.—Кавказскій герой.—Грустное воспоминаніе.—Наши пирамиды.—Два призрака.—Кто онъ?—Идеалисты и реалисты.—Прометеево потомство.

Абонементъ № 2

Цѣна этого абонем.—7 руб. съ перес.

20 КНИГЪ ПОЛНОЕ ИЛЛЮСТРИРОВАН. 3,200 стран. СОБРАНІЕ СОЧИНЕНІЙ

Р. Л. СТИВЕНСОНА

Островъ сокровищъ.—Два брата.—Вечернія бесѣды на островѣ.—Путешествіе внутрь страны.—Приключенія Давида Бальфура.—Катріона.—Сентъ-Ивъ.—Черная стрѣла.—Новыя арабскія ночи.—Клубъ самоубійцъ.—Бриллiантъ раджи.—Павильонъ на холмѣ.—Похитители труповъ.—Веселые ребята.—Преступникъ.—Странная исторія доктора Джекиля.—Тайна корабля.—Принцъ Отто и мн. др.

12 КНИГЪ БОГАТО ИЛЛЮСТРИРОВАННАГО 2.300 ст. ЖУРНАЛА

МІРЪ ПРИКЛЮЧЕНІЙ

12 ВЫПУСКОВЪ ХУДОЖЕСТВЕННАГО 400 иллюстрацій АЛЬБОМА

ЧУДЕСА ПРИРОДЫ

Абонементъ № 3

Цѣна этого абонем.—7 руб. съ перес.

12 КНИГЪ = общедоступныхъ = съ иллюстр. научныхъ сочиненій

БИБЛІОТЕКА ЗНАНІЯ

Исторія народовъ Балканск. полуостр.—Китай и его жизнь.—Средневѣковая Европа.—Зачатки человѣческой культуры.—Первобытное общество.—Проблемы философіи.—Происхожденіе земли.—Эволюція живыхъ организмовъ.—Эволюція растительнаго міра.—Инстинктъ и разумъ животныхъ.—Электричество.—Видимыя и невид. волны.

12 ВЫПУСК. ХУДОЖЕСТВЕН. 400 иллюстр. АЛЬБОМА

ЧУДЕСА ПРИРОДЫ

Живописная панорама диковинъ живой и мертвой природы.

Популярное описаніе замѣчательнѣйшихъ произвед. и явленій природы въ очеркахъ выдающихся ученыхъ.

Съ многочисленными рисунками съ натуры и КАРТИНАМИ ВЪ КРАСКАХЪ.

ПОДПИСНАЯ ЦѢНА: На 52 №№ журн. «Природа и Люди» съ прил. по аб. № 1 **7** РУБ. ВЪ ГОДЪ безъ дост. и пер. **8** РУБ. ВЪ ГОДЪ съ дост. и перес. На 52 №№ журн. «Природа и Люди» съ безпл. прил. по абон. № 2 или № 3 **6** РУБ. ВЪ ГОДЪ безъ дост. и пер. **7** РУБ. ВЪ ГОДЪ съ дост. и перес.

РАЗСРОЧКА ДОПУСКАЕТСЯ: при подпискѣ 3 р., къ 1 апрѣля 2 р. и къ 1 іюля остальные. Или въ теченіе первыхъ мѣсяцевъ, начиная съ ноября, по 1 руб.

ЖЕЛАЮЩІЕ МОГУТЪ *одновременно съ подпиской на любой абонементъ,* **СВЕРХЪ ТОГО**, получать, по своему выбору, *любыя приложенія* изъ другихъ абонем., но за особую плату, а именно: Полное собраніе историч. произв. Д. Л. Мордовцева 50 кн., за 6 руб.; Полное собраніе Р. Стивенсона 20 кн., за 2 р.; «Міръ Приключеній» 12 кн., за 1 р. 80 к.; «Чудеса Природы» 12 вып., за 2 р. 20 к.; «Библіотека Знанія» 12 кн., за 3 р. 80 к.

РАЗСРОЧКА ЗА ДОПЛАТНЫЯ ПРИЛОЖЕНІЯ: при выпискѣ на сумму до 3 р. слѣдуетъ уплатить при подпискѣ не менѣе одного рубля. При выпискѣ на сумму болѣе 3 руб., слѣдуетъ уплатить при подпискѣ не менѣе 2 руб. Остальная сумма, причитающаяся за доплатныя приложенія, должна быть уплачена не позднѣе 1 апрѣля.

Главная Контора: С.-Петербургъ, Стремянная ул., № 12, собств. домъ. Издатель П. П. Сойкинъ.

Второй серіи II-го семестра № 1.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

№ 613.

О раціональныхъ вписанныхъ многоугольникахъ и описанныхъ многосторонникахъ.

М. Зимина.

§ 1. Вписанный многоугольникъ будемъ называть раціональнымъ, если три какія угодно вершины его образуютъ треугольникъ, стороны котораго соизмѣримы съ радіусомъ окружности.

Вопросъ о построеніи такого многоугольника имѣетъ за собой болѣе, чѣмъ тысячелѣтнюю давность. Еще въ VII-мъ вѣкѣ по Р. Х. индусскій математикъ Брахмагупта въ сочиненіи „Брахмаспхута — сиддханта“ указалъ нѣсколько способовъ частнаго характера для построенія вписаннаго четырехугольника съ раціональными сторонами и діагоналями. Въ XVI-омъ столѣтіи тѣмъ же вопросомъ о раціональномъ четырехугольникѣ занимались нѣмецкій математикъ Іоганнъ Преторій и, по его же свидѣтельству, Симонъ Якобъ.

Въ настоящей статьѣ вопросъ о вписанномъ раціональномъ многоугольникѣ рѣшается во всей его общности. Какъ увидимъ, общій вопросъ вполнѣ сводится къ частному: къ разысканію раціональнаго вписаннаго треугольника.

§ 2. По даннымъ двумъ сторонамъ a и b треугольника ABC и радіусу R описаннаго круга третья сторона c выражается формулой*).

$$c = \frac{1}{2R} a \left(\sqrt{4R^2 - b^2} \pm b\sqrt{4R^2 - a^2}\right),$$

при чемъ знакъ $+$ относится къ тому случаю, когда центръ окружности лежитъ въ углѣ между сторонами a и b, а знакъ — къ случаю, когда центръ внѣ сказаннаго угла, въ послѣднемъ случаѣ слѣдуетъ принимать $a > b$. Для удобства діаметръ окружности $2R$ примемъ равными единицѣ, и тогда

$$c = a\sqrt{1 - b^2} \pm b\sqrt{1 - a^2}. \qquad (1)$$

Изъ формулы (1) сейчасъ же усматриваемъ, что при раціональныхъ a и b для раціональности c необходимо и достаточно, чтобы числа.

$$\sqrt{1 - a^2} \text{ и } \sqrt{1 - b^2}$$

были раціональны. Но если a и b выбраны такъ, что c раціонально, то также будетъ раціонально и число $\sqrt{1 - c^2}$, ибо сторона b черезъ a и c выразится равенствомъ, подобнымъ формулѣ (1):

$$b = a\sqrt{1 - c^2} \pm c\sqrt{1 - a^2}.$$

Итакъ, вписанный въ окружность діаметра 1 треугольникъ съ раціональными сторонами a, b, c характеризуется тѣмъ обстоятельствомъ, что числа

$$\sqrt{1 - a^2}, \quad \sqrt{1 - b^2}, \quad \sqrt{1 - c^2}$$

раціональны, при чемъ, если два изъ этихъ чиселъ раціональны, то будетъ раціонально и третье.

Добавимъ еще, что разстоянія центра до сторонъ треугольника ABC раціональны, напримѣръ, разстояніе до стороны a будетъ равно $\sqrt{1/4 - 1/4\, a^2} = 1/2\sqrt{1 - a^2}$. Площадь треугольника выразится, какъ видно изъ общей формулы $\triangle = \frac{abc}{4R}$, также числомъ раціональнымъ. Далѣе, при діаметрѣ, равномъ 1, имѣемъ $a = \sin A$, $\sqrt{1 - a^2} = \cos A$, $\frac{a}{\sqrt{1 - a^2}} = \operatorname{tg} A$, т. е., синусъ, косинусъ и тангенсъ каждаго изъ угловъ треугольника раціональны. Наконецъ, формула для радіуса вписаннаго круга $r = \frac{\triangle}{p}$ показываетъ, что этотъ радіусъ также раціоналенъ.

§ 3. Указанное свойство раціональнаго треугольника даетъ слѣдующій вполнѣ общій способъ построенія вписаннаго раціональнаго многоугольника съ любымъ числомъ вершинъ.

---

*) См., напримѣръ „Геометрію“ Киселева.

Беремъ два числа x_1 и x_2 такихъ, что корни $\sqrt{1-x_1^2}$ и $\sqrt{1-x_2^2}$ раціональны. Отъ какой-нибудь точки A_1 окружности откладываемъ двѣ хорды $A_1A_2 = x_1$ и $A_1A_3 = x_2$, тогда треугольникъ $A_1A_2A_3$ будетъ раціональнымъ, при чемъ число $\sqrt{1-\overline{A_2A_3}^2}$ будетъ также раціонально.

Беремъ третье число x_3, дающее раціональное значеніе для $\sqrt{1-x_3^2}$. Отъ одной изъ вершинъ треугольника $A_1A_2A_3$, напримѣръ, A_3 откладываемъ хорду $A_3A_4 = x_3$. По предыдущему, новая хорда A_3A_4 въ комбинаціи съ хордами $A_1A_3 = x_2$ и A_2A_3 дастъ раціональные треугольники, а потому весь четырехугольникъ $A_1A_2A_3A_4$ будетъ раціональнымъ, будутъ также раціональными и числа $\sqrt{1-\overline{A_4A_2}^2}$ и $\sqrt{1-\overline{A_4A_1}^2}$.

