Обложка
ищется

Обложка
ищется

Второй серіи II-го семестра № 5.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

Элементарной Математики.

№ 617.

О доказательствахъ теоремы Лагранжа о конечномъ приращеніи функціи.

Прив.-доц. Д. А. Крыжановскаго.

Въ № 597 „Вѣстника" г. Шидловскій предложилъ новое доказательство такъ называемой теоремы Лагранжа о конечномъ приращеніи функціи, находя, что обычное аналитическое доказательство отличается искусственностью. Но доказательство г. Шидловскаго содержитъ два существенныхъ недочета, лишающихъ его доказательной силы, не говоря о томъ, что оно проведено въ предположеніи непрерывности производной $f'(x)$ въ разсматриваемомъ промежуткѣ, тогда какъ классическое доказательство обходится безъ этого допущенія.

Первый изъ недочетовъ въ доказательствѣ г. Шидловскаго подробно разобранъ въ статьѣ прив.-доц. В. Ф. Кагана, помѣщенной въ послѣднемъ, 616-омъ, номерѣ „Вѣстника", и состоитъ въ томъ, что г. Шидловскій не доказываетъ, что выраженіе $\frac{1}{n}\Sigma\varepsilon$ стремится къ нулю при возрастаніи n. Но если бы даже это утвержденіе имъ было доказано, то нетрудно видѣть, что изъ равенства

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X}=\frac{1}{n}\Sigma f'(x_i)+\frac{1}{n}\Sigma\varepsilon_i$$

вытекало бы не соотношеніе

$$f'(x_p) < \frac{\Delta Y}{\Delta X} < f'(x_q),$$

нужное г. Шидловскому, а всего лишь такое соотношеніе:

$$f'(x_p) \leqq \frac{\Delta Y}{\Delta X} \leqq f'(x_q)$$

[здѣсь $f'(x_p)$ — наименьшее, $f'(x_q)$ — наибольшее значеніе $f'(x)$ въ промежуткѣ $x_0 \ldots X$]. Но изъ этого послѣдняго соотношенія можно заключить только, что дробь $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$ равна значенію производной $f'(x)$ въ нѣкоторой точкѣ $x = c$, лежащей гдѣ-то въ промежуткѣ $x_0 \ldots X$, а не обязательно внутри этого промежутка. Въ этомъ — второй дефектъ разсужденій г. Шидловскаго.

Что же касается обычнаго доказательства теоремы Лагранжа то въ немъ приходится различать двѣ части — доказательство теоремы Ролля, играющей роль леммы, и примѣненіе этой теоремы къ доказательству теоремы Лагранжа. Ни то, ни другое не представляется мнѣ болѣе искусственнымъ или труднымъ для пониманія учениковъ, чѣмъ многія доказательства въ курсѣ элементарной математики. Но доказательство теоремы Ролля опирается въ свою очередь на теорему Вейерштрасса о достиженіи непрерывной функціей своего наибольшаго и наименьшаго значенія (существованіе максимума и минимума). Аналитическое доказательство этой послѣдней теоремы возможно лишь при такой постановкѣ курса дифференціальнаго исчисленія, которая выходитъ изъ рамокъ средней школы.

Если же вмѣсто строгаго доказательства теоремы Вейершрасса ссылаться на одну лишь интуицію, какъ поступали всѣ математики до Вейерштрасса и какъ продолжаютъ еще и теперь поступать безчисленные авторы, то къ чему тогда „доказывать" теоремы Ролля и Лагранжа: вѣдь съ равнымъ основаніемъ можно сослаться на интуитивно-очевидное существованіе на дугѣ промежуточной точки, въ которой касательная къ дугѣ параллельна ея хордѣ! Замѣчу, кстати, что и доказательство, предложенное г. Шидловскимъ, тоже нуждается въ этой теоремѣ Вейерштрасса (существованіе экстремальныхъ значеній $f'(x_p)$, $f'(x_q)$ производной въ промежуткѣ $x_0 \ldots X$).

Въ виду сказаннаго, дѣйствительно крупный интересъ представляло бы такое доказательство теоремы Лагранжа, которое не нуждалось бы въ теоремѣ Вейерштрасса или какомъ-нибудь ея эквивалентѣ. Такое доказательство даетъ Gerhard Kowalewski (нынѣ профессоръ въ Прагѣ) въ своей прекрасной книгѣ „Die Klassischen Probleme der Analysis des Unendlichen" (Leipzig, 1910, Engelmann) (не смѣшивать съ его же „Основами дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія", изданными на русскомъ языкѣ книгоиздательствомъ „Mathesis"), представляющей оригинальное сочетаніе теоретическаго курса съ собраніемъ рѣшенныхъ примѣровъ на фонѣ исторіи развитія Анализа. Надѣясь, что читателямъ „Вѣстника" будетъ интересно познакомиться съ этимъ оригинальнымъ доказательствомъ, я изложу его со всѣми деталями.

Свое доказательство теоремы Лагранжа Ковалевскій основываетъ на такомъ свойствѣ всякой непрерывной (и только!) функціи:

„Если функція $f(x)$ непрерывна въ интервалѣ (a, b), то существуетъ такой другой интервалъ (a_1, b_1), лежащій цѣликомъ внутри перваго интервала и, по крайней мѣрѣ, вдвое меньшій, чѣмъ онъ, что $\dfrac{f(b_1)-f(a_1)}{b_1-a_1}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$".

Это свойство геометрически можно выразить такъ:

„Если функція $f(x)$ непрерывна въ интервалѣ (a, b), то на дугѣ кривой $y=f(x)$ между точками $A[a\,|\,f(a)]$ и $B[b\,|\,(f(b)]$ всегда существуетъ такая пара точекъ $A_1[a_1\,|\,f(a_1)]$ и $B_1[b_1\,|\,f(b_1)]$, что хорда A_1B_1 параллельна хордѣ AB и короче ея, по крайней мѣрѣ, вдвое*)".

Для доказательства этого свойства обозначимъ черезъ D величину отношенія $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, которое равно угловому коэффиціенту хорды AB, и раздѣлимъ интервалъ (a, b) въ точкѣ $c={}^1/_2(a+b)$ пополамъ. Такъ какъ $b-a=2(c-a)=2(b-c)$, то

$$D=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\{f(c)-f(a)\}+\{f(b)-f(c)\}}{b-a}={}^1/_2\left\{\frac{f(c)-f(a)}{c-a}+\frac{f(b)-f(c)}{b-c}\right\},$$

т. е. D представляетъ ариѳметическое среднее угловыхъ коэффиціентовъ хордъ AC и CB, гдѣ C обозначаетъ точку $[c\,|\,f(c)]$.

Если эти угловые коэффиціенты оба равны D, такъ что хорды AC и CB параллельны хордѣ AB и, слѣдовательно, точка C лежитъ на хордѣ AB, то раздѣлимъ каждый изъ интерваловъ (a, c) и (c, b) пополамъ въ точкахъ $d={}^1/_2(a+c)$ и $e={}^1/_2(c+b)$. Угловые коэффиціенты хордъ AC и CB окажутся соотвѣтственно равными ариѳметическимъ среднимъ угловыхъ коэффиціентовъ хордъ AD, DC и хордъ CE, EB. Если всѣ эти 4 хорды окажутся параллельными хордѣ AB, то раздѣлимъ вновь каждый изъ интерваловъ (ad), (dc), (ce), (eb) пополамъ и т. д. Возможно [въ зависимости отъ взятой функціи $f(x)$] лишь одно изъ двухъ:

1) Какъ бы далеко мы ни продолжали описанный процессъ дѣленія промежутковъ пополамъ, мы всегда будемъ получать хорды, параллельныя хордѣ AB (или отношенія, равныя D). 2) При дѣленіи, по крайней мѣрѣ, одного изъ полученныхъ въ извѣстный моментъ интерваловъ пополамъ получаются хорды, не параллельныя AB.

---

*) Если $AB \parallel A_1B_1$, то длины промежутковъ (a, b) и (a_1, b_1), представляющихъ проекціи хордъ AB и A_1B_1 на ось OX, пропорціональны этимъ хордамъ. Поэтому, если $b_1-a_1 \leqslant {}^1/_2(b-a)$, то $\overline{A_1B_1} \leqslant {}^1/_2\,\overline{AB}$.

Обнаружимъ наличность указаннаго выше свойства въ каждомъ изъ этихъ случаевъ отдѣльно.

1) Очевидно, что въ первомъ случаѣ уже промежутокъ (d, c) или (c, e) обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что онъ не больше половины промежутка (a, b) и даетъ хорду (DC или CE), параллельную AB.

2) Пусть (α, β) означаетъ тотъ интервалъ, которому соотвѣтствуетъ угловой коэффиціентъ, равный D, но который при дѣленіи пополамъ даетъ промежутки съ коэффиціентами D' и D'', неравными D. Въ частномъ случаѣ возможно, что $\alpha = a$ или $\beta = b$ или даже разомъ $\alpha = a$, $\beta = b$.

