Обложка
пщется

Обложка
ищется

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 110.

X Сем. 25 Января 1891 г. № 2.

ЭЛЛИПСЪ.

ПОЛНАЯ ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРІЯ.

Тема для сотрудниковъ.

Какъ это не кажется страннымъ, но мы до сихъ поръ не имѣемъ элементарной теоріи эллипса, гиперболы и параболы. Подъ элементарнымъ я подразумѣваю такое изложеніе, въ которомъ всѣ доказательства основываются на свойствахъ круга и на подобіи треугольниковъ. Въ элементарномъ изложеніи не должно быть формулъ, за исключеніемъ однихъ пропорцій. Правда, въ послѣднее время въ этомъ родѣ было много попытокъ, но онѣ оказались либо неполными, либо основными на стереометрическихъ доказательствахъ—на свойствахъ проективныхъ фигуръ—и на аргамоническихъ отношеніяхъ. Въ элементарномъ изложеніи плоскихъ фигуръ не должны входить стереометрическія доказательства. Чтобы изложеніе было вполнѣ элементарнымъ, желательно обойтись также и безъ теоріи ангармоническихъ отношеній. Что касается чертежей, то и тутъ необходимо поставить одно существенное требованіе: въ элементарномъ изложеніи не должно быть сложныхъ чертежей.

Здѣсь я предлагаю планъ теоріи эллипса. Прошу сотрудниковъ придерживаться этого плана и отступать отъ него только въ томъ случаѣ, когда чертежи и доказательства могутъ быть сдѣланы проще.

Форма эллипса.

1. Эллипсъ есть геометрическое мѣсто точекъ, сумма разстояній которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ есть величина постоянная.

Данныя точки называются *фокусами*.

2. Всѣ точки эллипса находятся на конечномъ разстояніи и образуютъ замкнутую непрерывную линію.

3. Опредѣленіе центра. Средина разстоянія между фокусами есть центръ эллипса.

4. Опредѣленіе осей симметріи. Ось, проходящая черезъ фокусы, и перпендикулярная къ ней ось, проходящая черезъ центръ, суть оси симметріи. Эти оси называются главными.

5. Наибольшая изъ всѣхъ хордъ есть та, которая проходитъ чрезъ фокусы.

Касательная.

6. Означимъ большую главную ось эллипса чрезъ $2a$. Сумма фокусныхъ разстояній точки на эллипсѣ равна $2a$. Сумма фокусныхъ разстояній точки внѣ эллипса больше $2a$. Суммѣ фокусныхъ разстояній точки внутри эллипса меньше $2a$.

7. Прямая, дѣлящая пополамъ внѣшній уголъ между фокусными радіусами, проведенными въ данную точку эллипса, имѣетъ съ эллипсомъ только одну общую точку (n°6). Опредѣленіе касательной, какъ прямой, имѣющей одну общую точку съ эллипсомъ. Обратная теорема.

8. Основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ фокуса на касательную, находится на окружности круга, построеннаго на большой оси, какъ на діаметрѣ (n°7).

9. Задача: въ данной точкѣ эллипса провести касательную (n°7).

10. Задача: изъ точки внѣ эллипса провести касательную (n°8).

11. Касательныя, проведенныя изъ внѣшней точки эллипса, одинаково наклонены къ прямымъ, соединяющимъ эту точку съ фокусами (n°7).

12. Прямая, соединяющая точку пересѣченія касательныхъ съ фокусомъ, дѣлитъ пополамъ уголъ между прямыми, соединяющими этотъ фокусъ съ точками касанія.

13. Четыре фокусныхъ радіуса, проведенныхъ къ двумъ точкамъ эллипса, касаются окружности одного круга, центръ котораго находится въ точкѣ пересѣченія касательныхъ (n° 7 и 12).

14. Произведеніе перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ одного фокуса на двѣ параллельныя касательныя, есть величина постоянная, равная квадрату малой главной оси (n°8). Доказательство основывается на томъ, что произведеніе отрѣзковъ хорды круга, проходящей черезъ постоянную точку, есть величина постоянная.

15. Произведеніе перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ двухъ фокусовъ на одну и ту же касательную, есть величина постоянная (n°14).

16. Отрѣзокъ перемѣнной касательной, заключенный между двумя постоянными касательными, стягиваетъ постоянный уголъ въ фокусѣ (n°12). Этотъ уголъ равенъ половинѣ угла между прямыми, соединяющими фокусъ съ точками касанія постоянныхъ касательныхъ.

Діаметры.

17. Лемма. Общая касательная къ двумъ кругамъ дѣлитъ прямую, соединяющую центры, (внутренне или внѣшне) на части пропорціональныя радіусамъ.

18. Прямая, соединяющая точку пересѣченія касательныхъ, проведенныхъ въ двухъ концахъ двухъ параллельныхъ хордъ, съ точкою пересѣченія касательныхъ, проведенныхъ въ двухъ другихъ концахъ тѣхъ же хордъ, параллельна самимъ хордамъ.

Доказательство. Пусть AB и $A'B'$ двѣ параллельныя хорды. Касательныя въ A и A' пересѣкаются въ C; касательныя въ B и B' пересѣкаются въ D. Требуется доказать, что CD параллельна хордамъ. Допустимъ, что CD не параллельна хордамъ, тогда изъ точки C можно провести прямую, параллельную хордамъ, которая пересѣчетъ касательныя DB и DB′ въ точкахъ E и E′. Покажемъ, что при этомъ предположеніи мы придемъ къ ложному результату.

Соединимъ концы хордъ съ фокусомъ. Принявъ точку C за центръ, проведемъ кругъ, касательный къ FA и FA′ (n° 12); сдѣлаемъ то же построеніе и для точки D. Пусть касательныя CA и DB пересѣкутся въ M, CA′ и DB′—въ M′. Принявъ точку M за центръ, проведемъ кругъ, касательный къ FA и FB (n°12); сдѣлаемъ то же для точки M′. Четыре круга назовемъ тѣми же буквами, какъ и ихъ центры; радіусы этихъ круговъ обозначимъ соотвѣтственными малыми буквами.

Такъ какъ FA есть общая касательная къ кругамъ M и C, то (n°17)

$$MA : CA = m : c.$$

Но изъ параллельности AB и CE слѣдуетъ

$$MA : CA = MB : EB.$$

Изъ сравненія находимъ

$$MB : EB = m : c.$$

Такъ какъ MB есть общая касательная къ кругамъ M и D, то

$$MB : DB = m : d.$$

Сравнивая послѣднія пропорціи, находимъ

$$EB : DB = c : d.$$

Подобнымъ образомъ находимъ

$$E'B' : DB' = c : d.$$

Изъ сравненія находимъ

$$EB : DB = E'B' : DB'.$$

Но это равенство невозможно, ибо очевидно, что одно отношеніе больше единицы, а другое меньше единицы.

Слѣдствіе. Пусть CA и DB′ пересѣкутся въ H, CA′ и DB—въ K. По доказанному HK параллельна хордамъ.

19. Лемма. Средины параллельныхъ прямыхъ, заключенныхъ между двумя данными прямыми, находятся на одной прямой, проходящей чрезъ точку пересѣченія данныхъ прямыхъ.

20. Прямая, соединяющая средины двухъ параллельныхъ хордъ, проходитъ чрезъ точку пересѣченія касательныхъ, проведенныхъ въ концѣ каждой хорды (n° 17 и 18).

Доказательство. Прямая, соединяющая средины прямыхъ CD и HK, параллельныхъ AB и заключенныхъ между MA и MB, раздѣлитъ пополамъ AB и пройдетъ чрезъ точку M (n° 19). Прямая, соединяющая средины тѣхъ же прямыхъ, разсматриваемыхъ параллельными A′B′ и заключеннымъ между M′A′ и M′B′, раздѣлитъ пополамъ A′B′ и пройдетъ чрезъ M′.

Слѣдствія. Прямая, соединяющая средину хорды съ точкою пересѣченія касательныхъ, проведенныхъ въ концахъ этой хорды, раздѣлитъ пополамъ всѣ параллельныя хорды.

Прямая, соединяющая точку пересѣченія касательныхъ съ центромъ, раздѣлитъ пополамъ хорду, соединяющую, точки касанія.

Касательныя въ концахъ одной хорды отсѣкаютъ отъ продолженной параллельной хорды равные отрѣзки.

Средины всѣхъ параллельныхъ хордъ находятся на одной прямой, называемой діаметромъ.

