Обложка
ищется

Обложка
пщется

Второй серіи II-го семестра № 10.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

№ 622.

О законѣ тождества цѣлыхъ функцій.

Прив.-доц. В. Ф. Кагана.

1. Въ статьѣ: „Ариѳметическое и алгебраическое дѣленіе“, помѣщенной въ № 596 „Вѣстника“, по поводу доказательства такъ называемой теоремы Безу (кстати сказать, называемой такъ совершенно неправильно), помѣщеннаго въ переработанномъ изданіи „Алгебры“ г. Киселева, я старался установить разницу между ариѳметическимъ и алгебраическимъ дѣленіемъ; главное я старался установить, что слѣдуетъ разумѣть подъ алгебраическимъ дѣленіемъ. Сущность дѣла заключается въ слѣдующемъ: если даны двѣ цѣлыя функціи $f(x)$ и $g(x)$, изъ которыхъ вторая не обращается тождественно въ нуль, то всегда существуетъ одна и только одна пара цѣлыхъ функцій $h(x)$ и $r(x)$, удовлетворяющихъ двумъ требованіямъ: 1) должно имѣть мѣсто тождество:

$$f(x) = g(x) \,.\, h(x) + r(x), \qquad (1)$$

2) степень функціи $r(x)$ должна быть ниже степени функціи $g(x)$, Функція $h(x)$ называется частнымъ, $r(x)$ — остаткомъ отъ дѣленія $f(x)$ на $g(x)$. Доказательство существованія и однозначности этихъ двухъ функцій составляетъ краеугольный камень ученія объ алгебраическомъ дѣленіи. Такое доказательство въ упомянутой статьѣ мною

дѣйствительно было приведено, но вторая его половина — доказательство однозначности алгебраическаго дѣленія, была основана на такъ называемомъ законѣ тождества цѣлыхъ функцій.

Въ отвѣтной замѣткѣ, помѣщенной въ № 602 „Вѣстника", г. Киселевъ указываетъ, что закономъ тождества онъ пользоваться не могъ и не можетъ, потому что онъ его не приводитъ въ элементарномъ курсѣ. Какъ теорема Безу, по поводу которой возникла эта полемика, такъ и вообще болѣе или менѣе обоснованная теорія алгебраическихъ дѣйствій излагается учащимся обыкновенно при повтореніи курса алгебры. Я считаю, что тождество (1) должно быть при этомъ установлено со всею необходимой обстоятельностью и съ достаточной строгостью. Считаю я это потому, что роль этого тождества огромна. На мой взглядъ не будетъ преувеличеніемъ сказать, что на этомъ тождествѣ построена вся алгебра. Въ самомъ дѣлѣ: на немъ покоится ученіе о разложеніи цѣлой функціи на линейныхъ и квадратичныхъ множителей, установленіе числа корней цѣлой функціи, нахожденіе общаго наибольшаго дѣлителя двухъ цѣлыхъ функцій, теорема Штурма, теорія симметрическихъ функцій. Да врядъ ли есть такая теорема алгебры, при доказательствѣ которой прямо или косвенно не пришлось бы опереться на равенство (1). И при всемъ томъ тождество это рѣдко гдѣ доказывается: въ средней школѣ — вслѣдствіе недостаточной его элементарности, — въ университетѣ — вслѣдствіе его чрезмѣрной элементарности. Руководства по элементарной алгебрѣ относятъ его къ курсу высшей алгебры, а сочиненія по высшей алгебрѣ считаютъ его извѣстнымъ изъ элементарнаго руководства. А между тѣмъ алгебра одна и дѣленіе ея на элементарную и неэлементарную чрезвычайно искусственно *).

Не менѣе важнымъ является, конечно, законъ тождества цѣлыхъ функцій которымъ приходится пользоваться при установленіи однозначности частнаго и остатка. Въ настоящей статьѣ я хочу остановиться на доказательствахъ закона тождества.

2. Законъ тождества цѣлой функціи заключается въ слѣдующемъ:

Теорема I. *Если двѣ цѣлыя функціи одной независимой перемѣнной получаютъ одинаковыя значенія при всѣхъ значеніяхъ независимой перемѣнной, то онѣ имѣютъ одинаковую степень и коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ перемѣнной равны.*

Иными словами, если равенство:

$$a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots a_{m-1}x + a_m = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n \quad (2)$$

имѣетъ мѣсто при всѣхъ значеніяхъ x, то

$$m = n \text{ и } a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \ldots, a_m = b_m. \quad (3)$$

Предложеніе въ надлежащемъ видоизмѣненіи имѣетъ мѣсто также и для цѣлой функціи нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ, но

*) См. мою статью: „Что такое алгебра". „Вѣстникъ" №№ 503, 504 и 507

это уже есть развитіе теоремы, которое опирается на установленный ранѣе основной случай.

Въ неразрывной связи съ этимъ предложеніемъ находится слѣдующее предложеніе:

Теорема II. Если цѣлая алгебраическая функція обращается въ нуль при всѣхъ значеніяхъ независимой перемѣнной, то всѣ ея коэффиціенты равны нулю.

Эти двѣ теоремы совершенно эквивалентны: изъ одной вытекаетъ другая. Въ самомъ дѣлѣ, примемъ сначала справедливость теоремы II; изъ нея тогда непосредственно вытекаетъ теорема I. Допустимъ, дѣйствительно, что тождество (2) имѣетъ мѣсто при всѣхъ значеніяхъ x. Если бы при этомъ показатели m и n не были равны, если бы, скажемъ, m было больше n, то разность между двумя полиномами, стоящими въ лѣвой и правой части равенства (2), можно было бы представить въ видѣ полинома m-той степени, старшій коэффиціентъ котораго былъ бы отличенъ отъ нуля; между тѣмъ этотъ полиномъ обращался бы въ нуль при всѣхъ значеніяхъ x. А это находится въ противорѣчіи съ принятой теоремой II; поэтому непремѣнно $m=n$. А въ такомъ случаѣ разность между тѣми же двумя полиномами представляется въ видѣ:

$$(a_0-b_0)\,x^m+(a_1-b_1)\,x^{m-1}+\cdots+(a_{m-1}-b_{m-1})\,x+a_m-b_m.$$

Такъ какъ эта разность должна обращаться въ нуль при всѣхъ значеніяхъ x, то, въ силу теоремы II, имѣютъ мѣсто равенства (3). Такимъ образомъ теорема I непосредственно вытекаетъ изъ теоремы II.

Примемъ теперь, что доказана теорема I. Въ такомъ случаѣ изъ нея непосредственно вытекаетъ теорема II. Въ самомъ дѣлѣ, если бы существовалъ полиномъ съ коэффиціентами, отличными отъ нуля, который бы тѣмъ не менѣе обращался въ нуль при всѣхъ значеніяхъ x, то, прибавивъ его къ любой цѣлой функціи $f(x)$, мы получимъ функцію $h(x)$, которая при всѣхъ значеніяхъ x принимаетъ тѣ же значенія, что и $f(x)$, но имѣетъ другіе коэффиціенты; а это находится въ противорѣчіи съ теоремой I.

3. Въ старыхъ руководствахъ алгебры очень часто можно было встрѣтить слѣдующее простое доказательство теоремы. Допустимъ, что равенство (2) имѣетъ мѣсто при всѣхъ значеніяхъ x. Положивъ $x=0$, получимъ $a_m=b_n$. Отсюда слѣдуетъ, что при всѣхъ значеніяхъ x,

$$a_0\,x^m+a_1\,x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\,x=b_0\,x^n+b_1\,x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}\,x. \qquad (4)$$

Сокративъ обѣ части этого равенства на x, получимъ:

$$a_0\,x^{m-1}+a_1\,x^{m-2}+\cdots a_{m-1}=b_0\,x^{n-1}+b_1\,x^{n-2}+\cdots+b_{n-1}. \qquad (5)$$

Положивъ здѣсь снова $x=0$, получаемъ $a_{m-1}=b_{n-1}$; затѣмъ, повторяя тотъ же пріемъ, обнаружимъ равенство всѣхъ соотвѣтственныхъ коэффиціентовъ и степеней обоихъ полиномовъ. Несостоятельность этого доказательства слишкомъ очевидна, чтобы на немъ стоило останавливаться. Оно, правда, правильно устанавливаетъ равенство коэффиціентовъ a_m и b_m и вытекающее изъ него равенство (4). Но сократить это послѣднее равенство на x возможно только въ томъ случаѣ, если x отлично отъ нуля. Изъ предыдущихъ разсужденій слѣдуетъ поэтому только, что равенство (5) имѣетъ мѣсто при всѣхъ значеніяхъ x, отличныхъ отъ нуля. Полагать здѣсь x равнымъ нулю уже нельзя и дальнѣйшіе выводы поэтому падаютъ.