Такъ какъ $D = {}^1/_2(D' + D'')$, то либо $D' > D > D''$, либо $D' < D < D''$. Обозначимъ разность $\beta - \alpha$ черезъ $2h$ и составимъ для промежутка $(\alpha, \alpha + h)$ такую, очевидно, непрерывную въ немъ функцію:

$$\omega(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Такъ какъ $\omega(\alpha) = D'$, $\omega(\alpha + h) = D''$, то при нѣкоторомъ значеніи $x = \overline{\alpha}$, лежащемъ между α и $\alpha + h$, непрерывная функція $\omega(x)$ должна принимать значеніе, равное D:

$$\omega(\overline{\alpha}) = \frac{f(\overline{\alpha} + h) - f(\overline{\alpha})}{h} = D\ ^*).$$

Обозначая $\overline{\alpha}$ черезъ a_1, $\overline{\alpha} + h$ черезъ b_1 и замѣчая, что 1) $b_1 - a_1 = h = {}^1/_2(\beta - \alpha) \leqq {}^1/_2(b - a)$, 2) $\dfrac{f(b_1) - f(a_1)}{b_1 - a_1} = \dfrac{f(\overline{\alpha} + h) - f(\overline{\alpha})}{h} = D = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ и 3) a_1 и b_1 лежатъ внутри интервала (α, β) и eo ipso внутри интервала (a, b), находимъ, что числа a_1, b_1 обладаютъ требуемымъ свойствомъ.

Но доказанное свойство не есть еще теорема о конечномъ приращеніи. Чтобы доказать ее, мы снова будемъ различать оба единственно возможные случая (см. выше).

1) Въ первомъ случаѣ хорды AC и CB параллельны хордѣ AB, точка C лежитъ на хордѣ AB. Аналогично этому, точки D и E и т. д. лежатъ на той же хордѣ AB. Итакъ, безконечно много точекъ кривой $y = f(x)$ лежатъ на хордѣ AB. Покажемъ, что всѣ точки дуги AB нашей кривой лежатъ на этой хордѣ.

*) Этотъ аналитическій выводъ можно описать слѣдующимъ образомъ. Вообразимъ отрѣзокъ длиной въ $h = {}^1/_2(\beta - \alpha)$ и, передвигая его вдоль оси Ox отъ положенія $(\alpha, \alpha + h)$ до положенія $(\alpha + h, \beta)$, будемъ наблюдать за измѣненіемъ уклона хорды, вписанной въ кривую $y = f(x)$ и имѣющей проекціей на Ox этотъ подвижной отрѣзокъ. Такъ какъ при непрерывномъ движеніи отрѣзка, ординаты начальной и конечной точекъ этой хорды измѣняются непрерывно, то хорда будетъ принимать по дорогѣ всѣ промежуточныя значенія уклона, въ томъ числѣ и значеніе, равное D.

Точки, A, B, C, D, $E,\ldots$, получаемыя при послѣдовательномъ дѣленiи промежутковъ пополамъ, выражаются формулой:

$$x = a + \vartheta(b - a), \tag{A}$$

гдѣ $\vartheta = \frac{k}{2^n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots;\ k = 0, 1, 2, \ldots, 2^n)$. Иначе говоря, ϑ обозначаетъ любую дробь, выражающуюся въ двуричной системѣ символомъ

$$\vartheta = 0,\ a_1 a_2 a_3 \ldots a_n\ (a_i = 0 \text{ или } 1),$$

аналогичнымъ конечнымъ десятичнымъ дробямъ въ обыкновенной системѣ счисленія.

Пусть $y = \varphi(x)$ представляетъ уравненіе хорды AB. Для всѣхъ значеній абсциссы x, выражаемыхъ формулой (A), значенія $f(x)$ и $\varphi(x)$ равны. Возьмемъ какую-нибудь точку x_0 промежутка (a, b), не принадлежащую къ числу точекъ дѣленія (A). Всегда можно составить послѣдовательность (рядъ) абсциссъ $x_1, x_2, \ldots$, выражаемыхъ нашей формулой (A) и стремящихся къ предѣлу, равному x_0. Для этого достаточно принять за x_n одну изъ тѣхъ двухъ абсциссъ, получаемыхъ изъ формулы (A) при $\vartheta = \frac{k}{2^n}$, между которыми лежитъ x_0, такъ какъ тогда будетъ $|x_n - x_0| < \frac{1}{2^n}$.

Такъ какъ функція $f(x)$ непрерывна по условію, а функція $\varphi(x)$ непрерывна, ибо представляетъ собой линейный двучленъ вида $\lambda x + \mu$, то

$$\text{пред.}_{n=\infty} f(x_n) = f(x_0), \quad \text{пред.}_{n=\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x_0).$$

А такъ какъ при всякомъ значеніи n имѣетъ мѣсто равенство $f(x_n) = \varphi(x_n)$, — ибо абсциссамъ x_n, получаемымъ по формулѣ (A), соотвѣтствуютъ точки кривой, лежащія на хордѣ AB, — то эти предѣлы также равны между собой: $f(x_0) = \varphi(x_0)$.

Итакъ, для любой абсциссы $x = x_0$ въ интервалѣ (a, b) ординаты кривой $y = f(x)$ и хорды AB одинаковы, ч. и т. д.

Но линейная функція $\varphi(x)$ обладаетъ при всякомъ значеніи x производной, равной угловому коэффиціенту хорды AB, т. е. D. Слѣдовательно, во всякой точкѣ (a, b) существуетъ производная $f'(x) = D$, такъ что въ разсматриваемомъ первомъ случаѣ теорема Лагранжа доказана.

2) Во второмъ случаѣ разсуждаемъ такъ. На основаніи доказаннаго выше свойства, внутри промежутка (a, b) существуетъ промежутокъ (a_1, b_1), не превосходящій половины перваго и дающій хорду A_1B_1, параллельную хордѣ AB. Внутри промежутка (a_1, b_1), въ свою очередь, найдется интервалъ (a_2, b_2), не превосходящій половины промежутка (a_1, b_1) и дающій хорду A_2B_2 съ тѣмъ же направленіемъ. Внутри этого интервала существуетъ новый интервалъ съ тѣми же свойствами и т. д. Получается безконечный рядъ вставленныхъ другъ въ друга проме-

жутковъ (a, b), (a_1, b_1), $(a_2, b_2), \ldots$, при чемъ $a < a_1 < a_2 < \ldots$, $b > b_1 > b_2 > \ldots$, $b_n - a_n \leqslant \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2}$, такъ что $b_n - a_n \leqslant \frac{b-a}{2^n}$. Поэтому концы этихъ интерваловъ составляютъ ряды $a, a_1, a_2, \ldots$ и $b, b_1, b_2, \ldots$, имѣющіе нѣкоторую общую предѣльную точку ξ, лежащую, очевидно, внутри интеравла (a, b).

Равенство $D = \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = \frac{f(b_n) - f(\xi) + f(\xi) - f(a_n)}{(b_n - \xi) + (\xi - a_n)}$ показываетъ, что D либо заключено между отношеніями $\frac{f(b_n) - f(\xi)}{b_n - \xi}$ и $\frac{f(\xi) - f(a_n)}{\xi - a_n}$, либо равняется имъ обоимъ одновременно. Дѣйствительно, пусть, напримѣръ, имѣютъ мѣсто соотношенія:

$$\frac{f(b_n) - f(\xi)}{b_n - \xi} > D, \quad \frac{f(\xi) - f(a_n)}{\xi - a_n} \geqq D;$$

такъ какъ $b_n > \xi > a_n$, то изъ этихъ неравенствъ находимъ, что

$$f(b_n) - f(\xi) > (b_n - \xi) \cdot D, \quad f(\xi) - f(a_n) \geqq (\xi - a_n) \cdot D,$$

откуда, складывая почленно, получаемъ:

$$f(b_n) - f(a_n) > (b_n - a_n) \cdot D,$$

а это противорѣчитъ вышенаписанному равенству для D. Точно такъ же можно опровергнуть и остальные случаи, въ которыхъ D не заключено между разсматриваемыми отношеніями и не равняется имъ обоимъ одновременно.

Введемъ теперь относительно функціи $f(x)$ новое предположеніе: въ точкѣ $x = \xi$ существуетъ производная $f'(\xi)$, хотя бы равная ∞, но имѣющая опредѣленный знакъ. Такъ какъ $\xi = \text{пред.}_{n=\infty}\, a_n = \text{пред.}_{n=\infty}\, b_n$ и въ то же время $\xi \neq a_n$, $\xi \neq b_n$, то послѣдовательность $\frac{f(a_1) - f(\xi)}{a_1 - \xi}, \frac{f(b_1) - f(\xi)}{b_1 - \xi}, \frac{f(a_2) - f(\xi)}{a_2 - \xi}, \frac{f(b_2) - f(\xi)}{b_2 - \xi}, \ldots$ стремится къ предѣлу, равному $f'(\xi)$.

Если бы было $f'(\xi) > D$, то при достаточно большихъ значеніяхъ индекса n дроби вида $\frac{f(a_n) - f(\xi)}{a_n - \xi}$ и $\frac{f(b_n) - f(\xi)}{b_n - \xi}$ оставались бы больше D, а между тѣмъ, по только-что доказанному, либо одна изъ двухъ такихъ дробей больше D, а другая меньше D, либо обѣ одновременно равны D, что представляетъ противорѣчіе. Аналогичнымъ образомъ можно убѣдиться въ томъ, что $f'(\xi)$ не можетъ быть меньше D. Слѣдовательно, $f'(\xi) = D$.

Итакъ, если извѣстно, что $f(x)$ обладаетъ производной какъ разъ въ той точкѣ ξ (или въ одной изъ тѣхъ точекъ), которая лежитъ внутри безконечнаго ряда содержащихся одинъ въ другомъ промежутковъ, то имѣетъ мѣсто формула конечныхъ приращенiй:

$$f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(\xi).$$

Поэтому, если мы предположимъ, что $f(x)$ обладаетъ производной опредѣленнаго знака (хотя бы равной $+\infty$ или $-\infty$) во всѣхъ внутреннихъ точкахъ промежутка, то мы можемъ утверждать, что послѣдняя формула имѣетъ мѣсто какъ въ первомъ, такъ и во второмъ изъ единственно возможныхъ случаевъ.