21. Касательная въ концѣ діаметра параллельна тѣмъ хордамъ, которыя дѣлятся этимъ діаметромъ пополамъ.

22. Прямыя, соединяющія фокусъ съ точками касанія двухъ параллельныхъ касательныхъ, образуютъ съ этими касательными равные углы (n° 7 и 21).

23. Если одинъ діаметръ дѣлитъ пополамъ хорды, параллельныя другому, то и обратно второй діаметръ раздѣлитъ пополамъ хорды, параллельныя первому (n° 20 и 21). Такіе діаметры называются сопряженными.

Касательныя въ концахъ одного діаметра параллельны сопряженному діаметру (n° 21).

24. Двѣ хорды, имѣющія общую точку называются *дополнительными*, если діаметръ, параллельный одной изъ нихъ, дѣлитъ пополамъ другую.

Двѣ хорды, имѣющія общую точку и опирающіяся на одинъ діаметръ, будутъ дополнительными.

Обратная теорема.

25. Произвольная касательная отсѣкаетъ отъ двухъ постоянныхъ параллельныхъ касательныхъ отрѣзки, произведеніе которыхъ постоянно и равно квадрату половины діаметра, параллельнаго постояннымъ касательнымъ. Отрѣзки отсчитываются отъ точекъ касанія.

Доказательство. Пусть произвольная касательная CC' отсѣкаетъ отъ двухъ параллельныхъ касательныхъ отрѣзки AC и $A'C'$. Соединимъ фокусъ съ точками A и A', C и C'. Треугольники ACF и $A'C'F$ подобны, ибо они равноугольны, что однако не такъ легко доказать (n° 22 и 12). Изъ подобія слѣдуетъ

$$AC : AF = A'F : A'C',$$

откуда

$$AC.A'C' = AF.A'F.$$

26. Половина діаметра есть средняя пропорціональная между прямыми, соединяющими фокусъ съ концами сопряженнаго діаметра.

27. Прямыя, соединяющія фокусъ съ концами двухъ сопряженныхъ радіусовъ, находятся въ постоянномъ разстояніи отъ точки пересѣченія касательныхъ, проведенныхъ въ концахъ радіусовъ.

Доказательство. Пусть OA и OB два сопряженные радіуса; касательныя въ концахъ этихъ радіусовъ будутъ параллельны самимъ радіусамъ и пересѣкутся въ C. Продолжимъ OA до пересѣченія съ эллипсомъ въ A'. Въ A' проведемъ касательную до пересѣченія съ продолженіемъ CB въ C'. Изъ фокуса опустимъ перпендикуляры FP и FP' на касательныя AC и A′C′. Изъ C и C′ опустимъ перпендикуляры CQ и C′Q′ на FA и FA′.

Изъ подобія треугольниковъ AFP и ACQ

$$CQ : FP = AC : AF.$$

Подобнымъ образомъ

$$FP' : C'Q' = A'F : A'C'.$$

Но вторыя отношенія равны (n° 25), слѣдовательно

$$CQ : FP = FP' : C'Q',$$

откуда

$$CQ.C'Q' = FP.FP' = b^2, \; (n^\circ\ 14)$$

гдѣ b есть половина меньшей главной оси. Но въ нашемъ случаѣ

$$CQ = C'Q' = b.$$

28. Площадь параллелограма, построеннаго на двухъ сопряженныхъ діаметрахъ, есть величина постоянная.

Доказательство. Соединивъ фокусъ съ точками касанія и съ вершинами, мы разобьемъ параллелограмъ на 8 треугольниковъ. Въ этихъ треугольникахъ примемъ за основанія прямыя, соединяющія фокусъ съ точками касанія; тогда всѣ высоты будутъ равны (n° 27) и теорема легко доказываются.

29. Сумма квадратовъ сопряженныхъ радіусовъ есть величина постоянная.

При доказательствѣ этой теоремы приходится отступить отъ чисто элементарнаго изложенія и ввести простѣйшія формулы изъ алгебры, впрочемъ такія, которыя допускаются въ современныхъ курсахъ элементарной геометріи.

Пусть OA и OB два сопряженные діаметра. Означимъ разстояніе между фокусами чрезъ $2c$. Изъ треугольника FAF′ имѣемъ

$$\overline{AF}^2 + \overline{AF'}^2 = 2\overline{OA}^2 + 2c^2.$$

Но (n° 26)

$$AF.AF' = \overline{OB}^2.$$

Умноживъ второе равенство на 2 и прибавивъ къ первому получимъ

$$(AF + AF')^2 = 2\overline{OA}^2 + 2\overline{OB}^2 + 2c^2,$$

откуда

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = 2a^2 - c^2 = a^2 + b^2.$$

Директриссы.

30. Хорду, проходящую через фокус, назовем фокусною хордою.

Фокусная хорда перпендикулярна к прямой, соединяющей фокус с точкою пересѣченія касательных, проведенных в концах хорды (n° 12).

31. Если мы точку пересѣченія касательных, проведенных в концах фокусной хорды, примем за центр, а прямую, соединяющую эту точку с центром, за радіус и начертим круг, то он коснется (n° 7 и 12) продолженія прямых, соединяющих концы хорды с другим фокусом, и отсѣчет от главной оси постоянный отрѣзок.

Послѣднее доказывается на основаніи теоремы: касательная (из второго фокуса) к кругу есть средняя пропорціональная между всею сѣкущею и внѣшним отрѣзком.

32. Геометрическое мѣсто точки пересѣченія касательных, проведенных в концах фокусной хорды, находится на постоянной прямой, (n° 31) которая называется директриссою.

33. Отрѣзок касательной, заключенный между точкою касанія и директриссою, стягивает прямой угол в фокусѣ (n° 32).

34. Отношеніе разстояній каждой точки эллипса от фокуса и от директриссы есть величина постоянная.

Доказательство. Опустим из точки A перпендикуляр AD на директриссу. К AF возставим перпендикуляр до пересѣченія с директриссою в точкѣ M. Принявъ M за центр, радіусом MF начертим круг, который коснется (n° 31) продолженія F′A в B. Соединим B с D и с F. Треугольники FF′B и ABD подобны, ибо они равноугольны. Равноугольность треугольников доказывается из того, что точки A, B, D, M и F находятся на одном кругѣ. Из подобія находим:

$$AB : AD = FF' : F'B.$$

Но

$$AB = AF, \quad FF' = 2c, \quad F'B = 2a,$$

слѣдовательно

$$AF : AD = c : a.$$

35. Лемма. Если мы основаніе треугольника раздѣлим с внѣшней стороны на части пропорціональныя прилежащим сторонам, то прямая, соединяющая точку дѣленія с вершиною, будет внѣшним биссектором угла при вершинѣ.

36. Прямая, соединяющая фокус и точку пересѣченія продолженія хорды с директриссою, будет внѣшним биссектором угла между прямыми, соединяющими фокус с концами хорды (n° 34 и 35).

Необходимо прежде доказать (n° 34), что директрисса дѣлит хорду с внѣшней стороны на части, пропорціональныя прямым, соединяющим концы хорды с фокусом.

37. Угол, вписанный в эллипс и опирающійся на постоянную хорду, отсѣкает от директриссы отрѣзок, стягивающій в фокусѣ постоянный угол, который равен половинѣ угла, стягиваемаго в фокусѣ постоянною хордою (n° 36).

Проф. *В. Ермаков*.

СИНТЕЗЪ и АНАЛИЗЪ ВЪ МАТЕМАТИКѢ.

(*Продолженіе*) *).

7. Элементами разсужденія служатъ *предложенія* **). Когда, исходя изъ нѣкотораго предложенія (M), приходимъ путемъ умозаключенія къ другому предложенію (N), то всегда при этомъ, какъ второю логическою посылкою, пользуемся нѣкоторымъ *побочнымъ* предложеніемъ (A), въ истинности котораго мы не сомнѣваемся. Напр.

$$^1/_3x=2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (M)$$

$$x=3(^1/_3x) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (A)$$

$$x=3.2=6 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (N)$$

Если, какъ въ приведенномъ примѣрѣ, вторая посылка состоитъ изъ истины очень *для насъ* элементарной, то въ ходѣ разсужденія она обыкновенно пропускается, и мы говоримъ попросту: „*если*...........(M), *то*........(N)“. Въ этой формѣ выражена одна ступень синтеза.

Примѣръ: „*если* два треугольника имѣютъ общее основаніе и вершины ихъ лежатъ на прямой параллельной основанію (M), *то* площади ихъ равновелики (N)“. Здѣсь нами пропущены истины (A): 1) оба эти треугольника имѣютъ одинаковыя высоты и 2) площадь каждаго треугольника выражается половиною произведенія его основанія на высоту.

