

Обложка  
щется

Обложка  
щется



# ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

## И Элементарной Математики.



№ 623 — 624.



**Содержание:** Современные формы рентгеновскихъ трубокъ. *III. Филлипса.* — Какъ согласовать преподаваніе въ средней школѣ съ прогрессомъ науки. *Докладъ Э. Бореля.* — Новыя изслѣдованія о положительныхъ лучахъ. *А. Фрумкина.* — О характерѣ прерывности, которую можетъ имѣть производная *Т. Афанасьевой-Эренфестъ.* — Библиографія. *II.* Собственные сообщенія авторовъ, переводчиковъ и редакторовъ о выпущенныхъ книгахъ. *Леженъ-Дирикле, Риманъ, Липшицъ.* „Разложеніе функцій въ тригонометрическіе ряды. *Проф. Д. Синцова.* — Задачи № № 231 — 234 (6 сер.). — Рѣшенія задачъ. *Отдѣлъ I.* № № 179, 181 188 и 189 (6 сер.). — Объявленія.

### Современныя формы рентгеновскихъ трубокъ.

*III. Филлипса.*

Несмотря на многія препятствія, медицина достигла въ теченіи послѣднихъ лѣтъ значительныхъ успѣховъ въ примѣненіи рентгеновскихъ лучей. Однако, до сихъ поръ не устранены нѣкоторыя недостатки рентгеновскихъ трубокъ, которыя часто являются источникомъ несприятностей и затрудненій. Естественнымъ слѣдствіемъ широкаго примѣненія радіотерапіи явилась потребность въ болѣе точной работѣ; особенно необходимымъ сдѣлался контроль надъ дѣйствіемъ трубки.

Рѣшеніе этой проблемы можетъ дать только аппаратъ, испускающій лучи опредѣленнаго типа въ опредѣленномъ количествѣ; и было бы мало надежды на его осуществленіе на практикѣ, если бы не послѣдніе опыты *Лилиенфельда (Lilienfeld)* и *Кулиджа (Coolidge)*. Ниже я изложу подробности ихъ работъ.

Не слѣдуетъ забывать, что современная рентгеновская трубка, при всѣхъ ея недостаткахъ, настоящій триумфъ техники. Созданіе ея — результатъ безчисленнаго множества дорогихъ и трудныхъ опытовъ, произведенныхъ фабрикантами для удовлетворенія возрастающей съ каждымъ годомъ потребности. Въ коллекціи историческихъ рентгенов-



«сихъ трубокъ, собранной недавно Рѣнтгеновскимъ Обществомъ, находится самая старая по возрасту трубка, имѣвшая въ общихъ чертахъ повсемѣстно принятую теперь форму. Эта трубка была сдѣлана Джексономъ (Prof. Herbert Jackson) въ 1896 г. и имѣла только 3 дюйма въ діаметръ. Діаметръ современныхъ трубокъ обыкновенно въ два или въ три раза больше; ихъ электроды массивны и давленіе въ нихъ тщательно урегулировано. Успѣшное дѣйствіе аппаратовъ въ такой степени зависитъ отъ послѣдняго фактора, что уменьшеніе давленія газа, оставшагося внутри трубки, которое всегда сопровождается продолжительное употребленіе, непременно должно быть скомпенсировано. Приспособленія для регулировки давленія могутъ быть раздѣлены на три слѣдующіе класса.

1) Въ трубку впаиваются два вспомогательныхъ электрода и на одномъ изъ нихъ укрѣпляется кружочекъ слюды, уголь или азбестъ; когда давленіе въ трубкѣ падаетъ, ея сопротивленіе возрастаетъ и между вспомогательными электродами автоматически проходитъ разрядъ, который освобождаетъ изъ слюды нѣкоторое количество газа.

2) Тоненькая палладіева трубочка, закрытая съ одного конца, впаивается въ рѣнтгеновскую трубку, съ помощью узкаго полаго наколѣнника изъ платины\*). Для повышенія давленія нагрѣваютъ палладій газовымъ пламенемъ, такъ что водородъ можетъ диффундировать черезъ нагрѣтый палладій внутрь трубки.

3) Воздухъ впускается черезъ поры куска неглазированнаго фарфора, обыкновенно закрытаго ртутью, поверхность котораго открывается на одинъ моментъ посредствомъ пневматическаго приспособленія.

Однако, всѣ эти методы не свободны отъ недостатковъ. Регулировка вообще мало чувствительна. Запасъ газа часто истощается въ приспособленіяхъ 1-го рода раньше, чѣмъ трубка успѣетъ испортиться; другія же приспособленія требуютъ большаго умѣнія въ обращеніи съ ними. Регуляторъ съ слюдянымъ кружкомъ изображенъ на рис. 1, остальные части котораго понятны сами по себѣ.

Послѣдній каталогъ фирмы Мюллеръ (C. & E. Müller) содержитъ 18 типовъ трубокъ. Рис. 2, взятый оттуда, является типичнымъ образцомъ современной трубки для сильныхъ разрядовъ.

О причинѣ исчезновенія газа при продолжительномъ употребленіи трубокъ было построено много гипотезъ. Было высказано предположеніе, что іоны, переносящіе разрядъ, вгоняются въ стѣнки и тамъ застрѣваютъ; во всякомъ случаѣ несомнѣнно, что значительная часть газа абсорбируется стекломъ, при чемъ свинцовое стекло абсорбируетъ больше іенскаго.

Такъ какъ сопротивленіе трубки, а вмѣстѣ съ нимъ и сила тока, который проходитъ при данной разности потенциаловъ, зависятъ отъ давленія, послѣднее, очевидно, опредѣляетъ количество и жесткость получаемыхъ лучей. Кромѣ того, самъ катодъ долженъ быть окруженъ тонкимъ слоемъ газа, который облегчаетъ переходъ электричества съ металла въ окружающее пространство. Далѣе, теплота, освобождающаяся у антикатада повышаетъ температуру стѣнокъ иногда въ такой степе-

\*) Палладій нельзя непосредственно впаивать въ стекло.



пени, что они начинают выделять газъ, такъ что условія работы мѣ-

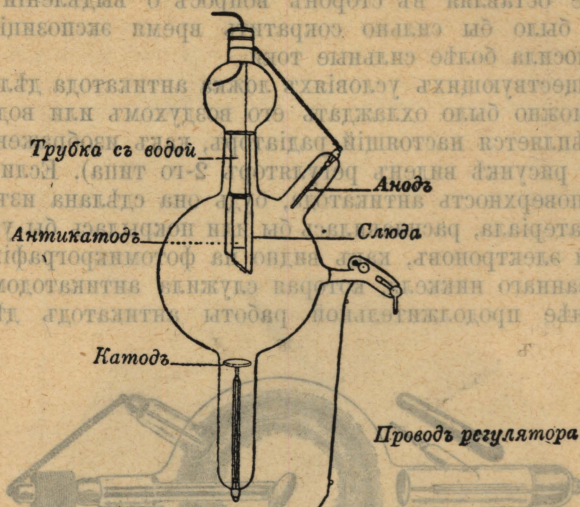


Рис. 1.

няются. Такимъ образомъ, новая трубка требуетъ нѣкоторой „формировки“ раньше чѣмъ давленіе въ ней будетъ сохранять достаточное постоянство во время работы, не повышаясь и не понижаясь. Эта операція требуетъ большой тщательности и терпѣнія; иногда, чтобы получить хорошую трубку для терапевтическихъ цѣлей, приходится часами пропускать токъ въ 5 миллиамперовъ. Однако, въ большинствѣ случаевъ сила тока, употребляемаго для этого, не превосходитъ 2 миллиамперовъ. При приготовленіи же трубокъ, предназначенныхъ для снимковъ, обыкновенно пользуются сильнымъ токомъ въ 20 миллиамперовъ, который пропускаютъ въ теченіи нѣсколькихъ секундъ или даже долей секундъ.

Продолжительность этой операціи опредѣляется, конечно, цѣлымъ рядомъ соображеній, но при такихъ сильныхъ токахъ она не можетъ превосходить нѣсколькихъ секундъ, принимая во вниманіе громадное количество тепла, выделяющееся у антикатада при ударѣ электроновъ.

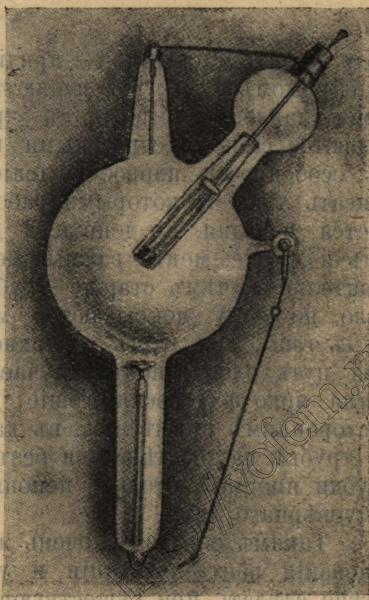


Рис. 2.



Съ тѣмъ же затрудненіемъ встрѣчаются при лѣченіи рентгеновскими лучами, даже оставляя въ сторонѣ вопросъ о выдѣленіи газа, такъ какъ можно было бы сильно сократить время экспозиціи, если бы трубка переносила болѣе сильные токи.

При существующихъ условіяхъ ложка антикатада дѣлается полой такъ, чтобы можно было охлаждать его воздухомъ или водой, или же на немъ укрѣпляется настоящій радиаторъ, какъ изображено на рис. 3. (На томъ же рисункѣ виденъ регуляторъ 2-го типа). Если не принять этихъ мѣръ, поверхность антикатада, будь она сдѣлана изъ самаго тугоплавкаго матеріала, расплавилась бы или покрывалась бы углубленіями подѣ ударами электроновъ, какъ видно на фотомикрографіи пластинки платинизированнаго никкеля, которая служила антикатодомъ. Для болѣе или менѣе продолжительной работы антикатодъ дѣлается изъ

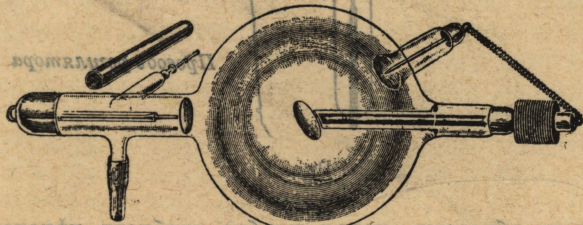


Рис. 3.

мѣди покрытой платиной — придиѣмъ, чистымъ придиѣмъ, танталомъ или вольфрамомъ тамъ, гдѣ падаютъ катодные лучи. Неправильныя колебанія давленія вмѣстѣ съ чрезмѣрнымъ нагрѣваніемъ антикатада являются самыми серьезными недостатками существующихъ системъ. Въ особенности первое явленіе не позволяетъ точно измѣрить или описать лучи съ которыми работаешь, такъ какъ ихъ характеръ мѣняется изъ дня въ день или даже во время одной экспозиціи. Но есть и другіе, менѣе важные дефекты, которые становятся тѣмъ чувствительнѣе, чѣмъ старше трубка. Такъ, на примѣръ, стѣнки трубки мало по малу покрываются металлическимъ налетомъ, поглощающимъ газы, при этомъ поверхность заряжается и измѣняется нормальный путь электроновъ. Случается также, что на стеклѣ появляются пятна ярко флуоресцирующие; они обязаны своимъ происхожденіемъ постороннимъ примѣсямъ въ катодѣ. Наконецъ, направленіе разряда въ трубкѣ часто мѣняется безъ всякой видимой причины. Поведеніе трубки иногда настолько непонятно, что она можетъ вызвать страхъ у суевѣрнаго лица.

Такимъ образомъ, очень желательно дать точныя количественныя основанія рентгенотерапіи и упростить технику, что врядъ ли возможно сдѣлать при существующихъ аппаратахъ.

Тѣмъ не менѣе, можно считать, что мы нынѣ имѣемъ болѣе совершенствованій. Лиліенфельду въ Лейпцигѣ удалось построить рент-



геновскую трубку, въ которой разръженіе достигло такой степени, что оставшіяся газъ болѣе не принимаетъ участія въ переносѣ электричества. Необходимыя для разряда электроны доставляются до-бѣла накаленной проволокой. Работу трубки можно контролировать, такъ какъ сила тока зависитъ отъ температуры проволоки. Онъ помѣщаетъ небольшую спираль изъ вольфрама въ центрѣ катода; если ее нагрѣть вспомогательнымъ токомъ, она испускаетъ потоки электроновъ, которые отталкиваются и уносятся къ антиматоду съ такою скоростью, что даютъ обильные рентгеновскіе лучи, падая на антиматодъ. новен



Рис. 4.

Такимъ образомъ, имѣя сильную индукціонную катушку и настолько тщательно эвакуированную трубку, что она не пропускаетъ разряда при разницѣ потенциаловъ даже въ 100 000 вольтъ, достаточно нагрѣть спираль: сила тока, который тогда пройдетъ черезъ трубку, зависитъ только отъ температуры спирали. Измѣняя разность потенциаловъ можно измѣнять скорость, съ которою электроны ударяются объ антиматодъ, такъ что можно варьировать жесткость  $x$ -лучей независимо отъ ихъ количества.

Это было недостижимо при всѣхъ другихъ типахъ рентгеновскихъ трубокъ. Нельзя переоцнить значеніе этого обстоятельства; оно превращаетъ рентгеновскую трубку въ точный инструментъ. Многіе вопросы еще остаются открытыми, такъ какъ этотъ аппаратъ еще не вышелъ изъ лабораторной стадіи. Однако, небезинтересно будетъ замѣтить, что трубка Кулиджа дала уже нѣсколько отличныхъ результатовъ.

Наиболѣе удачная трубка, сдѣланная до сихъ поръ, имѣла 18 см. въ діаметрѣ и была выдута изъ іенскаго стекла. Она пропускала отъ



1,7 до 36 миллиамперовъ при температурѣ спирали, мѣнявшейся между 2010° и 2240° абсолютной шкалы. Однажды черезъ нее пропустили въ теченіи 50 минутъ 25 миллиамперовъ. Конечно, антикатодъ при этомъ сильно нагрѣлся, но, повидимому, это не имѣло вліянія на работу трубки. Стекло ея не флуоресцировало и вольтажъ оставался постояннымъ. Токъ можетъ проходить черезъ трубку Кулиджа только въ одномъ направленіи; такимъ образомъ, она сама является „выпрямителемъ“ и можетъ работать съ переменнымъ токомъ безъ какихъ либо добавочныхъ приспособленій для уничтоженія одной фазы. то эмц

Наконецъ, перспектива ускорить электроны на столько, что они дадутъ радіацію съ длиной волны равной или даже короче длины волны  $\gamma$ -лучей радіа, является очень многообещающей для терапіи.

## Какъ согласовать преподаваніе въ средней школѣ съ прогрессомъ науки.

*Докладъ Э. Бореля,*

профессора Faculté des Sciences (Paris) и субъ-директора École normale supérieure.

Мм. Gr.

Обыкновенно общество довольно мало интересуется программами и методами начального образованія, технического или профессиональнаго обученія и высшаго образованія; общество правильно считаетъ, что это, прежде всего, дѣло специалистовъ, и вполне полагается на этихъ послѣднихъ. Оно принимаетъ къ сердцу лишь нѣкоторые пункты, которые касаются религіи или политики, касаются болѣе или менѣе непосредственнаго вліянія государства или нѣкоторыхъ конфессіональных группъ на организацію преподаванія.