Въ заключенiе этой замѣтки я хотѣлъ бы указать на то, что самое наименованiе теоремы о конечномъ приращенiи теоремой Лагранжа врядъ ли является исторически справедливымъ. Въ своей геометрической формѣ она была извѣстна уже B. Cavalieri (1635). Первое же строгое ея доказательство далъ, повидимому, Ossian Bonnet въ своихъ лекцiяхъ въ Парижской Политехнической школѣ. Что касается Лагранжа, то послѣднiй, стоя на совершенно иной точкѣ зрѣнiя, разсматривалъ формулу конечныхъ приращенiй, какъ слѣдствiе формулы Тейлора (ср. статью Voss-Molk'а по дифференцiальному исчисленiю во французскомъ изданiи „Математической Энциклопедiи“).

Распыленiе катода.

А. Фрумкина.

Когда электрическiй разрядъ проходитъ черезъ разрѣженный газъ, стѣнки сосуда покрываются налетомъ металла, изъ котораго сдѣланъ катодъ, сначала прозрачнымъ, потомъ все болѣе плотнымъ и темнымъ,—происходитъ такъ называемое распыленiе катода („cathode disintegration“ „kathodenzerstäubung“).

Это явленiе было замѣчено впервые въ серединѣ прошлаго столѣтiя и описано Плюккеромъ (Plücker) и Гассio (Gassiot), но не возбудило особеннаго интереса, пока Райтъ (Wright) и Кундтъ (A. Kundt) не обратили вниманiе на замѣчательныя оптическiя свойства металлическихъ налетовъ, которые образуются при распыленiи. Ихъ работами начинается длинный рядъ изслѣдованiй этого явленiя, которыя можно раздѣлить на двѣ группы, смотря по тому, занимались ли они изученiемъ физическихъ свойствъ металлическихъ налетовъ или механизмомъ самого распыленiя. Обратимся сначала къ работамъ первой группы.

Уже Кундтъ нашелъ, что эти налеты, если толщина ихъ настолько мала, что они пропускаютъ свѣтъ, помѣщенные между двумя скрещенными николями, просвѣтляютъ поле зрѣнія подобно тѣламъ съ двойнымъ лучепреломленіемъ. Правильное объясненіе этого явленія было дано Брауномъ (F. Braun). Извѣстно изъ опытовъ Герца, что металлическая рѣшетка пропускаетъ электромагнитную волну, если направленіе электрическихъ колебаній нормально къ полосамъ рѣшетки, если же это направленіе параллельно полосамъ, волна частью отражается, частью поглощается. Вообразимъ себѣ теперь металлическую рѣшетку, столь тонкую и густую, что на пространствѣ одного миллиметра умѣщаются 10—100 тысячъ полосокъ. Такая рѣшетка будетъ дѣйствовать на свѣтовую волну, какъ Герцовская рѣшетка на электромагнитную; отраженный отъ нея свѣтъ будетъ поляризованъ въ плоскости, перпендикулярной полоскамъ, пропущенный же свѣтъ въ плоскости, параллельной къ нимъ.

Такого рода рѣшетчатой субмикроскопической структурой и обладаютъ по Брауну налеты распыленныхъ металовъ. Но если это предположеніе вѣрно, то эти налеты должны не только просвѣтлять зрительное поле между двумя скрещенными николями, но и пропускать свѣтъ въ различной степени въ зависимости отъ направленія плоскости поляризаціи падающаго свѣта, какъ это дѣлаетъ пластинка турмалина.

Это явленіе труднѣе наблюдать, однако, Брауну удалось, распыляя тонкую металлическую проволоку надъ стеклянной пластинкой сильнымъ разрядомъ получить налеты, обладающіе и этимъ свойствомъ въ высокой степени *). Наконецъ, новые (еще неопубликованные) опыты Брауна и его учениковъ надъ этими налетами вполнѣ подтвердили, что причина наблюдаемыхъ оптическихъ свойствъ лежитъ только въ структурѣ налетовъ.

Въ связи съ структурой налетовъ находится и замѣчательная зависимость ихъ электропроводности отъ возраста, изслѣдованная Кольшютеромъ (V. Kohlschütter), Кольшютеръ нашелъ, что сопротивленіе свѣже приготовленныхъ налетовъ серебра достигаетъ значительныхъ размѣровъ, затѣмъ быстро падаетъ, остается нѣкоторое время у минимума, чтобы потомъ столь же быстро возрасти до безконечности. Привожу одинъ примѣръ изъ работы Кольшютера.

Время: 0, 5$'$, 21$'$, 45$'$ $1^h15'$, $1^h20'$, $1^h35'$, $1^h37'$, $1^h42'$, $1^h45'$, $1^h48'$, $1^h52'$. Сопротивленіе: 400, 250, 230, 220, 220, 240, 300, 330, 700, 890, 2200, ∞ омовъ. Скорость измѣненія сопротивленія растетъ съ температурой. По Кольшютеру въ средѣ металла съ теченіемъ времени происходитъ процессъ конденсаціи, т. е. маленькія частицы металла сливаются въ большія, которыя затѣмъ растутъ на счетъ окружающихъ. Вслѣдствіе этого сначала уменьшается число сопротивленій контакта и электропроводность растетъ, но при дальнѣйшемъ увеличеніи частицъ, въ виду ограниченности матеріала слой начинаетъ рваться въ нѣкоторыхъ мѣстахъ и сопротивленіе сильно возрастаетъ.

*) См. объ этомъ проф. Ф. Браунъ „Мои работы по безпроволочной телеграфіи и по электрооптикѣ“. Изд. „Mathesis“.

Измѣненіе характера кривой въ зависимости отъ давленія съ одной стороны и ультрамикроскопическія наблюденія съ другой, находятся въ полномъ согласіи съ этимъ объясненіемъ

Теперь разсмотримъ второй вопросъ: что обусловливаетъ распыленіе катода при прохожденіи тока черезъ разрѣженный газъ? Что отрываетъ частички металла отъ его поверхности и бросаетъ ихъ въ пространство? Электрическій разрядъ въ разрѣженныхъ газахъ сопровождается, какъ извѣстно, цѣлымъ рядомъ побочныхъ явленій, какъ то: нагрѣваніе катода, измѣненіе давленія въ трубкѣ, всякаго рода химическія реакціи и т. д. Первые изслѣдователи приписывали причину распыленія этимъ процессамъ. Особенно распространенъ былъ взглядъ Гитторфа (Hittorf) и Видеманна (E. Wiedemann), что распыленіе есть простое испареніе подъ вліяніемъ низкаго давленія и высокой температуры катода. Однако, Гранквистъ (G. Granquist) нашелъ, что скорость распыленія не мѣняется при нагрѣваніи катода до ярко-краснаго каленія. Наконецъ, Гольдштейну (Goldstein) удалось въ 1902 г. доказать, что причина распыленія катода лежитъ въ самомъ электрическомъ разрядѣ, вѣрнѣе въ носителяхъ положительнаго заряда. Онъ замѣтилъ, что пучекъ открытыхъ имъ положительныхъ лучей очищаетъ поверхность позолоченой трубки, на которую онъ падаетъ отъ позолоты, т. е. тонкій слой металла распыляется. Тотъ же эффектъ, но въ гораздо меньшей степени, производятъ катодные лучи. Опыты Гольдштейна были повторены и разработаны Кольшютеромъ и Штаркомъ (I. Stark). Кольшютеръ направлялъ пучокъ положительныхъ лучей, который образуется за катодомъ, сдѣланнымъ изъ тонкой латунной сѣтки (см. рис. 1) на металлическую пластинку c; черезъ нѣкоторое время стѣнка стеклянного цилиндра d, окружавшаго пластинку, покрывалась металлическимъ налетомъ, т. е. пластинка распылялась. Кольшютеръ нашелъ, что при этихъ условіяхъ различные металлы распыляются съ очень различной скоростью (скоростью распыленія называется количество металла, распыленнаго въ одну секунду) скорѣе всѣхъ платинѣ, медленнѣе всѣхъ аллюминій; для одного и того же металла распыленіе въ воздухѣ гораздо сильнѣе распыленія въ водородѣ.

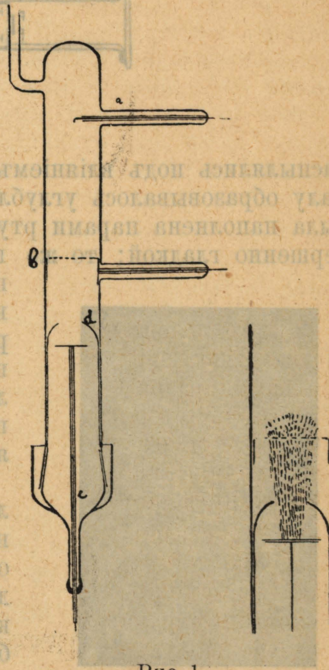

Рис. 1.

Нѣсколько иную форму имѣлъ аппаратъ Штарка (см. рис. 2). Пластинка изъ испытуемаго вещества *PP* находится въ немъ непосредствено за катодомъ въ которомъ сдѣлано отверстіе въ 2 *мм.* въ діаметрѣ, такъ что на нее падаетъ очень сильный пучокъ положительныхъ лучей. Штаркъ изслѣдовалъ различные изоляторы, какъ поваренную соль, слюду, стекло, известковый шпатъ и др. Всѣ эти тѣла

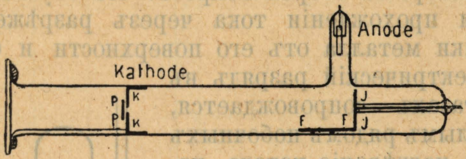

Рис. 2.