То же самое разсужденіе очень часто приводится въ порядкѣ доказательства теоремы II. Именно: если равенство

$$c_0x^m + c_1x^{m-1} + \cdots + c_{m-1}\,x + c_m = 0 \tag{6}$$

имѣетъ мѣсто при всѣхъ значеніяхъ x, то, полагая въ немъ x равнымъ 0, находимъ, что $c_m = 0$ и

$$c_0x^m + c_1x^{m-1} + \cdots + c_{m-1}\,x = 0. \tag{7}$$

Сокращая это равенство на x, получаемъ:

$$c_0x^{m-1} + c_1x^{m-2} + \cdots + c_{m-1}\,x + c_{m-1} = 0. \tag{8}$$

Полагая здѣсь вновь $x = 0$, получаемъ $c_{m-1} = 0$ и т. д. Ошибка, конечно, та же самая, что и въ предыдущемъ доказательствѣ. Переходъ отъ равенства (7) къ равенству (8) допустимъ только при значеніяхъ x, отличныхъ отъ нуля. Поэтому въ равенствѣ (8) нельзя полагать x равнымъ нулю. Доказательство имѣетъ, такимъ образомъ, только одинъ слабый пунктъ: полиномъ, стоящій въ лѣвой части равенства (8), несомнѣнно обращается въ нуль при всѣхъ значеніяхъ x, отличныхъ отъ нуля. Мы на этомъ основаніи принимаемъ, что онъ обращается въ нуль и при $x = 0$.

Изъянъ этотъ, конечно, безъ труда восполняется. Исправленіе основано на двухъ теоремахъ: 1) цѣлая алгебраическая функція непрерывна при всѣхъ значеніяхъ*) независимой перемѣнной; 2) если двѣ функціи равны при всѣхъ значеніяхъ x, за исключеніемъ нѣкотораго значенія a, и если онѣ обѣ при $x = a$ непрерывны, то онѣ получаютъ одинаковыя значенія и при $x = a$.

Такъ какъ обѣ части равенства (5) представляютъ собой поэтому непрерывныя функціи, и такъ какъ онѣ равны при всѣхъ значеніяхъ x, отличныхъ отъ нуля, то онѣ равны и при $x = 0$; мы можемъ, слѣдовательно, положить въ этомъ равенствѣ $x = 0$ и дальше поступать такимъ же образомъ. Такое исправленіе доказательства имѣетъ двоякаго рода достоинство: 1) оно бьетъ, такъ сказать, непосредственно въ слабое мѣсто доказательства. Укрѣпляя этотъ слабый пунктъ, оно освобождаетъ насъ отъ необходимости отказываться отъ всего разсужнія, по существу простого и стройного; 2) въ исправленномъ видѣ доказательство примѣнимо не только къ цѣлымъ алгебраическимъ функціямъ, но и къ такимъ функціямъ, которыя выражаются безконечными степенными рядами.

Но, къ сожалѣнію, такая постановка вопроса требуетъ точнаго установленія понятія о непрерывности функціи, доказательства непре-

*) Въ данномъ случаѣ существенно лишь то, что функція непрерывна при $x = 0$.

рывности цѣлой функціи, и, что еще хуже, довольно сложнаго доказательства приведеннаго выше свойства непрерывной функціи. Нечего и говорить, что это выводитъ насъ далеко за предѣлы элементарнаго курса.

Когда рѣчь идетъ о доказательствѣ закона тождества для степенныхъ рядовъ, то этого рода разсужденій врядъ ли можно избѣгнуть. Но, если рѣчь идетъ только о цѣлыхъ алгебраическихъ функціяхъ, то доказательство закона тождества можно провести совершенно элементарно.

4. Этого можно достигнуть двояко: оставаясь, по существу дѣла, при томъ же доказательствѣ или мѣняя всю постановку вопроса. Первый путь сводится къ тому, чтобы общую идею о непрерывности функціи и свойство непрерывной функціи, о которомъ выше шла рѣчь, замѣнить болѣе простымъ элементарнымъ предложеніемъ, не отвлекающимъ насъ въ область общихъ разсужденій о функціяхъ. Очевидно, достаточно доказать слѣдующее предложеніе:

Если цѣлая алгебраическая функція обращается въ нуль при всѣхъ значеніяхъ x, отличныхъ отъ нуля, то она обращается въ нуль и при $x=0$.

Въ самомъ дѣлѣ, это предложеніе даетъ намъ право положить $x=0$ въ равенствахъ (5) и (8) и этимъ восполнить изъянъ въ доказательствѣ теоремъ I и II. Это предложеніе доказывается слѣдующимъ образомъ. Положимъ, что цѣлая функція

$$a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\cdots+a_{m-1}x+a_m$$

обращается въ нуль при всѣхъ значеніяхъ x, отличныхъ отъ нуля. Нужно доказать, что она обращается въ нуль также и при $x=0$, т. е., что $a_m=0$. Допустимъ, что a_m отлично отъ нуля. Абсолютную его величину обозначимъ черезъ A_m, и, вообще, будемъ обозначать прописными литерами абсолютныя значенія соотвѣтствующихъ коэффиціентовъ, а черезъ X обозначимъ абсолютную величину числа x. Въ такомъ случаѣ абсолютная величина суммы тѣхъ членовъ нашего полинома, которыя содержатъ x, очевидно, не превышаетъ числа

$$A_0X^m+A_1X^{m-1}+A_2X^{m-2}+\cdots+A_{m-1}X.$$

Если X есть правильная дробь, то эта величина не превышаетъ число

$$A_0X+A_1X+\cdots+A_{m-1}X=AX, \quad \text{гдѣ} \quad A=A_0+A_1+A_2+\cdots+A_{m-1}.$$

Представимъ нашъ полиномъ въ видѣ суммы двухъ слагаемыхъ

$$(a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\cdots+a_{m-1}x)+a_m,$$

и дадимъ x значеніе, абсолютная величина котораго X представляетъ собою правильную дробь, меньшую, нежели A_m/A. Въ такомъ случаѣ абсолютная величина перваго слагаемаго будетъ меньше, нежели A_m, а абсолютная величина второго слагаемаго равна A_m; но при такихъ условіяхъ значеніе всей суммы не можетъ быть равно нулю. Итакъ, если $a_m \neq 0$, то можно найти значенія x, отличныя отъ нуля, при которыхъ функція не обращается въ нуль. Если, слѣдовательно, функція обращается въ нуль при всѣхъ значеніяхъ x, отличныхъ отъ нуля, то $a_m = 0$, т. е. функція обращается въ нуль и при $x = 0$.

По существу, вопросъ этимъ совершенно исчерпанъ. Но къ нему, какъ мы уже сказали, можно подойти съ совершенно другой точки зрѣнія.

5. Какъ извѣстно, тѣ значенія функціи, которыя обращаютъ ее въ нуль, называются ея корнями. Теорема (II) утверждаетъ, что никакая цѣлая функція не можетъ имѣть своимъ корнемъ любое число; но по отношенію къ цѣлымъ алгебраическимъ функціямъ имѣетъ мѣсто предложеніе гораздо болѣе опредѣленное, съ котораго мы и можемъ начать наши разсужденія.

Теорема III. Никакая цѣлая алгебраическая функція n-ой степени не можетъ имѣть болѣе n различныхъ корней.

Доказательство этого предложенія мы поведемъ индуктивно относительно степени функціи n. Прежде всего покажемъ, что цѣлая функція 1-ой степени не можетъ имѣть двухъ различныхъ корней. Дѣйствительно, положимъ, что наша функція имѣтъ видъ $ax + b$. При этомъ коэффиціентъ a мы должны, конечно, считать отличнымъ отъ нуля: въ противномъ случаѣ это не была бы функція первой степени. Пусть α и β будутъ два различныхъ корня этой функціи. Тогда:

$$a\alpha + b = 0 \quad \text{и} \quad a\beta + b = 0, \quad \text{откуда:} \quad a(\alpha - \beta) = 0.$$

Но это равенство невозможно, такъ какъ ни одинъ изъ множителей лѣвой части его не равенъ нулю.

Примемъ теперь, что наша теорема справедлива для всякой функціи, степень которой не превышаетъ $(n-1)$. Докажемъ, что она въ такомъ случаѣ справедлива и для функціи n-ой степени, и это доказательство мы будемъ вести отъ противнаго. Допустимъ, что цѣлая алгебраическая функція n-ой степени

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \tag{9}$$

имѣетъ $n+1$ различныхъ корней

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, \mu. \tag{10}$$

Замѣтимъ, что и здѣсь мы должны старшій коэффиціентъ a_0 считать отличнымъ отъ нуля, ибо иначе это не была бы функція n-ой степени. Составимъ теперь новую функцію n-ой степени:

$$g(x) \equiv a_0 (x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\lambda). \tag{11}$$

Если мы выполнимъ здѣсь умноженіе, то оно представится въ видѣ цѣлой функціи, старшій членъ которой есть $a_0 x^n$.