Если логическая связь между двумя однородными предложеніями (M) и (N) на столько для насъ элементарна, что одно изъ нихъ кажется намъ (на основаніи подразумѣваемыхъ, побочныхъ истинъ (A)) непосредственнымъ слѣдствіемъ другого, то такія два предложенія будемъ называть *смежными* ***).

---

*) См. „Вѣстникъ“ № 109.

**) *Предложеніемъ* называемъ всякую идею о соотношеніи между однородными величинами, выраженную или словесно (при помощи подлежащаго, сказуемаго, дополненія и пр.) или условными символами. Напр. 1) „острый уголъ меньше прямого“ 2) „треугольникъ ABC подобенъ треугольнику DEF“, 3) „$a=b+c$“, и пр. суть предложенія. Предложенія аналогичны *фактамъ*.

***) „Смежность“ предложеній есть, очевидно, понятіе субъективное; тѣ-же два предложенія, которыя для одного изъ насъ являются смежными, вслѣдствіе ранѣе пріобрѣтенныхъ въ данной области знаній, для другого могутъ еще казаться весьма отдаленными по логическому масштабу. Для человѣка, напримѣръ, изучившаго элементарную геометрію, задача о построеніи вписаннаго въ данную окружность десятиугольника непосредственно сводится къ задачѣ нахожденія большаго отрѣзка радіуса данной окружности, раздѣленнаго въ крайнемъ и среднемъ отношеніи; для другого, незнакомаго съ геометріей, такое рѣшеніе задачи показалось бы, конечно, совершенно непостижимымъ фокусомъ.

Это замѣчаніе въ особенности важно въ педагогическомъ отношеніи. Обучая другихъ, мы постоянно имѣемъ дѣло съ тѣми, которые не вполнѣ еще усвоили логическую связь между такими предложеніями, которыя намъ самимъ кажутся смеж-

Разсуждать синтетически—это значитъ переходить отъ нѣкотораго исходнаго предложенія (M) къ другому, смежному съ нимъ и составляющему его слѣдствіе (N), затѣмъ отъ предложенія (N)—къ новому смежному съ нимъ слѣдствію (O) и т. д.; при этомъ всякій разъ переходъ совершается на основаніи нѣкоторыхъ побочныхъ истинъ (A), (A′)....., которыя нерѣдко лишь подразумѣваются. Если исходное предложеніе *истинно*, то правильнымъ ходомъ разсужденія мы можемъ прійти *только къ истинному* новому предложенію, ибо ложь не можетъ быть логическимъ слѣдствіемъ истинъ. Наоборотъ, если исходное положеніе *ложно*, то правильное разсужденіе можетъ привесть насъ или къ *ложному*, или къ *истинному* заключенію *).

Разъяснить этотъ послѣдній вопросъ очень важно, потому именно, что изъ него вытекаетъ слѣдующее положеніе, имѣющее существенное значеніе при примѣненіи синтеза:

Если синтетическое разсужденіе привело насъ къ заключительному предложенію, которое само по себѣ „истинно", то это не служитъ еще ручательствомъ, что исходное предложеніе нашего разсужденія было тоже истиннымъ. И—напротивъ того—

Если разсужденіе привело насъ къ заключительному предложенію,

---

ными. Отсюда и происходитъ, что иногда преподавателю достаточно одинъ только разъ употребить при выкладкѣ неудачное „очевидно" или „слѣдовательно", чтобы сразу оборвать въ умѣ слушателя некрѣпкую еще нить сознательнаго пониманія связи между исходнымъ предложеніемъ и устанавливаемымъ. Вводя въ курсъ предмета непосильные для изучающаго логическіе *интервалы*, мы заставляемъ его *заучивать ихъ наизусть*. Не бѣда, если это заучиваніе не переходитъ за предѣлы знанія на память общеобразовательныхъ теоремъ и если—тѣмъ либо другимъ способомъ—ученикъ былъ своевременно вынужденъ пополнить самъ недостающими для него звеньями умозаключеній всѣ тѣ скачки, которые насиловали его память. Скажу даже болѣе: безъ заучиванія наизусть непосредственной связи между предложеніями, которыя не представляются еще смежными, наврядъ ли возможно пріобрѣтеніе солидныхъ знаній, даже въ области наукъ умозрительныхъ, ибо знаніе сводится не только къ ознакомленію съ новыми предложеніями (фактами), но и къ усвоенію *теоремъ*, а теоремами мы именно и называемъ смежное сопоставленіе двухъ довольно еще отдаленныхъ предложеній и выраженіе причинной связи между ними въ удобной для памяти формѣ.—Но—съ другой стороны—если логическіе пробѣлы остаются въ умѣ изучающаго невыполненными, если вслѣдствіе этого предѣлы заучиванія наизусть все болѣе и болѣе раздвигаются,—дальнѣйшее изученіе предмета навѣрное сдѣлается для него ненавистнымъ, какъ трудъ непосильный и лишенный всякаго интереса. Этимъ объясняется, по моему мнѣнію, почему такой громадный процентъ людей, обучавшихся математикѣ, *забываютъ* ее со временемъ до дѣтскаго почти уровня, обязательное изученіе ея вспоминаютъ съ отвращеніемъ, и вполнѣ искренне удивляются тѣмъ, кто въ занятіяхъ математикой можетъ находить удовольствіе.

*) Это было высказано еще Аристотелемъ, творцомъ *логики*, какъ отдѣльной науки. Вотъ одинъ изъ примѣровъ Аристотеля: 1) человѣкъ не есть животное" (ложь), 2) „лошадь есть животное" (истина), выводъ „человѣкъ не есть лошадь" (ист.).

которое само по себѣ „ложно“, то и исходное предложенiе нашего разсужденiя было тоже ложнымъ.

1-ый Примѣръ. Примемъ за исходную точку нашего разсужденiя *ложное* предложенiе равенства дiагоналей нѣкотораго ромба ABCD. Т. е. пусть

$$AC = BD \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (M)$$

На основанiи истины, что стороны ромба равны, т. е. что

$$AB = BC = CD \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (A)$$

заключаемъ изъ (M) и (A), что

треугольникъ ABC = тр. BCD . . . . . . (N)

Отсюда, въ свою очередь, на основанiи истины

„равные треугольники имѣютъ равныя площади“....(A′)

дѣлаемъ новый логически правильный выводъ

площ. ABC = площ. BCD . . . . . . (0)

Изъ предложенiя (0), на основанiи истины:

„если отъ равныхъ отнять поровну, то остатки будутъ равны“......(A″)

заключаемъ, что за отнятiемъ отъ площадей ABC и BCD ихъ общей части BDF, (гдѣ F есть точка пересѣченiя дiагоналей) должны получиться равные остатки т. е.

площ. ABF = площ. FCD. . . . . . . (P)

Но послѣднее предложенiе *очевидно истинно* само по себѣ, ибо по свойству ромба треугольники ABF и FCD равны, и, стало быть, ихъ площади равны.

Итакъ, исходя изъ ложнаго предложенiя (M) мы путемъ правильнаго разсужденiя пришли къ истинному выводу (P). (Предложенiе (0)— тоже истинное).

2-ой. Примѣръ. Принимаемъ за исходной пунктъ то-же самое ложное предложенiе равенства дiагоналей ромба, т. е.

$$AC = BD \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (M)$$

На основанiи прежней истины (A), имѣемъ, какъ и прежде

тр. ABC = тр. BCD . . . . (N)

Отсюда, на основанiи истины:

„въ равныхъ треугольникахъ противъ равныхъ сторонъ лежатъ равные углы“ . . . . (A‴)

приходимъ къ выводу

$$\angle B = \angle C \ldots\ldots\ldots (0')$$

Получилось предложенiе *очевидно ложное*, ибо ромбомъ мы называемъ именно такой параллелограммъ, въ которомъ при равныхъ сторонахъ непротиволежащiе углы не равны.

Итакъ, исходя изъ ложнаго предложенiя (M) мы пришли на этотъ разъ къ ложному заключенiю (0′).

Въ чемъ-же заключается существенное различiе между одинаково, повидимому, правильными разсужденiями, примѣненными нами въ обоихъ этихъ примѣрахъ? Гдѣ искать увѣренности, что, пользуясь такъ часто, напр. въ геометрiи, *методомъ приведенiя къ нелѣпости* *), или *апагогическимъ*), мы непремѣнно прiйдемъ къ „ложному" заключенiю, если вышли изъ „ложнаго" предложенiя? **).

