№ 370.

ВѢСТНИКЪ

ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

издаваемый

В. А. Гернетомъ

подъ редакціей

Приватъ-Доцента В. Ф. Кагана.

XXXI-го Семестра № 10-й.

ОДЕССА.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66.
1904.

Открыта подписка на 1904 годъ.

И. М. О. С. Х.
1802.—1904.

Ora et labora.

ВѢСТНИКЪ СЕЛЬСКАГО ХОЗЯЙСТВА,

ЕЖЕНЕДѢЛЬНОЕ ИЗДАНІЕ
ИМПЕРАТОРСКАГО Московскаго Общества Сельскаго Хозяйства
по всѣмъ вопросамъ сельскаго хозяйства, земской, агрономической дѣятельности и мелкаго кредита.

Редакція: **Москва, Смоленскій бул., 55.**

Годовые экз. „Вѣстника" за 1900 (полный) и 1901 г. (безъ №№ 1 и 2) можно получать за 2 руб. съ перес. 1092 и 1903 г.—4 руб.

Подписная цѣна:

Въ годъ 5 р.
$^1/_2$ г. 2 р. 50 к.
3 м. 1 р. 25 к.

Плата за объявленія:

за стр. 30 р.
за $^1/_2$ с. 15 р.
за $^1/_4$ с. 7 р. 50 к.
за строку петита 15 к.

Вступая въ третій годъ своей дѣятельности, **Редакторская Коммиссія** имѣетъ въ виду продолжать изданіе „Вѣстника", по прежней программѣ, ставя своей основной задачей — содѣйствіе своевременному ознакомленію читателя какъ съ движеніемъ впередъ агрономической мысли, такъ и съ новыми фактами сельско-хозяйственной дѣйствительности, съ текущими измѣненіями въ условіяхъ сельско-хозяйственнаго производства.

Имѣя въ своемъ составѣ спеціалистовъ по различнымъ отраслямъ сельскаго хозяйства, коммиссія имѣетъ въ виду отводить мѣсто статьямъ, касающимся какъ агрономической техники въ области растеніеводства и животноводства, такъ и общественно-экономическихъ условій сельско-хозяйственнаго производства, при чемъ внѣшнія рубрики журнала намѣчаются слѣдующія:

1) Передовыя статьи по нуждамъ сельскаго хозяйства, 2) Разработка отдѣльныхъ вопросовъ по всѣмъ отраслямъ практическаго сельскаго хозяйства, 3) Статьи и рефераты по научной агрономіи, 4) Статьи по общественной агрономіи, 5) Хроника сельскохозяйственной жизни, организованной помощи населенію, дѣятельности сел.-хозяйств. обществъ и союзовъ, 6) Вопросы и отвѣты, 7) Обзоръ сельско-хозяйственной печати, 8) Торговыя извѣстія, 9) Оффиціальный отдѣлъ,—протоколы, доклады и журналы засѣданія И. М. О. С. Х., 10) Частныя объявленія.

Журналъ находится въ вѣдѣніи **Редакторской Коммиссіи** изъ слѣдующихъ лицъ:

Секція Растеніеводства:
(Почва; обработка и удобреніе; растеніе; его враги и болѣзни).

Бекетовъ В. А.
Вильямсъ В. Р., проф.
Дояренко А. Г.
Линдеманъ К. Э., проф
Некрасовъ С. А.
Нестеровъ Н. С., проф.
Ростовцевъ С. И., проф.
Прянишниковъ Д. Н., пр.
Рудзинскій Д. Л.
Сабанинъ А. Н., проф.
Яковлевъ А. Л.

Секція Животноводства:

Блажинъ Н. Ф.
Бландовъ В. И.
Богдановъ Э. А., проф.
Вараксинъ А. В.
Гуринъ Г. И.
Губинъ Ѳ. И.
Добромысловъ И. А.
Дроздовъ В. Н.
Лемусъ В. И.
Кулагинъ Н. М., проф.
Кулешовъ П. Н.
Придорогинъ М. И., пр.
Петровъ Н. В.
Северинъ С. А.
Усовъ С. С.
Щербатовъ кн. А. Г.

Секція Сельско-хозяйственной экономіи:
(Экономія земледѣлія, организація хозяйства и общ. экон.).

Бажаевъ В. Г.
Вернеръ И. А.
Грушка Н. А.
Денъ В. Э., проф.
Дараганъ И. П.
Завадскій В. П.
Крюковъ Н. А.
Кругликовъ Г. Н.
Коссовичъ Д. С.
Фортунатовъ А. Ѳ., проф.