Теперь составимъ еще третью функцію:

$$h(x) \equiv f(x) - g(x). \tag{12}$$

Степень функціи $h(x)$ ниже n-ой, ибо въ функціяхъ $f(x)$ и $g(x)$ старшіе члены совпадаютъ и при вычитаніи сокращаются. Съ другой стороны, разность $h(x)$ не можетъ обращаться въ нуль тождественно. Въ самомъ дѣлѣ:

$$h(\mu) = f(\mu) - g(\mu).$$

Но, по условію, μ обращаетъ функцію $f(x)$ въ нуль, а потому, согласно выраженію (11), для функціи $g(x)$:

$$h(\mu) = -a_0(\mu - \alpha)(\mu - \beta) \dots (\mu - \lambda).$$

Такъ какъ ни одинъ изъ множителей правой части не равенъ нулю, то $h(\mu)$ отлично отъ нуля. Слѣдовательно, функція $h(x)$ не обращается тождественно въ нуль, въ разности (12) нѣкоторые коэффиціенты необходимо отличны отъ нуля, и она представляетъ собою полиномъ, степень котораго ниже n.

Нетрудно, однако, доказать, что эта функція имѣетъ n различныхъ корней. Въ самомъ дѣлѣ:

$$h(\alpha) = f(\alpha) - g(\alpha); \quad h(\beta) = f(\beta) - g(\beta); \ \dots \ h(\lambda) = f(\lambda) - g(\lambda).$$

Но такъ какъ числа $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ обращаютъ въ нуль, какъ функцію $f(x)$, такъ и $g(x)$, то:

$$h(\alpha) = h(\beta) = h(\gamma) = \dots = h(\lambda) = 0.$$

Мы приходимъ, слѣдовательно, къ противорѣчію со сдѣланнымъ допущеніемъ, что наша теорема справедлива для всякой функціи, степень которой ниже n. Теорема, такимъ образомъ доказана.

6. Врядъ ли нужно говорить, что доказаннымъ предложеніемъ исчерпываются теоремы II и I. Въ самомъ дѣлѣ, если полиномъ вида (9) обращается въ нуль при всѣхъ значеніяхъ x и среди его коэффиціентовъ имѣется хотя бы одинъ, отличный отъ нуля, то онъ представляетъ собою цѣлую алгебраическую функцію, имѣющую безчисленное множество корней; а это находится въ противорѣчіи съ доказанной сейчасъ теоремой. Но существенно важно то, что теорема III даетъ больше, нежели теоремы I и II. Въ самомъ дѣлѣ, изъ нея вытекаетъ слѣдующее преоложеніе.

Теорема IV. Если двѣ цѣлыя функціи, степени которыхъ не превышаютъ m, принимаютъ одинаковыя значенія при $(m+1)$ различныхъ значеніяхъ независимой перемѣнной, то онѣ имѣютъ одинаковую степень и соотвѣтствующіе коэффиціенты равны между собой.

Длительный электрическій токъ безъ электродвижущей силы въ сверхпроводникахъ.

М. Камерлингъ-Оннеса.

Время, въ теченіе котораго продолжаетъ существовать электрическій токъ въ цѣпи послѣ прекращенія дѣйствія электродвижущей силы, въ обычныхъ случаяхъ чрезвычайно мало; для цѣпи же, составленной изъ сверхпроводниковъ, это время можетъ стать настолько большимъ, что токъ практически становится непрекращающимся. Къ такому заключенію приводитъ вычисленіе, основанное на данныхъ, полученныхъ при изученіи сверхпроводниковъ. Я подтвердилъ это заключеніе нѣсколькими опытами, которые съ своей стороны могутъ привести къ результатамъ, имѣющимъ совершенно независимое значеніе. Напомнимъ сначала установленныя уже ранѣе свойства сверхпроводниковъ.

Изучая сопротивленіе металловъ при температурахъ, которыя могутъ быть получены при помощи жидкаго гелія, я пришелъ къ заключенію, что сопротивленіе ртути будетъ еще легко измѣримо при 4,25° абсолютной шкалы, но затѣмъ будетъ уменьшаться столь быстро, что уже при 2° абсолютной шкалы сдѣлается ничтожно малымъ. На опытѣ дѣйствительно подтвердилось ничтожность сопротивленія при наименьшихъ достижимыхъ температурахъ, но вмѣстѣ съ тѣмъ обнаружился неожиданный фактъ, что сопротивленіе исчезаетъ сразу: ртуть при 4,19° абсолютной шкалы—температурѣ паденія (перехода)—прерывнымъ образомъ переходитъ въ новое состояніе, характеризующееся чрезвычайною подвижностью электричества. Съ полнымъ правомъ можно назвать это состояніе, въ которомъ можно поддерживать въ проводникѣ токи безъ замѣтной электродвижущей силы состояніемъ сверхпроводимости. Въ тонкой проволокѣ изъ ртути длиною въ 1 *м*, я при 1,7° абсолютной шкалы получалъ токи плотностью около 1000 амперъ на 1 *кв. мм.*, при чемъ на концахъ ея не могла быть обнаружена разность потенціаловъ (предѣлъ чувствительности прибора $= 0{,}03 \times 10^{-6}$ вольта) и не замѣчалось, слѣдовательно, слѣдовъ выдѣленія тепла.

Дѣля предѣльную разность потенціаловъ на силу тока, мы получимъ верхній предѣлъ того, что можно назвать микростаточнымъ сопротивленіемъ сверхпроводника. Для упомянутой проволоки это сопротивленіе оказалось порядка одной милліардной доли ея сопротивленія при обыкновенной температурѣ.

Состояніе сверхпроводимости ограничено не одною только температурою: играетъ роль также плотность тока. Для каждой температуры существуетъ предѣльная плотность тока (вѣроятно, различная для различныхъ веществъ), ниже которой на кольцахъ проводника нѣтъ замѣтной разности потенціаловъ. При превышеніи же этой плотности тока, какъ показало тщательное изслѣдованіе, въ какой нибудь части сверхпроводника возникаетъ сопротивленіе того же характера, какое возникаетъ тотчасъ, какъ только мы превышаемъ температуру перехода, и которое я называю обыкновеннымъ сопротивленіемъ.

Это обыкновенное сопротивленіе, сначала чрезвычайно слабое, вызываетъ первое появленіе разности потенціаловъ. Возрастаніе температуры отъ джоулевскаго тепла, выдѣляющагося въ этомъ мѣстѣ, быстро захватываетъ весь проводникъ, и разность потенціаловъ на его концахъ, разъ появившись, начинаетъ возрастать чрезвычайно быстро, если увеличивать силу тока до прежней величины.

Предѣльная плотность тока очень мала при температурахъ, лежащихъ лишь немного ниже переходной, но она становится весьма значительной, при болѣе низкихъ температурахъ, такъ что при наиболѣе низкихъ достижимыхъ температурахъ можно нагрузить цѣпь довольно сильными токами, не рискуя вывести ее изъ состоянія сверхпроводимости. Такія цѣпи сильно напоминаютъ собою цѣпи безъ сопротивленія, введенныя Веберомъ для объясненія діамагнитизма. При ихъ помощи можно объяснить весь тотъ обширный кругъ заключеній, къ которымъ мы придемъ, положивъ въ уравненіяхъ электродинамики сопротивленіе равнымъ безконечно малой величинѣ, или принявъ, что длина свободнаго пути электроновъ есть величина порядка 1 *м.* Но со ртутью выполненіе подобныхъ опытовъ довольно трудно. Поэтому чрезвычайно важно, что и олово и свинецъ, какъ было найдено позже, переходятъ въ состояніе сверхпроводимости. Переходная температура для олова 3,8° абсолютной шкалы, для свинца, вѣроятно, 6° абсолютной шкалы.