9. Чтобы отвѣтить на эти вопросы, замѣтимъ, что всякiя два смежныя предложенiя бываютъ или *обратимыя* или *необратимыя*. Два какiя нибудь смежныя предложенiя называются *обратимыми* въ томъ случаѣ, когда каждое изъ нихъ понимается нами какъ слѣдствiе другого; если же только одно изъ предложенiй есть логическое слѣдствiе другого, напр. если (N) есть слѣдствiе (M), а обратный выводъ невозможенъ, т. е. (M) не есть слѣдствiе (N), то предложенiя называются *необратимыми*. Напр. два предложенiя: 1) неравенство сторонъ треугольника, положимъ, такое: $a > b > c$ и 2) того же знака неравенство противолежащихъ его угловъ: $\angle A > \angle B > \angle C$—представляютъ пару смежныхъ обратимыхъ предложенiй. Наоборотъ, предложенiя: 1) равенство треугольниковъ напр. ABC и DEF и 2) равенство соотв. ихъ угловъ: $\angle A = \angle D$; $\angle B = \angle E$; $\angle C = \angle F$,—представляютъ примѣръ предложенiй необратимыхъ, ибо только второе изъ нихъ есть слѣдствiе перваго, а первое вовсе не есть слѣдствiе второго.

Необратимость двухъ предложенiй обусловливается тѣмъ обстоятельствомъ, что они *не въ одинаковой степени общи*, такъ какъ одно изъ нихъ (именно то, которое не есть слѣдствiе другого) представляетъ собою лишь *частный случай* нѣкотораго *болѣе общаго предложенiя*. Такъ въ приведенномъ выше примѣрѣ равенство треугольниковъ ABC и DEF есть частный случай „подобiя треугольниковъ ABC и DEF", т. е. того болѣе общаго предложенiя, которое со вторымъ предложенiемъ (равенство угловъ) составляетъ обратимую пару. Отсюда видимъ, что если въ парѣ обратимыхъ предложенiй одно изъ нихъ замѣнимъ новымъ предложенiемъ, представляющимъ только его частный случай, то получимъ пару необратимую. Напр. имѣемъ обратимыя два предложенiя: если 1) основанiя двухъ треугольниковъ обратно пропорцiональны ихъ высотамъ, то 2) площади этихъ треугольниковъ равновелики. Замѣнимъ 1-ое предложенiе его частнымъ случаемъ, напр. такимъ: 1) въ двухъ

---

*) Объ этомъ методѣ, какъ частномъ случаѣ анализа, ниже мы побесѣдуемъ подробнѣе.

**) Читатель догадывается, вѣроятно, что въ отвѣтахъ на эти вопросы должно заключаться также разъясненiе сущности такъ называемыхъ *математическихъ софизмовъ*.

треугольникахъ основаніе 1-го въ три раза больше основанія 2-го, а высота 1-го въ три раза меньше высоты 2-го; слѣдствіемъ этого предложенія будетъ, по прежнему, равенство площадей обоихъ треугольниковъ, но само оно уже не есть слѣдствіе равенства площадей.

Возвращаясь теперь къ примѣрамъ § 8, не трудно будетъ замѣтить существенное между ними различіе. Во 2-мъ примѣрѣ, когда мы изъ ложнаго предложенія (M) пришли къ ложному-же предложенію (0′), *всѣ пары смежныхъ предложеній*, вводимыхъ въ разсужденіе, *были обратимыя*; напротивъ того—въ 1-мъ примѣрѣ, когда изъ ложнаго исходнаго предложенія (M) мы пришли къ истиннымъ предложеніямъ (0) и (P), *не всѣ* пары смежныхъ предложеній были обратимыя, а именно пара (N) и (0) была необратимая, отчего и произошло, что изъ ложнаго еще предложенія (N) мы были приведены къ истинному уже (0).

Итакъ: *если въ цѣпь синтетическаго разсужденія мы вводимъ только обратимыя смежныя предложенія, то и все разсужденіе обратимо* (т. е. можетъ быть ведено въ обратномъ порядкѣ) *и, исходя изъ ложнаго, мы можемъ прійти только къ ложному.*

И—напротивъ того—*если въ цѣпь разсужденія мы вводимъ не только обратимыя, но и необратимыя смежныя предложенія, то и все разсужденіе дѣлается необратимымъ, и потому, исходя изъ ложнаго, мы можемъ прійти не только къ ложному, но также и къ истинному.*

10. Разсмотримъ теперь процессъ аналитическаго разсужденія.

Мы видѣли (§ 1), что сущность аналитическаго метода заключается въ томъ, чтобы по заданному слѣдствію (N) найти, на основаніи извѣстныхъ намъ истинъ (A), его ближайшую причину (M). Слѣдовательно анализъ есть не что иное, какъ процессъ обратный умозаключенію (т. е. синтезу), ибо онъ направленъ къ отысканію такой неизвѣстной посылки (M), изъ которой, на основаніи нѣкоторой второй посылки (A), завѣдомо намъ извѣстной, но напередъ не заданной, получился бы логически правильный, напередъ заданный выводъ (N). Схематически это можно представить такъ:

$$(M)+(A)=(N)$$

гдѣ (N)—заданное предложеніе, (M)—искомое, а (A)—произвольное, но истинное *).

Посмотримъ въ какихъ случаяхъ такъ понимаемый анализъ приводитъ насъ къ безошибочнымъ заключеніямъ, и въ какихъ—его результатъ остается сомнительнымъ.

---

*) Это совершенно аналогично рѣшенію неопредѣленнаго уравненія вида

$$f(x,\ y)=c.$$

Какъ здѣсь x=нѣкоторой функціи отъ c и y, и можетъ имѣть столько значеній, сколько захотимъ придать частныхъ значеній второму неизвѣстному y, такъ и тамъ опредѣленіе искомаго предложенія (M) будетъ находиться въ зависимости не только отъ заданнаго (N), но и отъ тѣхъ истинъ (A), которыя пожелаемъ ввести въ разсужденіе.

Пусть намъ задано нѣкоторое предложеніе (X), и мы желаемъ знать истинно ли оно или ложно. Примѣненіе *восходящаго анализа* къ рѣшенію такого вопроса будетъ заключаться въ слѣдующемъ: принимаемъ заданное предложеніе (X) за данное, и ищемъ такое смежное (для насъ) съ нимъ предложеніе (Y), чтобы

$$(Y)+(A)=(X),$$

т. е. такое (Y), изъ котораго—на основаніи истинъ побочныхъ (A)—предложеніе (X) вытекало бы какъ слѣдствіе; при этомъ нѣтъ необходимости заботиться о такомъ выборѣ (Y), чтобы—и наоборотъ—оно само было слѣдствіемъ (X)-а. Иными словами—предложенія (Y) и (X) могутъ оказаться или обратимыми, или необратимыми. Найдя (Y), мы ищемъ далѣе такое смежное съ нимъ (Z), чтобы

$$(Z)+(A')=(Y)$$

и такъ далѣе, пока не дойдемъ до нѣкотораго заключительнаго предложенія (M), истинность или ложность котораго для насъ очевидна. Такимъ образомъ, пропустивъ побочныя истины (A), (A')......, имѣемъ рядъ взаимно смежныхъ предложеній

$$(X)\leftarrow(Y)\leftarrow(Z)\leftarrow\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\leftarrow(N)\leftarrow(M) \qquad (\alpha)$$

гдѣ стрѣлки указываютъ направленіе отъ причины къ слѣдствію. Въ этомъ ряду, вообще говоря, нѣкоторыя пары смежныхъ предложеній могутъ быть необратимыя. Не смотря на это, однакожъ, *если заключительное предложеніе* (M) *оказалось очевидно истиннымъ*, *то это служитъ достаточнымъ доказательствомъ истинности заданнаго предложенія* (X), ибо—какъ уже было сказано выше (§ 7)—слѣдствіемъ истиннаго можетъ быть только истинное. Въ этомъ случаѣ, стало быть, такой восходящій анализъ не можетъ оставить никакихъ сомнѣній относительно истинности того предложенія (X), которое было принято за исходный пунктъ нашего разсужденія *), и было бы ошибочнымъ считать—какъ это дѣлаютъ многіе—что вышеизложенный процессъ анализа требуетъ непремѣнно *повѣрки* путемъ обратнаго, т. е. синтетическаго вывода предложенія (X) изъ найденнаго анализомъ предложенія (M). Это совершенно излишне, ибо такой обратный синтезъ былъ уже разъ сдѣланъ по частямъ, такъ какъ восходя, напр., отъ нѣкотораго (Y) къ тому (Z), изъ котораго (Y) вытекаетъ какъ слѣдствіе, мы до тѣхъ поръ не устанавливали (Z), пока не убѣдились, что дѣйствительно изъ него (Y) вытекаетъ какъ слѣдствіе, и это повторялось всякій разъ, на каждой новой ступени анализа. Съ такимъ-же точно правомъ можно, напр., утверждать, что послѣ окончанія всякаго ариѳметическаго дѣленія или извлеченія корня и пр. необходимо еще сдѣлать повѣрку при помощи обратнаго дѣйствія.