Иначе дѣло обстоитъ со среднимъ образованіемъ. Программы средней школы часто подвергаются обсужденію не только на страницахъ журналовъ, но и на столбцахъ ежедневныхъ газетъ; каждый интересуется этими программами и охотно высказываетъ относительно нихъ свой взглядъ. Сами учителя тоже интересуются тѣми учебными предметами, которые непосредственно ихъ не касаются. Университетскій профессоръ греческаго языка весьма удивился бы, если бы его попросили высказаться относительно курса математики, а профессоръ математики удивился бы не меньше, если бы его спросили о программахъ греческаго языка, но оба они имѣютъ мотивированное мнѣніе о томъ какое мѣсто должны занимать въ средней школѣ древніе языки и точныя науки. Такое положеніе вещей вполне естественно и объясняется нѣсколькими причинами, между которыми главная, можетъ быть,

\*) Во избѣжаніе недоразумѣнія подчеркиваю, что рѣчь идетъ здѣсь о



единство цѣли средняго образованія \*); это единство, характеризуется прекраснымъ названіемъ гуманитарнаго образованія, которое часто даютъ средней школѣ и которое она должна стремиться оправдать. Задача заключается, прежде всего, въ томъ, чтобы воспитать культурныхъ людей, обладающихъ тѣмъ „общимъ образованіемъ“, которое почти не поддается догматическому опредѣленію, хотя мы имѣемъ о немъ вполне ясное представленіе. Точныя знанія разсматриваются не какъ самоцѣль, но какъ средство для образованія, одинаково необходимаго всѣмъ тѣмъ людямъ, которымъ предстоитъ въ той или другой мѣрѣ направлять работу другихъ людей. Понятіе средняго образованія обсуждалось весьма усиленно, и нѣкоторые даже оспариваютъ самое право на существованіе такого образованія; указывая на то, что въ современномъ обществѣ нѣтъ больше мѣста для такого общаго образованія, что жизнь безусловно слишкомъ коротка, чтобы можно было терять нѣсколько лѣтъ на приобрѣтеніе такихъ знаній, которыя не находятъ себѣ непосредственнаго примѣненія. Мы не будемъ здѣсь обсуждать этого строго утилитарнаго взгляда; мы не будемъ также разсматривать вопроса, въ какой мѣрѣ общественная и политическая эволюція можетъ видоизмѣнить организацію средней школы и контингентъ ея воспитанниковъ; мы просто констатируемъ существованіе средней школы, какъ фактъ современной социальной жизни. Однако, вслѣдствіе возрастающаго усложненія жизни и международныхъ отношеній, повидимому, все больше и больше будетъ возрастать потребность въ такихъ людяхъ, которые координировали бы разрозненные усилія рабочихъ массъ. Врядъ ли можно оспаривать, что для такой координаціи необходимо общее образованіе.

Эволюція средней школы можетъ совершаться лишь очень медленно.

Что такое общее образованіе? Рѣшеніе этого вопроса зависитъ отъ мнѣнія тѣхъ людей, которые считаются образованными. Но эти люди получили образованіе въ средней школѣ въ своей молодости; очень немногіе изъ нихъ не считаютъ превосходнымъ того образованія, которое получили лучшіе изъ нихъ, и лишь рѣдко кто сохраняетъ ту свѣжесть ума, которую проявилъ Лависсъ (Lavisse) въ своихъ воспоминаніяхъ, появившихся въ годъ его юбилея и содержащихъ критику системы образованія которая пятьдесятъ лѣтъ тому назадъ выдвинула его какъ одного изъ самыхъ выдающихся воспитанниковъ Нормальной Школы.

французскомъ *enseignement secondaire*, завершающемся бакалаврской степенью. Въ нѣкоторыхъ странахъ первый годъ университетскаго курса, иногда даже первые два или три года, соответствуютъ довольно точно послѣднимъ годамъ французскаго *enseignement secondaire* (мы переводимъ здѣсь этотъ терминъ словами „среднее образованіе“ или „средняя школа“. Перев.).

По весьма понятнымъ причинамъ въ различныхъ странахъ средняя школа имѣетъ различный характеръ, чего нельзя сказать о высшемъ образованіи, а также о начальномъ и о техническомъ или профессиональномъ образованіи.



Консервативныя тенденціи старшаго поколѣнія (бывшихъ воспитанниковъ школы) сказываются не только въ печати и въ общественномъ мнѣніи; къ этому поколѣнію принадлежатъ два класса лицъ, влияние которыхъ на школу весьма велико: во-первыхъ, большинство родителей учащихся и, во-вторыхъ, сами преподаватели средней школы \*). Медленный ходъ эволюціи средней школы имѣетъ также болѣе глубокія и болѣе серьезныя основанія. Лишь въ рѣдкихъ случаяхъ мы можемъ очень хорошо научить тому, чему мы не учились сами, когда были учениками; всякій прогрессъ школы можетъ явиться лишь въ результатъ послѣдовательнаго ряда опытовъ очень многихъ учителей. Какъ бы интеллигентнѣе ни былъ учитель, какъ бы онъ ни былъ преданъ своему дѣлу, онъ не въ состояніи замѣнить эту преемственность импровизаціей и собственными силами построить столь сложный предметъ, какимъ является цѣльное среднее образованіе. Точно такъ же самые искусные конструкторы строили бы недостаточно устойчивыя и плохо идущія суда, если бы они опирались только на теорію и не руководствовались всякій разъ старыми образцами. Впрочемъ, эту медленность эволюціи можно признать скорѣе полезной, чѣмъ вредной, если согласиться со многими превосходными учителями въ томъ, что въ среднемъ образованіи содержаніе менѣе важно, чѣмъ форма, что по существу образованіе ума при помощи точныхъ знаній гораздо важнѣе, чѣмъ приобрѣтеніе этихъ знаній. Если задача въ томъ, чтобы дать образованіе людямъ, то почему бы этому гуманитарному образованію эволюціонировать быстрѣе, чѣмъ эволюционируетъ самъ чловѣкъ? Да и такъ ли мы уже отличаемся отъ нашихъ дѣдовъ? То, что было хорошо для нихъ, имѣетъ, можетъ быть, и для насъ большую цѣнность, чѣмъ какія-то новшества, достоинства коихъ сомнительны?

Эти доводы очень дѣйствительны и въ достаточной мѣрѣ оправдываютъ ту оппозицію, которую встрѣчаетъ каждый проектъ измѣненія программъ средней школы. Несомнѣнно, что эти измѣненія должны

\*) Вліяніе этихъ двухъ группъ особенно сильно и наиболее консервативно въ Парижѣ по двумъ причинамъ. Съ одной стороны, въ среднемъ, между родителями учащихся парижскихъ лицеевъ процентъ лицъ, прошедшихъ черезъ среднюю школу, несравненно болѣе великъ, чѣмъ между родителями провинціальныхъ лицеевъ и коллегій. Съ другой стороны, преподаватели парижскихъ лицеевъ, въ среднемъ, старше, чѣмъ преподаватели провинціальныхъ лицеевъ, такъ какъ назначеніе въ Парижѣ дается лишь послѣ болѣе или менѣе продолжительнаго стажа въ провинціи.

Недавно мнѣ пришлось наблюдать одинъ типичный образецъ многочисленныхъ формъ консервативнаго вліянія родителей учащихся. Дѣло шло объ одномъ не существенномъ видоизмѣненіи въ грамматической терминологіи; мать ученика объяснила мнѣ, что она не могла рѣшиться принять эту новую терминологию; но ея сынъ легко понялъ соответствіе между новой терминологіей и прежней, которую мать знала, и усвоилъ себѣ привычку обращаться къ ней въ тѣхъ тонкихъ случаяхъ, которые приводятъ учащихся въ замѣшательство: „скажи мнѣ, мама, какъ это называлось въ твоѣ время? я уже буду знать, что нужно поставить теперь!“ Эта превосходная мать такимъ образомъ разрушала всѣ усилія, которыя прилагалъ учитель ея сына, чтобы усовершенствовать его знанія. (Я не знаю, впрочемъ, правъ ли былъ преподаватель со своимъ нововведеніемъ или нѣтъ).



совершаться съ чрезвычайно большой осторожностью: всякое черезчуръ рѣзкое или слишкомъ значительное измѣненіе легко можетъ потомъ быть въ тягость въ теченіе довольно долгаго времени. Можно даже утверждать почти категорически, что всякое вообще измѣненіе прежде всего приноситъ нѣкоторый вредъ и въ теченіе періода приспособленія влечетъ за собой больше неудобствъ, чѣмъ выгодъ.

Никто, однако, не думаетъ, что средняя школа должна оставаться неизмѣнной. Во Франціи самые непримиримые приверженцы традиціи и греко-латинской школы желаютъ все-таки, чтобы въ школахъ на ряду съ греческими и латинскими классиками изучались также французскіе авторы XVII вѣка. Такимъ образомъ значительную часть программы по литературѣ пришлось измѣнить меньше чѣмъ за два вѣка; раньше смерти Людовика XIV, конечно нельзя было считать его вѣкъ классическимъ.

Еще быстрее измѣняются программы по исторіи, по географіи и экспериментальнымъ наукамъ; теперь показалось бы совершеннымъ абсурдомъ возвращеніе къ программамъ, которыя проходились всего лишь сто лѣтъ тому назадъ. Что касается наукъ, связанныхъ съ техническими примѣненіями, то иногда общество не только не стремится задерживать ихъ эволюціи, но, наоборотъ, находитъ ее слишкомъ медленной. Съ каждымъ днемъ примѣненія техники завоевываютъ себѣ все большее мѣсто въ нашемъ обиходѣ, такъ что сама повседневная жизнь указываетъ каждому изъ насъ на пробѣлы въ образованіи, полученномъ нами на школьной скамьѣ. Многие можно было бы сказать объ этомъ возрастающемъ приспособленіи различныхъ учебныхъ предметовъ къ прогрессу науки и къ эволюціи человѣческаго общества. Но сейчасъ я ограничусь наиболѣе интереснымъ и особенно любопытнымъ явленіемъ — необыкновенно устойчивымъ характеромъ преподаванія математики.

Къ указаннымъ выше общимъ причинамъ медленной эволюціи всего преподаванія въ средней школѣ присоединяются еще нѣкоторыя причины, относящіяся specially къ преподаванію математики. Математика представляетъ собою наиболѣе древнюю науку; „Элементы“ Евклида имѣютъ за собой уже двадцать пять вѣковъ, а элементарныя отдѣлы геометріи и ариѳметики давно уже достигли высшей степени логическаго совершенства, дальше которой итти некуда. И если главная цѣль преподаванія этихъ элементовъ — приучать учениковъ къ строгому мышленію, то рѣшительно нѣтъ никакой необходимости искать болѣе совершенныхъ образцовъ. Несомнѣнно по этой именно причинѣ еще и теперь въ нѣкоторыхъ странахъ, въ особенности въ Англіи, пользуются для преподаванія геометріи просто переводами Евклида. Консервативныя тенденціи въ преподаваніи математики можно было бы пояснить еще и другими примѣрами.



Не подлежит сомнѣнію, что въ математикѣ, какъ и въ другихъ дисциплинахъ, воспитательная роль учебнаго предмета зависитъ главнымъ образомъ отъ его традицій; всякое рѣзкое измѣненіе прежде всего приноситъ вредъ. Въ распредѣленіи матеріала, въ выборѣ упражненій, въ отвѣтахъ учителя на болѣе или менѣе сознательныя возраженія учениковъ, — во всемъ этомъ необходимо въ каждый моментъ руководствоваться опытомъ многихъ поколѣній. Когда въ школу вводится новый предметъ, или даже если онъ преподавался и раньше, но въ первый разъ вводится въ младшій классъ, то всю эту традицію приходится создавать заново. Каждому учителю приходится разсчитывать исключительно на свой собственный опытъ, а опытъ одного человѣка имѣетъ, конечно, весьма малое значеніе въ сравненіи съ опытомъ нѣсколькихъ учительскихъ поколѣній. Предположимъ даже, что у молодыхъ или старыхъ учителей нѣтъ никакихъ предупрежденій противъ нововведенія, и что ихъ не повергаетъ въ преждевременное уныніе неудача первыхъ опытовъ, вызванная, можетъ быть, случайными причинами. При всемъ томъ нельзя надѣяться, что новый учебный предметъ скоро достигнетъ такой же степени совершенства, какую имѣла вытѣсненная имъ старая наука. При сколько-нибудь существенныхъ нововведеніяхъ такая степень совершенства можетъ быть достигнута, по меньшей мѣрѣ, черезъ одно поколѣніе, да и то лишь при самыхъ благоприятныхъ обстоятельствахъ. Въ самомъ дѣлѣ, необходимо, чтобы была обновлена болѣшая часть преподавательскаго персонала, такъ какъ, вообще, очень трудно научить дѣтей тому, чему самъ не научился въ ихъ возрастѣ.

Въ виду этого естественно возникаетъ вопросъ, стоитъ ли труда заниматься программами математики въ средней школѣ. Если преподаваніе математики имѣетъ цѣлью образованіе ума, а не приобритеніе точныхъ знаній, и если эта цѣль достигается почти совершеннымъ образомъ съ помощью традиціонныхъ программъ, то къ чему измѣнять эти программы, коль скоро извѣстно къ тому же, что всякое измѣненіе влечетъ за собой маленькій кризисъ? Я желалъ бы объяснить въ немногихъ словахъ, почему такая точка зрѣнія представляется мнѣ неприемлемой.

Прежде всего, вълѣдствіе фактической стороны дѣла. Невозможно сохранить въ неприкосновенности одну часть организма, если измѣняются всѣ остальные его части. Въ самомъ дѣлѣ, въ гуманитарномъ образованіи науки словесныя и точныя науки составляютъ одно цѣлое: нельзя разсматривать отдѣльно различныя спеціальныя программы, если цѣль школы одна — сформировать культурнаго человѣка. Математика не можетъ поэтому оставаться единственной неизмѣнной частью школы, коль скоро все въ этой школѣ мѣняется; необходимость въ такихъ измѣненіяхъ вызывается уже нуждами родственныхъ предметовъ программы; за примѣрами ходить недалеко.

Но мало того; еще важнѣе, можетъ быть, слѣдующая сторона дѣла: для школы не безопасно удаляться все болѣе и болѣе отъ жизни



и реальных условий. Съ каждымъ днемъ приложеніе науки все глубже проникають въ обиходъ нашей жизни: мы ежедневно пользуемся велосипедомъ, на столбцахъ газетъ мы постоянно встрѣчаемъ различныя графики; когда у насъ дома кто-нибудь заболѣваетъ, мы вычерчиваемъ кривыя температуры. Если преподаваніе математики будетъ опираться на эти столь привычныя намъ вещи, то оно сдѣлается болѣе интереснымъ, будетъ чуждо мертвой схоластики. Когда преподаваніе получаетъ слишкомъ схоластическій характеръ, то оно вызываетъ у многихъ учениковъ отвращеніе и не только не дѣйствуетъ образовательнымъ образомъ, но, напротивъ, извѣстной части наноситъ прямой вредъ. Еще вопросъ, всегда ли школьной математикѣ удавалось избѣгать этой опасности.

