Обложка
ищется

Обложка
ищется

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 116.

X Сем. 25 Марта 1891 г. № 8.

ВЗАИМНЫЯ ТОЧКИ ТРЕУГОЛЬНИКА.

(Отвѣтъ на тему, предложенную въ „Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат.“ № 52, стр. 86*).

Взаимныя точки треугольника, по замѣчанію проф. Ермакова, представляютъ большой интересъ, какъ фокусы коническихъ сѣченій, вписанныхъ въ треугольникъ. Не касаясь пока кривыхъ, выходящихъ до сихъ поръ изъ области элементарной геометріи, мы разсмотримъ здѣсь замѣчательныя свойства этихъ точекъ, указанныя авторомъ темы; при этомъ позволимъ себѣ отступить отъ плана изложенія, намѣченнаго уважаемымъ профессоромъ, въ видахъ достиженія наибольшей (по нашему мнѣнію) простоты въ доказательствахъ.

---

1. Опредѣленіе взаимныхъ точекъ треугольника можетъ быть основано на слѣдующей теоремѣ, почти не требующей доказательства.

Теорема I. *Если изъ какой нибудь точки F, находящейся въ плоскости треугольника ABC, опустить перпендикуляры на его стороны и чрезъ основанія ихъ A', B', C' провести окружность, которая пересѣчетъ стороны треугольника еще въ точкахъ A'', B'', C'', то перпендикуляры, возставленные въ этихъ точкахъ къ сторонамъ треугольника ABC, пересѣкутся въ одной точкѣ* (фиг. 33, 34 и 35).

Предположимъ, что обзначенія сдѣланы такъ, что каждая пара точекъ: A' и A'', B' и B'', C' и C'' находится на одной сторонѣ треугольника ABC. Если перпендикуляры въ точкахъ A'' и B'' пересѣкаются въ точкѣ F', то средина прямой FF' есть центръ O окружности, проходящей черезъ точки A', B', C', A'', B'', C'', потому что центръ этой окружности долженъ находиться въ точкѣ пересѣченія перпендикуляровъ къ хордамъ $A'A''$ и $B'B''$ въ ихъ срединахъ; перпендикуляры-же эти проходятъ черезъ средину прямой FF'. Точно также, если бы перпендикуляры въ B'' и C'' пересѣкались въ нѣкоторой другой точкѣ F'', то средина прямой FF'' была бы другимъ центромъ той-же окружности, что невозможно; слѣдовательно, перпендикуляръ въ C'' проходитъ черезъ точку F', что и выражено теоремой I.

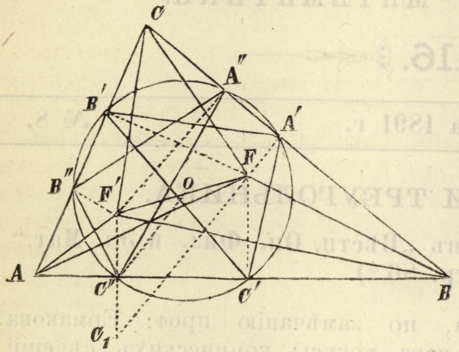
2. Изъ доказаннаго слѣдуетъ, что по данной точкѣ F' точка F находится совершенно такъ-же, какъ найдена точка F' по данной точкѣ F;

---

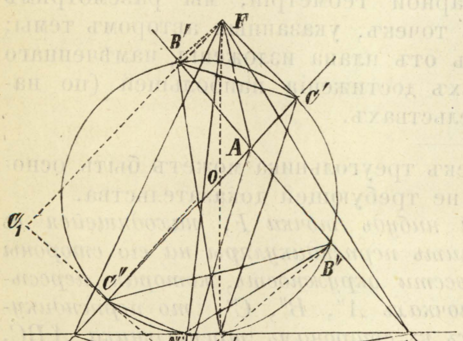
*) Отвѣтъ *А. П. Грузинцева* на ту-же тему былъ помѣщенъ въ №№ 85 и 86 „Вѣстника“ (см. VIII сем. стр. 2 и 29).

вслѣдствіе этого обѣ эти точки должны имѣть общія ствойства по отношенію къ треугольнику ABC, что и служитъ основаніемъ тому, что *точки F и F' названы взаимными точками треугольника ABC.*

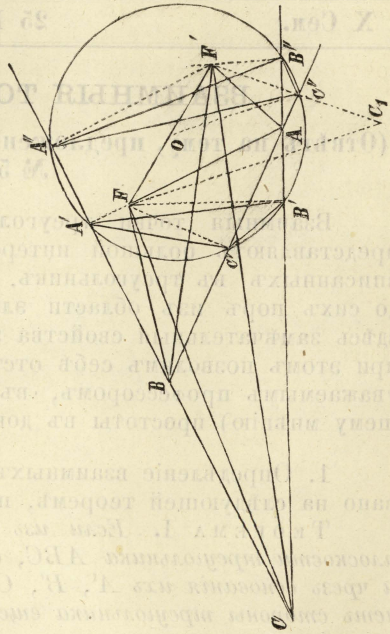
Фиг. 33.



Фиг. 34.



Фиг. 35.



Въ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ условимся называть: треугольникъ ABC—*основнымъ треугольникомъ*; треугольники A'B'C', A''B''C''—*взаимными треугольниками*; стороны ихъ, заключенныя въ одномъ углѣ основного треугольника,—*соотвѣтственными вершинѣ* этого угла и *сходственными* относительно другъ-друга; окружность, описанную около взаимныхъ треугольниковъ,—*окружностью взаимности*, и центръ ея—*центромъ взаимности.*

3. Изъ теоремы I, опредѣляющей взаимныя точки, слѣдуетъ, что *если одна изъ взаимныхъ точекъ совпадаетъ съ центромъ окружности, внутри или внѣвписанной въ основной треугольникъ, то и другая совпадаетъ съ этимъ центромъ*; ибо въ этомъ случаѣ точки A' и A'', B' и B'', C' и C'' попарно сливаются въ одну.

Доказательство той-же теоремы обнаруживаетъ, *что взаимныя точки симметричны относительно центра взаимности.*

4. Обратимся къ разсмотрѣнію положенія взаимныхъ точекъ относительно основного треугольника. При разсужденіяхъ по этому вопросу мы будемъ опираться па слѣдующій принципъ:

Діаметръ, пересѣкающій хорду, пересѣкается перпендикулярами, возставленными въ концахъ ея, внѣ круга, и обратно, *если перпендикуляры, возставленные въ концахъ хорды, пересѣкають діаметръ внѣ круга, то діаметръ пересѣкаетъ хорду.*

5. Теорема II. *Прямая, соединяющая взаимныя точки треугольника, либо пересѣкаетъ всѣ три стороны этого треугольника, либо не пересѣкаетъ ни одной изъ нихъ.*

Предположимъ, что прямая FF′ пересѣкаетъ сторону BC основного треугольника, на которой лежитъ хорда A′A″; изъ опредѣленія точекъ F и F′ слѣдуетъ, что прямая FF′ можетъ пересѣчь сторону BC только между точками A′ и A″, такъ что, въ нашемъ предположеніи, діаметръ окружности взаимности, на которомъ лежатъ точки F н F′ пересѣкаетъ хорду A′A″, а потому, на основаніи нашего принципа (4), точки F и F′ лежатъ внѣ окружности взаимности. Изъ того-же принципа легко вывести, что если прямая FF′ не пересѣкаетъ напр. сторону AB, то точки F и F′ находятся внутри окружности взаимности. Такимъ образомъ, предположеніе, что прямая FF′ пересѣкаетъ одну сторону треугольника ABC и не пересѣкаетъ другой, приводитъ къ противорѣчивымъ заключеніямъ и, слѣдовательно, невозможно, что и обнаруживаетъ справедливость теоремы.