Снова беремъ число x_4, при которомъ $\sqrt{1-x_4^2}$ раціонально. Отъ одной изъ вершинъ A_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ откладываемъ хорду $A_1A_5 = x_4$. Комбинаціи этой хорды съ тремя другими хордами, выходящими изъ той же вершины A_i, дадутъ снова раціональные треугольники, а, слѣдовательно, весь пятиугольникъ $A_1A_2A_3A_4A_5$ будетъ раціональнымъ.

Продолжая тотъ же пріемъ, можемъ построить раціональный многоугольникъ съ какимъ угодно числомъ вершинъ. Всѣ стороны и діагонали его могутъ быть найдены послѣдовательнымъ примѣненіемъ формулы (1).

Въ частности можно поступать такъ. Построивъ по x_1 и x_2 треугольникъ $A_1A_2A_3$, за x_3 принять меньшую изъ сторонъ треугольника $A_1A_2A_3$, за x_4 — меньшую изъ сторонъ и діагоналей четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$, и т. д.

Изъ сказаннаго въ предыдущемъ § о раціональномъ треугольникѣ слѣдуетъ, что въ раціональномъ вписанномъ многоугольникѣ: 1) разстояніе центра до каждой хорды раціонально; 2) вписанный уголъ, опирающійся на хорду (или половина соотвѣтствующаго центральнаго), имѣетъ раціональные синусъ, косинусъ и тангенсъ; 3) площадь всего вписаннаго многоугольника выражается числомъ раціональнымъ.

§ 4. Теперь нужно указать пріемъ нахожденія положительныхъ раціональныхъ чиселъ x, для которыхъ $\sqrt{1-x^2}$ будетъ раціонально. Изъ тождества

$$\sqrt{1-x^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = 1-x$$

видно, что числа $\sqrt{1-x^2}$ и $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ при раціональномъ x одновременно раціональны или ирраціональны, а потому для раціональности $\sqrt{1-x^2}$ необходимо и достаточно, чтобы было раціонально число $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$. Полагая же

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = u,$$

гдѣ u считаемъ раціональнымъ, положительнымъ и меньше 1, изъ написаннаго уравненія находимъ:

$$x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \tag{2}$$

при чемъ

$$\sqrt{1-x^2}=\frac{2u}{1+u^2}.$$

Получаемое на основанiи предыдущаго тождество

$$1=\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)^2+\left(\frac{2u}{1+u^2}\right)^2$$

показываетъ, что для x можно также принять

$$x=\frac{2u}{1+u^2}. \tag{3}$$

Рѣшенiе той же формы (3) можетъ быть получено, во-первыхъ (въ томъ предположенiи, что $x \neq 0$) изъ рѣшенiя (2), полагая въ немъ:

$$u=\frac{1-u_1}{1+u_1}, \quad 0<u_1<1;$$

а во-вторыхъ, полагая

$$\sqrt{1-x^2}=1-ux, \quad 0<u<1$$

и рѣшая это уравненiе относительно x, въ томъ предположенiи, что $x \neq 0$, мы пришли бы къ формулѣ (3). Такимъ образомъ, убѣждаемся, что оба рѣшенiя (2) и (3) имѣютъ одинаковую степень общности. Относительно выраженiя $\frac{2u}{1+u^2}$ не безполезно замѣтить, что при $0<u<1$ оно возрастаетъ вмѣстѣ съ u, какъ это видно изъ тождества

$$\frac{2u_1}{1+u_1{}^2}-\frac{2u_2}{1+u_2{}^2}=\frac{2(u_1-u_2)(1-u_1u_2)}{(1+u_1{}^2)(1+u_2{}^2)}.$$

Такимъ образомъ, формулы (2) или (3) при рацiональныхъ значенiяхъ u въ предѣлахъ $0<u<1$ даютъ возможность опредѣлять всевозможныя положительныя и меньшiя единицы числа $x_1, x_2, \ldots,$ при помощи которыхъ можетъ быть построенъ рацiональный вписанный многоугольникъ.

§ 5. Пусть A, B, C, A_1, B_1, C_1 будутъ шесть вершинъ вписаннаго рацiональнаго многоугольника. Прямыя AA_1, BB_1, CC_1 составляютъ треугольникъ съ рацiональными сторонами. Сказанная теорема справедлива для всякаго рацiональнаго шестиугольника независимо отъ его свойства вписуемости и вытекаетъ изъ одного свойства полнаго рацiональнаго четырехугольника, доказаннаго Куммеромъ въ статьѣ: „Über die Vierecke, deren Seiten und Diagonalen rational sind" *). Именно, въ такомъ четырехугольникѣ каждая сторона противоположною стороною дѣлится на два рацiональныхъ отрѣзка.

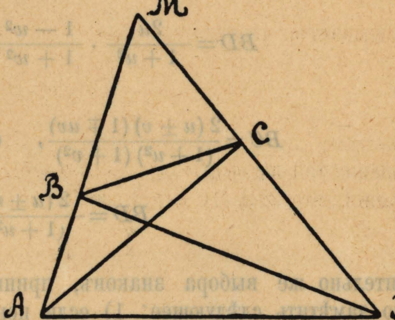
*) „Journal für die reine und angewandte Mathematik", B. 37, S. 8. Въ этой статьѣ авторъ рѣшаетъ вопросъ о произвольномъ (не вписуемомъ) рацiональномъ четырехугольникѣ.

Для доказательства разсмотримъ отрѣзки AM и BM (черт. 1), отсѣкаемые стороною CD четырехугольника $ABCD$ на AB. Имѣемъ изъ треугольниковъ ADM и BDM

$$AM = \frac{AD \sin ADC}{\sin AMD}, \quad BM = \frac{BD \sin BDC}{\sin AMD},$$

откуда, полагая $\angle ADC = \alpha$, $\angle BDC = \beta$,

$$\frac{AM}{BM} = \frac{AD}{BD} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}. \qquad (4)$$



Черт. 1.

Изъ раціональности сторонъ четырехугольника $ABCD$ вытекаетъ, что всѣ углы въ четырехъ треугольникахъ, образуемыхъ тремя изъ вершинъ A, B, C, D, имѣютъ раціональные косинусы. Такимъ образомъ, $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos(\alpha - \beta)$ раціональны. Изъ равенства

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \\ + \sin \alpha \sin \beta$$

слѣдуетъ, что $\sin \alpha \sin \beta$ раціонально, а такъ какъ $\sin^2 \beta$ тоже раціонально, то будетъ раціональнымъ и отношеніе

$$\frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin^2 \beta} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Изъ формулы (4) затѣмъ усматриваемъ, что отношеніе $AM : BM$ отрѣзковъ, а слѣдовательно, и самые отрѣзки AM и BM раціональны, что и хотѣли показать.

Если шестиугольникъ $ABCA_1B_1C_1$ раціональный, то по предыдущему прямыя BB_1 и CC_1 отсѣкаютъ на AA_1 раціональные отрѣзки, а потому отрѣзокъ между точками пересѣченія AA_1 съ BB_1 и CC_1 будетъ также раціональнымъ, откуда и слѣдуетъ раціональность сторонъ треугольника, образованнаго прямыми AA_1, BB_1 и CC_1.

§ 6. Выведемъ общія выраженія для сторонъ и діагоналей вписаннаго раціональнаго четырехугольника $ABCD$.

Для двухъ сторонъ AB и AD и діагонали AC, которыя могуть быть заданы произвольно, полагаемъ по формулѣ (3)

$$AB = \frac{2u}{1+u^2}, \quad AC = \frac{2v}{1+v^2}, \quad AD = \frac{2w}{1+w^2}, \qquad (5)$$

гдѣ u, v, w произвольныя положительныя числа, меньшія единицы, при чемъ большему изъ нихъ двухъ будетъ соотвѣтствовать большая хорда. Замѣтимъ, что

$$\sqrt{1-\overline{AB}^2}=\frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \sqrt{1-\overline{AC}^2}=\frac{1-v^2}{1+v^2}, \quad \sqrt{1-\overline{AD}^2}=\frac{1-w^2}{1+w^2}.$$

Пользуясь затѣмъ формулой (1), послѣдовательно находимъ:

$$BC=\frac{2u}{1+u^2}\cdot\frac{1-v^2}{1+v^2}\pm\frac{2v}{1+v^2}\cdot\frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad CD=\frac{2v}{1+v^2}\cdot\frac{1-w^2}{1+w^2}\pm\frac{2w}{1+w^2}\cdot\frac{1-v^2}{1+v^2},$$

$$BD=\frac{2u}{1+u^2}\cdot\frac{1-w^2}{1+w^2}\pm\frac{2w}{1+w^2}\cdot\frac{1-u^2}{1+u^2}$$

иначе

$$BC=\frac{2(u\pm v)(1\mp uv)}{(1+u^2)(1+v^2)}, \tag{6}$$
$$CD=\frac{2(v\pm w)(1\mp vw)}{(1+v^2)(1+w^2)}, \tag{7}$$

$$BD=\frac{2(u\pm w)(1\mp uw)}{(1+u^2)(1+w^2)}. \tag{8}$$

Относительно же выбора знаковъ, принимая во вниманіе сказанное въ § 2, должно замѣтить слѣдующее: 1) если центръ окружности лежитъ въ углѣ BAC, то въ формулахъ (6) и (8) беремъ верхніе знаки, въ формулѣ (7) — нижніе; 2) если центръ окружности лежитъ въ углѣ DAC, то въ формулѣ (6) беремъ нижніе знаки, въ формулахъ (7) и (8) — верхніе; 3) если центръ окружности лежитъ внѣ угла BAD, то во всѣхъ формулахъ (6, 7 и 8) беремъ нижніе знаки.