Когда говорятъ, что преподаваніе математики должно стать ближе къ реальному міру, то нѣкоторые думаютъ на самомъ дѣлѣ или притворно, будто рѣчь идетъ о наивной замѣнѣ такихъ словъ, какъ окружность, сфера, или конусъ словами „кружокъ“, „мячикъ“, „голова сахара“ и т. д. Они забываютъ, что преподаваніе математики можетъ получить полную воспитательную цѣнность лишь при томъ условіи, если оно будетъ избѣгать слишкомъ распространеннаго софизма, будто реальныя трудности можно разрѣшить съ помощью простыхъ словесныхъ опредѣленій, не проверяя, согласны ли эти опредѣленія съ обиходнымъ словаремъ. Ребенокъ имѣетъ конкретное представленіе объ окружности или о шарѣ. Съ другой стороны, геометръ даетъ отвлеченное опредѣленіе этихъ образовъ, на которомъ онъ основываетъ свои разсужденія; софизмъ же состоитъ въ томъ, что безъ проверки, основываясь исключительно на тождественности употребляемыхъ словъ допускаютъ, что конкретный шаръ „здраваго смысла“ и отвлеченная сфера геометра есть въ точности одно и то же. Необходимо, слѣдовательно, всегда сопоставлять опредѣленія съ реальнымъ міромъ, чтобы показать согласіе, по крайней мѣрѣ, приблизительное, между искусственнымъ языкомъ, созданнымъ математиками, и привычной ученику обиходной рѣчью.

Поразительные научные успѣхи XVIII вѣка, которые повлекли за собой развитіе техники въ XIX вѣкѣ, можно связать съ четырьмя великими именами: Галилея, Декарта, Ньютона и Лейбница. Благодаря аналитической геометріи и дифференціальному счисленію, проблемы механики оказалось возможнымъ рѣшить исчерпывающимъ образомъ на основѣ прочно установленныхъ принциповъ. Это, быть можетъ, самый важный фактъ въ исторіи человѣчества; благодаря одержаннымъ такимъ образомъ техническимъ побѣдамъ, чело- вѣкъ завоевалъ и организовалъ земной шаръ. Нѣтъ ни одного объекта въ матеріальномъ мірѣ и ни одной мысли въ области духа, на которыхъ не отразилось бы вліяніе научной революціи XVII вѣка. Ни одинъ изъ элементовъ современной цивилизаціи не могъ бы существовать безъ принциповъ механики, безъ аналитической геометріи и дифференціальнаго счисленія. Нѣтъ ни одной отрасли въ дѣятельности



человѣка, которая не испытала бы на себѣ сильнаго вліянія генія Галилея, Декарта, Ньютона и Лейбница. Я, впрочемъ, ошибся: нѣчто все-таки ускользнуло отъ этого вліянія и осталось безъ измѣненія, — а именно, система преподаванія математики въ средней школѣ. Лишь въ 1902 г. нѣкоторые, полагая, что за двѣсти лѣтъ „новыя“ идеи въ достаточной мѣрѣ доказали свою состоятельность и смѣло могутъ быть излагаемы молодежи, предприняли въ скромныхъ размѣрахъ попытку измѣненія французскихъ программъ. Это новшество многимъ показалось возмутительнымъ, и споры о немъ не прекратились еще до настоящаго времени. Обсужденіе относящихся сюда вопросовъ, которому будетъ посвящена часть засѣданія нашего Конгресса, можетъ быть только полезно, такъ какъ всякое новшество въ преподаваніи создается съ большимъ трудомъ; только съ помощью собирательнаго опыта многихъ учителей можно надѣяться сократить немного тотъ періодъ, въ теченіе котораго нововведеніе, вслѣдствіе недостаточнаго приспособленія, приноситъ существенныя неудобства. Я не желаю предвосхищать сейчасъ результатовъ предстоящаго намъ обсужденія, которое несомнѣнно будетъ серьезнымъ и плодотворнымъ: порукой въ этомъ служить число участниковъ и ихъ компетентность. Но я желалъ бы лишь попытаться отвѣтить на нѣкоторые апріорныя возраженія, которыя часто раздаются противъ всякаго нововведенія въ программы математики. Исходной точкой этихъ возраженій является, главнымъ образомъ, распространенное представленіе о математической наукѣ, какъ о линейномъ рядѣ или какъ о небольшомъ числѣ линейныхъ рядовъ, въ каждомъ изъ которыхъ порядокъ слѣдованія звеньевъ отличается строгой неизмѣнностью. Если принять такое представленіе, то ясно, что вводить въ школу новое ученіе можно лишь вводя вмѣстѣ съ нимъ все то, что предшествуетъ ему въ логическомъ развитіи науки; такимъ образомъ, чрезвычайно трудно вводить въ школу новыя идеи, если не желаемъ перегружать программъ. Въ частности установилось обыкновеніе называть нѣкоторые отдѣлы математики высшими въ противоположность ея элементарнымъ частямъ; къ первымъ причисляютъ дифференціальное и интегральное численіе, одно имя которыхъ вселяетъ въ непосвященныхъ страхъ; раздаются голоса, будто нелѣпо, вводить эти высокія матеріи, къ которымъ относится также аналитическая геометрія, для тѣхъ, кто не знаетъ въ совершенствѣ такъ называемой элементарной математики. Многие наши современники, которые въ школѣ не оказывали особыхъ успѣховъ по математикѣ, удивятся, если узнаютъ, что они, сами того не подозревая, занимаются аналитической геометріей, всякій разъ какъ разматриваютъ графики, столь часто встрѣчающіяся на столбцахъ газетъ; а иногда, разсматривая большую или меньшую скорость колебаній этихъ графикъ и слѣдствія, которыя можно отсюда вывести, они, сами того не зная, занимаются дифференціальнымъ и интегральнымъ численіемъ. Эти страшныя науки, по крайней мѣрѣ въ своихъ элементахъ, стоятъ въ гораздо большей близости къ усваиваемымъ въ элементарной школѣ простымъ математическимъ свѣдѣніямъ, чѣмъ многочисленные разсужденія объ объемахъ круглыхъ тѣлъ, или объ уравненіяхъ второй сте-



пени, и даже чѣмъ вычисленія съ обыкновенными дробями\*), и множество другихъ вопросовъ, которые внушаютъ ученикамъ ужасъ и въ девяносто девяти случаяхъ изъ ста обречены на забвеніе сейчасъ же по окончаніи экзаменовъ.

Дѣйствительные элементы математики, безъ которыхъ невозможно идти дальше, сводятся къ очень немногому: къ свѣдѣніямъ по ариметикѣ и геометріи, необходимымъ для пониманія и примѣненія метрической системы\*\*), достаточно прибавить принципы алгебраическаго обозначенія, чтобы получить прочный фундаментъ, на основаніи котораго можно продолжать изученіе математики въ разнообразныхъ направленіяхъ, руководясь въ распредѣленіи матеріала только традиціей и обычаемъ. Если бы не существовало традицій, то можно было бы поставить такую задачу: разработать изъ всѣхъ отдѣловъ математики курсъ, приуроченный къ современнымъ потребностямъ науки и техники; большую роль въ немъ играла бы механика, а прочія дисциплины были бы ей подчинены. Весьма интересно было бы попытаться провести такую систему въ странѣ, находящейся въ состояніи быстрого развитія: послѣ короткаго періода нащупыванія удалось бы, вѣроятно, выиграть очень много. Но въ странахъ, гдѣ средняя школа имѣетъ прочную организацію, освященную стариной, не можетъ быть и рѣчи о столь большихъ потрясеніяхъ на счетъ дѣлаго поколѣнія учащихся: по причинамъ, о которыхъ говорилось уже выше, измѣненія необходимо вводить медленно. Не будетъ, однако, преувеличеніемъ, если скажемъ, что для преподавателя математики въ средней школѣ было бы столь же вопіющей небытію, умалчивать о Галилеѣ, Декартѣ, Ньютонѣ и Лейбницѣ, какъ для профессора химіи — не упомянуть о Лавуазье или для историка — обойти молчаніемъ французскую революцію. Преподаваніе математики должно быть согласовано съ курсами другихъ наукъ, и, что особенно

\*) Исключительное мѣсто, которое обыкновенныя дроби занимаютъ въ преподаваніи математики, являются пережиткомъ той эпохи, когда метрическая система еще не вошла во всеобщее употребленіе, какъ мы это видимъ теперь во всѣхъ культурныхъ странахъ, почти за однимъ только исключеніемъ. Широкая популяризація метрической системы должна повлечь за собой вытѣсненіе обыкновенныхъ дробей десятичными и въ связи съ этимъ упрощеніе курса ариметики, такъ какъ дѣйствія надъ десятичными дробями должны преподаваться непосредственно, какъ простое обобщеніе дѣйствій надъ цѣлыми числами. Правда, обыкновенныя дроби интересны для математики; но въѣдъ и непрерывныя дроби интересны не въ меньшей степени, а ихъ, однако, не включать же въ элементарныя программы.

\*\*) Некоторые «образованные люди» обнаруживаютъ въ этомъ отношеніи грубое невѣжество, которое иногда приводитъ къ курьезнымъ небытіямъ. Недавно на первой страницѣ большой утренней газеты было напечатано крупнымъ шрифтомъ въ заголовкѣ одной статьи, что каучуковая мостовая обходится въ три франка за 1 кв. см. По прочтеніи статьи можно было убѣдиться, что авторъ написалъ ее по англійскому оригиналу, въ которомъ была указана цѣна въ 100 франковъ (или, какъ мнѣ думается, въ четыре фунта) за 1 кв. ф. Французскій журналистъ навѣтъ справку; футъ равенъ 30 см., слѣдовательно, 1 кв. ф. «равенъ» 30 кв. см., откуда и получается цѣна въ 3 франка (вмѣсто 10 сантимовъ, которые получаются на самомъ дѣлѣ, такъ какъ квадратъ, сторона котораго равна 30 см., содержитъ  $30 \times 30 = 900$  кв. см.



важно, должно быть согласовано съ реальной жизнью. При такомъ условіи она, несомнѣнно, будетъ интересовать гораздо большее число учениковъ, и тогда изгладится рѣзкое несоотвѣтствіе между положеніемъ математики въ жизни современнаго общества и тѣмъ интересомъ, который питаетъ къ ней огромное множество лицъ, играющихъ въ этомъ обществѣ руководящую роль. Это печальное явленіе объясняется тѣмъ, что математика, преподаваемая въ нашей средней школѣ, есть лишь схоластическій пережитокъ, тогда какъ міромъ править другая математика, и лишь очень малому числу избранныхъ дано восторгаться гордой мощью той математики. Но всякій образованный человѣкъ долженъ бы по крайней мѣрѣ, знать, что эта математика существуетъ, а не воображать себѣ всѣхъ математиковъ, въ родѣ какихъ-то маньяковъ, проводящихъ ночи за извлеченіемъ кубическихъ корней или даже корней пятой степени, подобно столь знаменитымъ лошадямъ изъ Эльберфельда.

Можетъ возникнуть такое сомнѣніе: не представляется ли опаснымъ согласованіе преподаванія въ средней школѣ съ прогрессомъ наукъ въ томъ отношеніи, что такого рода приспособленіе никогда не можетъ быть закончено? Коль скоро мы откажемся отъ благоразумнаго постоянства, то не будемъ ли мы вынуждены непрерывно вводить все новыя и новыя измѣненія къ явному ущербу для дѣла. Дѣйствительно, безусловно необходимо, чтобы процессъ согласованія совершался осторожно и постепенно. Подобно тому, какъ программы по литературѣ допускаютъ въ школу новыхъ авторовъ лишь по истеченіи извѣстной давности послѣ признанія ихъ современниками, точно также и программы по точнымъ наукамъ должны остерегаться увлеченія мимолетной модой, не должны впадать въ весьма распространенную погрѣшность противъ перспективы, побуждающую насъ приписывать особенную важность послѣднему открытію, сдѣланному на нашихъ глазахъ. Преподаваніе точныхъ наукъ въ средней школѣ не имѣетъ своей цѣлью готовить учащихся къ тому, чтобы они могли понимать и усовершенствовать аэропланы, беспроволочный телеграфъ или цвѣтную кинематографію. Болѣе благоразумные должны будутъ считать себя удовлетворенными, если мы для приданія особой устойчивости преподаванію математики, этой основы всего курса точныхъ наукъ, установимъ отсрочку въ 100 лѣтъ, послѣ которой работы, имѣющія для науки жизненное значеніе, уже не могутъ считаться какъ бы несуществующими. Но вотъ уже болѣе двухъ вѣковъ какъ принципы механики, аналитической геометріи и дифференціального счисленія съ торжествомъ выдержали испытаніе передъ лицомъ времени. Теперь это уже не мимолетныя фантазіи, а самая основа всѣхъ нашихъ научныхъ трудовъ. И лишь послѣ того, какъ эти насущныя ученія займутъ полюбавшее имъ мѣсто, преподаваніе точныхъ наукъ въ нашей средней школѣ будетъ дѣйствительно современнымъ и получитъ поистинѣ воспитательное значеніе.



Остается одно распространенное возражение, которое дѣлаютъ а priori и на которое можно будетъ отвѣтить только фактами послѣ очень долгаго опыта. Не слѣдуетъ ли опасаться, что новые учебные предметы, къ которымъ школа недостаточно приспособилась, будутъ менѣе полезны для общаго образованія, чѣмъ старыя. Мы уже указывали на это возраженіе, выставляемое противъ всякихъ нововведеній и объяснили, что оно содержитъ въ себѣ долю истины. Всякое измѣненіе программы должно терпѣть неудачи, по крайней мѣрѣ, кажущіяся неудачи, по той простой причинѣ, что большинство учителей не можетъ сразу достигнуть такого же совершенства педагогической техники въ новыхъ учебныхъ предметахъ, какое достигнуто традиціонной техникой для старой программы. Но столь же вѣрно будетъ и утвержденіе, обратное этому пессимистическому возраженію: если правда, что главное въ средней школѣ — это не столько программа, сколько методъ, то всякое измѣненіе программъ должно будетъ въ концѣ концовъ дать хорошіе результаты, послѣ того какъ будутъ созданы подходящіе методы для новыхъ предметовъ. Слишкомъ парадоксально было бы утверждать, что такихъ методовъ, быть можетъ, и не существуетъ вовсе, и что нѣкоторыя дисциплины потому именно, что онѣ болѣе совершенны, имѣютъ менѣе воспитательную природу. А между тѣмъ по такой точно причинѣ ариметику часто противопоставляли алгебрѣ, и пытались искусственно изгнать алгебраическія обозначенія даже въ такихъ случаяхъ, гдѣ пользованіе ими значительно упрощало работу. Нѣкоторые настаиваютъ на томъ, будто это упрощеніе именно и вредно, что полезна самая работа, а не результатъ. Это почти все равно что утверждать, что не слѣдуетъ учить ребенка умноженію, а нужно заставлять его пользоваться сложеніемъ: если онъ, напримѣръ, желаетъ узнать, сколько стоятъ 125 предметовъ цѣною каждый въ 3 р. 75 коп., то пусть онъ повторитъ число 3 руб. 75 коп. слагаемымъ 125 разъ; придется гораздо больше поработать, но зато онъ въ совершенствѣ усвоитъ технику сложения, этого очень красиваго ариметическаго дѣйствія. Это, конечно, сушая правда; но вѣдь, когда ребенокъ научится умноженію, отъ него можно будетъ потребовать столь же большой работы съ помощью этого болѣе совершеннаго орудія, и эта работа не будетъ менѣе благотворна отъ того только, что она менѣе безплодна. Въ задачахъ по элементарной геометріи приходится пользоваться очень остроумными, подчасъ тонкими приемами, и тотъ, кто въ своей молодости вкусилъ ихъ прелесть, никогда ихъ не забудетъ. Но сладость этихъ воспоминаній отнюдь не должна заслонять отъ насъ того факта, что потраченная при этомъ работа не болѣе плодотворна, чѣмъ сложеніе 125 равныхъ слагаемыхъ\*); болѣе совершенные методы позволяютъ легко получить тѣ же результаты, а если затратить столь же большія усилія, пользуясь усовершенствованными методами, то можно будетъ уйти несравненно дальше.