6. Изъ этой теоремы слѣдуетъ, что *если одна изъ взаимныхъ точекъ лежитъ внутри основного треугольника, то и другая лежитъ внутри его и наоборотъ;* ибо въ противномъ случаѣ прямая ихъ соединяющая, пересѣкала бы одну, либо двѣ изъ сторонъ основного треугольника (фиг. 33).

7. Теорема III. *Взаимныя точки треугольника не могутъ лежать обѣ въ одномъ вертикальномъ углѣ его* (фиг. 34).

Возьмемъ точку F въ вертикальномъ углу A основного треугольника. Построивъ точки A′, B′, C′, легко видѣть, что четыреугольники FB′A′C и FB′AC′ могутъ быть вписанными, а потому

$$\angle FA'B' = \angle FCB' \quad \text{и} \quad \angle FAB' = \angle FC'B'.$$

Но гдѣ-бы точка F ни была взята въ вертикальномъ углѣ A, уголъ FAB′ всегда внѣшій для треугольника FAC, а потому $\angle FAB' > \angle FCA$ т. е. $> \angle FCB'$, а вслѣдствіе предыдущихъ равенствъ и $\angle FC'B' > \angle FA'B'$; отсюда слѣдуетъ, что окружность взаимности (описанная около треугольника A′B′C′) пересѣчетъ прямую FA′ между точками F и A, т. е. точка F, а, слѣдовательно, и F′, какъ взаимныя ей (3) должны быть внѣ окружности взаимности; отсюда на основаніи принятаго принципа (4) и предыдущей теоремы (II) легко видѣть, что въ нашемъ случаѣ прямая FF′ пересѣкаетъ всѣ три стороны основного треугольника, а потому точка F′ не можетъ находиться въ одномъ углѣ съ F, что и слѣдовало доказать.

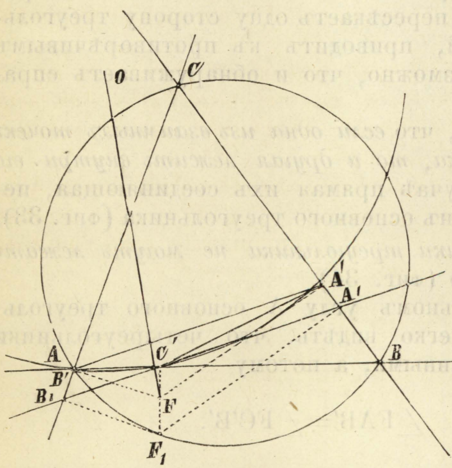
На основаніи послѣднихъ двухъ теоремъ (II и III) заключаемъ, что *если одна изъ взаимныхъ точекъ лежитъ внѣ основного треугольника въ вертикальномъ углѣ его, то другая находится во внутреннемъ углѣ* *треугольника, вертикальномъ съ первымъ, также внѣ треугольника*; ибо въ противномъ случаѣ является противорѣчіе одной изъ послѣднихъ теоремъ.

9. Теорема IV. *Если одна изъ взаимныхъ точекъ находится на окружности, описанной около основного треугольника, то другая безконечно удалена.*

Дѣйствительно, если точка F взята на окружности, описанной около треугольника ABC, то, по извѣстной теоремѣ, основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ этой точки на стороны треугольника, лежатъ на одной прямой—прямой Симпсона; слѣдовательно, въ этомъ случаѣ какъ треугольникъ A′B′C′, такъ и описанная около него окружность взаимностн, обращаются въ прямую, а потому центръ этой окружности безконечно удаленъ; вслѣдствіе-же симметричности (3) точекъ F и F′ относительно этого центра и точка F′ должна быть безконечно удалена.

10. Положимъ, что точка F задана внѣ треугольника ABC, но внутри описаннаго около него круга (фиг. 36). Опустивъ изъ точки F перпендикуляры на стороны основного треугольника и продоливъ перпендикуляръ FC′ до пересѣченія съ описанной окружностью въ точкѣ F_1, построимъ для этой точки прямую Симпсона $A_1C'B_1$. Легко видѣть, что точки A′ и B′ должны находиться ближе къ вершинѣ C, чѣмъ точки A_1 и B_1; слѣдовательно, уголъ A′C′B′ обращенъ отверзтіемъ къ вершинѣ C, а потому центръ O окружности взаимности, какъ описанной около треугольника A′C′B′ долженъ находитсья по ту-же сторону относительно прямой AB, какъ и вершина C; но въ такомъ случаѣ прямая FO, а слѣдовательно и прямая FF′ пересѣкала-бы сторону AB; отсюда, на основаніи теоремы II, заключаемъ, что точка F′ должна находиться въ углѣ вертикальномъ углу C, въ которомъ взята точка F.

Фиг 36.



Если-бы точка F была задана внѣ описаннаго круга, то также легко убѣдились-бы, что точка F′ должна находиться въ одномъ углѣ съ F. Итакъ, *если одна изъ взаимныхъ точекъ дается внѣ основного треугольника, то другая находится также внѣ этого треугольнака, либо въ одномъ углѣ съ первой, либо въ углѣ вертикальномъ, смотря потому, дана-ли первая точка внѣ круга, описаннаго около основного треугольника, или внутри его.*

11. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что взаимныя точки могутъ имѣть только три существенно различныхъ расположенія относительно основного треугольника; всѣ эти три возможныхъ случая изображены на фи-

гурахъ (33, 34, 35). Слѣдующія разсужденія, какъ замѣтитъ читатель, будутъ одновременно примѣнимы ко всѣмъ этимъ фигурамъ, а потому свойства взаимныхъ точекъ, которыя обнаружатся, должно считать общими, не зависящими отъ расположенія точекъ относительно основного треугольника.

12. Теорема V. *Сходственныя стороны взаимныхъ треугольниковъ равнонаклонны къ сторонамъ соотвѣтственнаго имъ угла основного треугольника.*

Докажемъ это, напр., относительно угла C. По теоремѣ углы $CA'B'$ и $CB''A''$ должны быть равны. Дѣйствительно, по свойству сѣкущихъ, имѣемъ

$$CA'.CA''=CB'.CB''$$

или

$$\frac{CA'}{CB''}=\frac{CB'}{CA''}.$$

слѣдовательно, треугольники $A'CB'$ и $B''CA''$ подобны, а потому углы ихъ $CA'B'$ и $CB''A''$, какъ противолежащіе пропорціональнымъ сторонамъ CB' и CA'' равны.