Секція Технологіи, Сельско-Хоз. Строит. и Инжен. Искусства и Машиностроенія;

Головнинъ Д. Н., проф.
Горячкинъ В. П., проф.
Никитинскій Я. Я., проф.
Некрасовъ С. А.
Страховъ П. С., проф.

Редакторъ проф. **Д. Н. Прянишниковъ.**

XXXI Сем. № 10.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

31 Мая № 370. 1904 г.

† Ф. А. Бредихинъ.

А. Р. Орбинскаго (Одесса).

Астрономія понесла крупнѣйшую, незамѣнимую утрату: 1-го мая с. г. въ Петербургѣ скончался въ полной еще бодрости всѣхъ своихъ духовныхъ силъ Федоръ Александровичъ Бредихинъ, ординарный академикъ Императорской Академіи Наукъ.

Бредихинъ родился въ г. Николаевѣ 26-го ноября 1831 г., обучался сначала въ Ришельевскомъ Лицеѣ въ Одессѣ и затѣмъ въ Московскомъ Университетѣ, который и окончилъ въ 1855 г. по физико-математическому факультету. Только на четвертомъ курсѣ онъ заинтересовался астрономіей, въ которую и ушелъ вскорѣ совсѣмъ. Здѣсь же, въ Московскомъ Университетѣ, прошелъ онъ всѣ стадіи своей ученой карьеры вплоть до заслуженнаго профессора. Въ 1873 г. онъ принялъ на себя и завѣдываніе (послѣ Швейцера) университетской обсерваторіей, на которой оставался вплоть до 1890 г., когда былъ избранъ въ ординарные академики и назначенъ директоромъ Пулковской обсерваторіи. Послѣднимъ онъ пробылъ до 1894 г., когда, по нездоровью и желанію отдаться исключительно научной работѣ, чему административная дѣятельность не могла не мѣшать, онъ подалъ въ отставку отъ должности директора.

Къ московской эпохѣ жизни Бредихина и относятся его важнѣйшія работы о кометныхъ формахъ, съ которыми его имя останется связаннымъ навсегда. Кометы, если можно такъ выразиться, самыя капризныя небесныя тѣла. Появляясь, большею частью, совершенно неожиданно, какъ бы вспыхивая на небѣ, кометы проявляютъ необычайное разнообразіе и измѣнчивость формъ: то онѣ представляются простыми туманностями, безъ всякихъ придатковъ, то сопровождаются хвостами, иногда однимъ, иногда многими, то прямыми, то дугообразно изогнутыми, а иногда даже какъ бы изломанными, разбитыми посрединѣ. Иногда онѣ на глазахъ у астрономовъ раздѣляются на части, выбрасываютъ клубы вещества, уносящіеся въ безконечное пространство,—иногда же, наконецъ, исчезаютъ совершенно, такъ что самыя тщательныя наблюденія не находятъ и слѣда ихъ, а вмѣсто нихъ вдругъ появляется неожиданный огненный дождь падающихъ звѣздъ.

На долю Бредихина — счастливую долю — выпало внести порядокъ въ этотъ хаосъ, разложить его на составныя части и, наконецъ, конструировать эти явленія изъ немногихъ основныхъ началъ. Основная идея о силахъ, образующихъ кометные хвосты, была высказана впервые Ольберсомъ, уже въ 1812 г. говорившимъ о необходимости привлечь къ объясненію этихъ явленій силы *отталкивательныя*. Идея Ольберса была приложена къ Галлеевой кометѣ при ея появленіи въ 1835 году великимъ Бесселемъ, который нашелъ, что особенности формы хвоста этой кометы могутъ быть вполнѣ объяснены допущеніемъ, что хвостъ образованъ веществомъ, которое истекаетъ изъ головы кометы и отталкивается солнцемъ съ силой, обратно пропорціональной квадратамъ разстояній и приблизительно вдвое большей Ньютоніанскаго притяженія. Съ формулъ Бесселя началъ и Бредихинъ. Онъ приложилъ ихъ къ опредѣленію величины отталкивательной силы для всѣхъ тѣхъ кометъ, о которыхъ сохранилось достаточное количество наблюдательнаго матеріала. Разборъ этихъ величинъ въ 1877 году навелъ его на мысль, что всѣ кометные хвосты можно подраздѣлить на три основные типа, отличающіеся между собою величиной производящей ихъ отталкивательной силы. Тогда Бредихинъ приступилъ къ болѣе подробной разработкѣ вопроса. Взамѣнъ приближенныхъ формулъ Бесселя, онъ построилъ новыя, болѣе строгія формулы гиперболическаго движенія и, съ ихъ помощью, снова пересмотрѣлъ вопросъ о кометныхъ хвостахъ. Подраздѣленіе хвостовъ на три типа подтвердилось вполнѣ. Но этого мало: пересмотръ величинъ отталкивательной силы указалъ Бредихину, что между ними и молекулярными вѣсами цѣлаго ряда веществъ существуетъ совершенно опредѣленная зависимость обратной пропорціональности. Отсюда стало яснымъ, что хвосты разныхъ типовъ состоятъ изъ разныхъ веществъ: наиболѣе прямые (I типа) изъ самаго легкаго — водорода, болѣе изогнутые (II типа) преимущественно изъ углеводородовъ и легкихъ металловъ, хвосты III типа—наиболѣе короткіе и искривленные—изъ тяжелыхъ металловъ. Выводъ этотъ былъ встрѣченъ съ недовѣріемъ: въ то время, въ 1879 г., о спектрахъ кометъ знали лишь то, что несомнѣнно въ нихъ имѣются только углеводороды. Но подтвержденіе не заставило себя ждать: въ 1882 году въ спектрѣ кометы Веллься былъ замѣченъ Фогелемъ, Дуне́ромъ и самимъ Бредихинымъ натрій, а въ большой кометѣ сентября того же года, имѣвшей хвосты всѣхъ трехъ типовъ, и желѣзо. Предсказаніе Бредихина оправдалось.