\*) Замѣчаніе, написанное послѣ Съѣзда. Не бесполезно будетъ объяснить эту мысль точнѣе, такъ какъ не всѣ слушатели правильно поняли меня. Я никогда и не думалъ сомнѣваться въ томъ, что непосредственное изученіе фигуръ необходимо для развитія геометрическаго чувства юныхъ учениковъ. Я желалъ лишь поднять голосъ противъ злоупотребленія извѣстнаго рода задачами, усложяемыми искусственно и безъ надобности.



То же самое относится и къ дифференціальному и интегральному счисленію. Не будемъ же колебаться, и возможно скорѣе посвятимъ учащихъ въ эти чудесныя науки, которыя болѣе полезны и вмѣстѣ имѣютъ болѣе воспитательное значеніе, чѣмъ любая другая отрасль математики.

Реформистское теченіе и противоположное ему охранительное борются между собой изъ-за программъ средней школы не въ области математики только. Если бы сторонники реформы поняли хорошо, что всякая перемѣна вредна въ періоды ея осуществленія, и если бы консерваторы согласились, что разумное измѣненіе становится полезнымъ черезъ нѣкоторое время послѣ того, какъ оно войдетъ въ жизнь, и что преподаваніе не можетъ оставаться навѣки неизмѣннымъ, тогда можетъ быть, эти противоборствующія теченія могли бы помириться на медленной, осторожной и мудрой эволюціи.

## Новыя изслѣдованія о положительныхъ лучахъ.

А. Фрумкина.

Положительные лучи были открыты Гольдштейномъ (E. Goldstein) въ 1886 г. Онъ замѣтилъ, что черезъ каналы, пробуравленные въ катодъ, проходятъ въ закатодное пространство свѣтящіяся пучки, при чемъ свѣтъ ихъ, вообще говоря, отличается отъ свѣта, исходящаго отъ пучковъ катодныхъ лучей. Гольдштейнъ назвалъ новые лучи по ихъ происхожденію „каналовыми“; позднѣйшія работы выяснили, что они являются потокомъ быстро-движущихся атомовъ или молекулъ, значительная часть которыхъ несетъ положительные заряды. Какъ теперь извѣстно, такіе потоки можно наблюдать не только за катодомъ; они исходятъ и отъ поверхности катода вмѣстѣ съ катодными лучами (такъ называемые  $K_1$ -лучи или „retrograde rays“) и, при опредѣленныхъ условіяхъ, отъ поверхности анода („анодные лучи“). Томсонъ (J. J. Thomson) соединяетъ всѣ эти лучи подъ общимъ названіемъ „положительныхъ“.

Уже Гольдштейнъ пробовалъ отклонить положительные лучи магнитомъ, однако, ему это не удалось. Лишь въ 1898 г. Винъ (W. Wien) нашелъ, что эти лучи отклоняются въ магнитномъ и электрическомъ полѣ, но гораздо меньше, чѣмъ катодные лучи. Направленіе отклоненія указывало на положительный зарядъ. Послѣ работы Вина дѣйствіе магнитнаго и электрическаго поля на положительные лучи было предметомъ цѣлаго ряда изслѣдованій Кенигсбергера (Koenigsberger), Герке и Рейхенгейма (Gehrcke und Reichenheim) Дехенда и Гаммера (v. Dechend und Hammer) и Томсона.



но лишь въ послѣдніе годы удалось окончательно выяснитъ этотъ вопросъ. Я изложу подробно преимущественно результаты работъ Томсона. Въ интересахъ связности мнѣ придется повторить многое, что хорошо извѣстно.

Дѣйствіе магнитнаго и электрическаго поля на заряженную частицу.

Вычислимъ сначала, каково должно быть отклоненіе движущейся частицы подѣ влияніемъ электрическаго и магнитнаго поля. Пусть масса частицы будетъ  $m$ , зарядъ  $e$ , скорость  $v$ , напряженіе полей, которое мы предполагаемъ одинаковымъ во всѣхъ точкахъ, соответственно  $E$  и  $H$ . Пусть далѣе первоначальная скорость частицы будетъ направлена горизонтально, а оба поля вертикальны. Обозначимъ вертикальное отклоненіе частицы черезъ  $z$  и горизонтальное черезъ  $y$ ; мы будемъ считать, что  $y$  и  $z$  малы по сравненію съ длиною пути частицы.

Разсмотримъ сначала вліяніе электрическаго поля. Сила, дѣйствующая на частицу, равна  $eE$  и направлена вертикально, ускореніе частицы равно  $eE/m$ ; если протяженіе поля равно  $a$ , мы можемъ считать, что частица находится подѣ его вліяніемъ въ теченіе времени  $a/v$ , и ея отклоненіе будетъ, согласно извѣстной формулѣ для равномернаго ускореннаго движенія  $\frac{1}{2} \frac{eE}{m} \left( \frac{a}{v} \right)^2 = \frac{e E a^2}{m v^2}$ , а скорость въ вертикальномъ направленіи  $\frac{eE}{m} \frac{a}{v}$ . Если частица будетъ двигаться, кромѣ того, на протяженіи  $b$  внѣ поля, то она отклонится еще на

$$z = \left( \frac{eE}{m} \frac{a}{v} \right) \frac{b}{v} = \frac{eE ab}{m v^2}$$

и полное отклоненіе будетъ:

$$z = \frac{e}{m v^2} E a \left( \frac{a}{2} + b \right). \quad (1)$$

Магнитное поле дѣйствуетъ на частицу съ силой, равной  $evH$  и направленной, согласно извѣстному правилу трехъ пальцевъ, перпендикулярно къ полю и къ скорости частицы. При маленькихъ отклоненіяхъ мы можемъ считать это направленіе постояннымъ и примѣнить тѣ же разсужденія, что и для  $z$ . Такимъ образомъ мы получаемъ для горизонтальнаго отклоненія

$$y = \frac{e}{m v} H a \left( \frac{a}{2} + b \right). \quad (2)$$

Наконецъ, при вышеупомянутомъ условіи,  $y$  и  $z$  не вліяютъ другъ на друга и формулы (1) и (2) даютъ и одновременное дѣйствіе обоихъ полей. Выведемъ теперь еще одну зависимость между величинами  $e/m$  и  $v$ .



Частицы приобретают свою кинетическую энергию, пройдя через некоторое падение потенциала  $V$ ; очевидно, что  $\frac{1}{2}mv^2 = eV$ , откуда

$$\frac{e}{mv^2} = \frac{1}{2} V. \quad (3)$$

$V$ , во всяком случае, не больше всего падения потенциала в темном пространстве у катода, так как частицы, попадающие за катод, приходят из этой области. Таким образом, мы видим, что, измеряя  $y$  и  $z$ , мы можем найти  $e/m$  и  $v$ , так как остальные величины, входящие в формулы (1) и (2), легко определить.

Траекторию положительных лучей нельзя непосредственно изучать по форме светящегося пучка, так как свет виден лишь при сравнительно высоких давлениях, при которых положительные лучи не распространяются достаточно далеко. Поэтому раньше на пути лучей ставили экран из виллемита (силикат цинка) или сидовой обманки, которые флуоресцируют под влиянием лучей, и наблюдали перемещение светлого пятна. Томсон воспользовался тем обстоятельством, что положительные лучи чернят поверхностный слой фотографической пластинки, так что, заменив экран из виллемита чувствительной пластинкой, можно точно определить значения  $y$  и  $z$  для всех лучей.

Из формулы (1) и (2) легко вывести, что

$$v = \frac{y}{z} \frac{B}{A} \quad (4)$$

и

$$\frac{e}{m} = \frac{y^2}{z} \frac{B}{A^2}, \quad (5)$$

где  $B$  и  $A$  для всех частиц одинаковы и зависят только от силы поля и формы аппарата\*). Из этих соотношений мы видим, что частицы, имеющие равное  $v$  и различные  $e/m$ , дадут на пластинке прямую, проходящую через точку  $y=0$ ,  $z=0$ , т. е. через начальную координату, соответствующее неотклоненным частицам. Частицы же с равными  $e/m$  и с различными  $v$  дадут параболу, с вершиной в начале координат; она касается в этой точке оси  $y$ -ов. Наконец, сравнивая формулы (3) и (1) мы получаем, что частицы, прошедшие одинаковое падение потенциалов, имеют равные  $z$ , т. е. дают прямую, параллельную оси  $y$ -ов, если только  $e$  имеет одинаковое значение в обеих формулах, т. е., если величина заряда не изменилась на всем его пути.

\*) Так как невозможно получить совершенно равномерного поля,  $A$  и  $B$  фактически имеют несколько другое значение, чем в выражениях (1) и (2); Томсон указал метод, который всегда позволяет их определить.



# Аппаратура.

Аппаратъ, которымъ пользовался Томсонъ при своихъ опытахъ, изображёнъ на рис. 1. *A* — стеклянный сосудъ, ёмкостью отъ 1 до 2 литровъ; его дѣлаютъ такимъ большимъ, чтобы разрядъ могъ проходить при очень низкихъ давленіяхъ. Этотъ сосудъ соединёнъ съ насосомъ Гэде и съ резервуаромъ изслѣдуемаго газа, который медленно просасывается черезъ тонкую капилляръ, такъ что запасъ газа

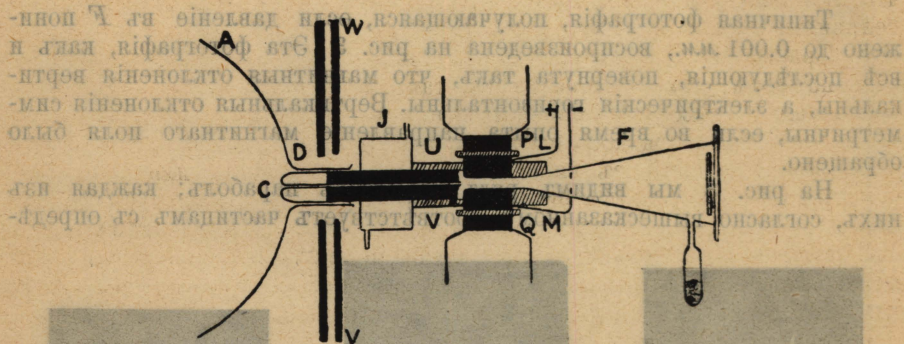


Рис. 1.

въ *A* постоянно возобновляется. Въ шейкѣ сосуда *D* укреплёнъ сургучомъ катодъ *C*. Передняя его часть сдѣлана изъ алюминія и въ ней пробурованъ каналъ для положительныхъ лучей. Задняя часть катода изъ мягкаго желѣза, въ которую вдѣлана, какъ это видно на рис. 2, тонкая мѣдная трубочка длиною въ 7 см. и діаметромъ, при точныхъ опытахъ, въ 0.1 мм и даже менѣе, такъ что черезъ нее

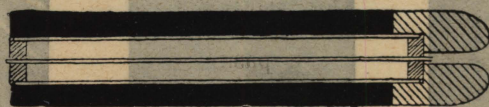


Рис. 2.

проходить строго параллельный и очень тонкій пучекъ положительныхъ лучей. Катодъ укреплёнъ сургучемъ въ эбонитовой коробкѣ *U V*; чтобы избѣжать размягченіе сургуча отъ нагреванія, катодъ постоянно охлаждается водою, циркулирующей въ *I*. Въ эбонитовую коробку вдѣланы пластинки изъ мягкаго желѣза *L* и *M*, соединенныя съ полюсами батареи высокаго напряженія. Въ точности на одной линіи съ ними расположены полюсы электромагнита *P* и *Q*, такъ чтобы оба поля совпадали; ихъ протяженіе составляетъ 3 см. Разстояніе между пластинками *L* и *M* было 1,5 мм. Далѣе, къ эбонитовой коробкѣ былъ прикреплёнъ сургучемъ коническій сосудъ *F*, длиною въ 40 см., на другомъ концѣ котораго находилось приспособленіе для фотографиче-



скихъ пластинокъ, позволявшее произвести нѣсколько снимковъ подрядъ. Къ сосуду  $F$  придѣлана трубка съ углемъ\*), охлаждаемая жидкимъ воздухомъ, благодаря чему въ  $F$  давление гораздо ниже чѣмъ въ  $A$ ; такъ какъ они соединены только очень тонкой и длинной трубкой, давления не выравнивались. Наконецъ,  $UV$  — толстыя желѣзныя пластинки, защищающія разрядъ въ  $A$  отъ дѣйствія электромагнитнаго поля.

### Фотографія.

Типичная фотографія, получающаяся, если давление въ  $F$  понижено до  $0.001$  мм., воспроизведена на рис. 3. Эта фотографія, какъ и всѣ послѣдующія, повернута такъ, что магнитныя отклоненія вертикальны, а электрическія горизонтальны. Вертикальныя отклоненія симметричны, если во время опыта направленіе магнитнаго поля было обращено.

На рис. 3 мы видимъ рядъ отрѣзковъ параболъ; каждая изъ нихъ, согласно вышесказанному, соответствуетъ частицамъ съ опредѣ-

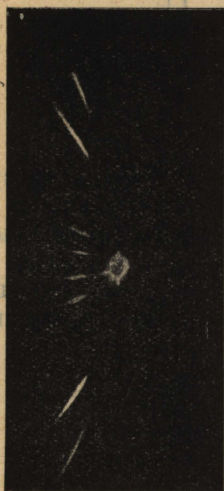


Рис. 3.



Рис. 4.

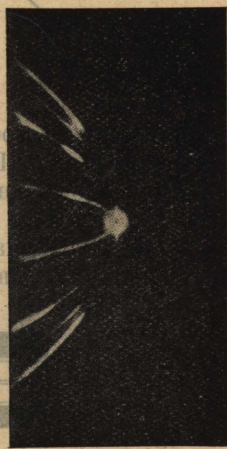


Рис. 5.

леннымъ значеніемъ  $e/m$ . Наибольшее значеніе  $e/m$ , соответствующее атому водорода съ однимъ элементарнымъ зарядомъ, равно  $10^4$ . Такъ какъ скорость частицъ пропорціональна отношенію магнитнаго отклоненія къ электрическому, она различна въ разныхъ точкахъ параболы и тѣмъ больше, чѣмъ ближе къ вершинѣ. Параболы, однако, не доходятъ до вершины, а начинаются всѣ на нѣкоторомъ разстояніи отъ нея. Точки, ближайшія къ вершинѣ, т. е. соответствующія частицамъ съ наибольшей скоростью и наибольшей кинетической энергіей, лежатъ

\*) Томсонъ пользуется углемъ, полученнымъ изъ скорлупы кокосоваго орѣха.



всѣ на одной вертикальной прямой; онѣ соотвѣтствуютъ въ виду формулъ (1) и (3) частицамъ, прошедшимъ все паденіе потенциала у катода и сохранившимъ весь свой зарядъ. Чѣмъ больше это паденіе потенциала, тѣмъ ближе начала параболъ къ оси  $y$ -овъ. Распределение яркости вдоль параболы бываетъ самое разнообразное. Наблюдаются параболы, яркость которыхъ почти одинакова на всемъ протяженіи, какъ на рис. 3, параболы съ быстро убывающей яркостью (рис. 4) и, наконецъ, параболы съ нѣсколькими яркими пятнами (рис. 5). Къ этому обстоятельству мы еще вернемся ниже.

### Вторичныя линіи.

Кромѣ отрѣзковъ параболъ, на пластинкѣ видны прямыя линіи, исходящія изъ начала координатъ по направленію къ различнымъ точкамъ параболъ, такъ называемыя „вторичныя“ линіи. Томсонъ приписываетъ эти линіи частицамъ, зарядъ которыхъ не оставался постояннымъ при прохожденіи поля.