Отъ формулъ (5 — 8) дающихъ для сторонъ и діагоналей дробныя выраженія, можно перейти къ другимъ, дающимъ выраженія цѣлаго вида, умножая размѣры четырехугольника на нѣкоторое число, иначе, взявъ четырехугольникъ, подобный данному при надлежащемъ отношеніи подобія. Понятно, что діаметръ описанной окружности измѣнится въ томъ же отношеніи.

Полагая въ формулахъ (5 — 8)

$$u=\frac{\lambda}{\lambda_1}, \quad v=\frac{\mu}{\mu_1}, \quad w=\frac{\nu}{\nu_1},$$

гдѣ подъ λ, λ_1, μ, μ_1, ν, ν_1 подразумѣваются цѣлыя положительныя числа и при томъ $\lambda<\lambda_1$, $\mu<\mu_1$, $\nu<\nu_1$, получаемъ:

$$AB=\frac{2\lambda\lambda_1}{\lambda^2+\lambda_1^2}, \quad AC=\frac{2\mu\mu_1}{\mu^2+\mu_1^2}, \quad AD=\frac{2\nu\nu_1}{\nu^2+\nu_1^2},$$

$$BC=\frac{2(\lambda\mu_1\pm\lambda_1\mu)(\lambda_1\mu_1\mp\lambda\mu)}{(\lambda^2+\lambda_1^2)(\mu^2+\mu_1^2)}, \quad CD=\frac{2(\mu\nu_1\pm\mu_1\nu)(\mu_1\nu_1\mp\mu\nu)}{(\mu^2+\mu_1^2)(\nu^2+\nu_1^2)},$$

$$BD=\frac{2(\lambda\nu_1\pm\lambda_1\nu)(\lambda_1\nu_1\mp\lambda\nu)}{(\lambda^2+\lambda_1^2)(\nu^2+\nu_1^2)}.$$

Умножая теперь всѣ правыя части этихъ равенствъ на

$$\frac{(\lambda^2+\lambda_1^2)(\mu^2+\mu_1^2)(\nu^2+\nu_1^2)}{2} \tag{9}$$

и сохраняя для сторонъ и діагоналей новаго четырехугольника прежнія обозначенія, получимъ выраженія цѣлаго вида:

$$\left.\begin{aligned}
AB &= \lambda\lambda_1 (\mu^2 + \mu_1^2)(\nu^2 + \nu_1^2),\\
AC &= \mu\mu_1 (\lambda^2 + \lambda_1^2)(\nu^2 + \nu_1^2),\\
AD &= \nu\nu_1 (\lambda^2 + \lambda_1^2)(\mu^2 + \mu_1^2),\\
BC &= (\lambda\mu_1 \pm \lambda_1\mu)(\lambda_1\mu_1 \mp \lambda\mu)(\nu^2 + \nu_1^2),\\
CD &= (\mu\nu_1 \pm \mu_1\nu)(\mu_1\nu_1 \mp \mu\nu)(\lambda^2 + \lambda_1^2),\\
BD &= (\lambda\nu_1 \pm \lambda_1\nu)(\lambda_1\nu_1 \mp \lambda\nu)(\mu^2 + \mu_1^2),
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

при чемъ теперь діаметръ $2R$ описанной окружности будетъ равенъ выраженію (9). Относительно двойныхъ знаковъ слѣдуетъ имѣть въ виду сдѣланное выше замѣчаніе. Формулы (10) почти одинаковы съ тѣми, которыя приводитъ Куммеръ въ указанной выше статьѣ.

Площадь четырехугольника $ABCD$ выразится слѣдующимъ образомъ. Для площадей ABC и ADC имѣемъ:

$$ABC = \frac{AB \,.\, AC \,.\, BC}{4R}, \quad ADC = \frac{AC \,.\, AD \,.\, DC}{4R}.$$

Подставляя сюда соотвѣтствующія значенія изъ формулъ (9) и (10) и складывая получимъ:

$$ABCD = \lambda\lambda_1\mu\mu_1 (\lambda\mu_1 \pm \lambda_1\mu)(\lambda_1\mu_1 \mp \lambda\mu)(\nu^2 + \nu_1^2) +$$
$$+ \mu\mu_1\nu\nu_1 (\mu\nu_1 \pm \mu_1\nu)(\mu_1\nu_1 \mp \mu\nu)(\lambda^2 + \lambda_1^2).$$

Примѣръ. Полагая въ формулахъ (5 — 8):

$$u = 1/3, \quad v = 3/11, \quad w = 1/8,$$

находимъ въ предположеніи, что центръ окружности лежитъ въ углѣ BAC (случай I).

$$AB = 3/5, \quad AC = 33/65, \quad AD = 16/65, \quad BC = 12/13, \quad CD = 7/25, \quad BD = 253/325$$

при діаметрѣ равномъ 1. Умножая всѣ числа на 325, получимъ четырехугольникъ съ цѣлыми сторонами и діагоналями:

$$AB = 195, \quad AC = 165, \quad AD = 80, \quad BC = 300, \quad CD = 91, \quad BD = 253,$$

а діаметръ теперь равняется 325. Примѣръ этотъ приводитъ Куммеръ, при чемъ авторъ получаетъ его изъ соображеній, отличныхъ отъ излагаемыхъ здѣсь. Площадь четырехугольника $ABCD$ выражается числомъ 16 698.

Принимая $u = 1/2$, $v = 3/4$, $w = 2/3$, получаемъ (при томъ же предположеніи относительно центра окружности) четырехугольникъ:

$$AB = 4/5, \quad AC = 24/25, \quad AD = 12/13, \quad BC = 4/5, \quad CD = 36/325, \quad BD = 56/65.$$

Чтобы получить четырехугольникъ со сторонами цѣлыми, достаточно умножить найденныя числа на $^{325}/_4$, и такимъ образомъ приходимъ къ четырехугольнику со сторонами:

$$AB=65,\quad AC=78,\quad AD=75,\quad BC=65,\quad CD=9,\quad BD=70$$

и діаметромъ $^{325}/_4$. Его площадь равно 2352.

---

§ 7. Переходимъ къ разысканію описаннаго раціональнаго многосторонника. Будемъ называть описанный многосторонникъ раціональнымъ, если три произвольно взятыя его прямыя образуютъ треугольникъ стороны котораго раціональны относительно радіуса.

Пусть*) a_1, b_1, c_1 будутъ три касательныя къ окружности прямыя; A, B, C — соотвѣтственно точки пересѣченія прямыхъ b_1 и c_1, c_1 и a_1, a_1 и b_1; a, b, c — длины сторонъ треугольника ABC, и наконецъ, скобками (a_1b_1), (b_1c_1), (c_1a_1) обозначимъ длины отрѣзковъ касательныхъ отъ точекъ пересѣченія прямыхъ a_1 и b_1, b_1 и c_1, c_1 и a_1 до точекъ касанія. Для радіуса r окружности будемъ имѣть двѣ формулы въ зависимости отъ положенія окружности по отношенію къ треугольнику. Если окружность вписанная, то

$$r=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p},\quad 2p=a+b+c. \tag{11}$$

Если же окружность внѣвписанная, касается стороны BC и продолженія двухъ другихъ, то

$$r=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-a}. \tag{12}$$

Теперь намъ удобнѣе будетъ принять радіусъ окружности за единицу, т. е. положить $r=1$. Соотношенія формулъ (11) и (12) тогда легко преобразуются въ слѣдующія:

$$p=(p-a)(p-b)(p-c), \tag{13}$$

$$p-a=p(p-b)(p-c). \tag{14}$$

Отрѣзки касательныхъ въ случаѣ окружности вписанной опредѣляются, какъ извѣстно, равенствами:

$$(b_1c_1)=x=p-a,\quad (c_1a_1)=y=p-b,\quad (a_1b_1)=z=p-c, \tag{15}$$

изъ которыхъ выводимъ:

$$x+y+z=p, \tag{16}$$

$$a=y+z,\quad b=z+x,\quad c=x+y. \tag{17}$$

Если же окружность внѣвписанная, тогда

$$(b_1c_1)=x=p,\quad (c_1a_1)=y=p-c,\quad (a_1b_1)=z=p-b, \tag{18}$$

---

*) Просимъ читателя сдѣлать чертежъ.

откуда

$$x-y-z=p-a, \tag{19}$$

$$a=y+z,\ \ b=x-z,\ \ c=x-y. \tag{20}$$

Изъ сопоставленія равенствъ (15) и (17) или (18) и (20) видимъ, что если стороны треугольника, образованнаго касательными a_1, b_1, c_1, раціональны, то раціональны и отрѣзки (a_1b_1), (b_1c_1), (c_1a_1) касательныхъ и обратно. Съ другой стороны при помощи соотношеній формулъ (15) и (16) или (18) и (19) уравненіе (13) въ первомъ случаѣ и (14) во второмъ случаѣ приводятся соотвѣтственно къ виду:

$$x+y+z=xyz, \tag{21}$$

$$x-y-z=xyz, \tag{22}$$

откуда видно, что при раціональности двухъ изъ чиселъ x, y, z третье тоже будетъ раціонально.

Такимъ образомъ, приходимъ къ слѣдующему выводу. Описанный треугольникъ будетъ раціональнымъ, если два какіе-либо изъ трехъ отрѣзковъ (a_1b_1), (b_1c_1), (c_1a_1) касательныхъ a_1, b_1, c_1, образующихъ треугольникъ, раціональны, при чемъ это условіе является необходимымъ и достаточнымъ.