распылялись подъ вліяніемъ положительныхъ лучей, такъ что мало по малу образовывалось углубленіе по серединѣ пластинки. Если трубка была наполнена парами ртути, то поверхность выемки оставалась совершенно гладкой; то же происходило въ водородѣ при небольшомъ паденіи потенціала (меньше 5000 v). При высокомъ же паденіи потенціала въ водородѣ она покрывалась маленькими возвышеніями и кратерами, какъ видно изъ прилагаемаго снимка пластинки извѣсткоаго шпата (см. рис. 3). Къ послѣднему обстоятельству мы еще вернемся.

Рис. 3.

Такимъ образомъ, мы видимъ, что положительные лучи распыляютъ самые разнообразныя вещества; но такъ же, какъ они дѣйствуютъ въ пространствѣ за катодомъ, они должны дѣйствовать и на самый катодъ, который постоянно подвергается ихъ бомбардировкѣ.

Конечно, электрическія явленія у катода не исчерпываются этимъ и нельзя съ увѣренностью утверждать, что другія явленія, какъ напримѣръ, испусканіе отрицательныхъ электроновъ не имѣютъ никакого вліянія на распыленіе катода. Однако, неизвѣстно ни одного факта, говорящаго въ пользу такого предположенія и въ настоящее время всѣми допускается, что распыленіе катода и распыленіе подъ вліяніемъ пучка положительныхъ лучей за катодомъ то же самое явленіе.

Для болѣе глубокаго знакомства съ механизмомъ распыленія было бы крайне важно знать зависимость скорости распыленія отъ массы и скорости положительныхъ лучей. Этотъ вопросъ могъ бы быть рѣшенъ наблюденіями надъ распыленіемъ подъ вліяніемъ пучка положительныхъ лучей опредѣленной массы и скорости; къ сожалѣнію, если и удалось получить такіе пучки благодаря работамъ Томсона

(J. J. Thomson) распыленіе подъ ихъ вліяніемъ идетъ слишкомъ медленно для количественныхъ измѣреній. Вслѣдствіе этого, до сихъ поръ ограничивались количественнымъ изслѣдованіемъ зависимости распыленія катода отъ условій разряда, т. е. силы тока, паденія потенціала у катода, природы газа, наполняющаго трубку и т. д. и изъ этихъ датъ уже дѣлать выводы о вліяніи природы положительныхъ лучей. При этомъ допускалось, что кинетическая энергія положительно заряженныхъ частицъ пропорціональна катодному паденію потенціала по формулѣ $\frac{mv^2}{2} = \frac{eV}{300}$ (e — зарядъ частицы въ абс. электр. единицахъ, V — паденіе потенціала въ вольтахъ); далѣе, что число частицъ, падающихъ на катодъ, пропорціонально силѣ тока и наконецъ, что сами частицы тождественны съ молекулами или атомами газа, введеннаго въ трубку. Къ сожалѣнію, эти допущенія вѣрны только приблизительно, что до нѣкоторой степени обезцѣниваетъ всѣ теоретическія выводы. Въ виду этого я не буду останавливаться подробно на методахъ изслѣдованія и только вкратцѣ изложу окончательные результаты.

Первыя количественныя измѣренія распыленія катода были произведены Круксомъ (W Krookes); потомъ въ этой области работали Гранквистъ, Гольборнъ (L. Holborn) и Аустинъ (L. Austin), но точныя данныя удалось получить только въ послѣднее время Кольшютеру, Тиндалю (A. M. Tyndall) и Хюгсу (H. G. Huges). Вотъ въ общихъ чертахъ результаты ихъ работъ. Скорость распыленія катода зависитъ отъ природы металла, изъ котораго онъ сдѣланъ. „Рядъ возростающей распыляемости“ получается приблизительно слѣдующій: магній, аллюминій, желѣзо, никель, мѣдь, родій, сурьма, иридій, палладій, платина, серебро, золото. Разница въ распыляемости различныхъ членовъ ряда очень велика; такъ золото распыляется въ семь разъ скорѣе никеля, распыляемость же аллюминія и магнія настолько мала, что ее долго считали равной нулю*).

Въ общемъ, сильно электро-положительные металлы распыляются гораздо слабѣе другихъ, по точной зависимости между распыляемостью металла и его положеніемъ въ ряду Вольта не существуетъ.

Такъ какъ при прохожденіи тока черезъ газъ сила тока не пропорціональна разности потенціаловъ, то необходимо разсмотрѣть отдѣльно вліяніе этихъ двухъ факторовъ. При постоянномъ паденіи потенціала скорость распыленія пропорціональна силѣ тока, пока онъ очень слабъ (меньше одного милліампера), потомъ растетъ нѣсколько медленнѣе. Сложнѣе зависимость скорости распыленія отъ паденія потенціала при постоянной силѣ тока. Какъ извѣстно, до тѣхъ поръ пока катодное сіяніе не покрываетъ весь катодъ, паденіе потенціала около катода сохраняетъ постоянное значеніе, которое не зависитъ ни отъ силы тока, ни отъ давленія. Эта величина, извѣстная подъ именемъ „нормальнаго катоднаго паденія потенціала“, колеблется для различныхъ газовъ между 100 и 300 v.

---

*) По этой причинѣ катоды рёнтгеновскихъ и плюккеровскихъ трубокъ дѣлаются всегда изъ аллюминія.

Повидимому, при этомъ паденіи потенціала катодъ распыляется лишь въ очень слабой степени. Если затѣмъ увеличивать паденіе потенціала у катода, скорость распыленія растетъ сначала очень медленно, потомъ быстрѣе и начиная приблизительно отъ 800 *v.* по прямой линіи. Въ этой области скорость распыленія можно хорошо выразить формулой $P = k(v - s)$, гдѣ P — скорость распыленія, v — паденіе потенціала, k и s — постоянныя, зависящія отъ природы газа и металла и силы тока. s равно для всѣхъ металловъ въ азотѣ и для большинства въ аргонѣ 570 *v.* Какъ я уже говорилъ, постоянная k приблизительно пропорціональна силѣ тока и очень мѣняется отъ металла къ металлу; кромѣ того, Кольшютеръ нашелъ, что k сильно растетъ съ плотностью газа, такъ что тотъ же самый металлъ при одинаковыхъ электрическихъ условіяхъ распыляется въ аргонѣ сильнѣе, чѣмъ въ азотѣ и въ азотѣ сильнѣе, чѣмъ въ водородѣ. Особенно сильно распыляются металлы въ тяжелыхъ благородныхъ газахъ, какъ криптонъ и ксенонъ.

Формула $P = k(v - s)$ остается вѣрной въ аргонѣ приблизительно до 2000 *v.*, въ азотѣ до 1600 *v.* При болѣе высокихъ потенціалахъ скорость распыленія перестаетъ возрастать, вмѣстѣ съ тѣмъ все явленіе теряетъ равномѣрный характеръ и количественныя измѣренія дѣлаются невозможными. Въ водородѣ эти явленія появляются при еще болѣе низкихъ значеніяхъ потенціала, такъ что тутъ вообще не удалось найти точной количественной зависимости. Чтобы дополнить приведенные результаты, нужно еще упомянуть, что при прочихъ равныхъ условіяхъ распыленіе не зависитъ ни отъ давленія газа, ни отъ формы катода. Мы видимъ такимъ образомъ, что распыленіе катода находится въ очень сложной зависимости отъ условій разряда, такъ что о точной количественной теоріи въ настоящее время не можетъ быть и рѣчи и приходится удовольствоваться довольно грубой картиной распыленія, данной Штаркомъ.

Штаркъ предполагаетъ слѣдующее. Положительные лучи являются потокомъ частицъ, движущихся съ громадной скоростью ($10^7 - 10^8$ *cm/sec*). Встрѣчая поверхность твердаго тѣла, такая частица, — по Штарку „атомный лучъ“ — можетъ отдать ей часть своей кинетической энергіи. Благодаря этому, атомы металла, задѣтые частицей, пріобрѣтутъ большую скорость въ направленіи ея движенія и отразившись отъ болѣе глубокихъ слоевъ металла могутъ вылетѣть въ окружающее пространство. Очевидно, что число такихъ атомовъ будетъ тѣмъ больше, чѣмъ больше „атомныхъ лучей“ падаетъ на металлъ, т. е. распыленіе будетъ пропорціонально силѣ тока.

Далѣе, Штаркъ предполагаетъ, что только тѣ задѣтые атомы металла могутъ преодолѣть притяженіе сосѣднихъ и покинуть поверхность, скорость которыхъ превышаетъ извѣстную величину. Вслѣдствіе этого число атомовъ, покидающихъ поверхность металла растетъ вмѣстѣ со средней скоростью, которую они пріобрѣтаютъ при столкновеніи. Штаркъ даетъ приблизительное вычисленіе этой скорости. Пусть m_g и m_k будутъ массы атомнаго луча и атома металла, v_{g_1} и v_{g_2} скорость атомнаго луча до и послѣ столкновенія, v_k — скорость которую пріобрѣтаетъ атомъ металла при столкновеніи. Тогда законъ сохраненія количества движенія даетъ уравненіе:

$$m_k v_k = m_g (v_{g_1} - v_{g_2}).$$

Принимая въ качествѣ перваго приближенія, что ударъ эластичный, т. е. что сумма кинетическихъ энергій до и послѣ удара не мѣняется, мы получаемъ:

$$m_k v_k^2 = m_g^2 (v_{g_1}{}^2 - v_{g_2}{}^2).$$

Изъ этихъ двухъ уравненій легко вывести исключая v_{g_2}, что

$$v_k = 2 v_{g_1} \frac{m_g}{m_g + m_k}.$$

Наконецъ, подставляя сюда значеніе кинетической энергіи атомнаго луча

$$\frac{m v_{g_1}{}^2}{2} = \frac{eV}{300}$$

мы получаемъ:

$$v_k = 2 \frac{\sqrt{m_g}}{m_g + m_k} \sqrt{\frac{2eV}{300}}.$$

Такимъ образомъ, скорость, пріобрѣтаемая атомомъ металла растетъ вмѣстѣ съ массой атомнаго луча (такъ какъ $m_g > m_k$) и съ катоднымъ паденіемъ потенціала, т. е. и тутъ теорія находится въ полномъ согласіи съ опытомъ. Если катодное паденіе потенціала будетъ настолько мало, что v_k меньше величины, необходимой для преодолѣнія притяженія сосѣднихъ атомовъ, распыленія совершенно не будетъ. Это объясняетъ отсутствіе распыленія при низкихъ паденіяхъ потенціала.