Такія частицы могутъ быть двухъ родовъ: нейтральныя, іонизировавшіяся въ самомъ полѣ, и заряженныя, присоединившія при прохожденіи поля электронъ и нейтрализовавшія свой зарядъ. Въ подтвержденіе этого взгляда Томсонъ приводитъ рядъ интересныхъ опытовъ.

Если длина поля очень мала, вѣроятность измѣненія величины заряда сильно уменьшается, и вторичныя линіи должны исчезнуть. Дѣйствительно, на фотографіяхъ, снятыхъ съ полями длиной въ 1 мм., при чемъ сила поля была настолько увеличена, что отклоненія достигали прежнихъ размѣровъ, вторичныхъ линій совершенно не было видно. Если же давленіе въ сосудѣ  $F$  возрастаетъ, то вѣроятность столкновеній очень увеличивается, такъ что при болѣе высокихъ давленіяхъ наблюдаются только прямыя вторичныя линіи, а не параболы, что долгое время смущало наблюдателей.

Вторичныя линіи (въ отличіе отъ параболъ) перетерпѣваютъ интересное измѣненіе формы, если поля не вполне совпадаютъ. Предположимъ, напримѣръ, что магнитное поле сдвинуто по отношенію къ электрическому въ сторону экрана.

Разсмотримъ сначала частицы, приобретающія свой зарядъ при прохожденіи черезъ поле. Тѣ изъ нихъ, которыя іонизируются въ послѣднемъ участкѣ, гдѣ имѣется только магнитное поле, получаютъ только магнитное отклоненіе и дадутъ на фотографіи вертикальный отрѣзокъ

Рис. 6.

у начала координатъ, который переходитъ въ наклонный отрѣзокъ, соотвѣтствующій частицамъ, іонизировавшимся уже въ электрическомъ полѣ и получившимъ и электрическое отклоненіе. Вторичная линія этихъ частицъ будетъ имѣть форму, изображенную на рис. 6.

Рис. 7.



Что же касается частицъ, нейтрализующихъ свой зарядъ въ первомъ участкѣ, гдѣ имѣется только электрическое поле, то онѣ успѣютъ получить только электрическое отклоненіе и дадутъ вторичную линію съ горизонтальнымъ отрѣзкомъ, подобно изображенной на рис. 7. Рис. 8 представляетъ фотографію, снятую при сдвинутыхъ поляхъ; на ней хорошо видны вторичныя линіи обоихъ типовъ. Томсонъ приводитъ еще слѣдующіе опыты въ доказательство того, что зарядъ частицъ мѣняется на ихъ пути. Если отклонить пучокъ положительныхъ лучей однимъ магнитнымъ полемъ, онъ даетъ на экранѣ два свѣтлыхъ пятна, соответствующія отклоненнымъ и неотклоненнымъ лучамъ. Между ними находится менѣе свѣтлая полоска.

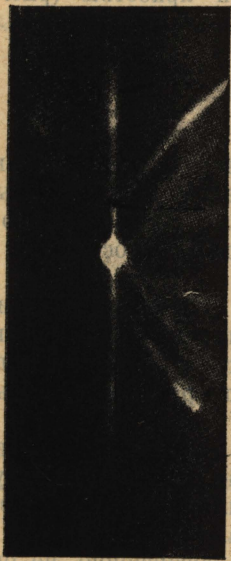


Рис. 8.

Если теперь на нѣкоторомъ разстояніи помѣстить второй магнитъ перпендикулярно къ первому, то эта полоска растягивается въ прямоугольникъ, съ четырьмя свѣтлыми пятнами на углахъ его, соответствующими частицамъ совершенно не отклоненнымъ, отклоненнымъ только первымъ магнитомъ, только вторымъ магнитомъ и обоими магнитами (рис. 9). Мы имѣли бы только первое и четвертое пятно, если бы зарядъ частицъ не мѣнялся на пути отъ первого поля ко второму. Понижая давленіе съ помощью угля и жидкаго воздуха, Томсону удалось этого достигнуть.

Такъ какъ зарядъ частицъ, дающихъ вторичныя линіи, мѣняется на ихъ пути черезъ поле, то, примѣняя формулу (5) ко вторичной линіи, мы получимъ значенія  $e/m$ , варьирующія отъ нуля до значенія  $e/m$  для соответствующей параболы. Напротивъ, въ виду того, что вторичныя линіи являются прямыми, проходящими черезъ начало координатъ, формула (4) даетъ определенное значеніе  $v$  для каждой изъ нихъ. Кромѣ того, положеніе вторичныхъ линій почти не мѣняется при увеличеніи паденія потенциала у катода, въ то время какъ параболы приближаются къ оси  $y$ -овъ, т. е. скорость частицъ, дающихъ вторичныя линіи, всегда та же и не зависитъ отъ условій разряда. Изъ теоріи Томсона дѣйствительно слѣдуетъ, что эта скорость можетъ измѣняться только въ тѣсныхъ предѣлахъ.

Разсмотримъ сначала частицы, которыя іонизируются на своемъ пути. Ионизація происходитъ благодаря тому, что быстро движущаяся частица, сталкиваясь съ электрономъ, теряетъ отрицательный зарядъ. Вмѣсто этого мы могли бы предположить, что частица находится въ покоѣ, а электронъ движется съ прежней скоростью частицы. Но для этого случая извѣстно, что іонизація не происходитъ, если скорость электрона меньше определенной величины, зависящей отъ природы



частицы. Обозначимъ эту величину черезъ  $V$ . Тогда минимальная скорость частицъ, дающихъ вторичную линію, тоже будетъ  $V$ . Далѣе, такъ какъ частицы движутся съ большою скоростью отъ катода, очевидно, что онѣ раньше были положительны и потомъ только нейтрализовали свой зарядъ, захвативъ электронъ. Но частица можетъ захватить электронъ при столкновеніи, только если ея скорость не слишкомъ велика, такъ какъ при скоростяхъ, большихъ  $V$ , электронъ уже отдѣляется отъ поверхности частицы. Вслѣдствіе этого, нейтральные частицы не будутъ имѣть скоростей значительно большихъ  $V$ , и скорость частицъ, іонизирующихся при прохожденіи поля, будетъ заключена между тѣсными предѣлами.

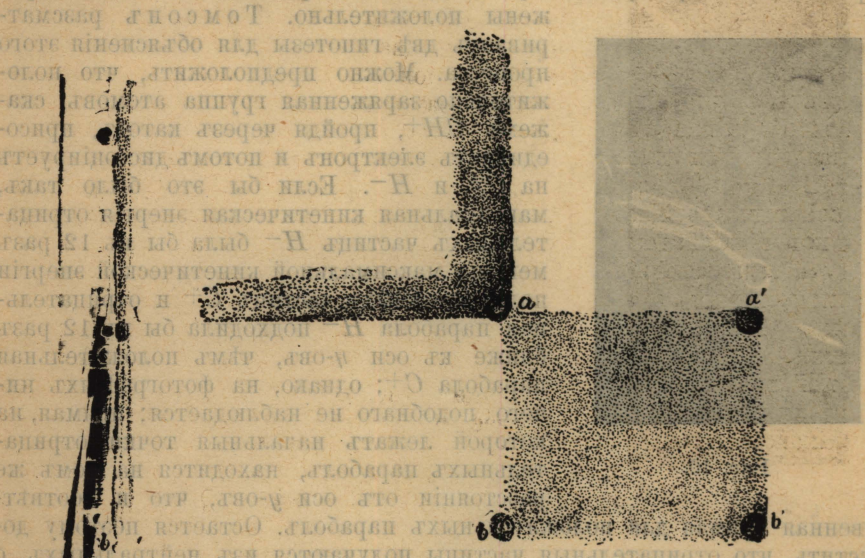


Рис. 9.

Обратимся теперь къ частицамъ, вступающимъ въ поле съ положительнымъ зарядомъ и нейтрализующимъ его въ полѣ, присоединяя электронъ. Мы уже выяснили, что скорость такихъ частицъ имѣетъ верхній предѣлъ. Если предположить, что присоединяемые электроны были свободны, нижняго предѣла скорости у частицъ этого рода не будетъ; дѣйствительно, вторичныя линіи этого типа иногда бываютъ ограниченными только съ одной стороны, а съ другой распыляются, какъ это видно на рис. 8 Въ другихъ случаяхъ, однако, вторичныя линіи и этого типа рѣзко ограничены съ обѣихъ сторонъ. Повидимому, частицы присоединяютъ преимущественно электроны не свободные, а связанные въ какой-нибудь молекулѣ. Тогда для выдѣленія электрона изъ этой молекулы движущаяся частица должна будетъ обладать нѣкоторой минимальной кинетической энергіей. Въ пользу этого предположенія говорить и то обстоятельство, что сила отклоняющаго электри-



ческого поля не влияет на яркость вторичных линий: если бы присоединяемые электроны были свободны, сильное поле удалило бы их и вторичные линии должны были бы исчезнуть.

### Отрицательно заряженные частицы.

На многих фотографіях (см., напримѣръ, рис. 10) замѣтны съ другой стороны оси  $y$ -овъ отръзки параболъ и прямыхъ, которые происходятъ отъ отрицательно-заряженныхъ частицъ. Очевидно, что свой отрицательный зарядъ эти частицы приобрѣли уже послѣ прохождения черезъ темное пространство у катода и что раньше онѣ были заряжены положительно. Томсонъ разсматриваетъ двѣ гипотезы для объясненія этого процесса. Можно предположить, что положительно заряженная группа атомовъ, скажемъ  $CH^+$ , пройдя черезъ катодъ, присоединяетъ электронъ и потомъ диссоциируетъ на  $C^+$  и  $H^-$ . Если бы это было такъ, максимальная кинетическая энергія отрицательныхъ частицъ  $H^-$  была бы въ 12 разъ меньше максимальной кинетической энергіи положительныхъ частицъ  $C^+$  и отрицательная парабола  $H^-$  подходила бы въ 12 разъ ближе къ оси  $y$ -овъ, чѣмъ положительная парабола  $C^+$ ; однако, на фотографіяхъ ничего подобнаго не наблюдается; прямая, на которой лежатъ начальные точки отрицательныхъ параболъ, находится на томъ же



Рис. 10.

расстояніи отъ оси  $y$ -овъ, что и соответственная прямая для положительныхъ параболъ. Остается поэтому допустить, что отрицательныя частицы получаются изъ нейтральныхъ, о существованіи которыхъ мы уже говорили, присоединеніемъ электрона.

Эта гипотеза вполне объясняетъ не только положеніе отрицательныхъ параболъ, но и цѣлый рядъ другихъ фактовъ. Для образованія отрицательно заряженной частицы по этой гипотезѣ необходимо, чтобы нейтральная частица притянула электронъ. Это возможно благодаря тому, что въ нейтральной частицѣ есть положительные и отрицательные заряды, которые создаютъ электрическое поле. Очевидно, что притяженіе между частицей и электрономъ будетъ сильно, если въ частицѣ есть подвижные заряды; тогда вблизи электрона, частица будетъ вести себя, какъ проводникъ, сторона ея обращенная къ электрону зарядится положительно, а противоположная сторона отрицательно и частица притянетъ электронъ. Если же подвижныхъ электроновъ нѣтъ, такого эффекта не будетъ.

Подвижные электроны имѣются въ частицахъ химически-активныхъ тѣлъ; въ насыщенныхъ же соединеніяхъ, какъ предполагаетъ электрическая теорія валентности, подвижность электроновъ значительно уменьшена. То же самое надо сказать и о благородныхъ газахъ. Опытъ даетъ блестящее подтвержденіе этого взгляда.



Химически неактивные атомы, какъ азотъ, гелій, неонъ, аргонъ, жесенонъ, криптонъ и ртуть не даютъ отрицательныхъ частицъ, въ то время какъ атомы водорода, углерода и кислорода даютъ ихъ въ большомъ количествѣ. Изъ молекулъ отрицательныхъ параболы даютъ только молекулы кислорода, водорода (очень рѣдко), углерода и гидроксила ( $OH$ ). Чтобы получить отрицательно-заряженные частицы углерода, надо ввести въ разрядную трубку соединенія, содержащія нѣсколько атомовъ углерода, связанныхъ между собою, какъ  $C_2H_6$ ,  $C_2H_4$ ,  $C_2H_2$  или  $C_6H_6$ . Тогда получаются на пластинкѣ отрицательныя параболы, соответствующія  $C^-$ ,  $C_2^-$  и  $C_3^-$ . Группы атомовъ углерода, какъ  $C_2^-$  и  $C_3^-$ , также какъ и гидроксилъ являются ненасыщенными, т. е. содержатъ подвижные электроны подобно свободнымъ атомамъ. Что касается условій появленія частицъ  $O_2^-$ , то они еще не вполне выяснены.

### Частицы, несущія нѣсколько зарядовъ.

Какъ было уже сказано выше, параболы оканчиваются обыкновенно на одной прямой, параллельной оси  $y$ -овъ. Однако, нерѣдко случается, что отдѣльныя параболы ближе подходятъ къ оси  $y$ -овъ, чѣмъ другія; такъ, напримѣръ, на рис. 10 парабола  $a$ , соответствующая  $O^+$ , доходитъ до половины нормального разстоянія.

Такъ какъ величина  $e/m$  во всѣхъ точкахъ параболы одинакова, то изъ формулы (1) слѣдуетъ, что частицы  $e/m$ , дающія половинное отклоненіе, обладаютъ при томъ же зарядѣ двойной кинетической энергіей по сравненію съ частицами, дающими нормальное отклоненіе. Но послѣднія, какъ извѣстно, обладаютъ максимальной кинетической энергіей, которую можетъ приобрести атомъ кислорода съ однимъ зарядомъ, пройдя черезъ все паденіе потенциала въ трубкѣ; остается предположить, что частицы, дающія половинное отклоненіе, имѣли до прохожденія черезъ катодъ двойной зарядъ и такимъ образомъ, получили двойную кинетическую энергію [формула (3)]. На пути отъ катода къ полю онѣ присоединили одинъ электронъ и вступили въ поле уже съ однимъ зарядомъ, но съ двойной кинетической энергіей. Правильность этого взгляда подтверждается тѣмъ, что на фотографіи, на которой имѣется парабола, продолженная до половины нормального разстоянія, всегда можно найти параболу, соответствующую двойному значенію  $e/m$  и обратно. Если на пути отъ катода къ полю частица теряетъ болѣе одного заряда, то соответствующая парабола можетъ еще ближе подойти къ оси  $y$ -овъ.

Дѣйствительно, пусть зарядъ частицы до прохожденія черезъ катодъ будетъ  $pe$ , а въ отклоняющемъ полѣ  $qe$ . Тогда изъ формулы (3) мы получаемъ, что  $\frac{1}{2}mv^2 = peV$ ; а изъ формулы (1), что  $z = q/p B/2V$ ; нормальное отклоненіе очевидно  $B/2V$ . Для примѣра рассмотримъ случай ртути.

Парабола  $Hg^+$  настолько близко подходитъ къ началу координатъ, что нужно пользоваться очень сильными полями, чтобы измѣрить разстояніе ея начальной точки отъ оси  $y$ -овъ. Тогда, получается



рядъ параболъ, со слѣдующими значеніями для  $m/e$ : (значеніе  $m/e$  для водорода считается равнымъ единицѣ):

$m/e$	
200	$200/1$ ,
102	$200/2$ ,
66.3	$200/3$ ,
50.4	$200/4$ ,
44	эта линія принадлежитъ не ртути, а $CO_2$ ,
39.8	$200/5$ ,
33.7	$200/6$ ,
28.6	$200/7$ .