Къ сказанному добавимъ слѣдующія замѣчанія.

Изъ формулъ (21) и (22) дѣленіемъ на x выводимъ:

$$yz=1+\frac{y+z}{x}, \qquad yz=1-\frac{y+z}{x}, \tag{23}$$

и отсюда заключаемъ, что произведеніе двухъ отрѣзковъ той стороны треугольника, на которой (а не на продолженіи ея) находится точка касанія, больше единицы въ случаѣ вписанной окружности и меньше единицы въ случаѣ внѣвписанной окружности.

Если же предположимъ, что касательная c_1 становится параллельной касательной b_1, а, слѣдовательно, вершина A уходитъ въ безконечность, то отрѣзокъ $x=(b_1c_1)$ будетъ неограниченно возрастать, и равенства (23) въ предѣлѣ дадутъ соотношеніе между двумя отрѣзками $y=(c_1a_1)$ и $z=(a_1b_1)$, опредѣляемыми на касательной a_1 параллельными касательными b_1 и c_1,, именно:

$$yz=1. \tag{24}$$

Отмѣтимъ еще, чло въ формулѣ (22), относящейся къ случаю внѣвписанной окружности, входятъ со знаками — два отрѣзка касательныхъ, составляющіе ту сторону треугольника, на которой (а не на продолженіи) находится точка касанія. Та же формула показываетъ, что отрѣзокъ x, стоящій въ лѣвой части съ знакомъ $+$, больше двухъ другихъ отрѣзковъ.

§ 8. На основаніи изложеннаго въ предыдущемъ параграфѣ для построенія раціональнаго описаннаго треугольника поступаемъ слѣдующимъ образомъ.

Къ окружности, радіусъ которой принятъ за единицу, проводимъ касательную a_1 и на ней отъ точки касанія откладываемъ раціональный отрѣзокъ, изъ конца его проводимъ вторую касательную a_2. Далѣе, отъ одной изъ двухъ точекъ касанія, напримѣръ, отъ точки касанія на a_1 откладываемъ снова раціональный отрѣзокъ и проводимъ черезъ конецъ его третью касательную a_3. По построенію отрѣзки касательныхъ (a_1a_2) и (a_1a_3) раціональны, а потому будутъ раціональными третій отрѣзокъ (a_2a_3) и стороны треугольника, образованнаго касательными.

Окружность по отношенію къ треугольнику $a_1a_2a_3$ будетъ вписанною или внѣвписанною въ зависимости отъ слѣдующихъ обстоятельствъ.

Если на касательной a_1 оба отрѣзка (a_1a_2) и (a_1a_3) отложены отъ точки касанія въ одну сторону, то окружность будетъ внѣвписанная, ибо эта точка касанія будетъ находиться на продолженіи стороны треугольника. При этомъ если $(a_1a_3) > (a_1a_2)$, то внутренняя (заключенная между вершинами треугольника) точка касанія будетъ на касательной a_2, а если $(a_1a_3) < (a_1a_2)$, то внутренняя точка касанія будетъ на касательной a_3.

Если отрѣзки (a_1a_2) и (a_1a_3) отложены по разныя стороны отъ точки касанія на a_1, то окружность будетъ вписанная при

$$(a_1a_2)(a_1a_3) > 1$$

и внѣвписанная при

$$(a_1a_2)(a_1a_3) < 1.$$

Касательная a_1 будетъ имѣть внутреннюю точку касанія.

Руководствуясь этими замѣчаніями и пользуясь формулами (21) или (22), можемъ по даннымъ отрѣзкамъ (a_1a_2) и (a_1a_3) найти отрѣзокъ (a_2a_3), а затѣмъ по формуламъ (17) или (20) найти стороны треугольника $(a_1a_2a_3)$.

§ 9. Пусть теперь данъ раціональный $(n-1)$-сторонникъ, образованный касательными $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. На одной изъ касательныхъ, напримѣръ, a_k отложимъ отъ точки касанія раціональный отрѣзокъ и изъ конца его проведемъ касательную a_n. Тогда n-сторонникъ $a_1a_2\ldots a_n$ будетъ также раціональнымъ.

Чтобы оправдать это утвержденіе, слѣдуетъ показать, что новая касательная a_n съ двумя какими-либо прежними a_2, a_3 образуетъ раціональный треугольникъ. Разсуждаемъ такъ.

Треугольникъ $a_na_ka_i$ раціональный, ибо отрѣзокъ (a_na_k) раціоналенъ по построенію, отрѣзокъ (a_ka_i) раціоналенъ по свойству $(n-1)$-сторонника $a_1a_2\ldots a_{n-1}$, слѣдовательно, отрѣзокъ (a_na_i) раціоналенъ. Съ другой стороны отрѣзокъ (a_ia_j) также раціоналенъ, и изъ раціональности отрѣзковъ (a_na_i) и (a_ia_j) вытекаетъ по предыдущему раціональность треугольника, образованнаго касательными a_n, a_i, a_j. Свойство n-сторонника $a_1a_2\ldots a_n$ доказано.

Итакъ, построивъ раціональный описанный треугольникъ $a_1a_2a_3$, откладываемъ на одной изъ касательныхъ отъ точки касанія раціональный отрѣзокъ и проводимъ черезъ конецъ его четвертую касательную a_4, получаемъ, такимъ образомъ, раціональный четырехсторонникъ $a_1a_2a_3a_4$. Откладывая снова на одной изъ четырехъ касательныхъ отъ точки касанія раціональный отрѣзокъ и проводя черезъ конецъ его новую касательную a_5, получимъ раціональный пятисторонникъ и т. д. Всѣ отрѣзки касательныхъ и стороны всѣхъ треугольниковъ находятся послѣдовательнымъ примѣненіемъ формулъ (21, 17, 22, 20).

Изъ раціональности отрѣзковъ касательныхъ многосторонника слѣдуетъ, что тангенсъ половины угла между двумя касательными есть число раціональное, ибо этотъ тангенсъ равенъ отношенію радіуса къ отрѣзку касательной. Тангенсъ половины угла между двумя радіусами, проведенными въ двѣ точки касанія, также будетъ раціональнымъ.

§ 10. Пусть $A_1 A_2 \ldots A_n$ будетъ раціональный вписанный многоугольникъ. Если въ точкахъ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ проведемъ касательныя $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то эти послѣднія составятъ раціональный многосторонникъ.

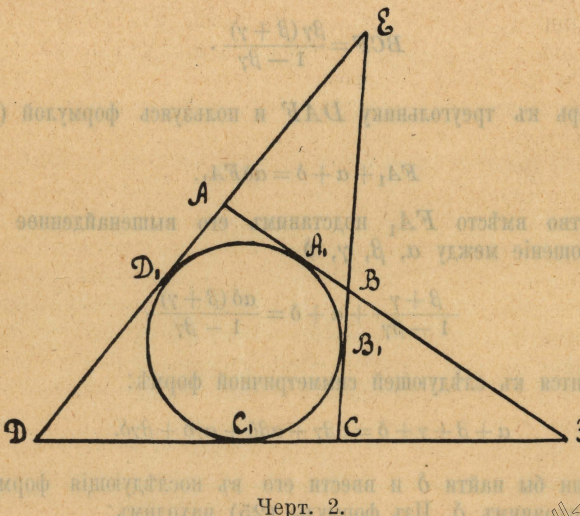
Для доказательства предположимъ, что касательныя въ A_1 и A_2 пересѣкаются въ M. Соединяя M съ центромъ O окружности, получимъ треугольникъ OA_1M, изъ котораго

$$A_0M = OA_1 \operatorname{tg} A_1OM.$$

Но было замѣчено (§ 3), что во вписанномъ раціональномъ многоугольникѣ тангенсъ половины центральнаго угла, опирающагося на хорду, раціоналенъ. Убѣждаемся, такимъ образомъ, что отрѣзки всѣхъ касательныхъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а слѣдовательно, и треугольники, составленные касательными, раціональны.

Обратное заключеніе не имѣетъ мѣста, т. е. точки касанія раціональнаго многосторонника не образуютъ, вообще говоря, раціональнаго многоугольника. Въ сказанномъ легко убѣдиться на частномъ примѣрѣ. Если въ прямоугольномъ треугольникѣ всѣ стороны раціональны, то радіусъ вписанной окружности также раціоналенъ, но отрѣзокъ, соединяющій точки касанія на катетахъ, очевидно, ирраціоналенъ.

§ 11. Въ настоящемъ параграфѣ выведемъ формулы для раціональнаго описаннаго четырехугольника.



Черт. 2.