Итакъ, *если восходящій анализъ доводитъ насъ до заключительнаго предложенія*, *которое само по себѣ истинно*, *то и истинность исходнаго*

*) Примѣръ примѣненія такого восходящаго анализа къ доказательству заданной теоремы былъ приведенъ выше (см. § 4).

заданнаго предложенія не можетъ подлежать сомнѣнію, независимо отъ того будутъ ли введенныя въ цѣпь анализа смежныя предложенія обратимы или нѣтъ.

Но если заключительное предложеніе (M), до котораго насъ довелъ восходящій анализъ, само по себѣ окажется ложнымъ, то какъ мы уже знаемъ (изъ §§ 7, 8, 9)—исходное положеніе (X) можетъ быть или истиннымъ, или ложнымъ; истиннымъ оно могло бы оказаться въ томъ случаѣ, когда въ ряду (α) нѣкоторыя смежныя предложенія необратимы, и—напротивъ того—ложнымъ оно было бы непремѣнно въ томъ случаѣ, когда въ ряду (α) всѣ пары смежныхъ предложеній обратимы.

Итакъ, *если восходящій анализъ доводитъ насъ до заключительнаго предложенія, которое само по себѣ ложно, то ложность исходнаго заданнаго предложенія не подлежитъ сомнѣнію въ томъ только частномъ случаѣ, когда всѣ, введенныя въ цѣпь разсужденія, смежныя предложенія—обратимы.* Въ общемъ же случаѣ, когда не всѣ предложенія обратимы, вопросъ объ истинности или ложности исходнаго предложенія остается нерѣшеннымъ.

Примѣры: I. Докажемъ методомъ восходящаго анализа слѣдующую теорему для прямоугольнаго треугольника: биссекторъ прямого угла BJ равенъ отношенію произведенія катетовъ къ ихъ суммѣ, умноженному на $\sqrt{2}$. Т. е.

$$BJ=\frac{AB.BC}{AB+BC}\sqrt{2}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(X)$$

Это равенство можно считать слѣдствіемъ такого

$$JK\left(=\frac{BJ}{\sqrt{2}}\right)=\frac{AB.BC}{AB+BC}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(Y)$$

гдѣ черезъ JK мы обозначили сторону такого квадрата, въ которомъ BJ есть діагональ, т. е. JK есть перпендикуляръ, опущенный изъ точки J на одинъ изъ катетовъ, напр. на AB. Равенство (Y) есть слѣдствіе слѣдующаго

$$JK.AB=AB.BC-JK.BC,\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(Z)$$

которое въ свою очередь (на основаніи JK=BK) получилось бы изъ

$$JK.AB=AK.BC,\quad .\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(N)$$

это-же послѣднее есть слѣдствіе пропорціи

$$JK:AK=BC:AB,\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(M)$$

которая (на основаніи параллельности JK и BC) *очевидно истинна.* Значитъ и (X) истинно.

II. Задача. На данномъ основаніи b построить треугольникъ, котораго высота h была бы среднею пропорціональною между боковыми сторонами a и c.—Условіе построенія, есть предложеніе

$$h=\sqrt{ac}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(X)$$

которое есть слѣдствіе такого:

$$\frac{a}{h}=\frac{h}{c} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(M)}$$

а это послѣднее, на томъ основаніи, что во всякомъ треугольникѣ высота h не можетъ быть больше ни одной изъ боковыхъ сторонъ a и c, *очевидно ложно*. Значитъ и исходное предложеніе (X) ложно, т. е. задача невозможна. *Ш.*

(*Продолженіе слѣдуетъ*).

Отчеты о засѣданіяхъ ученыхъ обществъ.

Кіевск. Физ.-Мат. Общ. 1-ое (годичное) засѣданіе 24-го января 1891 г. Согласно § 13 „Устава" нѣкоторые изъ гг. членовъ добровольно выбыли изъ Общества и потому къ 1-му янв. дѣйств. членовъ числилось 84 (изъ нихъ 10 иногороднихъ). Изъ нихъ присутствовало въ засѣданіи только 35, т. е. менѣе половины всѣхъ городскихъ членовъ, и потому, на основаніи § 9 „Устава", избраніе членовъ Распорядительнаго Комитета на 1891 г. (§ 7) не могло состояться въ настоящемъ засѣданіи.

Предсѣдателемъ Общества Н. Н. Шиллеромъ былъ прочитанъ Годичный Отчетъ о дѣятельности Кіевскаго Физ.-Мат. Общества въ истекшемъ 1890 году, а однимъ изъ членовъ Ревизіонной Комиссіи, В. В. Игнатовичъ-Завилейскимъ—отчетъ таковой Комиссіи.

Кіевское Физ.-Мат. Общество 2-ое засѣданіе 28 января. Согласно §§ 7, 8 и 9 „Устава" были избраны закрытой подачей голосовъ (за исключеніемъ Предсѣдателя, избираемаго на 2 года) въ составъ Распорядительнаго Комитета на тек. 1891 г.: товарищами предсѣдателя: В. П. Ермаковъ и Э. К. Шпачинскій, секретаремъ—проф. Г. К. Сусловъ и казначеемъ—О. О. Косоноговъ *).

Послѣ этого были сдѣланы сообщенія:

1) *А. Л. Корольковъ* показалъ и разъяснилъ опыты: 1) Гальвакса надъ разряднымъ дѣйствіемъ ультра-фіолетовыхъ лучей (электр. лампы съ вольтовой дугой) на отрицательно наэлектризованныя тѣла и 2) различія въ индуктивной способности діэлектриковъ, вводимыхъ между обкладки лейденской банки.

2) *Э. К. Шпачинскій*: „О синтезѣ и анализѣ въ математикѣ" **).

Кіевск. Физ.-Мат. Общ. 3-ье очер. засѣданіе 12-го февраля. Предсѣдатель заявилъ о смерти одного изъ дѣйствительныхъ членовъ Общества, профессора Петра Петровича Алексѣева и предложилъ почтить память покойнаго вставаніемъ.

Вслѣдъ затѣмъ *Э. К. Шпачинскій* сказалъ слѣдующее:

„Съ прискорбіемъ намъ приходится отмѣтить первую потерю въ исторіи нашего молодого Общества, потерю тѣмъ болѣе тяжелую, что она относится не только къ этому Обществу, но почти къ каждому изъ насъ порознь. Со смертію П. П. Алек-

*) Бывшій секретарь, проф. Б. Я. Букрѣевъ, просилъ освободить его впредь отъ секретарскихъ обязанностей, по недостатку времени, а бывшій казначей Общества, К. Н. Жукъ, вслѣдствіе назначенія его директоромъ реальнаго училища въ Новозыбковѣ, выбылъ изъ г. Кіева.

**) См. „Вѣстникъ" №№ 109, 110 и въ слѣдующихъ.

сѣева не только Кіевское Физ.-Мат. Общество in corpore лишается одного изъ самыхъ выдающихся своихъ членовъ, научныя заслуги котораго давно признаны и оцѣнены всѣмъ ученымъ міромъ, но—благодаря рѣдкой общительности покойнаго—еще каждый изъ насъ въ частности былъ пораженъ самымъ чувствительнымъ образомъ преждевременной и неожиданной кончиной этого высоко чтимаго человѣка. Одни изъ насъ теряютъ въ немъ уважаемаго профессора и руководителя, не прекращавшаго по истинѣ дружескихъ связей со своими учениками со дня оффиціальнаго окончанія ими курса, другіе—друга и товарища, никогда не умѣвшаго быть двуличнымъ, а всѣ вообще—высоко образованнаго человѣка, отзывчиваго на всякое начинаніе, которое казалось ему желательнымъ и честнымъ, и совершенно чуждаго въ вопросахъ научныхъ той нетерпимости, которою нерѣдко сопровождается узкое пониманіе задачъ науки съ точки зрѣнія излюбленной спеціальности.