Такъ какъ атомный вѣсъ ртути равенъ 200, эти параболы соотвѣтствуютъ атомамъ ртути съ числомъ элементарныхъ зарядовъ отъ 1 до 7. Дале, параболы эти начинаются на разстояніи отъ оси  $y$ -овъ равномъ соотвѣтственно  $1/8$ ,  $2/8$ ,  $3/8$ ,  $4/8$ ,  $5/8$ ,  $6/8$ ,  $7/8$  нормального.

Согласно вышесказанному, отсюда слѣдуетъ, что всѣ эти частицы имѣли первоначально 8 элементарныхъ зарядовъ и потеряли соотвѣтственно 7, 6, 5, 4, 3, 2 и 1 изъ нихъ. Такъ какъ всѣ эти частицы имѣли первоначально одинаковый зарядъ, то онѣ приобрѣли одинаковую скорость, и начальные точки параболъ лежатъ на прямой, проходящей черезъ начало координатъ. Параболы тѣмъ слабѣе, чѣмъ меньше значеніе  $m/e$ , которому онѣ соотвѣтствуютъ; этимъ объясняется, почему на фотографіяхъ нѣтъ параболы съ  $m/e$  равнымъ  $200/8$ . На параболѣ съ  $m/e$  равнымъ  $200/1$  имѣется на нормальномъ разстояніи отъ оси  $y$ -овъ яркое пятно; оно указываетъ на присутствіе частицъ, сохранившихъ постоянное значеніе  $m/e$  равное 200 на всемъ пути. Такимъ образомъ, мы видимъ, что въ разрядной трубкѣ образовались частицы только двухъ родовъ: атомы ртути съ однимъ положительнымъ зарядомъ и атомы съ восемью положительными зарядами. Томсонъ предполагаетъ, что этимъ двумъ родамъ частицъ соотвѣтствуютъ два рода іонизаціи: іонизація катодными лучами и іонизація движущимися положительно заряженными частицами. Это различіе имѣетъ, повидимому, общее значеніе. Дѣло въ томъ, что на фотографіяхъ до сихъ поръ еще ни разу не были обнаружены линіи, которыя указывали бы на молекулы съ нѣсколькими зарядами, въ то время какъ атомы съ нѣсколькими зарядами встрѣчаются очень часто. Кромѣ того, распредѣленіе яркости вдоль параболъ, которое зависитъ отъ условій іонизаціи у катода, бываетъ обыкновенно одного типа у всѣхъ параболъ, соотвѣтствующихъ молекуламъ и другого у параболъ, соотвѣтствующихъ атомамъ. У одноатомныхъ элементовъ, какъ ртуть и благородные газы, встрѣчаются одновременно оба типа. Все это указываетъ, что іонизація бываетъ двухъ родовъ; если движущійся электронъ встрѣчаетъ молекулу, она теряетъ въ благоприятномъ случаѣ одинъ электронъ, и, если только



этотъ послѣдній не связываетъ ея различныхъ атомовъ, она не распадается, и мы получаемъ молекулу съ однимъ положительнымъ зарядомъ.

Напротивъ, если молекулу встрѣчаетъ движущаяся положительная частица, то можно ожидать, что молекула потеряетъ цѣлую группу электроновъ и диссоциируетъ на отдѣльные атомы. Такимъ образомъ, образуются атомы, вообще говоря, со многими зарядами. Въ случаѣ молекулъ атомическихъ газовъ оба типа столкновений приводятъ къ заряженнымъ атомамъ, при чемъ при столкновении перваго типа можно ожидать образованіе атомовъ съ однимъ зарядомъ, а при столкновении втораго типа — преимущественно съ нѣсколькими.

Максимальное количество положительныхъ зарядовъ, которое можетъ приобрести атомъ элемента, зависитъ, повидимому, только отъ его атомнаго вѣса; такъ ртуть ( $Hg = 200$ ) можетъ приобрести 8 зарядовъ, криптонъ ( $Kr = 82$ ) — пять, аргонъ ( $Ar = 40$ ) — три, неонъ ( $Ne = 20$ ), азотъ ( $N = 14$ ), кислородъ ( $O = 16$ ) и гелій ( $He = 4$ ) — по два и, наконецъ, водородъ — только одинъ.

### Измѣреніе числа заряженныхъ частицъ.

Кромѣ фотографированія параболъ, Томсонъ разработалъ еще одинъ методъ, который даетъ возможность произвести и количественный анализъ пучка положительныхъ лучей, т. е. найти отношеніе числа частицъ съ различными значеніями  $e/m$ . Очевидно, что фотографіи не позволяютъ объ этомъ судить, такъ какъ различныя частицы при равной кинетической энергіи обладаютъ очень различною скоростью и будутъ, вообще говоря, очень различно дѣйствовать на фотографическую пластинку. Такъ, напримѣръ, при паденіи потенциала въ 20 000 в скорость атома водорода будетъ  $2 \cdot 10^8$  cm/sec, а скорость атома ртути только  $1,4 \cdot 10^7$  cm/sec.; естественно, что атомъ водорода глубже проникнетъ въ фотографическую пластинку, такъ что при прочих равныхъ условіяхъ парабола водорода будетъ лучше видна, чѣмъ парабола ртути.

Методъ Томсона заключается въ слѣдующемъ. Пучекъ положительныхъ лучей падаетъ не на фотографическую пластинку, а на металлическую стѣнку  $B$  (см. рис. 11) въ которой сдѣлана щель шириной приблизительно въ 1 мм. Щель эта является отрѣзкомъ параболы, вершины которой находится въ началѣ координатъ и которая касается въ этой точкѣ оси  $y$ -овъ. Если теперь выбрать электрическое отклоненіе такъ, чтобы начальныя точки параболъ положительныхъ лучей совпадали съ однимъ изъ концовъ щели, то можно, увеличивая магнитное отклоненіе, заставить любую изъ нихъ, начиная отъ параболы водорода и кончая параболою ртути, совпасть съ щелью. За щелью находится металлическій ящикъ, соединенный съ Вильсоновскимъ электроскопомъ. Каждый разъ, когда какая-нибудь парабола совпадаетъ со щелью, частицы съ соответствующимъ значеніемъ  $e/m$  смогутъ попасть въ ящикъ и электроскопъ начнетъ отклоняться. Величина его отклоненія за опредѣленный промежутокъ времени будетъ, очевидно, пропорціональна произведенію изъ числа этихъ



частицъ на е. Максимумы отклоненія, соотвѣтствующія различнымъ параболамъ, очень рѣзки, такъ что различныя параболы можно легко отличить.

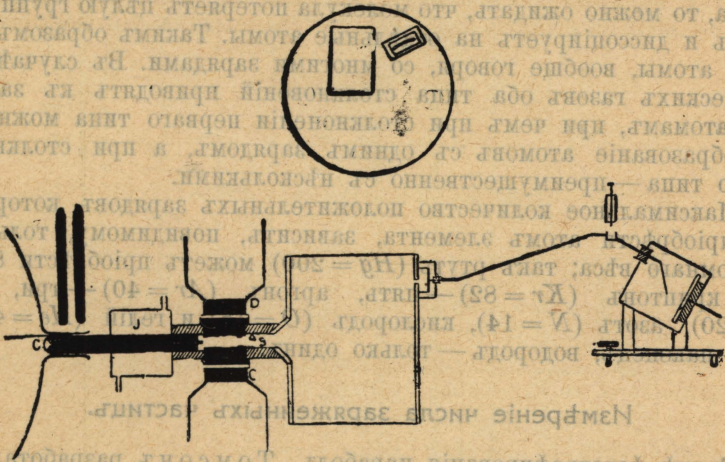


Рис. 11.

На рис. 12 изображена кривая, которая получается, если въ разрядной трубкѣ находится окись углерода; абсциссы изображаютъ

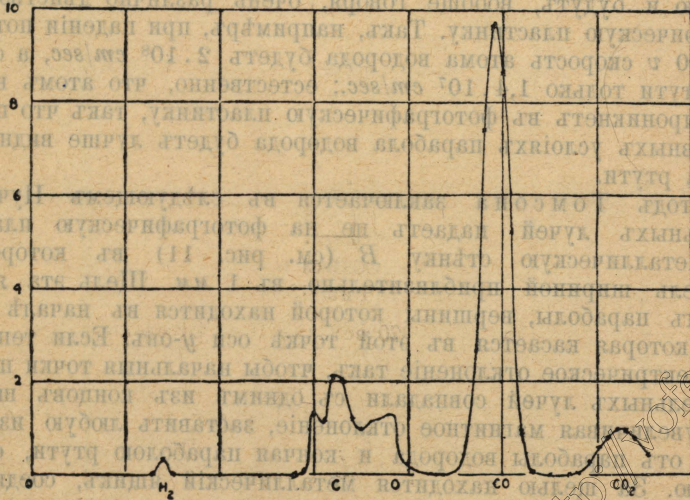


Рис. 12.

Окись углерода 320 вольтъ.

силу магнитнаго поля, а ординаты отклоненіе электроскопа за 10 секундъ. На этой кривой видны максимумы, соотвѣтствующія частицамъ.



$H_2^+$ ,  $C^+$ ,  $O^+$ ,  $CO^+$ ,  $CO_2^+$ . Любопытно, что на фотографическом снимкѣ, полученномъ при тѣхъ же условіяхъ, самыми замѣтными являются параболы  $H^+$  и  $H_2^+$ ; мы видимъ, насколько неправильны были бы количественныя сужденія, основанныя на фотографіяхъ.

(Отрицательныя).

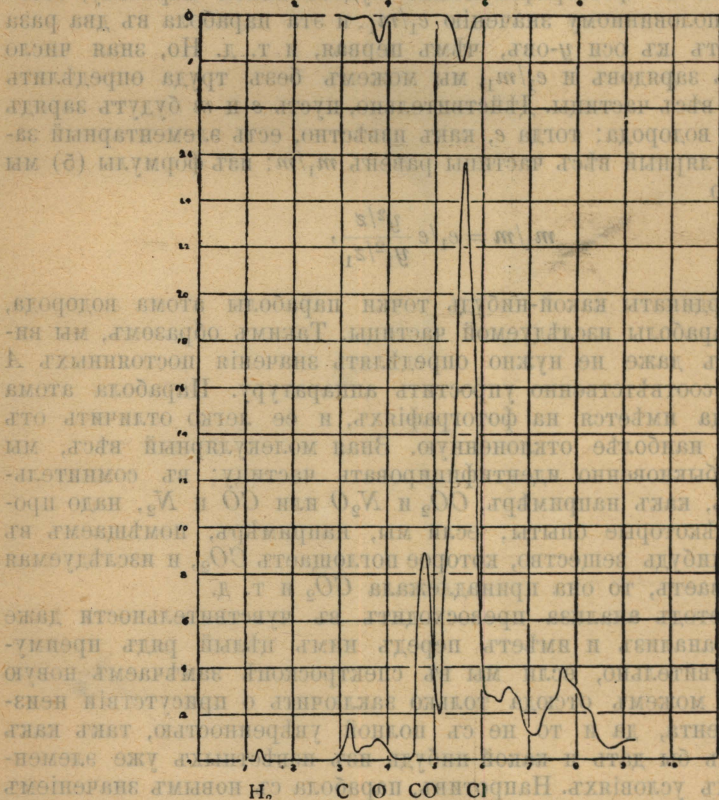


Рис. 13.

Фосгенъ  $COCl_2$  320 вольтъ. (Положительныя).

То же относится и къ отрицательно заряженнымъ частицамъ: въ то время, какъ на фотографіяхъ парабола  $H^-$  хорошо видна, посредствомъ электроскопа можно открыть только слѣды атомовъ водорода съ отрицательнымъ зарядомъ, тогда какъ параболы  $O^-$ ,  $Cl^-$  даютъ замѣтныя отклоненія электроскопа (см. верхнюю кривую рис. 13).

**Примѣненіе метода положительныхъ лучей къ химическому анализу.**

Разсмотримъ еще вкратцѣ примѣненія этихъ методовъ къ химическому анализу. Если въ разрядной трубкѣ находится самое мини-



мальное количество какого-нибудь неизвестного газа, то мы получаемъ на фотографической пластинкѣ рядъ параболъ, при чемъ каждой соответствуетъ определенное значеніе  $e_1/m_1$ , гдѣ  $e_1$  равно либо элементарному заряду, либо небольшому цѣлому кратному его. Мы всегда имѣемъ возможность рѣшить вопросъ, сколькимъ элементарнымъ зарядамъ равно  $e_1$ , такъ какъ, если  $e_1$  равно, на примѣръ, двумъ зарядамъ, то на той же фотографіи можно будетъ найти параболу, соответствующую половинному значенію  $e_1/m_1$ , и эта парабола въ два раза ближе подойдетъ къ оси  $y$ -овъ, чѣмъ первая, и т. д. Но, зная число элементарныхъ зарядовъ и  $e_1/m_1$ , мы можемъ безъ труда опредѣлить молекулярный вѣсъ частицы. Дѣйствительно, пусть  $e$  и  $m$  будутъ зарядъ и масса атома водорода; тогда  $e$ , какъ извѣстно, есть элементарный зарядъ, и молекулярный вѣсъ частицы равенъ  $m_1/m$ ; изъ формулы (5) мы получаемъ, что

$$m_1/m = e_1/e \frac{y^2/z}{y_1^2/z_1},$$

гдѣ  $y$  и  $z$  координаты какой-нибудь точки параболы атома водорода, а  $y_1$  и  $z_1$  — параболы изслѣдуемой частицы. Такимъ образомъ, мы видимъ, что намъ даже не нужно опредѣлять значенія постоянныхъ  $A$  и  $B$ , и можно соответственно упростить аппаратуру. Парабола атома водорода всегда имѣется на фотографіяхъ, и ее легко отличить отъ другихъ, какъ наиболѣе отклоненную. Зная молекулярный вѣсъ, мы уже можемъ обыкновенно идентифицировать частицу; въ сомнительныхъ случаяхъ, какъ на примѣръ,  $CO_2$  и  $N_2O$  или  $CO$  и  $N_2$ , надо произвести еще нѣкоторые опыты; если мы, на примѣръ, помѣщаемъ въ трубку какое-нибудь вещество, которое поглощаетъ  $CO_2$ , и изслѣдуемая парабола исчезаетъ, то она принадлежала  $CO_2$  и т. д.

Этотъ методъ анализа превосходитъ въ чувствительности даже спектральный анализъ и имѣетъ передъ нимъ цѣлый рядъ преимуществъ. Дѣйствительно, если мы въ спектроскопѣ замѣчаемъ новую линію, то мы можемъ отсюда только заключить о присутствіи неизвестнаго элемента, да и то не съ полной увѣренностью, такъ какъ эту линію могъ бы дать и какой-нибудь изъ извѣстныхъ уже элементовъ въ новыхъ условіяхъ. Напротивъ, парабола съ новымъ значеніемъ для  $m$  не только указываетъ на присутствіе новаго тѣла, но и даетъ намъ сразу и его молекулярный вѣсъ. Далѣе, избытокъ другихъ элементовъ не мѣшаетъ появленію параболы элемента, присутствующаго даже въ очень незначительномъ количествѣ, какъ это часто бываетъ при спектральномъ анализѣ.