Пусть AB, BC, CD, DA (черт. 2) будутъ четыре касательныя; A_1, B_1, C_1, D_1 — точки касанія; E и F — точки пересѣченія прямыхъ AD, BC и AB, CD. Положимъ

$$AA_1 = AD_1 = \alpha, \quad BA_1 = BB_1 = \beta, \quad CB_1 = CC_1 = \gamma, \quad DC_1 = DD_1 = \delta.$$

Изъ этихъ четырехъ отрѣзковъ три какіе-либо, напримѣръ, α, β, γ можно задать произвольно. Для треугольника ABE по формулѣ (22) имѣемъ:

$$ED_1 - \alpha - \beta = \alpha\beta ED_1,$$

откуда

$$ED_1 = \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta} = EB_1$$

и затѣмъ находимъ для сторонъ треугольника ABE

$$EA = \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta} - \alpha = \frac{\beta(1+\alpha^2)}{1-\alpha\beta}, \quad EB = \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta} - \beta = \frac{\alpha(1+\beta^2)}{1-\alpha\beta},$$

$$AB = \alpha + \beta.$$

Полупериметръ треугольника ABE равенъ ED_1, а полупериметръ безъ AB при радіусѣ окружности, принимаемомъ за единицу, дастъ площадь треугольника, такъ что

$$ABE = \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta} - (\alpha+\beta) = \frac{\alpha\beta(\alpha+\beta)}{1-\alpha\beta}.$$

Точно также для треугольника BCF найдемъ:

$$FA_1 = \frac{\beta+\gamma}{1-\beta\gamma} = FC_1, \quad FB = \frac{\gamma(1+\beta^2)}{1-\beta\gamma}, \quad FC = \frac{\beta(1+\gamma^2)}{1-\beta\gamma}, \; BC = \beta+\gamma,$$

$$BCF = \frac{\beta\gamma(\beta+\gamma)}{1-\beta\gamma}.$$

Обращаясь теперь къ треугольнику DAF и пользуясь формулой (21), будемъ имѣть:

$$FA_1 + \alpha + \delta = \alpha\delta FA_1.$$

Въ это равенство вмѣсто FA_1 подставимъ его вышенайденное выраженіе и получимъ соотношеніе между α, β, γ, δ

$$\frac{\beta+\gamma}{1-\beta\gamma} + \alpha + \delta = \frac{\alpha\delta(\beta+\gamma)}{1-\beta\gamma},$$

которое приводится къ слѣдующей симметричной формѣ:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta. \tag{26}$$

Отсюда мы могли бы найти δ и ввести его въ послѣдующія формулы, но для симметріи мы сохранимъ δ. Изъ формулы (25) находимъ:

$$FA_1 = \frac{\alpha+\delta}{\alpha\delta-1} = FC_1,$$

а затѣмъ опредѣляемъ стороны треугольника DAF:

$$FD = \frac{\alpha+\delta}{\alpha\delta-1} + \delta = \frac{\alpha(1+\delta^2)}{\alpha\delta-1}, \quad FA = \frac{\alpha+\delta}{\alpha\delta-1} + \alpha = \frac{\delta(1+\alpha^2)}{\alpha\delta-1}, \quad AD = \alpha+\delta,$$

а площадь троугольника DAF равна его полупериметру

$$DAF = \alpha + \delta + \frac{\alpha + \delta}{\alpha\delta - 1} = \frac{\alpha\delta(\alpha + \delta)}{\alpha\delta - 1}.$$

Для треугольника CDE также найдемъ:

$$ED_1 = \frac{\gamma + \delta}{\gamma\delta - 1} = EB_1, \quad EC = \frac{\delta(1 + \gamma^2)}{\gamma\delta - 1}, \quad ED = \frac{\gamma(1 + \delta^2)}{\gamma\delta - 1},$$

$$CD = \gamma + \delta, \quad CDE = \frac{\gamma\delta(\gamma + \delta)}{\gamma\delta - 1}.$$

Площадь же четырехугольника $ABCD$ равна $\alpha + \beta + \gamma + \delta$.

Такимъ образомъ стороны и площади всѣхъ четырехъ треугольниковъ выражены черезъ α, β, γ, δ, связанныя соотношеніемъ формулы (26).

§ 12. Раціональными многоугольниками и многосторонниками можно воспользоваться при составленіи формулъ для приближеннаго вычисленія π.

Пусть въ окружность діаметра I вписанъ выпуклый многоугольникъ $A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$ съ раціональными сторонами. Обозначая центральные углы A_1OA_2, $A_2OA_3, \ldots,$ $A_{n-1}OA_n$, A_nOA_1 соотвѣтственно черезъ $2\alpha_1$, $2\alpha_2, \ldots$ $2\alpha_{n-1}$, $2\alpha_n$, будемъ имѣть:

$$A_1A_2 = \sin\alpha_1, \quad A_2A_3 = \sin\alpha_2, \ldots, A_{n-1}A_n = \sin\alpha_{n-1}, \quad A_nA_1 = \sin\alpha_n,$$

откуда

$$\pi = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1} + \alpha_n =$$

$$= \arcsin A_1A_2 + \arcsin A_2A_3 + \cdots + \arcsin A_{n-1}A_n + \arcsin A_nA_1.$$

Разлагая затѣмъ стоящіе въ этой фомулѣ arc sinus'ы въ ряды по извѣстной формулѣ

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \cdots, \quad |x| \leqq |,$$

получимъ рядъ для числа π.

Діаметръ окружности можетъ быть принятъ за сторону раціональнаго многоугольника, потому что онъ удовлетворяетъ условію § 2. Предполагая, что хорда A_nA_1 есть діаметръ, будемъ имѣть, очевидно

$$\frac{\pi}{2} = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1} =$$

$$= \arcsin A_1A_2 + \arcsin A_2A_3 + \cdots + \arcsin A_{n-1}A_n. \tag{27}$$

Н а п р и м ѣ р ъ. На діаметрѣ $AB = 1$ построимъ треугольникъ ACB, подобный Пиѳагорову, съ катетами $AC = {}^3/_5$ и $CB = {}^4/_5$. Если на дугѣ CB отложимъ дугу CD, равную дугѣ AC, то для хорды BD по формулѣ (1) найдемъ, что $BD = {}^7/_{25}$, и на основаніи формулы (27) можемъ написать:

$$\frac{\pi}{2} = 2\arcsin {}^3/_5 + \arcsin {}^7/_{25}.$$

Разсмотримъ центральный уголъ $BOC=\frac{\pi}{2}$. Хорда BC при діаметрѣ, равномъ 1, выразится числомъ $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Возьмемъ на дугѣ BC точку A. По формулѣ (1) сторона $AB=c$ треугольника ABC черезъ двѣ другія $BC=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $AC=b$ выразится такъ:

$$c=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-b^2}-\frac{\sqrt{2}}{2}b=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{1-b^2}-b).$$

Изъ этой формулы не трудно усмотрѣть, что при раціональномъ b сторона c не можетъ быть раціональна независимо отъ того будетъ ли $\sqrt{1-b^2}$ раціонально или нѣтъ. Иными словами, не существуетъ треугольника ABC одна сторона котораго стягиваетъ центральный уголъ въ $\frac{\pi}{2}$, а двѣ другія раціональны. Слѣдовательно, $\frac{\pi}{4}$ не можетъ быть представлено, какъ сумма двухъ арксинусовъ отъ раціональныхъ аргументовъ.

§ 13. Обращаясь къ раціональному описанному многосторонннику, примемъ попрежнему радіусъ окружности за единицу. Пусть A_1, $A_2, \ldots$, A_n, A_{n+1} будутъ послѣдовательно расположенныя по окружности точки касанія касательныхъ a_1, $a_2, \ldots$, a_n, a_{n+1}, образующихъ раціональный многосторонникъ. Точки пересѣченія касательныхъ a_1 и a_2, a_2 и $a_3, \ldots$, a_n и a_{n+1} обозначимъ соотвѣтственно черезъ M_1, $M_2, \ldots M_n$. По свойству раціональнаго многосторонника всѣ отрѣзки $M_iA_i=M_iM_{i+1}$ $(i=1,\ 2,\ldots,\ n)$ раціональны. Обозначимъ центральные углы A_1OA_2, $A_2OA_3, \ldots$, A_nOA_{n+1} соотвѣтственно черезъ $2\alpha_1$, $2\alpha_2, \ldots$, $2\alpha_n$. Тогда

$$\operatorname{tg}\alpha_1=M_1A_1,\quad \operatorname{tg}\alpha_2=M_2A_2,\ldots,\operatorname{tg}\alpha_n=M_nA_n.$$

Называя черезъ 2ω центральный уголъ, соотвѣтствующій всей дугѣ $A_1A_2\ldots A_nA_{n+1}$, будемъ имѣть;

$$\omega=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=$$
$$=\operatorname{arc}\operatorname{tg}M_1A_1+\operatorname{arc}\operatorname{tg}M_2A_2+\cdots+\operatorname{arc}\operatorname{tg}M_nA_n.$$

Отсюда можемъ вывести формулу для приближеннаго вычисленія π, если дугу $A_1A_2\ldots A_nA_{n+1}$ выберемъ такъ, чтобы ω было нѣкоторою извѣстною частью π, а входящіе въ равенство арктангенсы разложимъ въ ряды по формулѣ

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots,\qquad |x|\leq 1.$$

Напримѣръ, можемъ предположить, что A_{n+1} совпадаетъ съ A_1, а точки M_1, $M_2, \ldots$, M_n образуютъ описанный выпуклый многоугольникъ, и тогда $\omega=\pi$. Можно также предположить, что дуга $A_1A_2\ldots A_nA_{n+1}$ представляетъ полуокружность или четверть окружности, чему соотвѣтствуютъ значенія $\omega = \frac{\pi}{2}$ и $\omega = \frac{\pi}{4}$. Но нельзя описать раціональнаго многосторонника вокругъ дуги въ $1/3$ или $1/6$ часть окружности, а также вокругъ дуги въ $1/8$ часть окружности, ибо тангенсы половинъ цнтральныхъ угловъ, соотвѣтствующихъ этимъ дугамъ, т. е., $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$ не выражаются раціональными числами. Слѣдовательно, дуги $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{8}$ не могутъ быть представлены въ видѣ суммы нѣсколькихъ арктангенсовъ отъ раціональныхъ аргументовъ.

Въ частности, треугольникъ ABC съ раціональными сторонами и радіусомъ вписанной окружности, для котораго вообще

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}, \quad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}, \quad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r}{p-c},$$

прямо даетъ

$$\frac{\pi}{2} = \operatorname{arc\,tg}\frac{r}{p-a} + \operatorname{arc\,tg}\frac{r}{p-b} + \operatorname{arc\,tg}\frac{r}{p-c},$$

при чемъ для остроугольнаго треугольника числа

$$\frac{r}{p-a}, \quad \frac{r}{p-b}, \quad \frac{r}{p-c}$$

меньше единицы.