Чтобы изучить примѣненіе сверхпроводниковъ къ осуществленію сильныхъ магнитныхъ полей (трудность этой задачи заключается въ развитіи джоулева тепла въ очень ограниченномъ пространствѣ), я приготовилъ катушку изъ 1000 оборотовъ свинцовой проволоки съ площадью сѣченія въ $^1/_{10}$ *кв. мм.*; діаметръ оборотовъ равнялся 1 *см.* и длина всей катушки также была равна 1 *см.* По этой катушкѣ могъ проходить токъ почти въ 0,8 ампера, не нуждаясь въ электродвижущей силѣ для своего поддержанія, при чемъ выдѣленіе джоулева тепла было настолько ничтожно, что совершенно не поддавалось измѣренію. На основаніи этого я вначалѣ заключилъ, что возможно будетъ устроить, по мысли Перрэна, электромагнитъ безъ сердечника, который при незначительныхъ размѣрахъ давалъ бы поле въ 100 000 гауссовъ, не выдѣляя почти никакого джоулева тепла. Но дальнѣйшее изслѣдованіе обнаружило новое, въ высшей степени интересное свойство сверхпроводниковъ, которое дѣлаетъ невозможнымъ указанное ихъ примѣненіе. Поле, не дѣйствующее еще (на проводимость) при величинахъ, которые были получены описанною катушкою, какъ только оно перейдетъ за извѣстный предѣлъ (равный 1000 гауссамъ для свинца при 1,8° абсолютной шкалы), вызываетъ сразу появленіе обыкновеннаго сопротивленія въ сверхпроводникѣ, развивая магнитоджоулево тепло. Этотъ предѣлъ поля возрастаетъ при пониженіи температуры ниже переходной. Очевидно, при опытахъ, въ которыхъ сверхпроводники подвергаются дѣйствію магнитнаго поля (безразлично своего собственнаго или внѣшняго), необходимо оставаться всегда ниже этого предѣльнаго магнитнаго поля.

Вернемся къ нашей катушкѣ изъ свинцовой проволоки. Я воспользовался ею, чтобы показать, что въ сверхпроводникахъ электрическій токъ продолжаетъ существовать еще долгое время, послѣ прекращенія дѣйствія электродвижущей силы. Коэффиціентъ самоиндукціи нашей катушки равенъ 10^7 C. G. S. единицъ при токѣ въ 0,6 амперъ (выше 0,8 амперъ нельзя было итти, такъ какъ это превышало уже, какъ было найдено, предѣлъ тока). Электрокинетическая энергія при такомъ токѣ настолько значительна, что поглощается лишь весьма медленно, пока только въ цѣпь не введено, чтобы замкнуть ее обыкновенное сопротивленіе; такое сопротивленіе, если даже оно очень мало, поглощаетъ энергію тока весьма быстро. Полный потокъ индукціи въ полѣ величиною въ 200 гауссовъ (которое значительно меньше предѣльнаго) равенъ $0,6 . 10^6$ C. G. S. единицъ и достаточенъ, чтобы вызвать индукціонный токъ въ 0,6 ампера.

Два конца проволоки были затѣмъ спаяны при помощи водородо-кислороднаго пламени, что, по предыдущимъ опытамъ, гарантируетъ соединеніе, обладающее также характеромъ сверхпроводника. Микроостаточное сопротивленіе катушки оказалось меньше одной двадцатимилліардной доли сопротивленія при обыкновенной температурѣ (736 омовъ). Время существованія тока послѣ прекращенія электродвижущей силы, вычисленное по этимъ даннымъ (если пренебречь сопротивленіемъ спая), должно равняться нѣсколькимъ суткамъ.

Опытъ оправдалъ это вычисленіе. Катушка, помѣщенная въ кріостатъ въ соотвѣтствующемъ положеніи*), охлаждалась, находясь въ магнитномъ полѣ въ 200 гауссовъ, отъ $0°C$ до 1,8° абсолютной шкалы. Въ полученной такимъ образомъ цѣпи изъ сверхпроводника, при удаленіи магнитнаго поля, индуктировался токъ съ парамагнитнымъ моментомъ**) Стрѣлка маленькой буссоли, помѣщенной вблизи кріостата, давала сильное отклоненіе, которое мѣнялось на обратное, если катушка поворачивалась на 180° вокругъ вертикальной оси. Катушка вела себя, какъ постоянный магнитъ, или вѣрнѣе, какъ молекулярный токъ Ампера. Величина магнитнаго момента, которую я измѣрялъ, компенсируя его дѣйствіе на стрѣлку буссоли другою катушкою съ токомъ извѣстной силы, показывалъ, что въ цѣпи сверхпроводника протекалъ въ теченіе многихъ часовъ токъ, который въ различныхъ опытахъ колебался между 0,4 и 0,6 ампера. Точность измѣреній при этихъ чрезвычайныхъ условіяхъ не была большою. Она не давала возможности измѣрять ослабленіе тока съ теченіемъ времени. Можно было только указать верхній предѣлъ для этого ослабленія. Впрочемъ, было найдено ослабленіе тока одинъ разъ въ началѣ опыта и другой разъ послѣ временнаго возвращенія къ болѣе высокой температурѣ.

*) Т. е. такъ, чтобы плоскости оборотовъ пересѣкались линіями силъ магнитнаго поля.

**) Т. е. токъ одинаковаго направленія съ токомъ индуктирующимъ.

Прим. пер.

Но оставляя въ сторонѣ эти случаи, а также другія частности, которыя еще требуютъ дальнѣйшаго изслѣдованія, можно сказать, что ослабленіе тока не превышаетъ 1% въ часъ*). При выниманіи катушки изъ жидкаго гелія, какъ только она нагрѣется выше переходной температуры для свинца, явленіе мгновенно исчезаетъ.

Были произведены контрольные опыты, въ которыхъ катушка помѣщалась такъ, что плоскости ея оборотовъ были параллельны направленію поля. Вопреки ожиданію, получился эффектъ, но приблизительно въ восемь разъ болѣе слабый, чѣмъ первоначальный; кромѣ того, этотъ эффектъ получался и тогда, когда опытъ былъ повторенъ при разомкнутой цѣпи катушки сверхпроводника.

Съ катушкою, находящеюся въ первомъ положеніи (поперекъ магнитнаго поля) и все время охлаждаемою, я поступалъ еще слѣдующимъ образомъ. Прилагалось поле болѣе слабое, чѣмъ предѣльное, и черезъ нѣкоторое время удалялось. Токъ діамагнитнаго знака (обратный возбуждающему), возбуждаемый первою операціею, уничтожался токомъ, противоположнаго направленія, возникающимъ при второй операціи. Былъ обнаруженъ незначительный остаточный токъ**). Далѣе было приложено поле, которое было въ состояніи индуктировать въ нашемъ сверхпроводникѣ токъ вдвое сильнѣе предѣльнаго, и черезъ нѣкоторое время удаленъ. Токъ діамагнитнаго знака, возникшій при первой операціи, могъ удержаться лишь послѣ того, какъ сила его уменьшилась до величины ниже предѣла тока для этого сверхпроводника при данной температурѣ. Вторая операція, уничтоживъ сначала оставшійся отъ первой операціи токъ діамагнитнаго направленія, на что, очевидно, уходила половина возбуждаемаго удаленіемъ поля парамагнитнаго тока, давала въ результатѣ парамагнитный токъ приблизительно такой же, какой получался при описанныхъ выше опытахъ. Поле, втрое сильнѣе первоначальнаго, приложенное подобнымъ же образомъ, давало тотъ же результатъ.

Все это настолько хорошо согласуется съ выводами, которые были сдѣланы нами изъ найденныхъ раньше свойствъ сверхпроводниковъ, что не остается никакого сомнѣнія въ правильности этихъ выводовъ. Но интересно, что можно, наоборотъ, на основаніи описанныхъ опытовъ съ катушкою прійти къ заключенію, что свинецъ, охлажденный въ жидкомъ геліѣ, находится въ состояніи сверхпроводимости, если показать, что причиною магнитнаго момента нашей катушки является токъ, проходящій по ней. Для этой цѣли вблизи мѣста спая справа и слѣва отъ него были прикрѣплены двѣ проволоки, соединенныя съ баллистическимъ гальванометромъ. Получивъ въ катушкѣ такимъ же способомъ, какъ въ первомъ изъ описанныхъ опытовъ, электрическій токъ и поставивъ буссоль на свое мѣсто, по отклоненію стрѣлки я

---

*) Слѣдовательно, лишь больше чѣмъ двое сутокъ послѣ своего возникновенія токъ ослабѣетъ на половину, и черезъ 4 сутокъ онъ будетъ имѣть еще около 5% своей первоначальной силы!

**) Что и слѣдовало ожидать, такъ какъ при индукціи второго тока (парамагнитнаго) первый успѣлъ уже немного ослабѣть.

Прим. пер.

убѣждался въ томъ, что катушка имѣетъ почти постоянный магнитный моментъ. Затѣмъ быстро перерѣзывался спай свинцовой проволоки: по гальванометру проходилъ токъ (мгновенно уничтожаемый его сопротивленіемъ) и въ тотъ же моментъ стрѣлка буссоли возвращалась въ то положеніе равновѣсія, которое она занимала, когда цѣпь свинцовой катушки была разомкнута.