Томсонъ приводитъ рядъ примѣровъ примѣненія своего метода. Такъ, онъ изслѣдовалъ газы, которые получаются въ видѣ остатка при испареніи жидкаго воздуха. Рис. 14 соответствуетъ фракціи съ тяжелыми составными частями, а рис. 15 — фракціи съ легкими составными частями. На рис. 14 видны параболы ксенона, криптона, аргона и неона; такимъ образомъ, среди составныхъ частей воздуха съ высокимъ атомнымъ вѣсомъ нѣтъ неизвестныхъ элементовъ. На рис. 15 видны парабола гелія, парабола неона съ однимъ и съ двумя зарядами, и парабола съ  $m/e$  равнымъ 22.



Эта парабола во всякомъ случаѣ не принадлежитъ молекуль  $CO_2$  съ двумя зарядами, такъ какъ присутствіе  $CO_2$  никакого вліянія на яркость этой линіи не имѣетъ. Вообще эта линія не можетъ принадлежать какому-нибудь соединенію, такъ какъ она имѣетъ продолженіе къ оси  $y$ -овъ, доходящее до половины нормальнаго разстоянія, и на той же фотографіи есть другая линія съ  $m/e$  равнымъ 11; иначе говоря, неизвѣстныя частицы могутъ имѣть и два заряда, что бываетъ только съ атомами. Такимъ образомъ, эта линія соответствуетъ новому элементу съ атомнымъ вѣсомъ 22, который постоянно со-

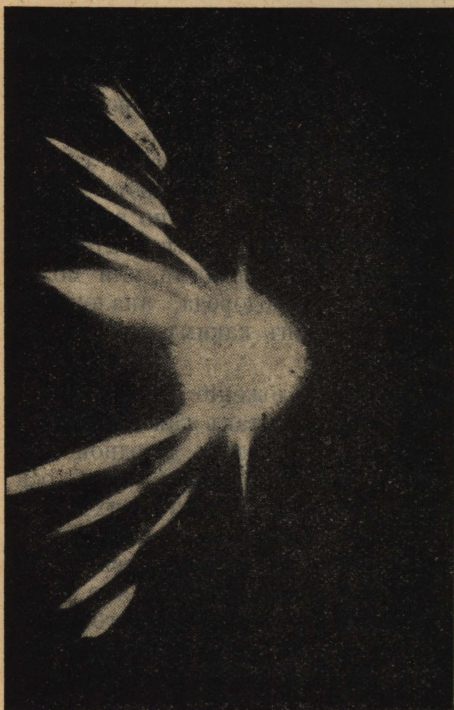


Рис. 14.



Рис. 15.

проводитъ неонъ; такъ какъ она гораздо слабѣ линіи неона, то нужно предположить, что этотъ элементъ содержится въ атмосферѣ въ сравненію съ неономъ лишь въ небольшомъ количествѣ.

Астонъ (Aston) пробовалъ раздѣлить неонъ, добытый изъ атмосферы, помощью фракціонированнаго поглощенія углемъ, охлажденнымъ жидкимъ воздухомъ; однако, усилія въ этомъ направленіи остались безрезультатными. Удачнѣе было примѣненіе метода фракціонированной диффузіи: болѣе легкій неонъ диффундировалъ скорѣе, чѣмъ новый элементъ, и этимъ путемъ удалось получить изъ неона фракціи съ болѣею плотностью, которыя давали значительно ярче параболу съ  $m/e = 22$ . Спектръ новаго газа идентиченъ со спектромъ неона. Для него нѣтъ мѣста въ классической системѣ Менделѣева; однако, въ настоящее время изысканія въ совершенно другой области, а именно въ теоріи радіоактивнаго распада, показали, что можно ожидать суще-



ствование группъ элементовъ съ близкими атомными вѣсами и съ совершенно идентичными свойствами.

Очень интересные результаты дало также изслѣдованіе газовъ, выделяющихся при бомбардировкѣ твердыхъ тѣлъ катодными лучами. На рис. 16 видны фотографіи, получающіяся до и послѣ введенія въ сосудъ этихъ газовъ. Мы видимъ, что послѣ введенія появились линіи съ  $m/e = 3$ ,  $m/e = 4$ ,  $m/e = 10$  и  $m/e = 20$ . Вторая изъ нихъ принадлежитъ гелію, третья и четвертая неону, что же касается первой линіи, то Томсонъ называлъ тѣло, которому она принадлежитъ  $X_3$ . Оказывается, что при бомбардировкѣ катодными лучами самыя разнообразныя вещества выделяютъ водородъ, гелій, неонъ и  $X_3$ . Судя по значенію  $m/e$ , частица  $X_3$  могла бы быть атомомъ углерода съ четырьмя зарядами, или молекулой трехатомнаго водорода, аналогично озону, или же наконецъ какимъ-нибудь новымъ элементомъ.

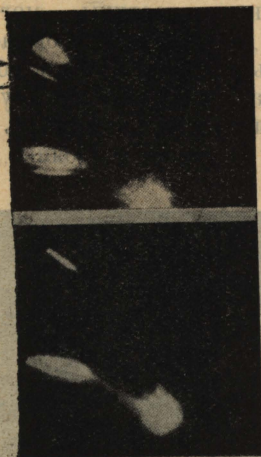


Рис. 16.

Первое предположеніе рѣшительно опровергается опытомъ, такъ какъ парабола углерода никогда не доходитъ до одной четверти нормальнаго разстоянія отъ оси  $y$ -овъ; далѣе, парабола  $X_3$  на этихъ фотографіяхъ всегда сильнѣе параболы  $C^{++}$  и иногда даже сильнѣе параболы  $C^+$ . Наконецъ, парабола  $X_3$  никогда не наблюдается, если пропускать разрядъ черезъ какое-нибудь газообразное соединеніе углерода. Есть много данныхъ, которыя говорятъ въ пользу второго предположенія. Такъ, особенно много  $X_3$  выделяется при бомбардировкѣ веществъ, которыя либо содержатъ водородъ, какъ  $KOH$  и  $LiOH$ , либо гигроскопичны, какъ  $LiCl$  и  $CaCl_2$ , такъ что могутъ притянуть воду изъ атмосферы. При одномъ опытѣ нѣкоторое количество  $KOH$  выделяло  $X_3$  непрерывно въ теченіи нѣсколькихъ мѣсяцевъ. Химическія свойства  $X_3$ , поскольку ихъ удалось изслѣдовать, тоже не противорѣчатъ этому предположенію.

$X_3$  исчезаетъ, если пропускать искры черезъ смѣсь его съ кислородомъ или сильно освѣтить ее; онъ исчезаетъ также при нагреваніи съ окисью мѣди до температуры краснаго каленія. Въ отсутствіи кислорода  $X_3$  сохраняется долгое время. Бомбардировка катодными лучами не является единственнымъ способомъ полученія  $X_3$ . Последній выделяется также изъ танталовой проволоки, если пропускать черезъ нее токъ, пока она не расплавится, далѣе изъ нагрѣтой окиси кальція и въ нѣкоторомъ количествѣ самопроизвольно изъ  $KOH$  въ пустотѣ.

Что касается выделения неона и гелія при бомбардировкѣ катодными лучами, то въ отличіе отъ выделения  $X_3$ , оно значительно ослабѣваетъ послѣ нѣсколькихъ часовъ бомбардировки, однако, не прекращается совершенно. Различныя вещества выделяютъ гелій въ очень различной степени, но присутствіе водорода не имѣетъ того вліянія,



какъ въ случаѣ  $X_8$ . Больше всего выдѣляется гелія изъ  $KI$ . Во всякомъ случаѣ, выдѣленные количества настолько малы, что не даютъ характерныхъ линій въ спектроскопѣ; необходима вся чувствительность Томсоновскаго метода, чтобы ихъ обнаружить. Многократная перекристаллизация соли не вліяетъ на выдѣленія гелія, такъ что трудно предположить, чтобы онъ былъ въ ней просто механически заключенъ; быть можетъ, внутри атомовъ нѣкоторыхъ элементовъ происходитъ радиоактивный процессъ, аналогичный образованію  $\alpha$ -частицъ, но скорость образующихся атомовъ гелія настолько мала, что они остаются связанными съ остальной частью распавшагося атома и выдѣляются только подъ ударами катодныхъ лучей. Эта гипотеза хорошо объясняетъ болѣе сильное выдѣленіе въ началѣ бомбардировки; однако, для рѣшенія этого вопроса, также какъ и для рѣшенія вопроса объ  $X_3$ , необходимы дальнѣйшіе опыты.

Мы видимъ, что методъ положительныхъ лучей далъ за сравнительно короткое время блестящіе результаты въ самыхъ разнообразныхъ областяхъ, какъ то іонизація газовъ, теорія сродства, открытіе неизвѣстныхъ элементовъ, изученіе химическихъ реакцій совершенно новаго типа, такъ что и въ будущемъ отъ него можно еще много ожидать.

## О характерѣ прерывности, которую можетъ имѣть производная.

Г. Афанасьевой-Эренфестъ.

§ 1. При доказательствѣ различныхъ предложеній анализа считается нѣсколько неприличнымъ опираться на непрерывность производной, когда можно безъ этого обойтись.

Какой дефектъ подобнаго рода доказательство имѣетъ въ логическомъ отношеніи, понятно. Но интересно также одинъ разъ спросить себя, насколько великъ практическій выигрышъ отъ доказательства, построеннаго на одномъ только существованіи производной, безъ указанія на ея непрерывность.

Какъ извѣстно, для функцій аналитическихъ существованіе первой производной уже обезпечиваетъ существованіе производныхъ всѣхъ слѣдующихъ порядковъ, слѣдовательно, а *fortiori*, непрерывность первой производной. Слѣдовательно, для класса аналитическихъ функцій не имѣетъ практическаго смысла избѣгать пользованія непрерывностью производной.

Спрашивается: какого рода функціями обогащается область применимости какого-нибудь предложенія въ общемъ случаѣ, если при его доказательствѣ опускается требованіе непрерывности производной?

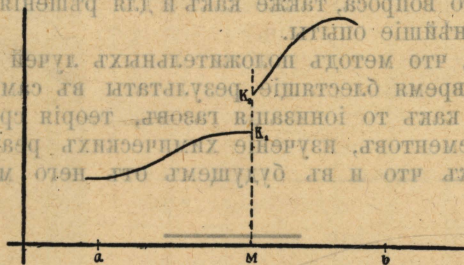
Какимъ характеромъ прерывности можетъ обладать функція, если она въ то же время является производной отъ какой-либо функціи?



§ 2. Вполнѣ исчерпывающаго отвѣта мы дать не можемъ. Однако, можно сейчасъ же указать типичный классъ функций, который приходится исключить: это функции, дѣлающія скачокъ въ изолированныхъ точкахъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если производная „существуетъ“, внутри всего даннаго промежутка, то, значитъ, въ каждой точкѣ внутри него она имѣетъ одно и только одно значеніе.

Пусть теперь въ нѣкоторой точкѣ  $M$  производная дѣлаетъ скачокъ, т. е. пусть предѣлъ  $K_1$ , къ которому она стремится при приближеніи независимой переменнѣй къ точкѣ  $M$  слѣва, отличенъ отъ предѣла  $K_2$ , къ которому она стремится при приближеніи къ нему справа.



Фиг. 1.

Такъ какъ мы предположили, что функция  $\varphi(x)$  существуетъ, то въ точкѣ  $M$  она должна имѣть только одно значеніе, слѣдовательно, по крайней мѣрѣ, отъ одного изъ обоихъ предѣловъ значенія  $\varphi(M)$  должно быть отлично. Примѣръ такого рода функций представляетъ функция  $E(x)$ , равная для всѣхъ положительныхъ значеній  $x$  наибольшему цѣлому числу, не превосходящему  $x$ . Она дѣлаетъ скачокъ при всякомъ цѣломъ значеніи  $x$  и въ каждой изъ этихъ точекъ равняется тому предѣлу, который имѣетъ при приближеніи къ этой точкѣ справа.

Существуетъ ли функция, отъ которой подобнаго рода функция могла бы быть производной?

Если мы попробуемъ найти опредѣленный интегралъ отъ  $\varphi(x)$  между предѣлами  $a$  и  $x$ , заключающими точку  $M$ , подразумѣвая подъ этимъ предѣломъ суммы

$$\sum_{i=1}^{n-1} \varphi(x_i) (x_{i+1} - x_i),$$

гдѣ  $x_i$  суть точки подраздѣленія интервала  $a, x$  на  $n$  промежутковъ, при безконечномъ увеличеніи  $n$  и уменьшеніи промежутковъ, то мы должны согласиться, что такая функция существуетъ. Но — что важно — ея производная будетъ совпадать съ функцией  $\varphi(x)$  во всѣхъ точкахъ, кромѣ  $x = M$ . Въ этой точкѣ опредѣленный интегралъ не имѣетъ опредѣленной производной (производная справа равняется  $K_2$ , производная слѣва —  $K_1$ ), между тѣмъ какъ относительно  $\varphi(x)$  мы

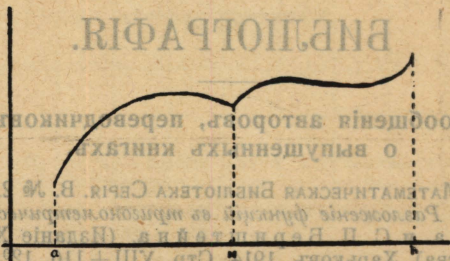


исходили изъ условія, что  $\varphi(M)$  имѣетъ какое-либо одно определенное значеніе.

Итакъ, искомый интеграль, дающій производную  $\varphi(x)$ , въ точкѣ  $x=M$  не совпадаетъ съ определеннымъ интеграломъ  $f(x) = \lim \Sigma \varphi(z)(z-z')$  отъ  $\varphi(z)$ , хотя во всѣхъ другихъ точкахъ онъ не можетъ отличаться отъ него. Между тѣмъ онъ долженъ быть непрерывной функціей и потому въ точкѣ  $M$  онъ долженъ быть равенъ предѣлу

$$\lim_{x=M} f(x),$$

[а этотъ предѣлъ для определенного интеграла существуетъ, такъ, какъ  $f(x)$  есть непрерывная функція, которая графически можетъ быть обозначена, какъ показано на фиг. 2].



Фиг. 2.

Слѣдовательно, функція, однозначная во всѣхъ точкахъ, но дѣлающая скачокъ внутри промежутка, не можетъ служить производной.

§ 3. Пользуясь теоремой Лагранжа, можно указать еще на одно свойство производной: въ смежности съ каждой точкой должны существовать ея значенія, сколь угодно близкія къ тому, которое она имѣетъ въ самой этой точкѣ, такъ какъ, вѣдь,

$$\varphi(x+\Theta h) = f'(x+\Theta h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \varepsilon$$

для сколь угодно малыхъ  $\varepsilon$  и  $h$ .\*).

Это одно еще не исключаетъ наличности въ области, смежной съ этой точкой, и такихъ значеній, которыя отличаются отъ  $\varphi(x)$  на бѣсѣнную величину. Но что такихъ значеній  $\varphi(x)$  не можетъ принимать скачками, можно показать, пользуясь опять изслѣдованіемъ определенного интеграла.

Все это дѣлаетъ производную весьма похожей на непрерывную функцію и все таки можно указать случаи, когда производная суще-

\*) Теорема Лагранжа устанавливаетъ только существованіе  $\Theta$  при данномъ  $h$ . Но соответствуютъ ли данному  $\varepsilon$  значенія  $h$  и  $\Theta$ , удовлетворяющія этимъ уравненіямъ, это еще нуждается въ доказательствѣ.



«ствуетъ, не будучи непрерывной! Мы заимствуемъ такой примѣръ у Осгуда\*).