Если треугольникъ ABC прямоугольный, то радіусъ вписанной окружности будетъ раціональнымъ при раціональности сторонъ. Принимая, напримѣръ, $A = \frac{\pi}{2}$, будемъ имѣть:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}\frac{r}{p-b} + \operatorname{arc\,tg}\frac{r}{p-c}.$$

Напримѣръ, для Пиѳагорова треугольника со сторонами 3, 4, 5 найдемъ: $r = p - a = 1$, слѣдовательно,

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}{}^1/_2 + \operatorname{arc\,tg}{}^1/_3.$$

Черт. 3.

Выведемъ еще формулу Шульца*). Взявъ дугу AB (черт. 3) въ четверть окружности, проводимъ касательныя въ A и B и точку ихъ пересѣченія обозначимъ черезъ C. На отрѣзкѣ $AC = 1$ откладываемъ $AD = {}^1/_2$ и проводимъ касательную DE, ко-

*) Ф. Рудіо. „О квадратурѣ круга". Одесса, „Mathesis" 1911, стр. 43.

торая пересѣчетъ BC въ F. По формулѣ (22) находимъ:

$$1 - {}^1/_2 - EF = {}^1/_2\, EF,$$

откуда

$$EF = {}^1/_3 = FB.$$

Далѣе, на EF откладываемъ $EG = {}^1/_5$, изъ G проводимъ касательную GH, которая FB пересѣчетъ въ K. Примѣняя ту же формулу (22), найдемъ:

$${}^1/_3 - {}^1/_5 - HK = {}^1/_3 - {}^1/_5\, HK,$$

откуда

$$HK = {}^1/_8 = KB.$$

Итакъ, для описаннаго четырехсторонника $ADGKB$ отрѣзками касательныхъ будутъ:

$$AD = DE = {}^1/_2,\quad EG = GH = {}^1/_5,\quad HK = KB = {}^1/_8,$$

и по предыдущему получимъ:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} {}^1/_2 + \operatorname{arc\,tg} {}^1/_5 + \operatorname{arc\,tg} {}^1/_8.$$

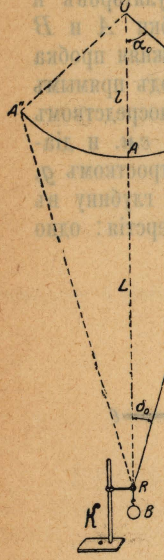
Въ заключенiе замѣтимъ, что формулы § 12 могутъ быть преобразованы въ другiя, дающiя π или $\frac{\pi}{2}$ въ видѣ суммы arc tangens'овъ рацiональныхъ аргументовъ. Въ самомъ дѣлѣ, если A_iA_{i+1} есть сторона рацiональнаго вписаннаго многоугольника, то $\sqrt{1 - \overline{A_iA_{i+1}}}$ рацiоналенъ, а

$$\operatorname{arc\,sin} A_iA_{i+1} = \operatorname{arc\,tg} \frac{A_iA_{i+1}}{\sqrt{1 - \overline{A_iA_{i+1}}^2}}.$$

Опыты и приборы.

Опытъ, обнаруживающiй зависимость между временемъ качанiя маятника и силой, дѣйствующей на него. Какъ извѣстно, всѣ законы качанiя маятника, за исключенiемъ одного, поддаются легко провѣркѣ на опытѣ въ средней школѣ; только зависимость между временемъ t качанiя маятника и величиной g, иначе говоря, зависимость между t и силой, дѣйствующей на подвѣшенную массу, не поддается опытной провѣркѣ. Какъ извѣстно, t обратно пропорцiонально корню квадратному изъ силы, дѣйствующей на подвѣшенную массу; для провѣрки этого закона K. Roland рекомендуетъ слѣдующiй опытъ.

Къ точкѣ O потолка подвѣшиваютъ нитяный маятникъ OA (фиг. 1), длина котораго l приблизительно равна 1 *м.*, и опредѣляютъ перiодъ качанiя его t; шарикъ маятника, вѣсомъ приблизительно въ 50 *гр.*, снабженъ снизу крючкомъ для подвѣшиванія другого маятника. Если бы теперь удалось увеличить въ n^2 разъ силу, дѣйствующую по отвѣсу на подвѣшенную массу, безъ измѣненія этой послѣдней, то время качанія маятника должно было бы уменьшиться въ n разъ. Съ этой цѣлью къ шарику маятника привязываютъ возможно болѣе длинную нитку *), пропускаютъ ее черезъ кольцо R штатива K, помѣщеннаго такъ, что O и R находятся на одной отвѣсной прямой, и къ концу нитки подвѣшиваютъ грузъ B, который въ n^2-1 разъ тяжелѣе груза A. Очевидно, что вѣсъ грузовъ A и B въ n^2 разъ больше вѣса A. Если разстояніе AR достаточно велико сравнительно съ l, и если амплитуда качанія A_0OA' достаточно мала, то можно принять, что нить AR во все время качанія маятника направлена отвѣсно, и что вѣсъ B прибавляется алгебраически къ вѣсу A, такъ что маятникъ качается подъ силой, въ n^2 разъ большей, чѣмъ раньше. На опытѣ получаются довольно точные результаты, при чемъ результатъ тѣмъ точнѣе, чѣмъ отношеніе $l:AR$ меньше, такъ какъ, чѣмъ меньше отношеніе $l:R$, тѣмъ меньше уголъ δ и тѣмъ, слѣдовательно, направленіе A_0R ближе къ отвѣсному. Приведемъ нѣкоторые результаты опытовъ, полученные К. Роландомъ:



Фиг. 1.

Вѣсъ A:	Вѣсъ B:	Вѣсъ A и B:	Періодъ качанія t:
50 *гр.*	0 *гр.*	50 *гр.*	$t_1 = 27/10$ *сек.*
50 *гр.*	50 . 3 *гр.*	200 *гр.*	$t_2 = 26{,}5/20$ *сек.* (приблизит.).
50 *гр.*	50 . 8 *гр.*	450 *гр.*	$t_3 = 27/30$ *сек.*
20 *гр.*	20 . 15 *гр.*	320 *гр.*	$t_4 = 13{,}5/20$ *сек.* (приблизит.).
20 *гр.*	20 . 24 *гр.*	500 *гр.*	$t_5 = 13/25$ *сек.*

И. Габеръ.

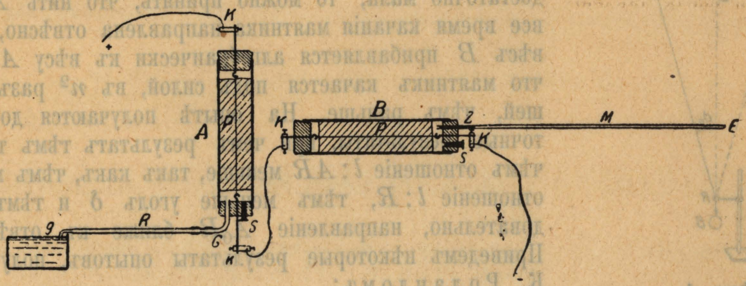
Способъ Л. Нагеля (L. Nagel) для опредѣленія отношенія C_p/C_v, годный при практическихъ занятіяхъ въ средней школѣ. Опредѣленіе отношенія удѣльной теплоемкости газа при постоянномъ давленіи къ удѣльной теплоемкости газа при постоянномъ объемѣ встрѣчаетъ въ средней школѣ большія затрудненія; между тѣмъ опредѣленіе этого отношенія весьма важно. Л. Нагель даетъ настолько простой пріемъ опредѣленія C_p/C_v, что нахожденіе этого отношенія дѣлается доступнымъ даже посредственему ученику средней школы.

Пусть A и B (фиг. 1) будутъ двѣ стеклянныя трубки длиною въ 25 *см.* и діаметромъ въ 4,5 *см.*, закрытыя съ обѣихъ сторонъ каучуковыми пробками. Черезъ средины этихъ пробокъ проходятъ куски толстой мѣдной проволоки, концы которыхъ внутри трубокъ соединены двумя тонкими платиновыми прово-

---

**) Комната должна имѣть въ вышину не меньше 4 *м.*

локами равной длины и 0,25 *мм.* въ діаметрѣ. Другіе концы проволокъ и зажимы K служатъ для послѣдовательнаго введенія платиновыхъ проволочекъ въ гальваническую цѣпь, состоящую, примѣрно, изъ четырехъ аккумуляторовъ и соотвѣтственнаго сопротивленія. Съ внѣшней стороны можно трубки A и B обложить фильтровальной бумагой для уменьшенія потери тепла. Нижняя пробка трубки A имѣетъ два отверстія; черезъ одно проходитъ согнутая подъ прямымъ угломъ стеклянная трубка G, черезъ другое штепсель S. Трубка G посредствомъ каучуковой трубки плотно соединяется съ трубкой R длиною въ 30 *см.* и діаметромъ въ 7 *мм.*, а трубка R заканчивается небольшимъ отросткомъ g, отогнутымъ подъ прямымъ угломъ и опущеннымъ на незначительную глубину въ сосудъ съ водой. Правая пробка трубки B также имѣетъ два отверстія: одно



Фиг. 1.

для штепселя S, другое для горизонтальнаго закрытаго манометра M. Манометръ M представляетъ собою трубку длиною въ 70 *см.* и діаметромъ въ 3 *мм.*; въ трубку вводится подкрашенная жидкость до нѣкоторой точки Z, послѣ чего другой конецъ запаивается или плотно закрывается каучуковой пробкой*).