Въ этихъ опытахъ мы имѣемъ почти полное осуществленіе механизма безъ тренія, придуманнаго Максвелломъ, дополненнаго лишь представленіемъ объ электронахъ: вѣдь электроны циркулирующіе по нашей проволокѣ безъ электродвижущей силы, движутся почти такъ же непрерывно и безконечно, какъ и вращающіяся въ эѳирѣ — по представленію Максвелла — призрачныя колеса инерціи. Малѣйшее сопротивленіе обыкновеннаго характера, введенное въ этотъ механизмъ, быстро его останавливаетъ.

О приближеніяхъ, выражаемыхъ квадратными корнями.

М. Зимина.

Обычно, приближенныя значенія ирраціональнаго числа выражаются раціональными дробями. Но въ нѣкоторыхъ случаяхъ бываетъ полезно выразить приближенное значеніе при помощи раціональнаго числа и корня квадратнаго. Такое приближенное выраженіе, во первыхъ, можетъ оказаться болѣе компактнымъ, т. е. требующимъ меньшаго сравнительно съ раціональнымъ приближеніемъ числа цифръ для написанія, а, во вторыхъ, это приближеніе можетъ быть построено геометрически помощью циркуля и линейки. Въ настоящей замѣткѣ мы изложимъ весьма простой способъ нахожденія приближеній указаннаго характера, предложенной Борелемъ*).

Пусть α будетъ положительное ирраціональное число. Ищемъ его приближенное значеніе въ формѣ

$$\frac{a \pm \sqrt{m}}{b},$$

гдѣ числа a, m, b суть цѣлыя и притомъ $m > 0$ и $b > 0$. Обозначая черезъ ε погрѣшность приближенія, будемъ имѣть равенство

$$\alpha = \frac{a \pm \sqrt{m}}{b} + \varepsilon,$$

изъ котораго получаемъ:

$$\alpha b \mp \sqrt{m} = a + b\varepsilon. \qquad (1)$$

*) E. Borel. Sur l'approximation des nobres réels par les nombres quadratiques. Bulletin de la Société mathématique de France, t. 31, 1903, p. 157.

Разсмотримъ отдѣльно случаи верхняго и нижняго знаковъ въ равенствѣ (1). Пусть

$$ab - \sqrt{m} = a + b\varepsilon. \qquad (2)$$

Число $b\varepsilon$ должно быть малымъ. Если предположимъ, что ab и $\sqrt{m}$ выражены безконечными десятичными дробями и примемъ во вниманіе, что a есть число цѣлое, то равенство (2) обнаруживаетъ, что въ ab и $\sqrt{m}$ долженъ быть рядъ одинаковыхъ десятичныхъ знаковъ послѣ запятой. Число этихъ общихъ десятичныхъ знаковъ тѣмъ болѣе, чѣмъ менѣе ε, т. е., чѣмъ точнѣе приближеніе. Если ab и $\sqrt{m}$ имѣютъ k общихъ десятичныхъ знаковъ, то разность дробныхъ частей чиселъ ab и $\sqrt{m}$ по абсолютному значенію менѣе $\frac{1}{10^k}$, а потому, принимая за a въ равенствѣ (2) разность цѣлыхъ частей чиселъ ab и $\sqrt{m}$, будемъ имѣть

$$|b\varepsilon| < \frac{1}{10^k}, \quad |\varepsilon| < \frac{1}{10^k b},$$

и, слѣдовательно, число $\frac{a+\sqrt{m}}{b}$ представитъ приближеніе для α съ точностью $\frac{1}{10^k b}$.

Въ случаѣ нижняго знака въ равенствѣ (1) изъ равенства

$$ab + \sqrt{m} = a + b\varepsilon \qquad (3)$$

усматриваемъ, что при маломъ $b\varepsilon$ десятичные знаки чиселъ ab и $\sqrt{m}$, слѣдующіе за запятой, должны быть таковы, что для извѣстнаго числа ихъ сумма чиселъ, изображаемыхъ знаками одинаковаго порядка, должна равняться 9. Если это обстоятельство имѣетъ мѣсто для k десятичныхъ знаковъ, то разность между суммою дробныхъ частей чиселъ ab и $\sqrt{m}$ и единицей будетъ по абсолютному значенію менѣе $\frac{1}{10^k}$. Поэтому, принимая теперь въ равенствѣ (3) за a сумму цѣлыхъ частей чиселъ ab и $\sqrt{m}$, увеличенную единицей, будемъ имѣть попрежнему

$$|b\varepsilon| < \frac{1}{10^k}, \quad |\varepsilon| < \frac{1}{10^k b},$$

такъ что $\frac{a-\sqrt{m}}{b}$ будетъ выражать α съ точностью до $\frac{1}{10^k b}$.

На основаніи этихъ замѣчаній Борель предлагаетъ слѣдующій способъ для нахожденія приближенія числа α въ формѣ $\frac{a \pm \sqrt{m}}{b}$.

Задаемъ число b и вычисляемъ въ десятичныхъ знакахъ приближеніе для ab. Затѣмъ подыскиваемъ такое цѣлое число m, что или корень квадратный изъ m имѣетъ нѣсколько первыхъ послѣ запятой десятичныхъ знаковъ, одинаковыхъ съ десятичными знаками приближенія для ab, или же знаки *) этого квадратнаго корня дополняютъ до 9 соотвѣтствующіе десятичные знаки приближенія ab. Разность $ab-\sqrt{m}$ въ первомъ случаѣ и сумма $ab+\sqrt{m}$ во второмъ будетъ равняться цѣлому числу a съ точностью до $\frac{1}{10^k}$, гдѣ k есть число десятичныхъ знаковъ въ ab и $\sqrt{m}$, удовлетворяющихъ вышесказаннымъ условіямъ. Тогда число $\frac{a\pm\sqrt{m}}{b}$ выразитъ a съ точностью до $\frac{1}{10^k b}$.

Въ своей статьѣ Борель приводитъ таблицу квадратныхъ корней чиселъ отъ 1 до 500, расположенныхъ въ порядкѣ возрастанія ихъ десятичныхъ частей. Пользуясь такой таблицей, легко подыскать квадратный корень, имѣющій требуемые десятичные знаки.

Какъ примѣръ, Борель даетъ приближеніе для π. Такъ какъ

$$8\pi = 25{,}132741\ldots, \qquad \sqrt{229} = 15{,}132746\ldots,$$

то, слѣдовательно, имѣемъ приближенное равенство

$$8\pi - \sqrt{229} = 10,$$

изъ котораго

$$\pi = \frac{10+\sqrt{229}}{8},$$

и такъ какъ разность дробныхъ частей чиселъ 8π и $\sqrt{229}$ менѣе $\frac{8}{10^6}$, то погрѣшность найденнаго приближенія менѣе $\frac{1}{10^6}$. Для построенія этого приближенія помощью циркуля и линейки достаточно замѣтить, что оно можетъ быть представлено въ видѣ

$$\frac{5}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2+1}.$$

Найдемъ еще приближеніе для $\cos\frac{2\pi}{7}$, которымъ можно затѣмъ воспользоваться для приближеннаго построенія правильнаго вписаннаго семиугольника. Число $2\cos\frac{2\pi}{7}$ есть положительный корень уравненія **)

$$y^3+y^2-2y-1=0,$$

*) Употребляемъ ради краткости обычное неправильное выраженіе.

**) А. Адлеръ. «Теорія геометрическихъ построеній». Одесса, «Mathesis», 1910, стр. 204.

пользуясь которымъ, можно убѣдиться, что

$$1{,}2469 < 2\cos\frac{2\pi}{7} < 1{,}2470.$$

Имѣемъ

$$\sqrt{105} = 10{,}246950\ldots,$$

слѣдовательно,

$$2\cos\frac{2\pi}{7} - \sqrt{105} = -9 + \varepsilon,$$

гдѣ $|\varepsilon| < 0{,}0001$, такъ что съ точностью, превосходящей 0,0001, мы можемъ положить

$$\cos\frac{2\pi}{7} = \frac{\sqrt{105} - 9}{2}.$$

Построеніе найденнаго приближенія выполняется безъ особаго затрудненія, если замѣтимъ, что

$$\frac{\sqrt{105} - 9}{2} = \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 - 2^2} - \frac{9}{2}$$

или, что

$$\frac{\sqrt{105} - 9}{2} = \sqrt{5^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{9}{2}.$$

Отложивъ затѣмъ на радіусѣ OA (принятомъ за единицу) окружности съ центромъ въ O отрѣзокъ OM, равный приближенно $\cos\frac{2\pi}{7}$, и возставивъ изъ M перпендикуляръ къ OA, въ пересѣченіи этого перпендикуляра съ окружностью получимъ двѣ точки, которыя вмѣстѣ съ A могутъ быть приняты приближенно за три смежныя вершины правильнаго семиугольника.