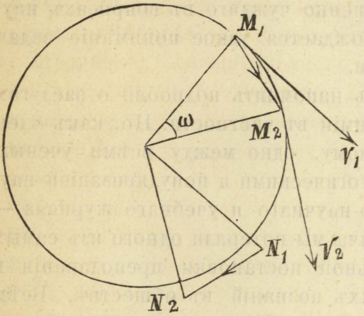
Предоставляю лицамъ болѣе компетентнымъ напомнить подробно о заслугахъ покойнаго въ области естествознанія вообще и химіи въ частности. Но, какъ членъ Кіевскаго Физ.-Мат. Общества, которое, повидимому, одно между всѣми учеными обществами г. Кіева интересуется вопросами педагогическими и популяризаціей научныхъ истинъ, а также какъ редакторъ популярно-научнаго и учебнаго журнала,—я не могу не замѣтить, что въ лицѣ Петра Петровича мы потеряли одного изъ самыхъ выдающихся и горячихъ сторонниковъ раціональной постановки преподаванія въ учебныхъ заведеніяхъ и распространенія научныхъ познаній въ обществѣ. Всѣмъ вамъ, господа, извѣстно, что въ этомъ отношеніи Петръ Петровичъ никогда не жалѣлъ личнаго труда, всѣ вы знаете какъ онъ, несмотря на многочисленныя занятія по своей спеціальности и на слабое всегда здоровье, находилъ и время и силы читать публичныя лекціи, руководить занятіями тѣхъ, кто искалъ его совѣтовъ, сотрудничать во многихъ ученыхъ и популярныхъ журналахъ, въ томъ числѣ и въ моемъ скромномъ „Вѣстникѣ", и пр.—Какъ бывшій учитель, я не могу также не вспомнить моего перваго съ Петромъ Петровичемъ знакомства, когда, 12 лѣтъ тому назадъ, онъ былъ командированъ присутствовать, какъ депутатъ отъ университета, при выпускныхъ экзаменахъ въ Кременчугскомъ реальномъ училищѣ. Всѣ мы, и преподаватели и ученики, ждали его какъ ревизора, а, нѣсколько времени спустя, провожали его какъ друга, какъ человѣка, который никого не запугалъ, никого не обидѣлъ и сумѣлъ войти въ положеніе каждаго.—Да, смѣло можно сказать, что со смертью П. П. наше образованное общество теряетъ не только ученаго и всей Европѣ извѣстнаго химика, но и истаго педагога, имѣвшаго въ теченіе 25-ти лѣтней своей дѣятельности огромное вліяніе, благодаря тому именно обстоятельству, что онъ былъ не только достойнымъ служителемъ науки, но и искреннимъ другомъ учащихся".

Послѣ этого были сдѣланы сообщенія:

1) *Г. К Сусловъ*: „По поводу новыхъ программъ физики".

При обсужденіи новыхъ программъ по физикѣ самъ собою представился вопросъ, возможна ли вообще въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ научная постановка курса физики, и не превышаютъ ли силы учениковъ тѣ математическія свѣдѣнія, безъ которыхъ такая постановка невозможна. Мнѣ кажется, что эти предварительныя свѣдѣнія по математикѣ вовсе не такого характера и не такого объема, чтобъ они не были подъ силу среднему ученику. Изъ того, что не входило до сихъ поръ въ программы гимназій придется лишь добавить понятіе о векторахъ, ихъ сложеніи и вычитаніи, что едва ли можетъ затруднить учащихся, да еще понятіе о предѣлѣ отношенія безконечно-малыхъ. Замѣчу, что послѣднее понятіе, если и не было прямо названо въ гимназическомъ курсѣ, но должно было входить въ него неявнымъ образомъ; а именно безъ него нельзя обойтись при изложеніи той главы изслѣдованія уравненій первой степени, гдѣ говорится объ истинныхъ значеніяхъ неопредѣленныхъ выраженій такого рода, какъ напр. $\frac{a^2-b^2}{a-b}$ при $a=b$. Предполагая ученикамъ извѣстными эти добавленія и затѣмъ обыкновенный курсъ пяти классовъ класической гимназіи, можно вполнѣ строго и научно построить курсъ Физики. Въ видѣ иллюстраціи къ сказанному, приведу выводъ выраженія для такъ называемой центробѣжной силы. Въ нормальномъ курсѣ дѣло свелось бы къ нахожденію величины и направленія ускоренія при равномѣрно круговомъ движеніи. Этимъ случаемъ, конечно, слѣдуетъ и ограничиться. Ученикамъ предварительно сообщены научныя опредѣленія скорости и ускоренія.

Фиг. 11.



$(ON_1 = \parallel M_1V_1; \quad ON_2 = \parallel M_2V_2)$

Пусть точка M (фиг. 11) движется равномѣрно со скоростью V по окружности радіуса $R=OM_1$. Векторы $M_1V_1=M_2V_2$ условно изображаютъ скорости. По опредѣленію скорость

$$V=\text{пред.}\left\{\frac{M_1M_2}{t_2-t_1}\right\}_{t_2=t_1}, \quad . \ . \ . \ . (\alpha)$$

если M_1 и M_2 положенія движущейся точки въ моменты t_1 и t_2. Искомое ускореніе W представляется, какъ предѣлъ отношенія геометрической разности скоростей M_1V_1 и M_2V_2 къ соотвѣтственному промежутку времени, т. е.

$$W=\text{Пред.}\left\{\frac{N_1N_2}{t_2-t_1}\right\}_{t_2=t_1}.$$

Но изъ подобія треугольниковъ ON_1N_2 и OM_1M_2 слѣдуетъ

$$N_1N_2=M_1M_2.\frac{ON_1}{OM_1}=M_1M_2.\frac{V}{R}.$$

А потому

$$W=\text{Пред.}\frac{V}{R}.\frac{M_1M_2}{t_2-t_1}=\frac{V}{R}\text{Пред.}\frac{M_1M_2}{t_2-t_1}=\frac{V^2}{R}, \text{ по } (\alpha).$$

Замѣтивъ, что уголъ $ON_1N_2=\frac{\pi}{2}-\frac{\omega}{2}$, если $\omega=\angle M_1OM_2$, въ предѣлѣ обращается въ $\frac{\pi}{2}$, находимъ, что искомое ускореніе направлено по M_1O.

Умноживши на массу движущейся точки полученное ускореніе, и составимъ выраженіе для центростремительной силы.

2) *А. Е. Любанскій:* „Объ умноженіи на дробь“.

3) *О. О. Косоноговъ*: „Объ опытахъ Герца“ *).

*) Будетъ напечатано полностью.

Кіевское Физ.-Мат. Общ. 4-ое оч. засѣданіе 19-го февраля. Сообщенія:

1) *С. И. Чирьевъ* (проф.): „О кругломъ компенсаторѣ E. Du-Bois Raymond'a". Изложивъ теорію прибора, предназначеннаго спеціально для измѣренія электровозбудительныхъ силъ животныхъ тканей, и представляющаго видоизмѣненіе пріема Поггендорфа, референтъ демонстрировалъ какъ самый компенсаторъ, такъ и относящіеся къ нему „неполяризующіеся электроды", предложенные Du Bois Raymond'омъ для введенія въ гальваническую цѣпь животныхъ тканей. Для ознакомленія присутствующихъ съ основными явленіями животнаго электричества, референтъ показалъ опыты Гальвани, столь часто упоминаемые въ учебникахъ физики, но рѣдко повторяемые на лекціяхъ за недостаткомъ свѣже препарированныхъ лягушачьихъ конечностей. Сначала былъ воспроизведенъ Гальваніевскій „опытъ на балконѣ" съ лягушкой, подвѣшенной на мѣдномъ штативѣ такъ, что при раскачиваніи конечности ея могли касаться цинковаго стержня, при чемъ всякій разъ замѣчаются сильныя мышечныя сокращенія; такое-же вліяніе двухъ разнородныхъ металловъ, приводимыхъ въ соприкосновеніе съ обнаженною мускульною тканью, было демонстрировано также при помощи такъ называемаго „лягушачьяго пистолета" (Du Bois-Roymond'a). Затѣмъ былъ показанъ второй опытъ Гальвани, устраняющій всякое сомнѣніе относительно существованія самостоятельнаго электрическаго тока въ животныхъ тканяхъ, ибо въ немъ сокращенія мышцъ наблюдаются при замыканіи цѣпи, состоящей только изъ мускуловъ и нервовъ лягушки, т. е. безъ присутствія металловъ. Послѣ этого референтъ изложилъ сущность изслѣдованій Du-Bois-Roymond'a надъ распредѣленіемъ электрическаго напряженія на поверхности мышцъ, состоящихъ изъ правильныхъ, параллельно расположенныхъ волоконъ, а также на поверхности нервовъ, и—пользуясь круглымъ компенсаторомъ и чувствительнымъ гальванометромъ—произвелъ нѣсколько опытовъ въ подтвержденіе теоріи Du Bois-Roymond'a.