Но зависимость скорости распыленія отъ кинетической энергіи этимъ не ограничивается: при большой энергіи атомный лучъ сможетъ проникнуть въ металлъ глубже и число задѣтыхъ атомовъ увеличится, т. е. возрастетъ скорость распыленія, однако, нужно принять во вниманіе, что тѣ атомы которые атомный лучъ встрѣтитъ въ концѣ своей траекторіи, будутъ имѣть гораздо меньше шансовъ покинуть катодъ, чѣмъ лежавшіе на его поверхности. Благодаря этому скорость распыленія катода растетъ при очень высокихъ паденіяхъ потенціала медленнѣе и наконецъ доходитъ до предѣльнаго значенія. Очевидно, что этотъ предѣлъ будетъ тѣмъ раньше достигнутъ, чѣмъ глубже проникаетъ въ катодъ атомный лучъ при данной кинетической энергіи, т. е. чѣмъ меньше его объемъ. Такимъ образомъ, въ тяжелыхъ газахъ скорость распыленія еще будетъ возрастать въ области потенціаловъ, въ которой она уже не измѣняется въ легкихъ газахъ. Этими же соображеніями Штаркъ объясняетъ образованіе возвышеній на поверхности неметаллическихъ тѣлъ при дѣйствіи скорыхъ лучей водорода, которые, проникая въ массу тѣла, теряютъ тамъ свою скорость и скопляются до тѣхъ поръ, пока ихъ давленіе не производитъ бугорокъ на поверхности тѣла; лучи ртути, обладающіе большою массою, и медленные лучи водорода, согласно съ теоріей, не даютъ этого эффекта.

Мы видимъ, что теорія Штарка въ общемъ даетъ удовлетворительное объясненіе явленій распыленія. Пока нѣтъ точныхъ опытовъ надъ распыленіемъ подъ вліяніемъ пучка положительныхъ лучей опредѣленной массы и скорости, врядъ ли удастся глубже проникнуть въ механизмъ этого интереснаго явленія.

СЪѢЗДЫ.

Первый Конгрессъ по философіи математики*).

(Парижъ, 6—8 апр. 1914 г.).

Проф. А. Реймонда (пер. съ французскаго).

Первый Конгрессъ математической философіи, происходившій въ Парижѣ отъ 6 до 8 апрѣля 1914 г., состоялся какъ продолженіе Международной Конференціи преподаванія математики, подъ покровительствомъ Французскаго Философскаго Общества. Засѣданія происходили въ Сорбоннѣ подъ предсѣдательствомъ Ксавье Леона (Leon), редактора журнала „Revue de Metaphysique et de Morale“ и главнаго организатора Съѣзда.

Въ воскресенье 5 апрѣля, въ 4 часа дня, г-нъ и г-жа Леонъ устроили весьма сердечный пріемъ членамъ Конгресса, которые получили при этомъ возможность познакомиться другъ съ другомъ.

Въ понедѣльникъ утромъ Съѣздъ открылся общимъ засѣданіемъ подъ предсѣдательствомъ Эмиля Бутру (Boutroux), члена Института и почетнаго президента Конгресса.

К. Леонъ изложилъ прежде всего, какимъ образомъ возникъ этотъ Съѣздъ философовъ и математиковъ.

Въ своей вступительной рѣчи Э. Бутру началъ съ того, что назвалъ имя своего двоюроднаго брата Анри Пуанкаре, память о которомъ живетъ во всѣхъ сердцахъ; именемъ этой дорогой памяти Бутру привѣтствуетъ участниковъ Конгресса. Затѣмъ онъ обрисовалъ связь между философіей и точными науками, въ частности, математикой. Эту рѣчь, замѣчательную богатствомъ и широтою взглядовъ, онъ заключилъ слѣдующимъ образомъ: „философія, какъ показываетъ ея исторія, можетъ развиваться лишь при самомъ тѣсномъ соприкосновеніи съ точными науками; но, чтобы выполнить свою мис-

*) Труды и доклады конгресса будутъ напечатаны въ отдѣльной книжкѣ журнала „Revue de Métaphysique et de Morale.

сію, она не должна позволить имъ поглотить себя и обязана ревниво охранять свою самостоятельность".

Послѣ этого Тимердингъ (Timerding) изложилъ, съ какими большими затрудненіями сопряженъ выборъ плана и содержанія работъ, которыя будутъ посвящены философскимъ вопросамъ въ энциклопедіи математическихъ наукъ. Между математикой и философіей были и еще теперь существуютъ столь близкія отношенія, что оставить послѣднюю безъ вниманія невозможно. Но какъ должно понимать эти отношенія? Какіе именно философскіе вопросы имѣютъ жизненный интересъ для математики? Тимердингъ выражаетъ надежду, что открывающійся новый Конгрессъ позволитъ отчасти выяснить эту проблему.

Дальнѣйшія засѣданія были посвящены чтенію и обсужденію нижеслѣдующихъ докладовъ:

П. Ланжевенъ (Langevin) — „Мѣстное время». Г. Динглеръ (H. Dingler) — „О теоріи наукъ Анри Пуанкаре". Динъ (Dienes) — „Символизмъ и реальность въ математикѣ". Л. Кутюра (Couturat) — „О злоупотребленіи интуиціей въ преподаваніи математики" Э. Ле Руа (E. Le Roy) — „Существенные шаги математической мысли въ чистомъ анализѣ". Ф. Энрикесъ (F Enriques) — „Математическая безконечность". А. Реймонъ (Reymond) — „Геометрическая безконечность и интуиція". Д. Кёнигъ (König) — a) „Новыя основы логики, ариѳметики и ученія о многообразіяхъ" І. Кёнига — b) „Объ одной проблемѣ изъ общей теоріи многообразій" А. Падоа (Padoa) — „Слѣдствія измѣненія основныхъ понятій въ какой-либо дедуктивной теоріи". Г. Дюфюмье (H. Dufumier) — „Логика классовъ и теорія многообразій". А. Н. Уайтегида (Whitehead) — „Отношенія пространства" (относительная теорія пространства). Л. Нельсонъ (Nelson) — „Объ основахъ геометріи". Гадамаръ (I. Hadamar) — „Внутреннія свойства пространства". Его же — „Функціональное исчисленіе, анализъ и синтезъ". Л. Бруншвигъ (Brunschwigg) — „Ариѳметика и теорія познанія". М. Винтеръ (Winter) — „Время и наслѣдственная механика" (la mécanique héréditaire).

Отъ понедѣльника пополудни до вечера среды всѣ засѣданія были посвящены критическому изученію работъ, указанныхъ въ программѣ. Сообщенія были сгруппированы сообразно съ ихъ содержаніемъ, что способствовало бо́льшему единству дебатовъ. Но, какъ замѣтилъ въ концѣ Конгресса Феръ (Fehr), вѣроятно, выгоднѣе было бы еще болѣе ограничить и сконцентрировать вопросы, предназначенные къ изученію.

Засѣданіе въ понедѣльникъ пополудни открылось докладомъ Ланжвена, который, исходя изъ своихъ собственныхъ идей и пользуясь работами Эйнштейна (Einstein), далъ поучительное и полное изложеніе вопроса о мѣстномъ времени. Абрагамъ (Abraham) сдѣлалъ нѣкоторыя оговорки относительно формулированныхъ Ланжвеномъ заключеній. Опредѣленная Эйнштейномъ группа преобразованій является скорѣе программой для изысканій, чѣмъ установленнымъ фактомъ, такъ какъ поскольку эта группа характеризуетъ свойство инваріантности, она должна быть примѣнима ко всѣмъ физическимъ силамъ, включая и поле силы тяжести, чего на самомъ дѣлѣ нѣтъ.

Затѣмъ Динглеръ прочиталъ свой докладъ „О теоріи наукъ Анри Пуанкаре“. Докладчикъ показалъ, что въ этомъ пунктѣ идеи великаго математика не столь противорѣчивы, какъ онѣ кажутся съ перваго взгляда. Чтобы понять ихъ, нужно различать „два вида изслѣдованій: одинъ видъ оперируетъ формальными условіями, а другой — съ помощью опыта. Найдя границы, отдѣляющія одинъ видъ изслѣдованія отъ другого, можно показать, какимъ образомъ они могутъ существовать одновременно“. Падоа выразилъ благодарность Динглеру за то, что тотъ разсѣялъ двусмысленности, которыя тонкій и парадоксальный стиль Пуанкаре могъ вызвать въ нѣкоторыхъ недостаточно сильныхъ умахъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ онъ указалъ, что теоріи Пуанкаре не даютъ права оспаривать цѣнность науки.