13. Теорема VI. *Прямыя, соединяющія взаимныя точки съ вершиной основного треугольника, равнонаклонны къ сторонамъ угла при этой вершинѣ и перпендикулярны къ сторонамъ взаимныхъ треугольниковъ, соотвѣтственнымъ той-же вершинѣ.*

Соединимъ точки F и F' напр. съ вершиной C. Такъ какъ углы $CA'F$ и $CB'F$ прямые, то около четыреугольника $CA'FB'$ можно описать окружность и углы FCA' и $FB'A'$ можно разсматривать какъ вписанные, опирающіеся на общую дугу; поэтому

$$\angle FCA'=\angle FB'A';$$

точно также изъ четыреугольника $CA''F'B''$ найдемъ, что

$$\angle F'CB''=\angle F'A''B'';$$

но, основываясь на теоремѣ V, легко видѣть, что

$$\angle FB'A'=\angle F'A''B'';$$

слѣдовательно

$$\angle FCA'=\angle F'CB'',$$

т. е. прямыя FC и $F'C$ равнонаклонны къ сторонамъ угла C.

Изъ равенствъ

$$\angle FB'A'=\angle F'A''B'' \quad \text{и} \quad \angle FB'A'=\angle FCA'$$

слѣдуетъ, что

$$\angle F'A''B''=\angle FCA';$$

но $F'A'' \perp CA'$, слѣдовательно, $A''B'' \perp CF$; что доказываетъ вторую часть теоремы.

14. Теорема VII. *Произведеніе перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ взаимныхъ точекъ на каждую сторону основного треугольника, сохраняетъ постоянную величину;* т. е.

$$FA'.F'A''=FB'.F'B''=FC'.F'C''.$$

Въ самомъ дѣлѣ, изъ теоремы V, слѣдуетъ, что

$$\angle FA'B'=\angle F'B''A'' \quad \text{и} \quad \angle FB'A'=\angle F'A''B'';$$

поэтому треугольники $FA'B'$ и $F'A''B''$ подобны, а потому

$$\frac{FA'}{F'B''}=\frac{FB'}{F'A''}$$

т. е.

$$FA'.F'A''=FB'.F'B''.$$

что и слѣдовало доказать.

15. Слѣдуетъ замѣтить, что теоремы, обратныя доказаннымъ (V, VI, VII), справедливы, т. е. что точки (F, F'), удовлетворяющія своими свойствами одной изъ этихъ теоремъ, удовлетворяютъ теоремѣ I, а потому суть взаимныя. Въ этомъ легко убѣдиться путемъ доказательства отъ противнаго. Такимъ образомъ, доказанныя свойства взаимныхъ точекъ суть характеристическія и каждымъ изъ нихъ можно пользоваться для опредѣленія этихъ точекъ. Этимъ замѣчаніемъ намъ придется воспользоваться.

16. Пусть точка F взята на сторонѣ BC; тогда $FA'=0$ и равенства

$$FA'.F'A''=FB'.F'B''=FC'.F'C''$$

возможны только въ слѣдующихъ четырехъ случаяхъ:

1) когда $FB'=0$. $FC'=0$,

2) „ $F'B''=0$, $F'C''=0$,

3) „ $FB'=0$, $F'C''=0$,

4) „ $F'B''=0$, $F'C'=0$.

Первый случай невозможенъ, такъ какъ условія

$$FA'=0, \quad FB'=0, \quad FC'=0$$

требуютъ, чтобы точка F одновременно находилась на трехъ сторонахъ треугольника ABC.

Во второмъ случаѣ условія $F'B''=0$ и $F'C''=0$ показываютъ, что точка F' находится въ вершинѣ A треугольника ABC. Такимъ образомъ, *если одна изъ взаимныхъ точекъ (F) взята на сторонѣ (BC) основного* *треугольника, то другая* (F') *находится въ противоположной вершинѣ* (A) *этого треугольника.*

Въ третьемъ случаѣ, условія

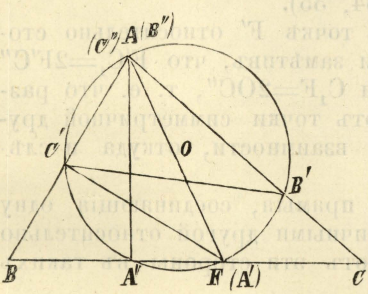
$$FA'=0, \quad FB'=0, \quad F'C''=0$$

выражаютъ, что точка F взята въ вершинѣ C, а точка F′ находится на сторонѣ AB т. е. *если одна изъ взаимныхъ точекъ находится въ вершинѣ основного треугольника, то другая лежитъ на противоположной сторонѣ этого треугольника.* Къ тому-же заключенію приводитъ и 4-й случай.

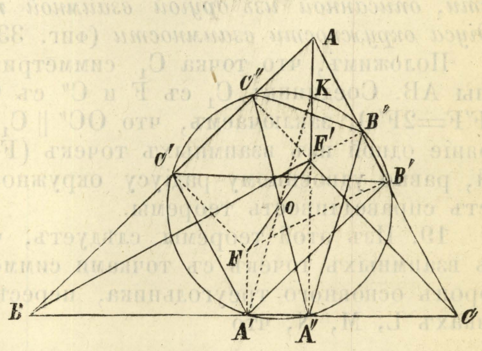
Сдѣланные выводы могутъ быть доказаны и независимо отъ теоремы VII (фиг. 37).

17. Возьмемъ точку F въ центрѣ окружности, описанной около треугольника ABC (фиг. 38). На основаніи теоремы VI и сдѣланнаго

Фиг. 37.



Фиг. 38.



замѣчанія (15) точка F' должна быть въ пересѣченіи перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ вершинъ треугольника ABC на стороны треугольника A′B′C′; но A′, B′, C′ суть средины сторонъ треугольника ABC, а потому стороны треугольника A′B′C′ параллельны сторонамъ треугольника ABC; слѣдовательно точка F′ находится въ пересѣченіи высотъ треугольника ABC.

Такъ какъ отношеніе подобія треугольниковъ ABC и A′B′C′ равно 2, то радіусъ окружности, описанной около перваго треугольника, вдвое болѣе радіуса окружности, описанной около второго, т. е.

$$FA=2OA'.$$

Проведя чрезъ A′ діаметръ окружности взаимности, обозначимъ чрезъ K точку пересѣченія его съ прямой AF′. Такъ какъ OF=OF′ и AF′ ∥ FA′, то треугольники OFA′ и OF′K равны, а потому

$$OK=OA',$$

т. е. точка K лежитъ на окружности, описанной около треугольника A′B′C′. Изъ равенствъ

$$OF'=\tfrac{1}{2}FF' \quad \text{и} \quad OK=OA'=\tfrac{1}{2}AF$$

слѣдуетъ, что $F'K = \frac{1}{2} F'A$, т. е. что прямыя $F'A$ въ точкѣ K дѣлится пополамъ.