Собравъ такимъ образомъ приборъ, пропустимъ въ теченіе короткаго времени черезъ цѣпь токъ силою въ 1 — 3 ампера. Количество тепла w, полученнаго каждой изъ трубокъ A и B, одинаково; но въ трубкѣ A воздухъ нагрѣвается при постоянномъ давленіи, при чемъ излишекъ воздуха выходитъ черезъ отверстіе g, въ трубкѣ же B воздухъ нагрѣвается при постоянномъ объемѣ, такъ какъ жидкая пробка передвигается maximum на 2,5 *см.*, что при незначительной толщинѣ манометрической трубки вызываетъ настолько незначительное измѣненіе объема, что имъ можно пренебречь.

Пусть температура воздуха въ A возросла на t^0 и въ B на t_1^0; тогда $C_p = \frac{w}{t}$ и $C_v = \frac{w}{t_1}$, откуда

$$\frac{C_p}{C_v} = \frac{w}{t} : \frac{w}{t_1} = \frac{t_1}{t}.$$

*) Л. Нагель рекомендуетъ устраивать жидкую пробку изъ двухъ капель (фиг. 2) для того, чтобы пробка, съ одной стороны, заполняла манометръ до лѣваго конца, съ другой стороны, треніе между жидкостью и стекломъ не было особенно велико.

Итакъ, для опредѣленія C_p/C_v нужно опредѣлить t_1 и t. Для опредѣленія t_1 достаточно опредѣлить измѣненіе давленія Δp, для чего нужно измѣрить, насколько сантиметровъ передвинулась жидкая пробка. Если p и l (фиг. 2) суть давленіе воздуха и длина манометрическаго столба воздуха до опыта, а p' и l' — послѣ опыта, то $pl = p'l'$, откуда

Фиг. 2.

$$' = \frac{pl}{l'} \text{ и } \Delta p = \frac{pl}{l'} - p.$$

Зная Δp и сведя давленіе p къ давленію p_0 при 0^0, мы изъ уравненія

$$\Delta p = p_0 a t_1$$

легко найдемъ t_1:

$$t_1 = \frac{\Delta p \,.\, 273}{p_0}.$$

Чтобы опредѣлить t, достаточно опредѣлить измѣненіе объема воздуха Δv въ трубкѣ A. Для этого дадимъ трубкѣ A остыть; тогда атмосферное давленіе вгонитъ въ трубку R воду въ объемѣ Δv. Найти этотъ объемъ можно, либо прокалибровавъ трубку R, либо выливъ черезъ штепсель S всю воду въ калиброванный сосудъ. Найдя Δv, мы изъ уравненія

$$\Delta v = v_0 a t$$

найдемъ, что

$$t = \frac{\Delta v \,.\, 273}{v_0},$$

гдѣ v_0 есть объемъ воздуха въ трубкѣ A при 0^0, каковой объемъ можетъ быть найденъ до опыта.

Для полученія по возможности точныхъ результатовъ, необходимо слѣдить за тѣмъ, 1) чтобы трубки по возможности плотно закрывались пробками; 2) чтобы для избѣжанія потери тепла нагрѣваніе длилось всего нѣсколько секундъ. Токъ силою въ 1 — 3 ампера слѣдуетъ пропускать 3 — 1 секунду; при этомъ достигается повышеніе температуры на 3 — 7° C; 3) чтобы конецъ g у трубки R былъ лишь на незначительное число миллиметровъ опущенъ подъ уровень жидкости, и чтобы конецъ этотъ былъ вообще очень малъ, такъ какъ въ противномъ случаѣ давленіе воздуха въ сосудѣ A будетъ отличаться отъ атмосфернаго давленія. Для замыканія тока слѣдуетъ пользоваться телеграфнымъ ключемъ. Особое вниманіе преподавателя должно быть обращено на немедленный отсчетъ показанія манометра.

Замѣчаніе. Намъ кажется, что для опредѣленія Δv воздуха въ трубкѣ A проще было бы помѣстить A горизонтально и вставить въ отверстіе пробки горизонтальную открытую трубку. Впустивъ въ эту трубку каплю подкрашенной жидкости такъ же, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, можно было бы по перемѣщенію капли опредѣлить Δv. Трубка можетъ быть калиброванной, но это необязательно.

И. Габеръ.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Магнитизмъ солнца. Вліяніе солнца на магнитизмъ земли извѣстно уже давно. Въ теченіе сутокъ направленіе магнитной стрѣлки испытываетъ небольшія колебанія (въ нѣсколько дуговыхъ минутъ), при чемъ въ годы съ наибольшимъ числомъ солнечныхъ пятенъ эти колебанія приблизительно вдвое болѣе велики, чѣмъ въ годы съ наименьшимъ числомъ солнечныхъ пятенъ. Кромѣ того, существуетъ тѣсная зависимость между большими солнечными пятнами, съ одной стороны, и сильными магнитными возмущеніями и сѣверными сіяніями на землѣ — съ другой. Но этого вліянія солнца отнюдь не слѣдуетъ представлять себѣ такъ, какъ будто солнце оказываетъ непосредственное магнитное дѣйствіе на разстояніе. Для того, чтобы солнце оказывало такое дѣйствіе при своемъ огромномъ разстояніи отъ земли, оно должно было бы представлять собой магнитъ колоссальной, совершенно немыслимой силы. Поэтому изслѣдователи согласно принимаютъ, что магнитная связь между солнцемъ и землей поддерживается электрически заряженными частичками, извергающимися изъ областей возмущенія солнца, преимущественно вблизи солнечныхъ пятенъ, и попадающими въ земную атмосферу, и что магнитное вліяніе солнца основано, слѣдовательно, не на дальнодѣйствіи, а на перенесеніи массъ отъ солнца къ землѣ.

Существованіе магнитныхъ силъ на самомъ солнцѣ раньше являлось совершенно гипотетическимъ. Но около четырехъ лѣтъ тому назадъ оно было доказано благодаря Гэлю (Hale), который открылъ явленіе Зеемана въ солнечныхъ пятнахъ. Какъ извѣстно, это явленіе состоитъ въ слѣдующемъ: если помѣстить натріево пламя между полюсами сильнаго магнита, то каждая спектральная линія натрія, сама по себѣ простая, расщепляется магнитнымъ полемъ на цѣлый рядъ линій, находящихся весьма близко одна отъ другой. Степень расщепленія и разстояніе между компонентами возрастаютъ пропорціонально напряженію магнитнаго поля. Гэль же открылъ, что въ спектрѣ солнечныхъ пятенъ наблюдается такое же точно размноженіе линій, какъ при земныхъ опытахъ въ магнитномъ полѣ, при чемъ всѣ детали явленія здѣсь и тамъ совпадаютъ въ такой степени, что общность причины представляется совершенно несомнѣнной. Судя по величинѣ расщепленія линій у различныхъ пятенъ, магнитное поле ихъ въ 400 — 900 разъ сильнѣе, чѣмъ магнитное поле земли.

Если бы солнце, какъ цѣлое, обладало столь сильнымъ магнитнымъ полемъ, то послѣднее должно было бы оказывать преобладающее вліяніе во всѣхъ процессахъ на поверхности солнца. Но въ дѣйствительности эти поля представляютъ собой чисто мѣстныя явленія, которыя, во-первыхъ, ограничиваются лишь солнечными пятнами и, во-вторыхъ, внутри солнечныхъ пятенъ господствуютъ только въ слояхъ совершенно опредѣленной высоты. Дѣйствительно, спектральныя линіи легкихъ газовъ, находящихся въ самыхъ верхнихъ слояхъ атмосферы, не обнаруживаютъ расщепленія даже въ областяхъ солнечныхъ пятенъ.

Въ прошломъ году изслѣдователи занялись вопросомъ, который возникъ уже раньше: не является ли солнце, какъ цѣлое, магнитомъ, конечно, не столь большой силы, какъ магнитное поле въ солнечныхъ пятнахъ. При помощи грандіозныхъ приспособленій обсерваторіи на Моунтъ-Вилсонѣ Гэль попытался разыскать слѣды явленія Зеемана внѣ солнечныхъ пятенъ, на невозмущенныхъ точкахъ солнечнаго диска. Благодаря необыкновенно малому количеству солнечныхъ пятенъ на солнцѣ, послѣднiй годъ былъ особенно благопрiятенъ для такихъ опытовъ. Результаты, полученные Гэлемъ, не стоятъ еще пока внѣ всякаго сомнѣнiя; онъ нашелъ, что на солнцѣ существуетъ, дѣйствительно, магнитное поле, которое, въ 100 разъ сильнѣе земного, и что сѣверный магнитный полюсъ солнца расположенъ на сѣверной же сторонѣ солнечнаго шара. Это поле тоже ограничено слоями совершенно опредѣленной высоты внутри солнечной атмосферы.

Въ самыхъ наружныхъ слояхъ солнечной атмосферы тоже, повидимому, существуетъ магнитное поле, но примѣрно въ миллiардъ разъ меньшей силы, чѣмъ магнитное поле земли. Шустеръ (Schuster) уже много лѣтъ тому назадъ указалъ, что лучи солнечной короны, видимой при полныхъ солнечныхъ затменiяхъ, сходны съ силовыми линiями вокругъ намагниченнаго шара. Согласно новѣйшимъ изслѣдованiямъ Деландра (Deslandres), многiя особенности формъ и движенiй протуберанецъ могутъ быть объяснены движенiями электрически заряженныхъ частичекъ въ слабомъ магнитномъ полѣ.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакцiей прив.-доц. Е. Л. Буницкаго.

Редакцiя проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшенiй задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенiя. Въ противномъ случаѣ редакцiя не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенiю нуждъ корреспондентовъ.