Остается показать, что всегда можно найти цѣлое число m, квадратный корень изъ котораго имѣетъ желаемые десятичные знаки.

Пусть $\frac{c}{10^k}$ будетъ данная дробная часть приближеннаго значенія квадратнаго корня искомаго числа m. Обозначая цѣлую часть корня черезъ E, имѣемъ

$$E + \frac{c}{10^k} < \sqrt{m} < E + \frac{c+1}{10^k},$$

откуда

$$E^2 + \frac{2cE}{10^k} + \frac{c^2}{10^{2k}} < m < E^2 + \frac{2(c+1)E}{10^k} + \frac{(c+1)^2}{10^{2k}}. \tag{4}$$

Разность между двумя предѣлами числа m равна

$$\frac{2E}{10^k} + \frac{2c+1}{10^{2k}}, \tag{5}$$

и такъ какъ цѣлое число E произвольно, то при достаточно большомъ E, напримѣръ, при $E \geqq \frac{10^k}{2}$ разность (5) будетъ больше единицы, а потому въ предѣлахъ неравенства (4) будетъ заключаться по меньшей мѣрѣ одно цѣлое число m требуемаго свойства. Разумѣется, въ отдѣльныхъ случаяхъ цѣлое число m можетъ найтись и при меньшихъ значеніяхъ E.

О дѣлимости выраженія $(x+y)^n - x^n - y^n$ на трехленъ x^2+xy+y^2.

М. С. Бритмана.

Помѣщенная въ 9-мъ номерѣ L-го семестра „Вѣстника Опытной Физики", на 252 стр., задача № 151 есть частный случай слѣдующей интересной теоремы: „Выраженіе $(x+y)^n - x^n - y^n$ при n простомъ и большемъ 3 дѣлится алгебраически не только на произведеніе $nxy(x+y)$, но еще и на трехчленъ x^2+xy+y^2, а если простое число $n = 6k+1$, то даже на $(x^2+xy+y^2)^2$".

Теорема эта съ доказательствомъ помѣщена въ статьѣ знаменитаго французскаго математика Коши (Cauchy), носящей заглавіе „Rapport sur le Mémoire précédent" и помѣщенной въ 5-мъ томѣ журнала Ліувилля („Journal de mathématiques pures et appliquées, publié par Joseph Liouville, Paris, 1840, pp. 211—215). Она была написана по поводу мемуара Ламе (Lamé), въ которомъ доказывается невозможность рѣшенія въ цѣлыхъ числахъ уравненія $x^7+y^7=z^7$. Эта теорема, которую Коши считаетъ новой, показалась ему и Ліувиллю, открывшимъ ее, достаточно интересной, чтобы упомянуть о ней въ упомянутой статьѣ.

Дѣлимость $(x+y)^n - x^n - y^n$ на выраженіе $nxy(x+y)$ въ указанной статьѣ Коши не доказана, въ виду легкости этого доказательства. Въ самомъ дѣлѣ, разложивъ $(x+y)^n$ по формулѣ бинома Ньютона, вычтя x^n+y^n и соединивъ въ одно слагаемое каждые 2 равноудаленныхъ отъ концовъ полученнаго многочлена члена, будемъ имѣть сумму $\frac{n-1}{2}$ слагаемыхъ, изъ которыхъ каждое дѣлится на $nxy(x+y)$. Здѣсь мы считали n простымъ и большимъ 2.

Дѣлимость выраженія $(x+y)^n - x^n - y^n$ на трехчленъ x^2+xy+y^2, при n простомъ и большемъ 3, и на $(x^2+xy+y^2)^2$ при n простомъ и равномъ $6k+1$, гдѣ $k=1, 2, 3, \ldots$, въ указанной статьѣ Коши доказываетъ слѣдующимъ простымъ способомъ.

Пусть 1, a и b будутъ корни уравненія $z^3=1$. Такъ какъ n простое число большее 3, то n не дѣлится на 3; поэтому a^n и b^n также будутъ мнимыми корнями уравненія $z^3=1$.

По свойству корней уравненія имѣемъ:

$$(1)\quad 1+a+b=0,\qquad (2)\quad 1+a^n+b^n=0\quad \text{и}\quad (3)\quad ab=1.$$

Далѣе имѣемъ:

$$(x-ay)(x-by)=x^2-ayx-bxy+aby^2=x^2+xy(-a-b)+$$
$$+aby^2=x^2+xy+y^2,$$

такъ какъ, на основаніи равенства (1), $-a-b=1$ и, кромѣ того, $ab=1$.

Докажемъ теперь, что выраженіе $(x+y)^n-x^n-y^n$, при n простомъ и большемъ 3, дѣлится на $x^2+xy+y^2=(x-ay)(x-by)$. Для этого достаточно доказать, что $(x+y)^n-x^n-y^n$ дѣлится въ отдѣльности на $x-ay$ и на $x-by$. Съ этой цѣлью воспользуемся извѣстной теоремой Безу о нахожденіи остатка отъ дѣленія цѣлой раціональной функціи перемѣннаго t на двучленъ $t-A$ и положимъ въ выраженіи $(x+y)^n-x^n-y^n$ сначала $x=ay$, а затѣмъ $x=by$, Тогда будемъ имѣть:

$$(ay+y)^n-(ay)^n-y^n=(a+1)^ny^n-a^ny^n-y^n.$$

Такъ какъ $1+a+b=0$, то $a+1=-b$; слѣдовательно,

$$(ay+y)^n-(ay)^n-y^n=(-b)^ny^n-a^ny^n-y^n=-y^n(1+a^n+b^n).$$

Принимая во вниманіе равенство (2), находимъ, что

$$(ay+y)^n-(ay)^n-y^n=0.$$

Такъ же можно доказать, что и

$$(by+y)^n-(by)^n-y^n=0.$$

Слѣдовательно, выраженіе $(x+y)^n-x^n-y^n$ дѣлится на $x-ay$ и на $x-by$, а потому оно дѣлится на произведеніе $(x-ay)(x-by)$, т. е. на x^2+xy+y^2.

Чтобы доказать, что выраженіе $(x+y)^n-x^n-y^n$ дѣлится на $(x^2+xy+y^2)^2=(x-ay)^2\,.\,(x-by)^2$ при n простомъ и равномъ $6k+1$, достаточно доказать, что это выраженіе дѣлится въ отдѣльности на $(x-ay)^2$ и на $(x-by)^2$. Чтобы убѣдиться, что выраженіе $(x+y)^n-$ $-x^n-y^n$, дѣлясь на $x-ay$, дѣлится также и на $(x-ay)^2$, достаточно доказать, что производная этого выраженія по x, т. е. выраженіе

$$(4)\quad n\left[(x+y)^{n-1}-x^{n-1}\right],$$

дѣлится на $x-ay$.

Для этого положимъ въ выраженіи (4) $x=ay$; получаемъ, при n простомъ и равномъ $6k+1$,

$$n\left[(ay+y)^{n-1}-(ay)^{n-1}\right]=ny^{n-1}\left[(a+1)^{n-1}-a^{n-1}\right]=ny^{n-1}\left[(-b)^{6k}-a^{6k}\right]=$$
$$=ny^{n-1}(b^{6k}-a^{6k})=ny^{n-1}\left[(b^3)^{2k}-(a^3)^{2k}\right]=ny^{n-1}(1^{2k}-1^{2k})=0.$$

Теперь ясно, что упомянутая производная дѣлится на $x-ay$. Такъ же можно доказать, что она дѣлится и на $x-by$.

Отсюда заключаемъ, что выраженіе $(x+y)^n-x^n-y^n$ дѣлится на $(x-ay)^2.(x-by)^2$, т. е. на $(x^2+xy+y^2)^2$, при n простомъ и равномъ $6k+1$.

Примѣры:

$$1)\quad (x+y)^5-x^5-y^5=5xy\,(x+y)\,(x^2+xy+y^2)^2;$$

$$2)\quad (x+y)^7-x^7-y^7=7xy\,(x+y)\,(x^2+xy+y^2)^2;$$

Если въ этой теоремѣ подъ x и y будемъ разумѣть цѣлыя числа, то она обратится въ упомянутую выше задачу № 151.

Примѣчаніе. Читатели, незнакомые съ Высшей Алгеброй, могутъ такъ доказать формулы (1), (2) и (3).