Итакъ, *если одна изъ взаимныхъ точекъ находится въ центрѣ окружности, описанной около основного треугольника, то другая совпадаетъ съ точкой пересѣченія высотъ этого треугольника.* Окружность взаимности, въ этомъ случаѣ, проходя чрезъ основанія высотъ основного треугольника и чрезъ средины его сторонъ, проходитъ еще чрезъ средины прямыхъ, соединяющихъ пересѣченіе высотъ съ вершинами треугольника; такая окружность носитъ названіе *окружности девяти точекъ; радіусъ ея,* какъ мы видѣли, *равенъ половинѣ радіуса круга описаннаго около треугольника, а центръ находится въ срединѣ прямой, соединяющей центръ этого круга съ пересѣченіемъ высотъ треугольника* *). Эти свойства окружности девяти точекъ составляютъ содержаніе извѣстной теоремы Эйлера.

18. Теорема VIII. *Три точки, симметричныя одной изъ взаимныхъ точекъ относительно сторонъ основного треугольника, лежатъ на окружности, описанной изъ другой взаимной точки радіусомъ вдвое большимъ радіуса окружности взаимности* (фиг. 33, 34, 35).

Положимъ, что точка C_1 симметрична точкѣ F' относительно стороны AB. Соединивъ C_1 съ F и C'' съ O и замѣтивъ, что $F'C_1 = 2F'C''$ и $F'F = 2F'O$, заключаемъ, что $OC'' \parallel C_1F$ и $C_1F = 2OC''$, т. е. что разстояніе одной изъ взаимныхъ точекъ (F) отъ точки симметричной другой, равно удвоенному радіусу окружности взаимности, откуда и слѣдуетъ справедливость теоремы.

19. Изъ этой теоремы слѣдуетъ, что прямыя, соединяющія одну изъ взаимныхъ точекъ съ точками симметричными другой относительно сторонъ основного треугольника, пересѣкаютъ эти стороны въ такихъ точкахъ L, M, N, что

$$FL \pm F'L = FM \pm F'M = FN \pm F'N,$$

гдѣ знакъ $+$ имѣетъ мѣсто, когда взаимныя точки находятся въ одномъ углѣ (фиг. 33 и 35), а знакъ $-$ когда онѣ находятся въ углахъ вертикальныхъ (фиг. 34). *Дм. Ефремовъ* (Иваново-Вознесенскъ).

НОВЫЙ СПОСОБЪ ИЗВЛЕЧЕНІЯ КОРНЕЙ

какой угодно степени.

(*Окончаніе*) **.

9. Мы только что указывали на то, что выгодно брать за исходныя значенія трехъ множителей даннаго числа по возможности близкія между собою числа. Иллюстрируемъ на примѣрѣ это замѣчаніе. Пусть требуется найти $\sqrt[3]{60}$. Мы можемъ разложить 60 на три множителя без-

*) Точку пересѣченія высотъ треугольника часто называютъ *ортоцентромъ*, а треугольникъ, образованный соединеніемъ ихъ основаній,—*ортоцентрическимъ*.

**) См. „Вѣстникъ“ № 114, стр. 112.

конечно различными способами. Ограничиваясь разложеніями на цѣлыя числа мы можемъ выбрать одно изъ слѣдующихъ 11

1.1.60, 1.2.30, 1.3.20, 1.4.15, 1.5.12, 1.6.10, 2.2.15, 2.3.10, 2.5.6, 3.4.5.

И кромѣ того мы можемъ взять какое угодно разложеніе и на не цѣлые множители, напр. $60=4.4.{}^{15}/_4$ и т. п., хотя, если мы хотимъ вычислять малое число приближеній часто можетъ оказаться выгоднымъ, для сокращенія ариѳметическихъ дѣйствій, исходить изъ цѣлыхъ чиселъ. Возьмемъ изъ разложеній числа 60 на цѣлые множители то, въ которомъ множители наименѣе отличаются одинъ отъ другого, а именно $60=3.4.5$, и для сравненія съ результатами вычисленія при такомъ разложеніи, возьмемъ ближайшую къ этой комбинацію $60=2.5.6$, Итакъ положимъ во первыхъ

$$a=5,\quad b=4,\quad c=3;$$

и во вторыхъ

$$a=6,\quad b=5,\quad c=2$$

и будемъ искать въ обоихъ случаяхъ геометрическую среднюю изъ чиселъ a, b, c, по способу, который мы только что описали. Мы должны получить въ предѣлѣ

$$\sqrt[3]{60}=3{,}9148676.$$

Имѣемъ послѣдовательно, въ первомъ случаѣ

$$a_1=4,\quad b_1={}^{47}/_{12},\quad c_1={}^{180}/_{47};\quad b_2={}^{25936}/_{6625}=3{,}9148679,$$

а во второмъ

$$a_1={}^{13}/_3,\quad b_1=4,\quad c_1={}^{45}/_{13};\quad b_2={}^{1801}/_{460}=3{,}9152$$

итакъ напр. b_2 отличается въ первомъ случаѣ отъ истиннаго значенія $\sqrt[3]{60}$ всего только на 0,0000003, между тѣмъ какъ во второмъ случаѣ оно разнится отъ этого значенія еще на 0,0004. Еще большая разность получилась бы, если бы мы взяли какую нибудь другую изъ комбинацій цѣлыхъ множителей, на которые разлагается число 60, такъ какъ во всѣхъ остальныхъ комбинаціяхъ различіе между множителями еще больше. Напротивъ мы бы еще ближе подошли къ искомому корню, если бы исходили отъ комбинаціи $60=4.4.{}^{15}/_4$.

10. *Примѣчаніе.* Величины a_i, b_i, c_i, можно вычислять нѣсколько иначе, чѣмъ указано выше, вводя вмѣсто произведеній чиселъ a, b, c, попарно, квадраты ихъ. Въ самомъ дѣлѣ, если обозначить

$$a+b+c=s'$$

$$a^2+b^2+c^2=s''$$

тогда будетъ

$$a_1 = {}^1/_3 s'$$

$$b_1 = \frac{3s'^2 - s''}{2s'}$$

$$c_1 = \frac{6N}{3s'_1{}^2 - s_1''} = \frac{3N}{b_1 s'}$$

и точно также, если ввести обозначенiе

$$a_1 + b_1 + c_1 = s_1'$$

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = s_1''$$

то будетъ

$$a_2 = {}^1/_3 s_1'$$

$$b_2 = \frac{3s_1'^2 - s_1''}{2s_1'}$$

$$c_2 = \frac{6N}{3s_1'^2 - s_1''} = \frac{3N}{b_1 s_1'}$$

и т. д.

Примѣчанiе 2. Если первоначальные множители взяты достаточно близко, то уже первое приближенiе даетъ прекрасное значенiе кубическаго корня. Поэтому можно считать въ этомъ случаѣ парную среднюю приблизительнымъ выраженiемъ кубическаго корня изъ какого угодно числа, и мы можемъ написать приблизительно

$$\sqrt[3]{N} = \frac{bc + ca + ab}{a + b + c}.$$

Напр. Пусть требуется найти $\sqrt[3]{15}$. Онъ больше 2 и меньше 3. Возьмемъ напр. $a = {}^5/_2$, $b = {}^5/_2$ $(2^1/_2)$ тогда будетъ $c = {}^{12}/_5$ и формула парной средней даетъ

$$\sqrt[3]{15} = 2{,}466216, \text{ приблизительно,}$$

а должно быть

$$2{,}466212.$$

такъ что ошибка парной средней составляетъ всего 0,000004.