§ 4. Пусть

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (1)$$

Разсмотримъ производную этой функции на промежуткѣ, заключающемъ въ себѣ  $x = 0$ . Для всѣхъ значений  $x$ , отличныхъ отъ 0, она выражается формулой

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos \frac{1}{x} \quad (2)$$

и имѣетъ въ каждой точкѣ одно определенное значеніе.

## БИБЛИОГРАФІЯ.

### II. Собственныя сообщенія авторовъ, переводчиковъ и редакторовъ о выпущенныхъ книгахъ.

Харьковская Математическая Библиотека Серия. В. № 2. Лежень-Дирикле, Риманнъ, Липшицъ. *Разложение функций въ тригонометрическіе ряды*. Переводъ Т. А. Грузинцева и С. П. Вернштейна. (Изданіе Харьковского Математическаго Общества) Харьковъ, 1914. Стр. VIII + 116. 12°. Ц. 50 к.

Четвертою книжкою нашей «Библиотеки» является томикъ, въ которомъ даны переводы трехъ мемуаровъ, являющихся классическими въ теоріи тригонометрическихъ рядовъ, которая по справедливому выраженію С. П. Вернштейна является однимъ изъ важнѣйшихъ отдѣловъ анализа, какъ вслѣдствіе ея исторической роли, такъ и вслѣдствіе общаго принципиальнаго значенія выдвигаемыхъ ею вопросовъ (Предисловіе). «Основнымъ (въ теоріи тригонометрическихъ рядовъ) является вопросъ объ условіяхъ, необходимыхъ и достаточныхъ для возможности разложенія функций въ сходящійся тригонометрическій рядъ. Этому вопросу посвящены работы Дирикле, Риманна и Липшица. Первая и третья изучаетъ достаточныя условія, — работа Риманна изстѣдуетъ, главнымъ образомъ, условія необходимыя». Какъ видно изъ этихъ словъ С. П. Вернштейна, настоящій выпускъ имѣетъ въ виду не педагоговъ-преподавателей средней школы, а начинающихъ специалистовъ-математиковъ, дѣлая для нихъ доступными классическіе мемуары по одному изъ основныхъ вопросовъ анализа. Съ этой стороны она примыкаетъ къ первому выпуску этой второй серіи — книжкѣ Пикара «О развитіи нѣкоторыхъ основныхъ вопросовъ анализа», которая является какъ бы введеніемъ въ серію классическихъ мемуаровъ по теоріи функций, первымъ изъ которыхъ и является настоящій выпускъ.

Къ книжкѣ приложены біографическіе очерки Л.-Дирикле, Риманна и Липшица, составленные С. П. Вернштейномъ. Изъ мемуаровъ первый и третій переведены прив.-доц. Г. А. Грузинцевымъ, мемуаръ Риманна перевелъ прив.-доц. С. П. Вернштейнъ.

Книжка издана на средства Харьковского Математическаго Общества.

Проф. Д. Синицовъ.

\* Osgood. «Functionentheorie», Bd. I. Kap. 1. Тѣмъ, кто интересуется разнаго рода тонкими уклоненіями отъ обычныхъ случаевъ, можно, вообще, горячо рекомендовать эту главу книги Осгуда, содержащую цѣлый рядъ интересныхъ примѣровъ.



## ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей прив.-доц. Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, то лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 231 (6 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$(x - y)(x^2 - y^2) = a, \quad (x + y)(x^2 + y^2) = b.$$

Л. Закутинскій, (Черкаassy).

№ 232 (6 сер.). Пусть  $n$  — любое цѣлое положительное число. Доказать, что всякое число  $a$ , взаимно простое съ 10, будучи возвышено въ степень съ показателемъ  $10n + 1$ , даетъ результатъ, оканчивающійся тѣми же тремя послѣдними цифрами, какъ и число  $a$ .

М. Огородовъ (Самара).

№ 233 (6 сер.). Пусть  $\varphi(n)$  обозначаетъ число чиселъ, не превосходящихъ  $n$  и взаимно простыхъ съ  $n$ . Доказать, что

$$\varphi(m^k) = m^{k-1} \varphi(m),$$

гдѣ  $m$  и  $k$  суть любыя цѣлыя положительныя числа. Полагая  $u_n = m^n$  ( $n = 1, 2, \dots, k$ ), доказать, что

$$\sum_{n=1}^{n=k} \varphi(u_n) = \varphi(m) \cdot \sum_{n=1}^{n=k} u_n$$

Н. С. (Одесса).

№ 234 (6 сер.). Пусть  $\beta$  и  $\gamma$  суть проекціи медианы, проведенной изъ вершины  $A$  треугольника  $ABC$  на стороны  $b$  и  $c$ . Доказать, что

$$b\beta + c\gamma = 2m^2, \quad b\beta + c\gamma = \frac{b^2 - c^2}{2}.$$

(Займств.).



## РѢШЕНИЯ ЗАДАЧЪ.

## Отдѣлъ I.

**№ 179** (6 сер.). На стороны треугольника данной площади  $S$  построены квадраты. Въ какомъ случаѣ сумма площадей этихъ квадратовъ достигаетъ minimum'a? Определить этотъ minimum.

Назовемъ черезъ  $x, y, z$  стороны треугольника данной площади  $S$ . Изъ формулы площади треугольника по тремъ сторонамъ слѣдуетъ, что

$$(1) (x+y+z)(x+y-z)(x+z-y)(y+z-x) = 16S^2.$$

Лѣвую часть равенства (1), перемноживъ отдѣльно два первыхъ и два послѣднихъ множителя, можно представить въ видѣ  $[(x+y)^2 - z^2][z^2 - (x-y)^2]$ , или же, послѣ обычныхъ преобразований, въ видѣ  $2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - x^4 - y^4 - z^4$ . Слѣдовательно равенство (1) можно записать въ видѣ

$$(2) 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - x^4 - y^4 - z^4 = 16S^2.$$

Изъ тождества

$$(x^2 + y^2)^2 + (y^2 + z^2)^2 + (z^2 + x^2)^2 = 2(x^4 + y^4 + z^4) + 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$$

слѣдуетъ, что

$$(3) 4(x^4 + y^4 + z^4) - 4(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) = [(x^2 - y^2)^2 + (y^2 - z^2)^2 + (z^2 - x^2)^2].$$

Помноживъ равенство (2) на 3 и сложивъ его съ равенствомъ (3), получимъ

$$x^4 + y^4 + z^4 + 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) = 48S^2 + 2[(x^2 - y^2)^2 + (y^2 - z^2)^2 + (z^2 - x^2)^2].$$

т. е.

$$(4) (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 48S^2 + 2[(x^2 - y^2)^2 + (y^2 - z^2)^2 + (z^2 - x^2)^2].$$

Такъ какъ  $S$  сохраняетъ по условію постоянное значеніе, то функція  $(x^2 + y^2 + z^2)^2$ , а вмѣстѣ съ тѣмъ и функція  $x^2 + y^2 + z^2$ , т. е. сумма площадей квадратовъ, построенныхъ на сторонахъ треугольника, достигаетъ minimum'a вмѣстѣ съ minimum'омъ отъ функціи  $(x^2 - y^2)^2 + (y^2 - z^2)^2 + (z^2 - x^2)^2$ ; но эта функція, какъ имѣющая всегда неотрицательное значеніе и обращающаяся въ нуль лишь при (3)  $x^2 = y^2 = z^2$ , достигаетъ minimum'a при равныхъ значеніяхъ  $x^2, y^2$  и  $z^2$ . Такъ какъ стороны треугольника  $x, y, z$  могутъ имѣть лишь положительные значенія, то равенства (3) равносильны равенствамъ  $x = y = z$ . Такимъ образомъ сумма площадей квадратовъ, построенныхъ на сторонахъ треугольника постоянной площади, достигаетъ minimum'a при  $x = y = z$ , т. е. въ томъ случаѣ, когда рассматриваемый треугольникъ становится равностороннимъ. Подставляя въ равенство (1)  $x$  вмѣсто  $y$  и вмѣсто  $z$ , находимъ, что  $3x^4 = 16S^2$ , откуда  $x^2 = \frac{4S}{\sqrt{3}}$ , а потому, при  $x = y = z$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 3x^2 = 3 \cdot \frac{4S}{\sqrt{3}} = 4S\sqrt{3}$ . Итакъ, искомый minimum суммы площадей рассматриваемыхъ квадратовъ равенъ  $4S\sqrt{3}$ .

П. Волохинъ (Ялта); И. Зюзинъ (с. Татьянино); В. Кованько (ст. Струнино); Н. С. (Одесса).



## № 181 (6 сер.). Решить уравнение

$$\sqrt{(8-x)^2} + \sqrt{(27+x)^2} = \sqrt{(8-x)(27+x)} + 7.$$

Полагая (1)  $\sqrt{8-x}=y$ , (2)  $\sqrt{27+x}=z$ , представим данное уравнение в видъ (3)  $y^2 + z^2 - yz = 7$ . Возвышая равенства (1) и (2) въ кубъ и складывая, получимъ (4)  $y^3 + z^3 = 35$ . Дѣля почленно уравнение (4) на уравнение (3), находимъ, что (5)  $y+z=5$ . Наконецъ, возвышая въ квадратъ равенство (5) и вычитая почленно изъ результата уравнение (3), получимъ уравнение  $3yz=18$ , или (6)  $yz=6$ . Рѣшивъ систему уравнений (5) и (6) обычнымъ путемъ, получимъ

$$y_1=2, z_1=3 \text{ или } y_2=3, z_2=2.$$

Подставляя въ равенство (1) вмѣсто  $y$  его значеніе  $y_1=2$ , возвышая въ кубъ и опредѣляя  $x$ , находимъ первый корень данного уравненія, а именно  $x_1=0$ ; подобнымъ же образомъ, полагая въ равенствѣ (1)  $y=3$ , возвышая въ кубъ и опредѣляя  $x$ , получимъ второй корень, а именно  $x_2=-19$ .

А. Ильинъ (Кіевъ); П. Безчеревныиъ (Благовѣщенскіе); Я. Эштейнъ (Михайловка, Таврической губ.); Д. Ханжіевъ (Армавиръ); П. Волохинъ (Ялта); Л. Лисовскій (Гжатскъ, Смоленской губ.); А. Иткинъ (Петроградъ); А. Черновъ (Тула); А. Кисловъ (Москва); Н. Н. (Тифлисъ); М. Бабинъ (Могилевъ); Н. Андреевскій (Сочи); А. Глазуновъ (Александровскіе); В. Ревзинъ (Сумы); Х. Брукъ (Кривой-Рогъ); Н. Гольдбургъ (Вильни); В. Кованько (ст. Струнино);

№ 188 (6 сер.). Найти сумму  $n$  членовъ ряда

$$1^2a + 2^2a^3 + 3^2a^5 + \dots + n^2a^{2n-1} + \dots$$

Назовемъ сумму  $n$  членовъ данного ряда черезъ  $s_n$ . Тогда

$$(1) s_n = a(1 + 2^2a^2 + 3^2a^4 + \dots + n^2a^{2n-2}),$$

или, полагая

$$(2) a^2 \equiv q, \quad (3) y = 1 + 2^2q + \dots + n^2q^{n-1}, \quad (4) s_n = ay.$$

Помноживъ равенство (3) на  $q$  и вычитая результатъ изъ равенства (3), получимъ

$$(1-q)y = 1 + (2^2-1)q + (3^2-2^2)q^2 + \dots + [n^2 - (n-1)^2]q^{n-1} - n^2q^n.$$

Т. е.  $(1-q)y = 1 + n^2q^n + [3q + 5q^2 + \dots + (2n-1)q^{n-1}]$ .

или же

$$(5) (1-q)y = 1 - n^2q^n + z, \quad \text{гдѣ} \quad (6) z = 3q + 5q^2 + \dots + (2n-1)q^{n-1}.$$

Помноживъ равенство (6) на  $q$  и вычитая результатъ изъ равенства (6), получимъ

$$z(1-q) = 3q + (5-3)q^2 + (7-5)q^3 + \dots + [(2n-1) - (2n-3)]q^{n-1} - (2n-1)q^n =$$

$$= 3q - (2n-1)q^n + 2(q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1}).$$

откуда, суммируя прогрессію  $q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1}$ , находимъ, что

$$(7) z(1-q) = 3q - (2n-1)q^n + \frac{2(q^2 - q^n)}{1-q}.$$



Предполагая, что  $a \neq 1$  [см. (2)], и определяя  $z$  из равенства (7), получим: послѣ обычных преобразований, что  $z = \frac{3q - q^2 - (2n+1)q^n + (2n-1)q^{n+1}}{(1-q)^2}$ .

Подставивъ значеніе  $z$  въ равенство (5) и опредѣливъ  $y$ , подставляемъ найденное значеніе  $y$  въ равенство (4); тогда, послѣ ряда обычныхъ вычисленій, получимъ:

$$s_n = \frac{a[1+q-(n+1)^2q^n+(2n^2+2n-1)q^{n+1}-n^2q^{n+2}]}{(1-q)^3},$$

т. е. [см. (2)]

$$s_n = \frac{a[1+a^2-(n+1)^2a^{2n}+(2n^2+2n-1)a^{2(n+1)}-n^2a^{2(n+2)}]}{(1-a^2)^3}$$

Выведенная формула теряетъ смыслъ, если  $a=1$ . Въ этомъ случаѣ  $s_n$  обращается въ сумму квадратовъ  $n$  первыхъ чиселъ натурального ряда; эта сумма равна, какъ извѣстно, выраженію  $\frac{n(n+1)}{6}$ .

А. Иткинъ (Петроградъ); В. Кованько (ст. Струнино); П. Волохинъ (Ялта); В. Ревзинъ (Сумы).

№ 189 (6 сер.) Решить уравненіе

$$x^2 - \frac{3x^2 - 8x + 4}{\sqrt{x-1}} - 4 = 0.$$

Лѣвую часть уравненія можно представить въ видѣ

$$x^2 - 4 - \frac{(3x-2)(x-2)}{\sqrt{x-1}} = (x-2) \left( x+2 - \frac{3x-2}{\sqrt{x-1}} \right),$$

откуда слѣдуетъ, что данное уравненіе распадается на два уравненія:

$$(1) \quad x-2=0 \quad \text{и} \quad (2) \quad x+2 - \frac{3x-2}{\sqrt{x-1}} = 0.$$

Положимъ (3)  $\sqrt{x-1}=y$ . Тогда (4)  $x=1+y^2$ , и такимъ образомъ уравненіе (2) [см. (3), (4)] можно представить въ видѣ  $1+y^2+2 - \frac{3+3y^2-2}{y} = 0$ ; послѣднее же уравненіе можно записать послѣ обычныхъ преобразований въ видѣ  $y^3 - 3y^2 + 3y - 1 = 0$ , или же  $(y-1)^3 = 0$ , откуда  $y=1$ , а потому [см. (4)]  $x=2$ . Уравненіе (1) также даетъ корень  $x=2$ . Поэтому данное уравненіе имѣетъ единственный корень  $x=2$ .

Нина С. (Армавиръ); А. Иткинъ (Петроградъ); М. Бабинъ (Могилевъ); И. Эюзинъ (с. Татьянино); В. Кованько (ст. Струнино); Н. Михальскій (Екатеринославъ); А. Стафійчукъ (с. Пужайково, Подольской губ.); А. Ильинъ (Кіевъ); В. Ревзинъ (Сумы); Х. Брукъ (Кривой-Рогъ); Н. Казариновъ (Петроградъ).

---

Редакторъ прив.-доц. В. Ф. Каганъ. Издатель В. А. Гернетъ.

---

Дозволено военной цензурой.

Типографія „Техникъ“ — Одесса, Екатерининская, 58.



Обложка  
щется



Обложка  
щется