2) *Б. Я. Букрѣевъ*: „Софія Васильевна Ковалевская". Въ прекрасной рѣчи, сказанной по случаю смерти (29-го янв.) нашей соотечественницы, занимавшей каѳедру высшей математики въ Стокгольмскомъ университетѣ, референтъ изложилъ вкратцѣ біографическій очеркъ покойной, разобралъ болѣе подробно ея заслуги въ области высшей математики, остановился также на ея литературныхъ трудахъ, назвавъ главнѣйшія изъ ея произведеній, помѣщенныхъ какъ въ русскихъ такъ и въ иностранныхъ беллетристическихъ журналахъ, и въ заключеніе пожелалъ нашему обществу имѣть побольше такихъ женщинъ.

3) *О. О. Косоноговъ*: „Объ опытахъ Герца" (продолженіе). *Ш.*

ЗАДАЧИ.

№ 158. Разложить $^{233}/_{360}$ на сумму трехъ дробей, числители и знаменатели которыхъ были бы числа возможно малыя. *Ш.*

№ 159. Доказать построеніемъ, что сумма трехъ среднихъ пропорціональныхъ между сходственными сторонами двухъ подобныхъ треугольниковъ равна средней пропорціональной между ихъ периметрами, т. е. что

$$\sqrt{aa'}+\sqrt{bb'}+\sqrt{cc'}=\sqrt{(a+b+c)(a'+b'+c')},$$

при условіи:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}.$$

Ш.

№ 160. Даны двѣ окружности, касающіяся внѣшне или внутренне въ точкѣ A. Прямую данной длины a помѣстить концами на окружности такъ, чтобы изъ точки A она была видна подъ прямымъ угломъ.

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 161. На поверхности земли существуютъ такія точки M, для каждой изъ которыхъ геогр. широта равна долготѣ. Принимая землю за правильный шаръ, требуется опредѣлить: 1) геометрическое мѣсто проекціи точки M на плоскость экватора и 2) геометрическое мѣсто прямой, соединяющей M съ тою точкою экватора, отъ которой отсчитываются долготы. (Заимств.) *Н. Николаевъ* (Пенза).

№ 162. Два корабля плывутъ съ постоянными скоростями u и v по прямымъ линіямъ, пересѣкающимся подъ угломъ α. Показать, что если a и b ихъ одновременныя разстоянія отъ точки пересѣченія путей, то наименьшее разстояніе между кораблями будетъ

$$\frac{(av-bu)\mathrm{Sin}\alpha}{\sqrt{u^2+v^2-2uv\mathrm{Cos}\alpha}}.$$

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 163. Раздѣлить прямоугольный параллелепипедъ въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, плоскостью, перпендикулярною къ передней и задней гранямъ и образующею уголъ α съ боковыми гранями. Даны: высота параллелепипеда h и разстояніе между переднею и заднею гранями a.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 164. Даны двѣ окружности O и O′ и точка A. Провести къ окружностямъ сѣкущія ABC и ADE такъ, чтобы уголъ BAD былъ данной величины и хорды BC и DE были въ данномъ отношеніи.

И. Александровъ (Тамбовъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 51 (2-й серіи). Если

$$p=\frac{{}^1/_2\mathrm{Sin}\alpha}{\mathrm{Cos}\beta-\mathrm{Cos}\alpha},\quad q=\frac{{}^1/_2\mathrm{Sin}\beta}{\mathrm{Cos}\alpha-\mathrm{Cos}\beta},$$

доказать, что

$$p+q={}^1/_2\,\mathrm{Cotg}\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Складываемъ p и q

$$p+q=-{}^1/_2\frac{\mathrm{Sin}\alpha-\mathrm{Sin}\beta}{\mathrm{Cos}\alpha-\mathrm{Cos}\beta};$$

замѣняя по извѣстнымъ формуламъ разности синусовъ и косинусовъ, получимъ

$$p+q=\frac{1}{2}\frac{2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)},$$

а отсюда имѣемъ

$$p+q=\frac{1}{2}\operatorname{Cotg}\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Н. Волковъ (Спб.), *А. Шульженко* и *Л. Апте* (Кіевъ), *В. Захаровъ*, *В. Григорьевъ*, *С. Карновичъ* и *И. Вонсикъ* (Воронежъ), *Н. Карповъ* (Златополь). Ученики: 2-ой Тифл. г. (8) *М. А.*, Спб. 1-ой г. (8) *К. К.*, Коеменч. р. уч. (7) *А. Д.* и *І. Т.*, Курск. р. уч. (6) *Л. К.*, Тверск. р. уч. (6) *Н. А.*

№ 72 (2-й серіи). Упростить выраженіе

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}.$$

Умноживъ и раздѣливъ подкоренную величину на 8, получимъ

$$\sqrt[3]{\frac{16+8\sqrt{5}}{8}}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}.$$

Но $16+8\sqrt{5}=(1+\sqrt{5})^3$; слѣдовательно данное выраженіе обращается въ

$$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}).$$

А. Лентовскій и *П. Андреяновъ* (Москва), *Н. Волковъ* (Спб.), *В. Захаровъ*, *М. Варавинъ*, *А. Кочанъ* и *И. Вонсикъ* (Воронежъ), *Я. Ястржембовскій* (Курскъ). Ученики: Тифлис. 2-ой г. (7) *М. А.*, Кременч. р. уч. (7) *І. Т.*, Кіевск. 2-ой г. (6) *И. Б.*

№ 364. На окружности, радіусъ которой данъ, даны двѣ точки; требуется провести изъ нихъ двѣ хорды параллельныя и одинаково направленныя (противоположно направленныя), зная ихъ сумму (разность).—(Четыре задачи).

Пусть дана окружность O и на ней двѣ точки A и B.

1) Провести черезъ A и B двѣ хорды параллельныя и одинаково направленія, зная ихъ сумму.

Соединяемъ A съ B, изъ точки M, средины AB, радіусомъ=полусуммѣ искомыхъ хордъ зачерчиваемыхъ дугу; изъ центра данной окружности O радіусомъ OM зачерчиваемъ другую дугу; черезъ N пересѣченія этихъ дугъ проводимъ хорду CD касательную къ дугѣ радіуса OM; соединяемъ соотвѣтственно A съ C и B съ D: хорды AC и BD—искомыя;

въ самомъ дѣлѣ хорда $CD = AB$ (какъ равно-удаленныя отъ центра), слѣд. и $\smile CD = \smile AB$, а потому $AC \parallel BD$ и $ACDB$ есть трапеція, сумма параллельныхъ сторонъ которой $AC + BD$ равняется удвоенной линіи MN, соединяющей средины непараллельныхъ сторонъ трапеціи, а MN по построенію = полусуммѣ искомыхъ хордъ, откуда $AC + BD$ = данной суммѣ.

2) Провести черезъ A и B двѣ хорды параллельныя и противоположно направленныя, зная ихъ сумму $= S$.

Беремъ на окружности O точку A' діаметрально противоположную точкѣ A и черезъ B и A' проводимъ двѣ параллельныя хорды BD и $A'C'$ одинаково направленныя, сумма которыхъ $= S$; изъ A проводимъ хорду $AC \parallel A'C'$. Очевидно, что AC и BD будутъ искомыя.

3) Провести черезъ A и B двѣ хорды параллельныя и одинаково направленныя, зная ихъ разность $= d$.

Изъ A радіусомъ AB зачерчиваемъ дугу; изъ B радіусомъ $= d$ зачерчиваемъ другую дугу; соединяемъ B съ точкою E пересѣченія этихъ дугъ и продолжаемъ BE до пересѣченія съ окружностью O въ точкѣ D; изъ A проводимъ хорду $AC \parallel BD$. Хорды BD и AC искомыя, такъ какъ

$$AB = AE = CD,$$

откуда слѣдуетъ, что

$$AC = ED$$

и потому

$$BD - AC = BE = d.$$

4) Провести черезъ A и B двѣ хорды параллельныя и противоположно направленныя, зная ихъ разность $= d$.