11. Принципъ, лежащiй въ основѣ предлагаемаго нами способа нахожденiя корней, можно изложить въ нѣсколько болѣе общей формѣ, не измѣняя его по существу. А именно, вмѣсто того, чтобы брать среднiя величины, ариѳметическую, гармоническую и иныя промежуточныя между этими, изъ множителей заданнаго числа, можно составлять

и иныя выраженія, зависящія отъ этихъ множителей, подчиняя ихъ только нѣкоторымъ условіямъ.

Пусть дано нѣкоторое число N, изъ котораго требуется извлечь кубическій корень. (Для опредѣленности рѣчи мы разсматриваемъ корень кубическій, хотя все, что будетъ сказано относительно этого случая, легко распространить на случай какого угодно корня, квадратнаго, четвертой степени и т. п.). Найдемъ три какія нибудь числа a, b, c, подчиненныя только тому условію, чтобы произведеніе ихъ было равно данному числу N. Напр., какъ уже было указано выше, возьмемъ два числа совершенно произвольно, а третье опредѣлимъ, какъ частное отъ дѣленія заданнаго числа на произведеніе взятыхъ двухъ произвольныхъ чиселъ.

12. Итакъ пусть

$$abc = N.$$

Имѣя эти три числа, составимъ изъ нихъ какимъ нибудь образомъ три новыя числа a_1, b_1, c_1, подчиняя ихъ тому условію, чтобы произведеніе новыхъ чиселъ было опять равно данному числу, и кромѣ того, чтобы было

$$a_1 > b_1 > c_1 \qquad a > a_1 \qquad c < c_1.$$

Изъ этихъ чиселъ, такимъ же точно образомъ, или по иному закону, удовлетворяющему однако тѣмъ-же условіямъ, составимъ новыя три числа a_2, b_2, c_2. Поступая такимъ-же образомъ далѣе, мы будемъ постепенно приближаться къ кубическому корню изъ N. Числа a_i, будутъ представлять убывающій рядъ, числа c_i—рядъ возрастающій, и если законъ составленія послѣдовательныхъ группъ чиселъ подобранъ такъ, что разность $a_i - c_i$, постоянно убывая, стремится къ 0, а не къ какому либо иному числу, то, продолжая рядъ нашихъ дѣйствій достаточное число разъ, мы можемъ получить сколько угодно близкое значеніе искомаго корня. Въ предѣлѣ будетъ

$$a_\infty = b_\infty = c_\infty = l = \sqrt[3]{N}.$$

Конечно ариѳметическая и гармоническая средняя, а въ особенности первая, по свему удобству, не оставляютъ желать ничего лучшаго въ практическомъ отношеніи, и, такъ какъ онѣ удовлетворяютъ перечисленнымъ выше условіямъ, то и нѣтъ основанія отказываться отъ ихъ приложенія въ пользу какой нибудь иной функціи. Разъ-же эти двѣ среднія выбраны, то при отысканіи кубическаго корня выборъ третьей функціи уже не произволенъ, а вполнѣ опредѣляется выборомъ первыхъ двухъ. Но когда мы переходимъ къ корнямъ высшихъ порядковъ, гдѣ кромѣ двухъ крайнихъ двухъ среднихъ имѣется болѣе одной промежуточной, мы можемъ выбирать одну или большее число промежуточныхъ функцій по произволу.

13. Такъ напр. легко изъ предыдущаго вывести слѣдующее правило для извлеченія корней пятой степени.

Возьмемъ пять какихъ нибудь чиселъ a, b, c, d, e, такихъ, чтобы было

$$N = abcde.$$

(Практически слѣдуетъ стараться, чтобы взятыя числа были какъ можно болѣе близки къ равенству).

Затѣмъ составимъ выраженія:

$$a_1 = {}^1/_5(a+b+c+d+e)$$

$$b_1 = \frac{ab+bc+cd+de+ea}{a+b+c+d+e}$$

$$c_1 = \frac{abc+bcd+cde+dea+eab}{ab+bc+cd+de+ea}$$

$$d_1 = \frac{abcd+bcde+cdea+deab+eabc}{abc+bcd+cde+dea+eab}$$

$$e_1 = \frac{5abcde}{abcd+bcde+cdea+deab+eabc}.$$

Можно убѣдиться, что эти пять выраженій удовлетворяютъ всѣмъ перечисленнымъ выше условіямъ, т. е.

$$a_1b_1c_1d_1e_1 = abcde = N$$

$$a_1 > a \qquad\qquad e_1 > e$$

$$a_1 - e_1 < a - e$$

и притомъ разность $a_i - e_i$, если составлять дальнѣйшія выраженія подобнаго-же рода, стремится къ нулю. Составляя изъ найденныхъ пяти чиселъ a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, новыя пять чиселъ a_2, b_2, c_2, d_2, e_2, по такимъ-же формуламъ, и продолжая такой-же рядъ дѣйствій надъ всякою группою изъ пяти чиселъ, послѣдовательно получающихся изъ предыдущихъ, мы получимъ пять рядовъ чиселъ

$$a,\ a_1,\ a_2, \ldots\ldots b,\ b_1,\ b_2, \ldots\ldots c,\ c_1,\ c_2, \ldots\ldots d,\ d_1,\ d_2, \ldots\ldots e,\ e_1,\ e_2, \ldots\ldots$$

которыя всѣ стремятся къ корню пятой степени изъ даннаго числа.

14. Но вмѣсто написанныхъ выраженій для a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, мы бы могли выбрать иныя. Оставляя безъ измѣненія крайніе члены ряда a_1, e_1, т. е. ариѳметическую и гармоническую среднюю изъ пяти множителей заданнаго числа, мы можемъ взять напр. слѣдующую совокупность чпселъ для составленія послѣдовательныхъ приближеній.

$$a_1 = {}^1/_5(a+b+c+d+e).$$

$$b_1 = \frac{ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de}{2(a+b+c+d+e)}$$

$$c_1 = \frac{abc+abd+abe+acd+ace+ade+bcd+bce+bde+cde}{ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de}$$

$$d_1 = \frac{2(abcd+bcde+cdea+deab+eabc)}{abc+abd+abe+acd+ace+ade+bcd+bce+bde+cde}$$

$$e_1 = \frac{5abcde}{abcd+bcde+cdea+deab+eabc}.$$

Продолжая и здѣсь составлять послѣдовательно изъ всякой группы пяти полученныхъ чиселъ новыя пять чиселъ по тѣмъ-же формуламъ, будемъ стремиться къ предѣлу, равному корню пятой степени изъ заданнаго числа.

Мы могли бы также пользоваться попеременно, въ какомъ угодно порядкѣ, то одною, то другою группою изъ приведенныхъ только что формулъ, и все таки стремились бы къ тому-же предѣлу. Наконецъ мы могли бы получать каждую слѣдующую группу чиселъ по иной совокупности формулъ—и, если только всѣ эти формулы удовлетворяютъ указаннымъ выше условіямъ, мы бы опять таки въ предѣлѣ должны были получить искомый корень.