Динъ изложилъ въ существенныхъ чертахъ теоріи, развитыя въ замѣчательной работѣ подъ заглавіемъ „Символизмъ и реальность въ математикѣ“ (Symbolisme et réalité dans les mathématiques). Существенная сторона математическихъ символовъ состоитъ въ томъ, что они образуютъ систему: они составляютъ одно цѣлое, съ которымъ каждый символъ связанъ неразрывнымъ образомъ. Взятые въ отдѣльности члены системы (les termes) не имѣютъ никакого математическаго смысла. Конструкція такъ называемой математической системы не бываетъ ни дедуктивной, ни индуктивной, но совершается путемъ послѣдовательныхъ обобщеній. Математика не состоитъ изъ совокупности произвольныхъ условій, если только не лишать знаковъ, всякаго смысла какъ дѣлаетъ Гильбертъ. Можно не символизировать систематическую сторону чувственной реальности; но коль скоро мы становимся на этотъ путь, то неизбѣжно возникаетъ математика, и по этой именно причинѣ она безспорно обладаетъ объективнымъ существованіемъ.

Въ своей статьѣ „О злоупотребленіи интуиціей въ преподаваніи математики“ (L'abus de l'intuition dans l'enseignement mathématique) Л. Кутюра ставитъ слѣдующую проблему: какое мѣсто должно быть удѣлено въ преподаваніи математики, съ одной стороны, логикѣ, а съ другой — интуиціи? Онъ приходитъ къ заключенію, что доказательство, исходя отъ достаточно широкой основы въ интуитивной и объективной реальностяхъ, должно идти далѣе дедуктивнымъ путемъ, запрещая себѣ всякое обращеніе къ интуиціи и примѣняя тотъ самый методъ, которымъ Евклидъ, желалъ пользоваться или, какъ онъ думалъ, пользовался. По мнѣнію Гадамара, въ средней школѣ можно не опасаться удѣлять слишкомъ большую роль интуиціи; должно бороться не со злоупотребленіемъ интуиціей, но съ недостаткомъ строгости. Строгость должна итти параллельно съ интуиціей, при чемъ подъ строгостью нужно понимать полное изложеніе аксіомъ, необходимыхъ для дедуктивной теоріи, а не сведеніе этихъ аксіомъ къ возможно меньшему числу. Эта же послѣдняя задача должна быть отнесена къ университетскому преподаванію.

Во Франціи, говоритъ Біошъ, стараются не поступаться строгостью въ элементарномъ преподаваніи. Иногда, если доказательство тѣхъ или другихъ теоремъ слишкомъ сложно, ограничиваются ихъ формулировкой и экспериментальной повѣркой. Падоа замѣчаетъ, что подъ злоупотребленіемъ интуиціей нужно разумѣть лишь пользованіе псевдо-доказательствами. Отнюдь не желая скрывать аппеляцію къ интуиціи, логистика всякую такую аппеляцію выставляетъ совершенно открыто, формулируя всѣ постулаты дедуктивной теоріи. Кутюра полагаетъ, что слово интуиція заключаетъ въ себѣ двусмысленность. Оно обозначаетъ то призывъ къ пользованію глазами и чувствами, то умственную операцію, неразложимую и не поддающуюся анализу. Кутюра никогда не осуждалъ интуиціи во второмъ ея видѣ. Въ заключеніе Фонтене (Fontené) настаиваетъ на требованіи строгости, характеризующимъ преподаваніе математики во Франціи. Раньше чѣмъ вводятъ какую-либо новую фигуру непремѣнно доказываютъ ея существованіе.

Несмотря на поздній часъ, присутствующіе съ большимъ вниманіемъ выслушали весьма интересный докладъ Леруа „О существенныхъ шагахъ математической мысли въ чистомъ анализѣ" (les démarches essentielles de la pensée mathématique en analyse pure). Съ помощью удачно подобранныхъ примѣровъ Леруа показалъ, что математическія функціи содержатъ не поддающійся анализу элементъ объективности.

Утромъ во вторникъ 7-го апрѣля Ф. Энрикесъ выступилъ по вопросу „О математической безконечности". Идея безконечности не можетъ возникнуть исключительно изъ опыта; она необходимо предполагаетъ участіе разума и представляется намъ въ двухъ видахъ: потенціальномъ и актуальномъ. До этого пункта всѣ философы согласны между собой; но можно ли переходить отъ потенціальной безконечности къ актуальной? Мнѣнія по этому вопросу расходятся; пользуясь схоластическими терминами математиковъ можно раздѣлить на реалистовъ и номиналистовъ.

Реалисты утверждаютъ, что существуетъ актуальная безконечность, и это утвержденіе, хотя и незамѣнимое въ качествѣ метода изслѣдованія, покоится, однако, на ложныхъ принципахъ, а именно, на слѣдующихъ: всякій рядъ послѣдовательныхъ приближеній имѣетъ предѣлъ; всякая безконечность равна одному классу; въ предѣлѣ можно переходить отъ конечнаго къ безконечному. Номиналисты отказываются принять подобныя предложенія, такъ какъ послѣднія приводятъ къ парадоксамъ въ родѣ формулированнаго Галилеемъ. Съ другой стороны Дюбуа-Реймонъ показалъ, что двѣ охарактеризованныя выше тенденціи всегда будутъ существовать вмѣстѣ подъ именемъ идеализма и эмпиризма. Канторъ (Cantor), настаивающій на томъ что онъ не реалистъ, пытался выйти изъ затрудненія и овладѣть безконечностью; но ему пришлось для числа, обозначеннаго имъ черезъ ω, прибѣгнуть къ постулату о существованіи; такимъ образомъ, ему не удалось избѣжать затрудненій, связанныхъ съ реализмомъ и ярко вскрываемыхъ антиноміяхъ Бурали-Форти (Burali-Forti).

Гадамаръ доказываетъ, что онъ не сторонникъ реализма въ смыслѣ Энрикеса. Онъ, Гадамаръ, согласенъ съ критикой Бурали-Форти, направленной противъ Канторовскаго теченія; но, съ другой стороны, онъ допускаетъ теорему Цермело (Zermelo), согласно которой континуумъ можетъ быть расположенъ, а этимъ предполагается для человѣческаго разума возможность постигать безконечное множество независимыхъ выборовъ. Съ математикой существенно связанъ извѣстный реализмъ касательно существованія безконечности. Безъ этого невозможно удовлетворительнымъ образомъ истолковать функціи Дирихле-Римана. Борель, являясь оффиціально сторонникомъ номинализма, становится, однако же, на реалистическую почву въ нѣкоторыхъ своихъ наиболѣе замѣчательныхъ работахъ, напримѣръ, при доказательствѣ слѣдующей теоремы: наудачу написанный рядъ Тейлора вообще допускаетъ въ общемъ свой кругъ сходимости, какъ сѣченіе. Кагенъ (Cahen) замѣчаетъ, что со временемъ эта теорема, можетъ быть, получитъ номиналистическое толкованіе, какъ это произошло уже въ другихъ случаяхъ. Энрикесъ допускаетъ функцію Дирихле-Риманна, такъ какъ понятіе о ней возникло изъ опыта, что́ не имѣетъ мѣсто по отношенію къ аксіомѣ Цермело, предполагающей, такъ сказать, экстра-экспериментальный выборъ. Лебегъ (Lebesgue) считаетъ, что концепція Гадамара въ большей или меньшей степени заставляетъ его предполагать существованіе божественнаго разума, способнаго оперировать безконечнымъ множествомъ независимыхъ выборовъ; математика въ такомъ случаѣ содержала бы теоремы, которыхъ мы никогда не будемъ въ состояніи понять. Стать на этотъ путь значитъ притти къ аксіомѣ Цермело и Канторовскимъ антиноміямъ. Кутюра и Дюфюмье подчеркиваютъ, что по отношенію къ этимъ проблемамъ нужно различать понятіе закона отъ понятія соотвѣтствія. Въ концѣ засѣданія Уайтегидъ сообщалъ о способахъ, примѣненныхъ имъ и Рёсселемъ (Russel) въ „Principia mathematica“ съ цѣлью избѣжать антиномій безконечности.

Засѣданіе во вторникъ пополудни было открыто двумя докладами Кёнига. Въ первомъ Кёнигъ резюмировалъ идеи своего отца — „О логикѣ, ариѳметикѣ и теоріи многообразій“. Благодаря правильному выбору аксіомъ и опредѣленій противорѣчія касательно трансфинитнаго устраняются и теряютъ всякій смыслъ. Въ своемъ второмъ докладѣ Кёнигъ далъ „Доказательство одной проблемы, относящейся къ теоріи многообразій“, при чемъ опирался на аксіому Цермело.

Затѣмъ Падоа говорилъ „О послѣдствіяхъ измѣненія основныхъ понятій въ какой-нибудь дедуктивной теоріи“. Онъ началъ съ того, что указалъ, насколько эта проблема интересна для дедуктивной координаціи всякой науки. Если дана система основныхъ понятій и система постулатовъ, на которыхъ основана какая-нибудь наука, то на какихъ условіяхъ можно привести ихъ къ наименьшему числу и открыть между ними наилучшіе? Когда рѣчь идетъ о постулатахъ, то эта задача очень простая; въ случаѣ же редукціи основныхъ понятій задача представляется болѣе тонкой и требуетъ ряда операцій, которыя Падоа анализируетъ весьма тщательно.

Дюфюмье въ своей работѣ „О логикѣ классовъ и теоріи многообразій“ ставитъ себѣ задачей показать, что въ своей систематической формѣ исчисленія классовъ должно быть разсматриваемо какъ обобщеніе теоріи многообразій. Логическое значеніе понятія основывается не на его объемѣ, т. е. на численной функціи, но на томъ фактѣ, что оно можетъ быть утверждаемо или отрицаемо. Но если понятіе многообразія лишить признаковъ, сближающихъ его съ понятіемъ числа, то оно приводится къ слѣдующему: отмежевать въ данномъ универсумѣ и по отношенію къ этому послѣднему область объектовъ, соотвѣтствующихъ опредѣленному значенію, и исключить всѣ объекты, которые ему не удовлетворяютъ. Такимъ образомъ, классъ и многообразіе опираются на одной и той же логической основѣ.