Беремъ на окружности O точку A' діаметрально противоположную точкѣ A, и черезъ A' и B проводимъ двѣ хорды $A'C'$ и BD, затѣмъ черезъ A проводимъ хорду AC параллельно $A'C'$; очевидно, что хорды AC и BD и будутъ искомыя.

Въ общемъ случаѣ каждая изъ 4-хъ задачъ имѣетъ 2 рѣшенія.

С. Блажко (Москва), *В. Соллертинскій* (Гатчино), *А. Плетневъ* и *Н. Волковъ* (Спб.), Ученики: Курск. г. (7) *Т. Ш.*, 1-ой Спб. г. (7) *А. К.*, Оренб. г. (8) *А. П.*, Ворон. к. к. (7) *Г. У.*

ОПЕЧАТКА.

Въ № 104 „Вѣстника" на стр. 159 въ низшей строкѣ напечатано:

$$3a^4 + 1 = 3.3^{4n} + 1 = 3^{4n+1},$$

а должно быть:

$$3a^4 + 1 = 3.3^{4n} + 1 = 3^{4n+1} + 1.$$

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Кіевъ, 28 Февраля 1891 г.
Типо-литографія Высочайше утвержд. Товарищества И. Н. Кушнеревъ и К°.

Канонъ логариθмовъ

№ 3

ВРОНСКАГО.

I	II	III	IV	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	
				0 3 6 9	0 3 6 9	0 3 6 9	0 3 6 9	0 3 6 9	0 3 6 0	1 4 7 0	1 4 7 0	1 4 7 0	1 4 7 0	1 4 7 0	1 4 7 0	2 5 8 1	2 5 8 1	2 5 8 1	2 5 8 1	2 5 8 1	2 5 8 1	2 5 8 1	2 5 8 1	* = 0.4342945 log * = 9.6377843	A_1
				0000 0103 0206 0309	2119 2222 2325 2428	4139 4242 4345 4448	6070 6173 6276 6379	7918 8021 8124 8227	9691 9794 9897 0000	1394 1497 1600 1703	3033 3136 3239 3342	4613 4716 4819 4922	6137 6240 6343 6446	7609 7712 7815 7918	9033 9136 9239 9342	0412 0515 0618 0721	1748 1851 1954 2057	3045 3148 3251 3354	4304 4407 4510 4613	5527 5630 5733 5836	6717 6820 6923 7026	7875 7978 8081 8184	9003 9106 9209 9312		A_2
10 20	20 40	40 80	80 160	10. 20. 40. 80.	10.5 21. 42. 84.	11. 22. 44. 88.	11.5 23. 46. 92.	12. 24. 48. 96.	12.5 25. 50. 100.	13. 26. 52. 104.	13.5 27. 54. 108.	14. 28. 56. 112.	14.5 29. 58. 116.	15. 30. 60. 120.	15.5 31. 62. 124.	16. 32. 64. 128.	16.5 33. 66. 132.	17. 34. 68. 136.	17.5 35. 70. 140.	18. 36. 72. 144.	18.5 37. 74. 148.	19. 38. 76. 152.	19.5 39. 78. 156.	1 0.5 2 1 3 2 4 4	B
0.025 0.050 0.075 0.100 0.125	0.05 0.10 0.15 0.20 0.25	0.1 0.2 0.3 0.4 0.5	0.2 0.4 0.6 0.8 1.0	0108 0217 0325 0432 0540	0103 0206 0309 0412 0514	0099 0197 0295 0393 0491	0094 0188 0282 0376 0470	0090 0181 0271 0360 0450	0087 0173 0260 0346 0432	0083 0167 0250 0333 0416	0080 0161 0241 0321 0400	0077 0155 0232 0309 0386	0075 0149 0224 0298 0373	0072 0145 0217 0289 0360	0070 0140 0210 0279 0349	0068 0136 0203 0271 0338	0066 0131 0197 0262 0328	0064 0128 0191 0255 0318	0062 0124 0186 0247 0309	0060 0120 0181 0241 0301	0059 0117 0176 0234 0292	0057 0114 0171 0228 0285	0056 0111 0167 0222 0278	0.95 0.90 0.85 0.80 0.75	C_1
0.150 0.175 0.200 0.225 0 250	0.30 0.35 0.40 0.45 0.50	0.6 0.7 0.8 0.9 1.0	1.2 1.4 1.6 1.8 2.0	0647 0753 0860 0966 1072	0616 0718 0819 0921 1022	0588 0685 0783 0879 0976	0563 0656 0749 0842 0934	0540 0629 0718 0807 0895	0518 0604 0689 0775 0860	0498 0581 0663 0745 0827	0480 0559 0639 0718 0797	0463 0540 0616 0692 0769	0447 0521 0595 0669 0742	0432 0504 0575 0647 0718	0418 0488 0557 0626 0695	0405 0472 0540 0606 0673	0393 0458 0523 0588 0653	0382 0445 0508 0571 0634	0371 0432 0494 0555 0616	0360 0420 0480 0540 0599	0351 0409 0467 0525 0583	0342 0398 0455 0511 0568	0333 0388 0443 0498 0553	0.70 0.65 0.60 0.55 0.50	C_2
0.275 0.300 0.325 0.350 0.375	0.55 0.60 0.65 0.70 0.75	1.1 1.2 1.3 1.4 1.5	2.2 2.4 2.6 2.8 3.0	1178 1284 1389 1494 1599	1123 1223 1324 1424 1524	1072 1169 1265 1360 1456	1026 1118 1210 1302 1394	0984 1072 1161 1249 1336	0945 1030 1115 1199 1284	0909 0991 1072 1154 1235	0876 0955 1033 1112 1190	0845 0921 0997 1072 1148	0816 0889 0963 1036 1109	0789 0860 0931 1002 1072	0764 0833 0901 0970 1038	0740 0807 0873 0940 1006	0718 0783 0847 0912 0976	0697 0760 0822 0885 0948	0677 0738 0799 0860 0921	0658 0718 0777 0836 0895	0641 0699 0756 0814 0872	0624 0680 0737 0793 0849	0608 0663 0718 0773 0827	0.45 0.40 0.35 0.30 0.25	C_3
0.400 0.425 0.450 0.475 0.500	0.80 0.85 0.90 0.95 1.00	1.6 1.7 1.8 1.9 2.0	3.2 3.4 3.6 3.8 4.0	1703 1808 1912 2015 2119	1624 1723 1822 1922 2020	1551 1646 1741 1836 1931	1485 1576 1667 1758 1848	1424 1512 1599 1686 1773	1368 1452 1536 1620 1703	1316 1397 1478 1559 1639	1268 1346 1424 1502 1579	1223 1299 1374 1449 1524	1182 1255 1327 1400 1472	1143 1213 1284 1354 1424	1107 1175 1243 1311 1379	1072 1139 1205 1271 1336	1040 1104 1169 1233 1296	1010 1072 1135 1197 1259	0981 1042 1103 1163 1223	0955 1013 1072 1131 1190	0929 0986 1044 1101 1158	0905 0961 1017 1072 1128	0882 0936 0991 1045 1100	0.20 0.15 0.10 0.05 0.00	C_4
.0025 .0050 .0075	.005 .010 .015	.01 .02 .03	.02 .04 .06	11 22 33	10 21 31	10 20 30	09 19 28	09 18 27	09 17 26	08 17 25	08 16 24	08 16 23	07 15 22	07 14 22	07 14 21	07 14 20	07 13 20	06 13 19	06 12 19	06 12 18	06 12 18	06 11 17	06 11 17	05 11 16	D_1
.0100 .0125 .0150	.020 .025 .030	.04 .05 .06	.08 .10 .12	43 54 65	41 52 62	39 49 59	38 47 57	36 45 54	35 43 52	33 42 50	32 40 48	31 39 47	30 37 45	29 36 43	28 35 42	27 34 41	26 33 39	26 32 38	25 31 37	24 30 36	23 29 35	23 29 34	22 28 33	22 27 33	D_2
.0175 .0200 .0225	.035 .040 .045	.07 .08 .09	.14 .16 .18	76 87 98	72 83 93	69 79 89	66 75 85	63 72 81	61 69 78	58 67 75	56 64 72	54 62 70	52 60 67	51 58 65	49 56 63	47 54 61	46 53 59	45 51 57	43 50 56	42 48 54	41 47 53	40 46 51	39 45 50	38 43 49	D_3

Типографія Имп. Ак. Наукъ. (В. О., 9 л., № 12).

Обложка
ищется

Обложка
пщется