Формулы (1) и (3) можно легко доказать или непосредственной повѣркой, положивъ въ нихъ $a=\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ и $b=\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, или обративъ вниманіе на то, что a и b суть корни уравненія $z^2+z+1=0$.

Формулу (2) можно доказать такъ:

1) Если $n=3l+1$, то $a^n=a^{3l+1}=a^{3l}.a=(a^3)^l.a=a$, такъ какъ $a^3=1$ и $b^n=b$. Слѣдовательно, $1+a^n+b^n=1+a+b=0$.

2) Если $n=3l+2$, то $a^n=a^{3l+2}=a^{3l}.a^2=(a^3)^l.a^2=a^2=a^2$, но $a^2=\left(\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2=\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}=b$, а потому $a^n=b$. Такъ же доказывается, что $b^n=a$. Слѣдовательно, $1+a^n+b^n=1+b+a=0$.

Дѣлимость выраженія $(x+y)^n-x^n-y^n$ на трехчленъ x^2+xy+y^2, при n простомъ и большемъ 3, можно доказать иначе, чѣмъ въ статьѣ Коши „Rapport sur le Memoire précédent“.

Положимъ $n=2k+1$, тогда будемъ имѣть:

$$(x+y)^n-x^n-y^n=(x+y)^{2k+1}-x^{2k+1}-y^{2k+1}=(x+y)^{2k}(x+y)-x^{2k+1}-y^{2k+1}=$$
$$=(x+y)^{2k}(x+y)-x^{2k+1}-y^{2k+1}-(xy)^k(x+y)+(xy)^k(x+y)=$$
$$=[(x+y)^{2k}-(xy)^k]\,(x+y)+(xy)^k(x+y)-x^{2k+1}-y^{2k+1};$$

Кромѣ того, имѣемъ:

$$(xy)^k(x+y)-x^{2k+1}-y^{2k+1}=x^{k+1}y^k+x^ky^{k+1}-x^{2k+1}-y^{2k+1}=$$
$$=-x^{k+1}(x^k-y^k)+y^{k+1}(x^k-y^k)=-(x^k-y^k)(x^{k+1}-y^{k+1});$$

Итакъ,

$$(x+y)^n-x^n-y^n=\{[(x+y)^2]^k-(xy)^k\}\,(x+y)-(x^k-y^k)(x^{k+1}-y^{k+1});$$

Такъ какъ $[(x+y)^2]^k-(xy)^k$ при всякомъ k дѣлится на

$$(x+y)^2-xy=x^2+xy+y^2,$$

то для нашей цѣли достаточно доказать дѣлимость

$$(x^k-y^k)(x^{k+1}-y^{k+1}) \quad \text{на} \quad x^2+xy+y^2.$$

Разсмотримъ два случая: 1) $k=3m$ и 2) $k=3m+2$, гдѣ m есть цѣлое число. Замѣтимъ, что нельзя положить $k=3m+1$, такъ какъ тогда мы имѣли бы, что $n=2k+1=6m+3$ дѣлится на 3.

Въ 1-омъ случаѣ, когда $k=3m$, имѣемъ

$$(x^k-y^k)(x^{k+1}-y^{k+1})=[(x^3)^m-(y^3)^m](x^{k+1}-y^{k+1});$$

здѣсь первый сомножитель дѣлится на $x^3-y^3=(x^2+xy+y^2)(x-y)$, слѣдовательно, $(x^k-y^k)(x^{k+1}-y^{k+1})$ дѣлится на x^2+xy+y^2.

Во 2-омъ случаѣ, когда $k=3m+2$, имѣемъ

$$k+1=3m+3=3(m+1) \quad \text{и} \quad x^{k+1}-y^{k+1}=(x^3)^{m+1}-(y^3)^{m+1}.$$

Ясно теперь, что $x^{k+1}-y^{k+1}$ и произведенiе $(x^k-y^k)(x^{k+1}-y^{k+1})$ дѣлятся на x^3-y^3 и, слѣдовательно, на x^2+xy+y^2.

Изложенное разсужденiе доказываетъ, что выраженiе $(x+y)^n-x^n-y^n$ дѣлится на трехчленъ x^2+xy+y^2 не только при n простомъ большемъ 3, но вообще при всякомъ n, имѣющемъ видъ $6m+1$ или $6m+5$, гдѣ m цѣлое число.

Перейдемъ теперь къ доказательству дѣлимости выраженiя $(x+y)^n-x^n-y^n$ на $(x^2+xy+y^2)^2$, если $n=6k+1$. Замѣтимъ, что предлагаемое доказательство вовсе не предполагаетъ n простымъ.

Предположимъ, что при нѣкоторомъ значенiи k выраженiе $A=(x+y)^{6k+1}-x^{6k+1}-y^{6k+1}$ дѣлится на $(x^2+xy+y^2)^2$, и докажемъ, что оно дѣлится на $(x^2+xy+y^2)^2$ также и тогда, когда значенiе k увеличимъ на 1; другими словами, докажемъ, что, если $A=(x+y)^{6k+1}-x^{6k+1}-y^{6k+1}$ дѣлится на $a=(x^2+xy+y^2)^2$, то и $B=(x+y)^{6k+7}-x^{6k+7}-y^{6k+7}$ дѣлится на a.

Легко убѣдиться, что

$$B=A(x+y)^6+(x^{6k+1}+y^{6k+1})(x+y)^6-x^{6k+7}-y^{6k+7};$$

Такъ какъ $(x+y)^7-x^7-y^7=7xy(x+y)a$, что легко доказать повѣркой, то $(x+y)^6=7xya+\frac{x^7+y^7}{x+y}$. Въ виду этого имѣемъ:

$$B=A(x+y)^6+(x^{6k+1}+y^{6k+1})7xya+(x^{6k+1}+y^{6k+1})\cdot\frac{x^7+y^7}{x+y}-x^{6k+7}-y^{6k+7}=$$

$$=A(x+y)^6+(x^{6k+1}+y^{6k+1})7xya+x^{6k+1}\left(\frac{x^7+y^7}{x+y}-x^6\right)+y^{6k+1}\left(\frac{x^7+y^7}{x+y}-y^6\right);$$

Займемся теперь суммой двухъ послѣднихъ членовъ этого многочлена. Такъ какъ

$$\frac{x^7+y^7}{x+y}-x^6=\frac{x^7+y^7-x^7-x^6y}{x+y}=\frac{-y\,(x^6-y^6)}{x+y}$$

и

$$\frac{x^7+y^7}{x+y}-y^6=\frac{x^7+y^7-xy^6-y^7}{x+y}=\frac{x\,(x^6-y^6)}{x+y},$$

то

$$x^{6k+1}\left(\frac{x^7+y^7}{x+y}-x^6\right)+y^{6k+1}\left(\frac{x^7+y^7}{x+y}-y^6\right)=$$

$$=\frac{x^{6k+1}y\,(x^6-y^6)+xy^{6k+1}\,(x^6-y^6)}{x+y}=\frac{-xy\,(x^6-y^6)\,(x^{6k}-y^{6k})}{x+y}=$$

$$=-xy\cdot\frac{x^3+y^3}{x+y}\cdot(x^3-y^3)\,(x^{6k}-y^{6k})=$$

$$=-xy\,(x^2-xy+y)\,(x^3-y^3)\,(x^{6k}-y^{6k});$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что упомянутая сумма двухъ членовъ многочлена дѣлится на $(x^3-y^3)^2$, слѣдовательно, она дѣлится и на $(x^2+xy+y^2)^2$.

Вернувшись теперь къ преобразованному выраженію B, видимъ, что B дѣлится на $(x^2+xy+y^2)^2$. Требуемое доказано.

Такъ какъ выраженіе $(x+y)^{6k+1}-x^{6k+1}-y^{6k+1}$ при $k=1$ дѣлится на $(x^2+xy+y^2)^2$, потому что

$$(x+y)^7-x^7-y^7=7xy\,(x+y)\,(x^2+xy+y^2)^2,$$

то на основаніи изложеннаго это выраженіе будетъ дѣлиться на $(x^2+xy+y^2)^2$ и при $k=2,\ 3, \ldots$, т. е. при всякомъ цѣломъ и положительномъ значеніи k.

Это доказательство, въ противоположность тому, которое изложено въ указанной раньше статьѣ Коши, не требуетъ знанія теоремы: „Если цѣлый относительно x многочленъ и его производная по x дѣлятся на $x-p$, то этотъ многочленъ дѣлится и на $(x-p^2)$“.