Наконецъ мы можемъ выбирать всѣ числа одной группы, кромѣ крайнихъ и одного промежуточнаго, совершенно произвольно въ промежуткѣ между крайними. Въ самомъ дѣлѣ условія, которыя мы перечислили, относятся только къ крайнимъ числамъ, а отъ остальныхъ требуется только, чтобы произведеніе всѣхъ чиселъ было равно заданному числу. Поэтому мы можемъ вычислять корень какой угодно n-ой степени изъ заданнаго чисиа N по слѣдующему правилу.

15. *Возьмемъ n чиселъ a, b, c,......h такихъ, чтобы было $N=abcd....h$. Составимъ ариѳметическую среднюю a_1 изъ этихъ чиселъ, и гармоническую среднюю h_1 изъ нихъ-же. Затѣмъ возьмемъ еще $n-3$ какихъ угодно чиселъ въ промежуткѣ между a_1 и h_1. Наконецъ найдемъ еще частное отъ дѣленія даннаго числа на произведеніе всѣхъ взятыхъ чиселъ. Такимъ образомъ мы получимъ n новыхъ чиселъ a_1, b_1, c_1,.....h_1. Поступая съ нимы такъ-же точно какъ съ начальными, и продолжая тѣ-же дѣйствія послѣдовательно достаточно большое число разъ, мы получимъ съ какой угодно степенью точности искомый коронь n-ой степени изъ даннаго числа. Всѣ числа a_i, b_i, c_i,....k_i будутъ стремиться къ предѣлу равному этому корню.*

16. Въ томъ случаѣ, когда требуется вычислить квадратный корень, мы имѣемъ только двѣ среднія—ариѳметическую и гармоническую, и намъ не нужно никакихъ промежуточныхъ чиселъ. При вычисленіи кубическаго корня, кромѣ крайнихъ двухъ чиселъ, мы имѣемъ еще одно промежуточное. Оно вполнѣ опредѣляется изъ первыхъ двухъ, условіемъ $N=a_ib_ic_i$. Только начиная отъ корня четвертой степени мы можемъ выбирать по произволу одно промежуточное число, въ корнѣ пятой степени мы уже можемъ взять по произволу два промежуточныхъ числа и т. д.

17. *Примѣръ.* Вичислимъ напр. по указанному способу $\sqrt[5]{2}$. За исходныя пять чиселъ возьмемъ 2, 1, 1, 1, 1. Тогда будетъ

$$a_1 = {}^1/_5(2+1+1+1+1) = {}^6/_5$$

$$e_1 = \frac{5.2}{2.1.1.1+1.1.1.1+1.1.1.2+1.1.2.1+1.2.1.1} = {}^{10}/_9$$

или, приводя къ одному знаменателю,

$$a_1 = {}^{54}/_{45} \qquad e_1 = {}^{50}/_{45}$$

Теперь мы должны выбрать по произвозу два числа въ промежуткѣ между этими крайними числами. Возьмемъ хотя бы

$$b_1 = c_1 = {}^{52}/_{45}$$

Изъ нихъ находимъ

$$d_1 = 2 : \frac{54.50.52^2}{45^3} = {}^{6075}/_{5408}.$$

Вычисляя ариѳметическую и гармоническую среднюю изъ этихъ пяти чиселъ a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, получимъ

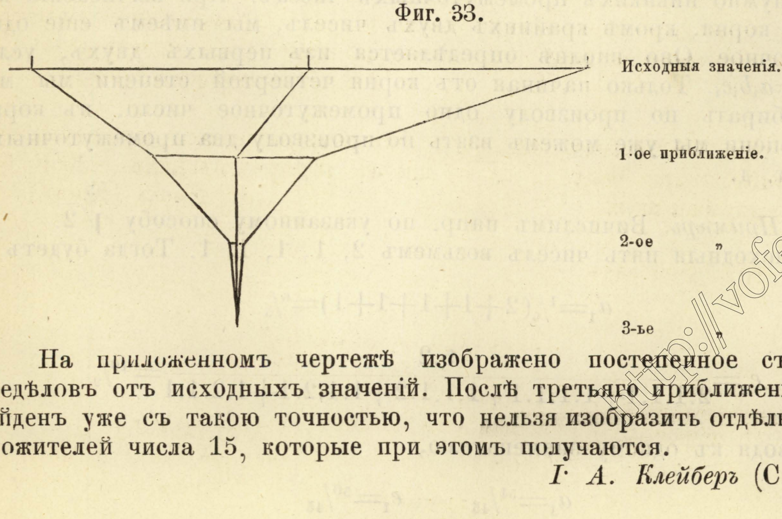
$$a_2 = {}^{1398239}/_{1216800} = 1,14908\ldots$$
$$e_2 = {}^{789750}/_{687763} = 1,14839$$

и средняя ариѳметическая изъ a_2 и c_2 т. е. 1,14873 уже даетъ искомый корень съ точностью до 0,00003, ибо истинное значеніе $\sqrt[5]{2}$ есть 1,14870.

18. *Геометрическая иллюстрація.* Указанный нами способъ вычисленія корней какой угодно степени изъ какихъ угодно чиселъ столь быстро приводитъ къ результатамъ чрезвычайно близкимъ къ искомому корню, что трудно представить на чертежѣ ходъ постепенныхъ приближеній. Для того, чтобы дать однако геометрическую иллюстрацію хотя нѣсколькихъ послѣдовательныхъ приближеній, я выберу умышленно за начальные множители числа, значительно отличающіяся одно отъ другого, замедляя этимъ ходъ приближеній, и тогда можно будетъ избаразить ихъ на чертежѣ. Для такого примѣра беру опредѣленіе кубическаго корня изъ 15. Естественно было бы взять за множители, изъ которыхъ исходимъ при вычисленіи послѣдовательныхъ приближеній, числа, заключенныя между 2 и 3. Но я умышленно возьму вмѣсто этого

$$a = 5 \qquad b = 3 \qquad c = 1.$$

Фиг. 33.



На приложенномъ чертежѣ изображено постепенное съуживаніе предѣловъ отъ исходныхъ значеній. Послѣ третьяго приближенія корень найденъ уже съ такою точностью, что нельзя изобразить отдѣльно трехъ множителей числа 15, которые при этомъ получаются.

Г. А. Клейберъ (Спб.)

ЗАДАЧИ.

№ 197. На гипотенузѣ AC и на одномъ изъ катетовъ AB прямоугольнаго треугольника ABC построены квадраты CM и BN, коихъ сосѣднія вершины M и N соединены прямою MN$=d$. По данной длинѣ этой прямой d построить прям. треугольникъ, когда кромѣ того еще даны:

1) одинъ изъ катетовъ, AB или BC;
2) гипотенуза AC;
3) одинъ изъ острыхъ угловъ, $\angle$A или $\angle$C;
4) длина перпендикуляра BD$=h$, опущеннаго изъ вершины прямого угла на гипотенузу. *Н. Николаевъ* (Пенза).