Съ критикой этихъ мыслей выступилъ Падоа, который упрекнулъ Дюфюмье въ частности за ошибки, которыя тотъ въ своемъ историческомъ обзорѣ допустилъ касательно примѣненія символовъ подчиненія. На это Дюфюмье возразилъ, что Падоа неправильно его понялъ; цѣль ошибочнаго примѣненія символовъ, въ которомъ тотъ его упрекаетъ, именно въ томъ и состояла, чтобы выставить наружу ихъ несовершенство.

Арнольдъ Реймондъ (Reymond) изложилъ содержаніе своего доклада „О геометрической безконечности и интуиціи“. Математически проблема о геометрической безконечности можетъ быть сведена къ проблемѣ объ аналитической; логически она (безконечность) можетъ быть опредѣлена какъ идеальный элементъ по отношенію къ другимъ элементамъ, называемымъ реальными; но съ философской точки зрѣнія проблема требуетъ еще рѣшенія. Чтобы рѣшить ее, нужно различать геометрическую интуицію отъ геометрической трансинтуиціи (?) которыя обѣ принимаютъ пространство однороднымъ и непрерывнымъ. При этомъ разсмотрѣніе элементовъ въ безконечности заставляетъ всегда привносить однимъ пространственнымъ измѣреніемъ больше, чѣмъ въ томъ случаѣ, когда тѣ же элементы разсматриваются на конечномъ разстояніи. Кромѣ того, геометрическая безконечность имѣетъ въ себѣ одновременно статическіе и динамическіе признаки. Дѣйствительно, элементы безконечности сохраняютъ постоянныя отношенія положенія и situation съ элементами конечными. Съ другой стороны, эти отношенія не могутъ быть объяснены иначе, какъ числами, и динамизмъ, свойственный закону нумераціи, вводится въ понятіе геометрической безконечности и дѣлаетъ его трансинтуитивнымъ.

Энрикесъ не соглашается съ тѣмъ, что при разсмотрѣніи элементовъ въ безконечности непремѣнно привносится новое измѣреніе. Прямую можно опредѣлить, не разсматривая ея какъ замкнутую кривую. На это Реймондъ отвѣчаетъ, что логически это дѣйствительно возможно: но съ точки зрѣнія интуиціи безконечную прямую нельзя представлять себѣ иначе какъ замкнутую линію. Послѣ этого между Фонтене (Fontené) Ланжвеномъ и Энрикесомъ завязался споръ о пространствахъ n измѣреній.

Утромъ въ среду 8 апрѣля А. Н. Уайтегидъ прочелъ глубоко продуманный этюдъ „Объ отношеніи пространства“. Символика, примѣняемая въ этомъ этюдѣ, имѣетъ слишкомъ техническій характеръ, чтобы можно было здѣсь вкратцѣ изложить содержаніе этой работы. Скажемъ только, что авторъ съ большой ясностью показалъ, въ какихъ различныхъ смыслахъ употребляется слово пространство. Есть прежде всего видимое пространство, которое само обнимаетъ двѣ категоріи: непосредственное видимое пространство, которое измѣняется отъ одного индивидуума къ другому, и полное видимое пространство, которое и подразумѣвается большинствомъ людей при ихъ сношеніяхъ.

Затѣмъ идетъ физическое пространство, т. е. пространство гипотетическаго міра объектовъ, которое одинаково для всѣхъ и должно въ точности соотвѣтствовать нашимъ ощущеніямъ. Наконецъ, остается еще абстрактное пространство, которому соотвѣтствуетъ абстрактная геометрія.

Существуетъ множество видимыхъ непосредственныхъ пространствъ и множество абстрактныхъ пространствъ. Обыкновенно предполагаютъ, что существуетъ только одно полное видимое пространство и одно физическое пространство, но относительно этого послѣдняго вопросъ остается спорнымъ.

Исходя отсюда, Уайтегидъ развиваетъ слѣдующее предложеніе. Чтобы установить основы геометріи, не нужно брать въ качествѣ основныхъ понятій, не подлежащихъ опредѣленію, понятій точекъ, линій и т. д., потому что иначе мы неизбѣжно придемъ къ абсолютной теоріи пространства, каковая оставлена рѣшительно всѣми, по крайней мѣрѣ, номинально. Для того чтобы относительность пространства сохранила смыслъ, необходимо опредѣлять точки въ функціи отношеній, существующихъ между объектами, и Уитхедъ показываетъ, какимъ образомъ можетъ быть установлено такое опредѣленіе.

Со свойственнымъ ему мастерствомъ и знаніемъ дѣла Гадамаръ изложилъ затѣмъ два весьма интересныхъ вопроса. Первый касается новаго и остроумнаго способа пониманія внутреннихъ свойствъ пространства по аналогіи съ періодичностью, характеризующей эллиптическія функціи. Второй же вопросъ — функціональное исчисленіе, анализъ и синтезъ; формулировать его въ нѣсколькихъ строкахъ не представляется возможнымъ.

Въ среду пополудни Л. Нельсонъ прочелъ свою работу „Объ основахъ геометріи“. По Нельсону, при изученіи этого вопроса мы постоянно колеблемся между двумя противоположными теоріями: между эмпиризмомъ и логистикой; принять одну изъ нихъ можно, лишь отрицая другую, и потому борьба кончается въ ничью. Если же съ отчаянія отвергнуть обѣ теоріи, то мы придемъ къ точкѣ зрѣнія конвенціонализма; но это рѣшеніе столь же ложно, какъ и два другихъ. Лишь въ плодотворномъ синтезѣ можно найти истинное рѣшеніе. Этотъ синтезъ имѣетъ своей основой интуицію a priori и рядъ предложеній, доказывающихъ, что только евклидовская геометрія соотвѣтствуетъ цѣльной геометрической истинѣ.

Энрикесъ высказывоется противъ существованія апріорной интуиціи евклидовскаго пространства. Одинаково возможны нѣсколько геометрій, но путемъ опыта мы пріобрѣтаемъ интуицію евклидовскаго пространства, и только евклидовскаго. Съ другой стороны, при помощи элементовъ, заимствованныхъ изъ евклидовскаго пространства, невозможна интуитивная реализація неевклидовскаго пространства. Въ заключеніе Фонтене развилъ соображенія относительно общей геометріи, исходя изъ идей Кэли (Cayley).

Въ программѣ на послѣдней очереди былъ объявленъ докладъ Винтера: „Время и наслѣдственная механика“. Существенныя мысли этого сообщенія состоятъ въ слѣдующемъ. Пикаръ (Picard) называетъ систему не наслѣдственной если ея будущее состояніе зависитъ исключительно отъ настоящаго состоянія и безконечно близкаго къ нему состоянія; въ противномъ случаѣ система является наслѣдственной. Къ первому типу относится вопросъ о движеніи брошеннаго тѣла въ пустотѣ. Второй типъ иллюстрируется, помимо явленій гистерезиса, еще слѣдующимъ практическимъ примѣромъ: подъ вліяніемъ одной и той же нагрузки металлическій мостъ деформируется различнымъ образомъ, смотря по тому, служитъ ли онъ уже давно или нѣтъ.

Работы Вольтерра (Volterra), относящіяся къ функціямъ линій и примыкающія къ функціональному исчисленію, позволили подвергнуть механическія наслѣдственныя явленія математической разработкѣ. При опредѣленіи этихъ явленій необходимо принимать въ расчетъ всѣ предыдущія состоянія системы до извѣстнаго момента t_0, за которымъ наслѣдственное дѣйствіе можно не принимать во вниманіе. Нужно было найти алгориѳмъ, выражающій это дѣйствіе всѣхъ значеній функцій на протяженіи времени. Вольтерра показалъ, что въ зависимости отъ случая этотъ алгориѳмъ можетъ принять между прочимъ форму интегральнаго уравненія, въ которомъ неизвѣстная функціи входитъ подъ знакомъ интеграла, а также форму одного или нѣсколькихъ интегрально-дифференціальныхъ уравненій, въ которыхъ производныя неизвѣстной функціи фигурируютъ также подъ знакомъ интеграла.

Но нѣкоторые ученые, и въ томъ числѣ Пенлеве (Painlevé), полагаютъ, что безъ-наслѣдственность механическихъ явленій есть лишь кажущаяся. Если бы мы располагали весьма сильными ультрамикроскопами, то мы могли бы анализировать молекулярное состояніе механической системы въ ея начальныхъ условіяхъ и выразить циклъ его при помощи обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій.

Подобное возраженіе предполагаетъ, что явленія природы допускаютъ только одинъ типъ механическаго объясненія; но было бы опрометчиво утверждать это при наличности механики относительности, съ одной стороны, и механики, основанной на статистикѣ — съ другой. Концепція Вольтерра предполагаетъ безъ сомнѣнія своего рода дѣйствіе на разстояніе во времени, аналогичное дѣйствію ньютоновыхъ силъ въ пространствѣ. Но можно какъ въ одномъ, такъ и въ другомъ случаѣ не прибѣгать къ рискованному метафизическому рѣшенію вопроса и принять, что явленія происходятъ такимъ образомъ, какъ если бы подобное дѣйствіе имѣло мѣсто въ дѣйствительности.