Хотя Коши въ своей статьѣ при доказательствѣ дѣлимости выраженія $(x+y)^n-x^n-y^n$ на x^2+xy+y^2 и, въ случаѣ $n=6k+1$, на $(x^2+xy+y^2)^2$ считаетъ n простымъ числомъ, однако, какъ легко замѣтить, приводимое имъ доказательство не теряетъ силы и при n составномъ, лишь бы оно было нечетнымъ и не дѣлилось на 3.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей прив.-доц. Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 227 (6 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ уравненіе

$$yz(7x-10)+7(x+2)-10=0.$$

Н. Михальскій (Екатеринославъ).

№ 228 (6 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$\sin x+\cos y=a, \quad \cos x+\sin y=b.$$

N. (Одесса).

№ 229 (6 сер.). Построить при помощи алгебраическихъ операцій функцію $f(x)$, опредѣленную для всѣхъ цѣлыхъ значеній x и принимающую при x четномъ значеніе, равное данному числу a, а при x нечетномъ значеніе, равное данному числу b.

В. Комаровъ (Петроградъ).

№ 230 (6 сер.). Пусть $\varphi(n)$ обозначаетъ число всѣхъ чиселъ, не превосходящихъ цѣлаго положительнаго числа n и взаимно простыхъ съ n. Доказать, что

$$\varphi(m\delta)=\delta\varphi(m),$$

если δ — дѣлитель числа m. Доказать тожество

$$\varphi(mm')=d\varphi(M),$$

гдѣ d — общій наибольшій дѣлитель чиселъ m и m', а M — ихъ наименьшее кратное.

Н. С. (Одесса).

ПОПРАВКА.

Въ условіи задачи **№ 212** (6 сер.), напечатанной въ № 618 «Вѣстника», вмѣсто знака равенства слѣдуетъ читать знакъ неравенства $\geqq$.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

Отдѣлъ I.

№ 185 (6 сер.). *Доказать, что при постоянныхъ значеніяхъ* a, b, c *выраженіе*

$$\frac{ax^2+by^2+cz^2}{bc(y-z)^2+ca(z-x)^2+ab(x-y)^2}$$

либо сохраняетъ постоянное значеніе, если $ax+by+cz=0$, *либо теряетъ смыслъ.*

(Заимств. изъ *Journal de Mathématiques élémentaires*).

Возвышая равенство $ax+by+cz=0$ въ квадратъ, получимъ

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2bcyz+2cazx=0,$$

откуда

$$(1)\quad 2abxy+2bcyz+2cazx=-(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2).$$

Съ другой стороны,

$$bc(y-z)^2+ca(z-x)^2+ab(x-y)^2=a(b+c)x^2+b(c+a)y^2+a(b+c)z^2-$$
$$-(2abxy+2bcyz+2cazx),$$

или, замѣняя выраженіе $2abxy+2bcyz+2cazx$ его значеніемъ изъ формулы (1),

$$bc(y-z)^2+ca(z-x)^2+ab(x-y)^2=a(b+c)x^2+b(c+a)y^2+$$
$$+a(b+c)z^2+a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2,$$

откуда

$$(2)\quad bc(y-z)^2+ca(z-x)^2+ab(x-y)^2=(a+b+c)(ax^2+by^2+cz^2).$$

Поэтому при $ax+by+cz=0$ справедливо равенство [см. (2)]

$$\frac{ax^2+by^2+cz^2}{bc(y-z)^2+ca(z-x)^2+ab(x-y)^2}=\frac{ax^2+by^2+cz^2}{(a+b+c)(ax^2+by^2+cz^2)}=\frac{1}{a+b+c}.$$

Итакъ, если $ax+by+cz=0$, то разсматриваемое выраженіе сохраняетъ постоянное значеніе, равное $\frac{1}{a+b+c}$. Однако, если постоянныя a, b, c выбраны такъ, что $a+b+c=0$, то, при $ax+by+cz=0$, данное выраженіе теряетъ смыслъ, такъ какъ [см. (2)] знаменатель его обращается для разсматриваемыхъ значеній x, y, z въ нуль.

П. Волохинъ (Ялта); *М. Бабинъ* (ст. Дашковка); *Г. Михневичъ* (Одесса).

№ 186 (6 сер.). *Дано равенство*

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1.$$

Показать, что изъ трехъ дробей въ лѣвой части равенства двѣ должны быть равны положительной, а третья отрицательной единицѣ.

Представимъ данное равенство въ видѣ

$$\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+1\right)+\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}-1\right)+\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}-1\right)=0.$$

Но

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+1=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}=\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2bc},$$

$$\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}-1=\frac{(a-c)^2-b^2}{2ac}=\frac{(b+c-a)(c-a-b)}{2ac},$$

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}-1=\frac{(a-b)^2-c^2}{2ab}=\frac{(b+c-a)(b-a-c)}{2ab}.$$

Поэтому данное равенство можно представить также въ видѣ

$$\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2bc}+\frac{(b+c-a)(c-a-b)}{2ac}+\frac{(b+c-a)(b-a-c)}{2ab}=0$$

или

$$(1)\qquad (b+c-a)\left(\frac{a+b+c}{2bc}+\frac{c-a-b}{2ac}+\frac{b-a-c}{2ab}\right)=0.$$

Такъ какъ

$$\frac{a+b+c}{2bc}+\frac{c-a-b}{2ac}=\frac{a^2+ac+bc-b^2}{2abc}=\frac{(a-b)(a+b)+c(a+b)}{2abc}=$$

$$\frac{(a+c-b)(a+b)}{2abc},$$

то равенство (1) можно записать въ видѣ

$$(b+c-a)\left[\frac{(a+c-b)(a+b)}{2abc}+\frac{b-a-c}{2ab}\right]=0,$$

или

$$(b+c-a)(a+c-b)\left(\frac{a+b}{2abc}-\frac{1}{2ab}\right)=0.$$

Но $\frac{a+b}{2abc}-\frac{1}{2ab}=\frac{a+b-c}{2abc}$. Поэтому равенство (1) можно представить въ видѣ

$$(2)\qquad \frac{1}{2abc}(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)=0.$$

Изъ равенства (2), равносильнаго данному равенству, слѣдуетъ, что одно изъ трехъ выраженій $b+c-a$, $a+c-b$, $a+b-c$ должно равняться нулю. Пусть $b+c-a=0$, т. е. (3) $a=b+c$. Подставляя въ каждую изъ дробей

$$(4)\qquad \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \frac{c^2+a^2-b^2}{2ac},\quad \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

вмѣсто a его значеніе изъ формулы (3), получимъ послѣ обычныхъ преобразованій соотвѣтственныя ихъ значенія (-1), $\frac{b+c}{a}$, $\frac{b+c}{a}$, т. е. [см. (3)] (-1), 1, 1, Если же $a+c-b=0$ или $a+b-c=0$, то подобнымъ же образомъ находимъ, что дроби (4) равны соотвѣтственно 1, (-1), 1 и 1, 1, (-1).

А. Иткинъ (Петроградъ); *П. Волохинъ* (Ялта); *В. Ревзинъ* (Сумы); *Н. Казариновъ* (Петроградъ).

№ 187 (6 сер.). *Найти предѣлъ выраженія* $(\pi-2x)\operatorname{tg} x$ *при неограниченномъ приближеніи* x *къ* $\frac{\pi}{2}$.

Представимъ данное выраженіе послѣдовательно въ видѣ

$$(\pi-2x)\operatorname{tg} x = 2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\frac{\sin x}{\cos x} = 2\,\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\sin x.$$

При неограниченномъ приближеніи x къ $\frac{\pi}{2}$ разность $\frac{\pi}{2}-x$ приближается неограниченно къ нулю, а потому, по извѣстной теоремѣ, дробь $\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$ стремится къ предѣлу, равному единицѣ. Множитель же $\sin x$, въ силу непрерывности функціи $\sin x$, при неограниченномъ приближеніи x къ $\frac{\pi}{2}$ стремится къ предѣлу, равному $\sin\frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$\lim_{x=\frac{\pi}{2}} (\pi-2x)\operatorname{tg} x = 2\lim_{x=\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2}-x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} \lim_{x=\frac{\pi}{2}} \sin x = 2\,.\,1\,.\,1 = 2.$$

А. Иткинъ (Петроградъ); *М. Бабинъ* (Могилевъ); *И. Зюзинъ* (с. Архангельское); *В. Кованько* (ст. Струнино); *Н. Михальскій* (Екатеринославъ); *П. Волохинъ* (Ялта); *В. Ревзинъ* (Сумы).

Редакторъ прив.-доц. В. Ф. Каганъ. Издатель В. А. Гернетъ.

Дозволено военной цензурой.

Типографія „Техникъ“ — Одесса, Екатерининская, 58.

Обложка
пщется

Обложка
пщется