№ 198. Стороны квадрата ABCD касаются поверхности шара; если изъ вершинъ квадрата проведемъ прямыя, касательныя къ поверхности шара, такъ чтобы онѣ пересѣкали центральную прямую OM, проходящую черезъ центръ шара O и центръ квадрата M,—то одна система касательныхъ пересѣчетъ эту прямую въ нѣкоторой точкѣ S и образуетъ ребра пирамиды SABCD, а другая пересѣчетъ центр. прямую въ точкѣ S′ и образуетъ ребра пирамиды S′ABCD. По данной сторонѣ квадрата AB$=a$ и данному радіусу шара r требуется опредѣлить высоты SM и S′M обѣихъ пирамидъ. *Н. Николаевъ* (Пенза).

№ 199. Даны двѣ окружности, касающіяся извнѣ въ точкѣ A; общая касательная къ этимъ окружностямъ касается ихъ въ точкахъ B и C. Показать, что радіусъ окружности, проведенной черезъ точки A, B и C, есть средняя пропорціональная между радіусами R и r данныхъ окружностей. *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ).

№ 200. Даны точка O и прямая MN. На прямой взяты точки A, B, C, D...... въ четномъ числѣ. Около треугольниковъ AOB, BOC, COD,..... описаны окружности. Показать, что произведеніе діаметровъ четныхъ окружностей равно произведенію діаметровъ нечетныхъ. *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ).

№ 201. На діагоналяхъ AC и BD гармоническаго четыреугольника ABCD найти такія точки E и F, чтобы четыреугольникъ ABEF былъ тоже гармоническимъ. *И. Бискъ* (Кіевъ).

№ 202. Доказать, что

$$\mathrm{L}(x+\sqrt{1+x^2})=i.arc\mathrm{Sin}\frac{x}{i},$$

гдѣ L есть знакъ Неперовыхъ логариѳмовъ, а i есть $\sqrt{-1}$. *Н. Троицкій* (Тула).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 16 (2-ой серіи). Какая зависимость должна существовать между коэффиціентами двухъ данныхъ уравненій

$$ax^m+bx^n+c=0$$
$$a_1x^m+b_1x^n+c_1=0,$$

чтобы они имѣли общій корень?

Умножимъ уравненіе (1) на a_1, а (2) на a и вычтемъ второе изъ перваго, тогда

$$x^n=\frac{ac_1-a_1c}{a_1b-ab_1},$$

Теперь умножимъ (1) на b_1, а (2) на b и снова вычтемъ второе изъ перваго. Изъ полученнаго выраженія имѣемъ

$$x^m=\frac{cb_1-bc_1}{a_1b-ab_1}.$$

Слѣдовательно

$$x^{mn}=\left[\frac{ac_1-a_1c}{a_1b-ab_1}\right]^m=\left[\frac{cb_1-bc_1}{a_1b-ab_1}\right]^n,$$

откуда искомое условіе

$$(ac_1-a_1c)^m=(cb_1-bc_1)^n(a_1b-ab_1)^{m-n}.$$

С. Кричевскій (Харьк.), *Н. Волковъ* (Спб.).

№ 20 (2-ой серіи). 1) Построить прямоугольный треугольникъ, удовлетворяющій такому условію, чтобы квадратъ, построенный на большемъ катетѣ, былъ равновеликъ съ прямоугольникомъ, построеннымъ на гипотенузѣ и меньшемъ катетѣ.

2) Выразить оба катета этого треугольника черезъ гипотенузу.

3) Показать, что раздѣливъ квадратъ, построенный на гипотенузѣ, въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, найдемъ величины площадей обоихъ квадратовъ, построенныхъ на катетахъ.

4) Вычислить углы этого треугольника и найти зависимость между тригонометрическими величинами каждаго изъ острыхъ угловъ.

5) Показать, что удвоенный большій катетъ даетъ съ достаточнымъ приближеніемъ длину полуокружности, построенной на гипотенузѣ, какъ на діаметрѣ, и—точно также—удвоенный меньшій катетъ даетъ приближенную величину полуокружности, построенной на большемъ катетѣ, какъ на діаметрѣ.

6) Показать, что квадратъ построенный на средне-пропорціональной между гипотенузой и большимъ катетомъ, равенъ приблизительно

площади круга, построеннаго на гипотенузѣ какъ на діаметрѣ, и—точно также – квадратъ, построенный на средне-пропорціональной между обоими катетами, равенъ приблизительно площади круга, построеннаго на большемъ катетѣ какъ на діаметрѣ. Соотвѣтственно этому какъ найдется приблизительно квадратура круга, построеннаго на меньшемъ катетѣ?

1) Прямую a примемъ за гипотенузу. Раздѣлимъ ее въ среднемъ и крайнемъ отношеніи; тогда большій отрѣзокъ ея будетъ представлять величину меньшаго катета.

2) Если гипотенуза$=a$,

то большій катетъ$=a\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$,

и меньшій „ $=a\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

3) Изъ пропорціи

$$a^2 : x^2 = x^2 : (a^2-x^2)$$

находимъ

$$x^2=a^2\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\text{квадр. больш. кат.}$$

$$y^2=a^2-x^2=a^2\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\text{квадр. меньш. кат.}$$

4) Одинъ изъ острыхъ β угловъ этого треугольника равенъ $38°10'18''$. Тангенсъ этого угла равенъ косинусу и, слѣдовательно, котангенсъ равенъ секансу.

5) $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{x}=\mathrm{Cos}\beta=\mathrm{tg}\beta=\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}=0{,}7861$, что прибл.$=\dfrac{\pi}{4}(=0{,}7854)$

отсюда:

$$2x=\frac{a}{2}\pi \quad \text{и} \quad 2y=\frac{x}{2}\pi \text{ (съ точн. до 0,01).}$$

6) Площадь квадрата, построеннаго на средне-пропорціональной между гипотенузой и большимъ катетомъ, равна

$$s^2=ax=a^2 . \, 0{,}7861=\frac{a^2}{4} . \, 3{,}1444 \text{ (до 0,01).}$$

Площадь квадрата, построеннаго на средне-пропорціональной между катетами, равна

$$t^2=xy=a^2\frac{\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}=0{,}4858a^2,$$

а площадь круга, построеннаго на большемъ катетѣ, равна

$$\pi x^2 = \pi a^2 \frac{\sqrt{5}-1}{8} = 0{,}4854 a^2.$$

Высота этого треугольника $h(=a\sqrt{\sqrt{5}-2})$ дѣлитъ гипотенузу a въ крайнемъ и среднемъ отношенiи, а потому площадь круга, построеннаго на меньшемъ катетѣ y, какъ на дiаметрѣ, равна прибл. площади квадрата, построеннаго на средне-пропорцiональной между y и h.

А. П. и *Н. Николаевъ* (Пенза), *Е. Пригоровскiй* (Кiевъ).

№ 39 (2-ой сирiи). На сторонахъ даннаго угла M взяты, въ произвольномъ разстоянiи отъ вершины, два равные произвольные отрѣзка AB и CD. Черезъ точки M, C и B, а также черезъ точки M, A и D проведены окружности, вторая точка пересѣченiя которыхъ есть N. Опредѣлить геометрическое мѣсто точки N.