Какъ бы то ни было, концепція наслѣдственныхъ механическихъ явленій и, въ особенности, тотъ фактъ, что благодаря функціональному исчисленію она допускаетъ математическое толкованіе, представляетъ собой въ высшей степени интересную философскую проблему. Такъ, напримѣръ, эта концепція не только согласуется съ Бергсоновской теоріей длительности, но, допуская математическій методъ, она, благодаря этому, можетъ въ примѣненіи къ біологическимъ явленіямъ дать имъ болѣе строгое объясненіе, чѣмъ до сихъ поръ.

Въ заключеніе Конгресса прощальное слово произнесли Ксавье Леонъ и Э. Бутру. „Предо мною теперь уже не иностранцы, а друзья“ — сказалъ Леонъ, выразившій затѣмъ пожеланіе, чтобы ближайшій слѣдующій Конгрессъ продолжалъ традицію настоящаго. Бутру въ возвышенномъ словѣ указалъ на радости и плодотворность совмѣстной работы и высказалъ надежду, что иностранные участники сохранятъ, какъ нѣкогда Марія Стюартъ, хорошее воспоминаніе о „прекрасной Франціи“, въ которой они прожили нѣсколько дней.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей прив.-доц. Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 207 (6 сер.). Доказать неравенство

$$\left(\frac{a_0}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)\left(\frac{a_1}{a_0}+\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_3}{a_2}+\ldots+\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)\geqq n^2,$$

гдѣ $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ суть числа одного знака. Въ какомъ случаѣ возможенъ въ предложенной для доказательства формулѣ знакъ равенства?

Л. Закутинскій (Черкассы).

№ 208 (6 сер.). Доказать, что можно построить безчисленное множество треугольниковъ xyz, обладающихъ слѣдующими свойствами: 1) стороны каждаго изъ этихъ треугольниковъ параллельны и пропорціональны медіанамъ даннаго треугольника ABC, и 2) медіаны каждаго изъ нихъ параллельны и пропорціональны сторонамъ треугольника ABC.

Доказать, что если стороны треугольника xyz, имѣющаго указанныя свойства, равны медіанамъ треугольника ABC, то медіаны треугольника xyz равны соотвѣтственно $^3/_4$ сторонъ треугольника ABC, а площадь такого треугольника xyz равна $^3/_4$ площади треугольника ABC.

Вывести отсюда, что площадь Δ всякаго треугольника ABC выражается черезъ его медіаны m_a, m_b, m_c формулой

$$\Delta = {}^3/_4\sqrt{p_m(p_m-m_a)(p_m-m_b)(p_m-m_c)},$$

гдѣ p_m полусумма медіанъ.

И. Рабиновичъ (Москва).

№ 209 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$2x\sqrt[3]{x}-4x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}=6.$$

R.

№ 210 (6 сер.). Доказать, что частное

$$(1+2^a+3^a+\cdots+n^a):(1+2+3+\cdots+n),$$

гдѣ a и n — цѣлыя положительныя числа, выражается цѣлымъ относительно n многочленомъ. Найти высшій членъ этого многочлена.

Б. Славскій (Петроградъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 156 (6 сер.). *Найти предѣлъ выраженія*

$$\frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)(b+2)\cdots(b+n-1)}$$

при a *и* b *положительныхъ, если* n *безгранично возрастаетъ.*

Пусть сперва $a>b$, т. е. $a=b+p$, гдѣ $p>0$; тогда

$$(1)\quad \frac{a}{b}=\frac{b+p}{b}=1+\frac{p}{b},\qquad (2)\quad \frac{a+k}{b+k}=\frac{b+k+p}{b+k}=1+\frac{p}{b+k},$$

гдѣ $k=1,2,\ldots,n-1$. Поэтому, перемножая двучлены $1+\frac{p}{b}$, $1+\frac{p}{b+1},\cdots,$ $1+\frac{p}{b+n-1}$ по извѣстной формулѣ и принимая во вниманіе формулы (1) и (2), получимъ

$$\frac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)}{b(b+1)(b+2)\ldots(b+n-1)}=\left(1+\frac{p}{b}\right)\left(1+\frac{p}{b+1}\right)\left(1+\frac{p}{b+2}\right)\cdots\left(1+\frac{p}{b+n-1}\right)=$$

$$=1+p\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b+1}+\cdots+\frac{1}{b+n-1}\right)+r,$$

гдѣ $r>0$. Слѣдовательно

$$(3)\quad \frac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)}{b(b+1)(b+2)\ldots(b+n-1)}>p\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b+1}+\cdots+\frac{1}{b+n-1}\right).$$

Рядъ (4) $\frac{1}{b}+\frac{1}{b+1}+\cdots+\frac{1}{b+n-1}+\cdots$, какъ извѣстно, расходится, т. е. сумма $\frac{1}{b}+\frac{1}{b+1}+\cdots+\frac{1}{b+n-1}$ стремится къ безконечности при безконечномъ возрастаніи n; поэтому [см. (3)]

$$(5)\quad \lim_{n=\infty}\frac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)}{b(b+1)(b+2)\ldots(b+n-1)}=+\infty.$$

Если же $a<b$, то $b>a$, а потому, согласно съ равенствомъ (5),

$$\lim_{n=\infty}\frac{b(b+1)(b+2)\ldots(b+n-1)}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)}=+\infty,\text{ откуда слѣдуетъ, что}$$

$$\lim_{n=\infty}\frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{b(b+1)\ldots(b+n-1)}=\lim_{n=\infty}\left[1:\frac{b(b+1)\ldots(b+n-1)}{a(a+1)\ldots(a+n-1)}\right]=0.$$

Замѣчаніе. Чтобы доказать, что сумма ряда (4) стремится къ безконечности, достаточно примѣнить то же разсужденіе, которымъ пользуются для доказательства расхожденія такъ называемаго гармоническаго ряда $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$. Докажемъ, что для любого положительнаго числа c можно найти такое цѣлое положительное число x, которое удовлетворяетъ неравенству (6) $\frac{1}{c+1}+\frac{1}{c+2}+\cdots+\frac{1}{c+x}>\frac{1}{2}$. Съ этой цѣлью выберемъ цѣлое положительное число m такъ, чтобы удовлетворялось неравенство (7) $c<2^m$. Пусть k — цѣлое положительное число, удовлетворяющее неравенству (8) $k\leqq 2^m$. Тогда, сложивъ неравенства (7) и (8), получимъ $c+k<2^m+2^m$, т. е. $c+k<2^{m+1}$, откуда $\frac{1}{c+k}>\frac{1}{2^{m+1}}$. Полагая $k=1, 2, \ldots, 2^m-1, 2^m$, получимъ 2^m неравенствъ $\frac{1}{c+1}>\frac{1}{2^{m+1}}$, $\frac{1}{c+2}>\frac{1}{2^{m+1}}$, $\frac{1}{c+3}>\frac{1}{2^{m+1}}, \ldots$, $\frac{2}{c+2^m}>\frac{1}{2^{m+1}}$, сложивъ которыя, имѣемъ $\frac{1}{c+1}+\frac{1}{c+2}+\cdots+\frac{1}{c+2^m}>\frac{2^m}{2^{m+1}}$, т. е. $\frac{1}{c+1}+\frac{1}{c+2}+\cdots+\frac{1}{c+2^m}>\frac{1}{2}$. Итакъ неравенство (6) удовлетворяется, полагая $x=2^m$. Примѣняя доказанное только что предложеніе къ числу b ряда (4), получимъ, что (9) $\frac{1}{b+1}+\frac{1}{b+2}+\cdots+\frac{1}{b_1}>\frac{1}{2}$, гдѣ $\frac{1}{b_1}$ — надлежащій членъ ряда (4); примѣняя то же предложеніе къ числу b_1, получимъ неравенство (10) $\frac{1}{b_1+1}+\frac{1}{b_1+2}+\cdots+\frac{1}{b_2}>\frac{1}{2}$, гдѣ $\frac{1}{b_2}$ — также нѣкоторый членъ ряда (4), и подобнымъ же образомъ можно получить рядъ неравенствъ

$$(11)\quad \begin{gathered}\frac{1}{b_2+1}+\frac{1}{b_2+2}+\cdots+\frac{1}{b_3}>\frac{1}{2},\ \frac{1}{b_3+1}+\frac{1}{b_3+2}+\cdots+\frac{1}{b_4}>\frac{1}{2},\ldots,\\ \frac{1}{b_{2l-1}+1}+\frac{1}{b_{2l-1}+2}+\cdots+\frac{1}{b_{2l}}>\frac{1}{2},\end{gathered}$$

гдѣ $\frac{1}{b_3}, \frac{1}{b_4}, \ldots, \frac{1}{b_{2l}}$ — надлежащіе члены ряда (4), а l — любое цѣлое положительное число. Сложивъ $2l$ неравенствъ (9), (10), (11), находимъ, что

$$\frac{1}{b+1}+\frac{1}{b+2}+\cdots+\frac{1}{b_{2l}}>\frac{2l}{2},\ \text{т. е.}\ \frac{1}{b+1}+\frac{1}{b+2}+\cdots+\frac{1}{b_{2l}}>l,$$

гдѣ за l можно принять любое цѣлое положительное число, откуда слѣдуетъ, что сумма ряда $\frac{1}{b+1}+\frac{1}{b+2}+\cdots$ стремится къ безконечности съ возрастаніемъ числа членовъ, а потому и сумма ряда (4) обладаетъ тѣмъ же свойствомъ

Н. Михальскій (Екатеринославъ); *Л. Крееръ* (Гомель)

Редакторъ прив.-доц. **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено военной цензурой.

Типографія „Техникъ" — Одесса, Екатерининская, 58.

Обложка
ищется

Обложка
ищется