Редакцiя проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенiя въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшенiями, либо снабжать задачи указанiемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшенiе.

№ 195 (6 сер.). Построить треугольникъ ABC, зная положенiе центра I вписаннаго круга, центра I_a круга, внѣвписаннаго относительно стороны BC, и средины M стороны BC.

Л. Богдановичъ (Н.-Новгородъ).

№ 196 (6 сер.). Число N есть нѣкоторая степень двухъ. Найти это число, зная, что сумма всѣхъ дѣлителей числа N^2 на 2 095 104 больше суммы всѣхъ дѣлителей числа N.

Л. Закутинскiй (Черкассы).

№ 197 (6 сер.). Упростить выраженiе

$$\sqrt{1+i\sqrt{3}}+\sqrt{1-i\sqrt{3}},$$

гдѣ $i=\sqrt{-1}$.

Я. Назаревскiй (Харьковъ).

№ 198 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\frac{x+11}{2}-\frac{3x+1}{\sqrt{x-1}}=0.$$

В. Тюнинъ (Уфа).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

Отдѣлъ I.

№ 120 (6 сер.). *Построить треугольникъ, зная его основаніе* a, *проведенную къ нему медіану* m_a *и разстояніе ортоцентра отъ этой медіаны.*

Пусть O — центръ круга, описаннаго около искомаго треугольника ABC, H — его ортоцентръ, HD — перпендикуляръ опущенный изъ H на медіану AM треугольника; обозначимъ данную длину HD черезъ k. Итакъ, по условію $AM=m_a$, $BM=MC=\frac{a}{2}$, $HD=k$. Продолжимъ медіану AM до встрѣчи съ окружностью описаннаго круга въ точкѣ N. Проведемъ діаметръ AE описаннаго круга, и хорды BE, EN, EC. Такъ какъ опирающіеся на діаметръ вписанные углы ABE и ACE прямые, а BH и CH перпендикулярны соотвѣтственно къ сторонамъ AC и AB, то фигура $BHCE$ есть параллелограммъ, а потому діагональ его EH проходитъ черезъ середину M стороны BC, при чемъ $EM=MH$. Отсюда, принимая во вниманіе, что опирающійся на діаметръ AE уголъ ANE также прямой, выводимъ, что прямоугольные треугольники EMN и MHD равны по гипотенузѣ и острому углу, а потому (1) $EN=DH=k$. Съ другой стороны, (2) $AN=AM+MN$, при чемъ, по свойству хордъ, проходящихъ черезъ общую точку внутри круга $MN.AM=BM.MC$, или $MN.m_a=\frac{a^2}{4}$, откуда (3) $MN=\frac{a^2}{4m_a}$, и [см. (2), (3)] (4) $AN=m_a+\frac{a^2}{4m_a}$. Изъ равенствъ (1), (3), (4) вытекаетъ слѣдующее построеніе. Построивъ [см. (3)] MN, какъ четвертый пропорціональный къ отрѣзкамъ $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$, m_a, строимъ затѣмъ на произвольной прямой [см. (4)] сумму AN отрѣзковъ $AM=m_a$ и найденнаго отрѣзка MN; потомъ строимъ прямоугольный треугольникъ ANE по катетамъ AN и [см. (1)] $EN=k$, описываемъ изъ средины O гипотенузы AE окружность на AE, какъ на діаметрѣ, проводимъ прямую OM и изъ точки M возставляемъ перпендикуляръ къ прямой OM по обѣ ея стороны до встрѣчи съ описанной окружностью въ точкахъ B и C. Треугольникъ ABC есть искомый. Дѣйствительно, медіана его есть $AM=m_a$, основаніе его равно a, такъ какъ $AM.MN=\frac{\overline{BC}^2}{4}$, откуда [см. (3)] вытекаетъ, что $BC=a$; ортоцентръ же H отстоитъ отъ медіаны треугольника на разстояніе k, такъ какъ $EN=k$ по построенію и такъ какъ при принятыхъ обозначеніяхъ равенство [см. (1)] $DH=EN$ справедливо для всякаго треугольника. Задача всегда возможна, конечно, въ томъ предположеніи, что $m_a>0$, $a>0$; что же касается k, то k можетъ быть и больше нуля и равняться нулю (въ этомъ послѣднемъ случаѣ искомый треугольникъ равнобедренный, и рѣшеніе задачи можно упростить, строя равнобедренный треугольникъ по основанію a и высотѣ m_a).

В. Кованько (ст. Струнино); *П. Войковъ* (Женева); *Н. С.* (Одесса).

№ 153 (6 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$\frac{\sqrt[3]{48-x}-\sqrt[3]{3x-4}}{\sqrt[3]{12-x}-\sqrt[3]{3x-16}}=\sqrt[3]{\frac{13-x}{7-x}}.$$

Полагая для краткости

$$(1)\quad \sqrt[3]{48-x}-\sqrt[3]{3x-4}=u,\qquad (2)\quad \sqrt[3]{12-x}-\sqrt[3]{3x-16}=v$$

и возвышая данное для рѣшенія уравненіе почленно въ кубъ, получимъ:

$$\frac{48+4-4x-3u\sqrt[3]{(48-x)(3x-4)}}{12+16-4x-3v\sqrt[3]{(12-x)(3x-16)}}=\frac{13-x}{7-x},$$

или

$$(3)\quad \frac{4(13-x)-3u\sqrt[3]{(48-x)(3x-4)}}{4(7-x)-3v\sqrt[3]{(12-x)(3x-16)}}=\frac{13-x}{7-x}.$$

Изъ уравненія (3), въ силу извѣстной теоремы о равныхъ отношеніяхъ, вытекаетъ, что

$$\frac{4(13-x)-3u\sqrt[3]{(48-x)(3x-4)}-4(13-x)}{4(7-x)-3v\sqrt[3]{(12-x)(3x-16)}-4(7-x)}=\frac{13-x}{7-x},$$

т. е.

$$\frac{-3u\sqrt[3]{(48-x)(3x-4)}}{-3v\sqrt[3]{(12-x)(3x-16)}}=\frac{13-x}{7-x},$$

или

$$(4)\quad \frac{u\sqrt[3]{(48-x)(3x-4)}}{v\sqrt[3]{(12-x)(3x-16)}}=\frac{13-x}{7-x},$$

Замѣчая, что первоначальное уравненіе [см. (1), (2)] можно записать въ видѣ

$(5)\quad \dfrac{u}{v}=\sqrt[3]{\dfrac{13-x}{7-x}},$ выводимъ изъ уравненій (4) и (5), что

$$(6)\quad \sqrt[3]{\frac{13-x}{7-x}}\cdot\frac{\sqrt[3]{(48-x)(3x-4)}}{\sqrt[3]{(12-x)(3x-16)}}=\frac{13-x}{7-x}.$$

Возвысивъ уравненіе (6) въ кубъ, получимъ:

$$\frac{(13-x)(48-x)(3x-4)}{(7-x)(12-x)(3x-16)}=\left(\frac{13-x}{7-x}\right)^3,$$

или

$$(7)\quad \frac{13-x}{7-x}\left[\frac{(48-x)(3x-4)}{(12-x)(3x-16)}-\frac{(13-x)^2}{(7-x)^2}\right]=0.$$

Уравненіе (7) распадается на два:

$$(8)\quad \frac{13-x}{7-x}=0 \quad \text{и} \quad (9)\quad \frac{(48-x)(3x-4)}{(12-x)(3x-16)}-\frac{(13-x)^2}{(7-x)^2}=0.$$

Уравненіе (8) даетъ единственный корень (10) $x_1=13$. Уравненію же (9), послѣ раскрытія скобокъ, приведенія и перенесенія второго члена во вторую часть, можно придать видъ:

$$\frac{-3x^2+148x-192}{-3x^2+52x-192}=\frac{x^2-26x+169}{x^2-14x+49}.$$

Примѣняя къ послѣднему уравненію производную пропорцію: отношенія разностей членовъ каждаго изъ отношеній къ своему послѣдующему равны, получимъ: $\frac{96x}{-3x^2+52x-192}=\frac{-12x+120}{x^2-14x+49}$, или послѣ сокращенія на 12:

$$(11)\quad \frac{8x}{-3x^2+52x-192}=\frac{10-x}{x^2-14x+49}.$$

Уравненіе (11) послѣ освобожденія отъ знаменателей, перенесенія всѣхъ членовъ въ первую часть и приведенія принимаетъ видъ: $5x^3-30x^2-320x+1920=0$, или по сокращеніи на 5: (12) $x^3-6x^2-64x+384=0$. Уравненіе (12), послѣ представленія его послѣдовательно въ видѣ

$$x^2(x-6)-64(x-6)=0,\quad (x-6)(x^2-64)=0,$$

распадается на два: $x-6=0$, $x^2-64=0$. Рѣшая эти два уравненія, находимъ корни:

$$(13)\quad x_2=6,\quad x_{3,4}=\pm 8$$

Провѣряя четыре корня, опредѣляемые формулами (12) и (13), можно убѣдиться, что каждый изъ нихъ удовлетворяетъ предложенному уравненію въ обычномъ смыслѣ слова, т. е. что каждый изъ нихъ удовлетворяетъ предложенному уравненію, если подъ корнемъ кубичнымъ изъ вещественнаго числа подразумѣвать его вещественное значеніе.

М. Шебаршинъ (Петроградъ); *В. Кованько* (ст. Струнино); *В. Павловъ* (с. Ворсма); *В. Обуховскій* (В. Устюгъ); *В. Ревзинъ* (Сума).

Редакторъ прив.-доц. **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено военной цензурой.

Типографія „Техникъ" — Одесса, Екатерининская, 58.