Въ $\triangle$-кахъ ANB и CND по условiю AB=CD, $\angle NAB = \angle CDN$ (такъ какъ во вписанномъ четыреугольникѣ MDNA имѣемъ

$$\angle MDN + \angle NAM = 180^\circ$$

и

$$\angle NAM + \angle NAB = 180^\circ)$$

и

$$\angle NBA = \angle DCN,$$

слѣдовательно $\triangle$-ки равны. Изъ равенства $\triangle$-ковъ находимъ AN=ND и CN=NB. Далѣе легко видѣть, что

$$\angle CMN = \angle NMB.$$

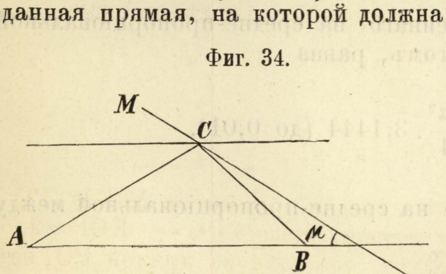
Значимъ геометрическимъ мѣстомъ точекъ пересѣченiя окружностей будетъ биссекоръ угла M.

Н. Р. (Одесса).

№ 189. Даны: основанiе треугольника по величинѣ и положенiю и разность угловъ при основанiи; вершина треугольника должна лежать на данной прямой. Построить треугольникъ.

Пусть AB (фиг. 34) данное основанiе искомаго треугольника. MN— данная прямая, на которой должна лежать третья вершина искомаго треугольника. Положимъ, задача рѣшена и $\triangle$-къ ABC искомый. По условiю $\angle B - \angle A = \pm\delta$, гдѣ δ означаетъ данную разность угловъ при основанiи. Проведя чрез C прямую, параллельную AB, получимъ:

Фиг. 34.



$$\angle ACM = \angle A + \angle \mu$$

и

$$\angle BCN = \angle B - \angle \mu,$$

гдѣ $\angle\mu$ есть уголъ, составленный данными прямыми AB и MN. Изъ двухъ равенствъ находимъ:

$$\angle ACM - \angle BCN = 2\angle\mu \mp \angle\delta.$$

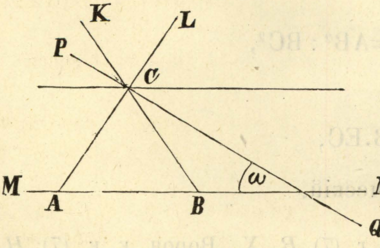
Изъ этого заключаемъ, что искомая третья вершина $\triangle$-ка есть нѣкоторая точка на MN, имѣющая то свойство, что разность угловъ, составленныхъ съ MN прямыми, соединяющими эту точку съ A и B, равна или $2\angle\mu + \angle\delta$, если предполагается, что $\angle A > \angle B$, или же $2\angle\mu - \angle\delta$, если требуется, чтобы $\angle A$ былъ больше угла B. Построить такую точку можно слѣдующимъ образомъ. Соединивъ любую изъ данныхъ точекъ A или B съ точкою, симметричною съ другой данной точкой относительно прямой MN, построимъ на любой изъ полученныхъ прямыхъ AB′ или A′B дугу, вмѣщающую уголъ $180° - 2\mu - \delta$, въ случаѣ $\angle A > \angle B$, или же $180° - 2\mu + \delta$, когда требуется, чтобы $\angle A$ былъ меньше угла B. Эта дуга пересѣчетъ MN въ искомой точкѣ. Доказательство простое и совершенно обратное приведенному въ началѣ рѣшенія.

Р. Дроздовъ (Спб.) и *С. Блажко* (Москва).

№ 233. Построить равнобедренный треугольникъ такъ, чтобы основанiе его лежало на данной прямой, вершина на другой данной прямой, а двѣ другiя стороны, или ихъ продолженiя, проходили черезъ двѣ данныя точки.

Пусть MN—прямая (фиг. 35), на которой должно находиться основанiе и PQ прямая, на которой вершина искомаго равнобедреннаго треугольника; K и L точки, чрезъ которыя должны проходить двѣ другiя стороны. Очевидно, что вся задача сводится къ отысканiю вершины треугольника, лежащей на PQ, ибо прямыя, соединяющiя ее съ K и L, будучи продолжены до пересѣченiя съ MN, образуютъ искомый треугольникъ. Предположимъ, что задача рѣшена и $\triangle$-къ ABC искомый. Тогда, по условiю, имѣемъ $\angle A = \angle B$. Проводя черезъ C прямую параллельную MN, замѣтимъ, что

Фиг. 35.



$$\angle LCQ = \angle A + \angle\omega \quad \text{и} \quad \angle KCP = \angle B - \angle\omega,$$

откуда

$$\angle LCQ - \angle KCP = 2\angle\omega,$$

гдѣ ω есть уголъ, составленный двумя данными прямымя MN и PQ и слѣдовательно извѣстный. На томъ основанiи, что $\angle LCQ - \angle KCP = 2\angle\omega$ заключаемъ, что вершина искомаго $\triangle$-ка, лежащая на прямой PQ, есть точка, обладающая тѣмъ свойствомъ, что разность угловъ, составляемыхъ съ PQ прямыми, соединяющими эту точку съ точками K и L, равна удвоенному углу, составленному прямыми MN и PQ*). Найдя ее, соединимъ съ K и L; продолживъ же KC и LC до пересѣченія съ MN въ точкахъ A и B, получимъ искомый равнобедренный $\triangle$-къ ABC.

В. Соллертинскій (Гатчино), *М. Л.* (Архангельскъ) и *С. Бгажко* (Москва).

№ 522. На основаніи AC треугольника ABC беремъ такую точку D, что

$$AD:CD=AB^2:BC^2$$

т. е. проведемъ внутреннюю симедіану BD) и прямую BD продолжаемъ до пересѣченія въ точкѣ E съ окружностью, описанною около этого треугольника. Показать, что четыреугольникъ ABCE есть гармоническій.

Изъ подобія $\triangle$-ковъ ADB и EDC имѣемъ;

$$AB:EC=AD:DE, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (1)$$

а изъ подобныхъ $\triangle$-ковъ ADE и BDC:

$$BC:AE=DC:DE \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (2)$$

Дѣля (1) на (2), находимъ

$$AB.AE:BC.EC=AD:DC,$$

но, по условію

$$AD:DC=AB^2:BC^2,$$

слѣдовательно

$$AB.AE:BC.EC=AB^2:BC^2,$$

откуда

$$AE.BC=AB.EC,$$

т. е. четыреугольникъ ABCE—гармоническій.

Ученики: Кіевск. I г. (6) *И. Б.*, Курск. г. (7) *В. Х.*, Ворон. к. к. (7) *Н. В.* и *Г. У.*

---

*) Какъ найти такую точку, см. предыдущее рѣшеніе задачи № 189.

Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Кіевъ, 9 Мая 1891 г.

Типо-литографія Высочайше утвержд. Товарищества И. Н. Кушнеревъ и К°.

Обложка
ищется

Обложка
ищется