Приложеніе фотографіи къ небу принесло богатые плоды и въ области кометъ. Гдѣ глазъ не различалъ почти ничего, многочасовая экспозиція фотографической пластинки давала хвосты въ нѣсколько градусовъ длиной. Мало того, фотографіи послѣднихъ десяти лѣтъ, хотя и бѣдныхъ значительными кометами, указали въ нихъ цѣлый рядъ удивительныхъ деталей. Такъ, напр., не разъ были сфотографированы странные изломы и разрывы въ хвостахъ, наводившіе наблюдателей на мысль, что хвостъ встрѣтился съ какимъ-то препятствіемъ и изломился о него. Теорія Бредихина дала ключъ и объяснила эти явленія: такіе изломы и узлы въ хвостахъ и должны получаться, когда вещество, изъ котораго состоитъ хвостъ, будетъ вытекать изъ кометы не плавно, а взрывами. А что такіе взрывы на кометахъ должны существовать, ясно, напр., изъ быстрыхъ измѣненій яркости кометъ, наблюдавшихся непосредственно.

Петербургскій періодъ ученой дѣятельности Бредихина былъ посвященъ, кромѣ разработки явленій новыхъ кометъ, главнымъ образомъ, еще одному вопросу—о связи кометъ съ падающими звѣздами. Еще въ шестидесятыхъ годахъ прошлаго вѣка знаменитый Скіапарелли указалъ на тождественность орбитъ нѣкоторыхъ потоковъ падающихъ звѣздъ съ кометными и сдѣлалъ отсюда выводъ, что потоки представляютъ остатки двигавшейся нѣкогда тѣмъ же путемъ кометы. Бредихинъ обратилъ вниманіе еще на одну особенность кометныхъ формъ—такъ называемые аномальные хвосты. Эти хвосты, очень небольшіе и слабые, отличаются тѣмъ, что они направлены не *отъ* солнца, какъ обычные кометные хвосты, а *къ* солнцу; согласно Бредихину, они образованы комбинаціей силы, выбрасывающей частицы изъ кометы, и силы обыкновеннаго притяженія,—силы отталкивательныя здѣсь не при чемъ; они состоятъ, въ противоположность легкимъ частицамъ обычныхъ хвостовъ, изъ тяжелыхъ частичекъ. Вотъ эти-то истеченія тяжелыхъ частичекъ и даютъ намъ падающія звѣзды. И, тогда какъ по теоріи Скіапарелли комета превращается цѣликомъ въ потокъ падающихъ звѣздъ, по Бредихину это, хотя и можетъ иногда происходить, но вовсе не обязательно: комета можетъ остаться таковой и въ то же время породить и потокъ падающихъ звѣздъ или даже нѣсколько потоковъ. Этимъ путемъ Бредихину удалось объяснить много особенностей явленія падающихъ звѣздъ.

И въ другихъ областяхъ астрономіи Бредихинъ оставилъ замѣтный слѣдъ. Въ болѣе молодые годы онъ былъ усердный и тщательный наблюдатель. Такъ, первый въ Россіи онъ наблюдалъ систематически протуберанцы; онъ былъ однимъ изъ піонеровъ приложенія спектроскопа къ изслѣдованію неба, и его наблюденія кометъ, когда спектроскопъ былъ еще рѣдкостью, имѣли крупное значеніе.

Не только русская наука, но наука всего міра лишилась одного изъ вождей,—и въ Европѣ заслуги Бредихина были высоко оцѣнены. Достаточно указать, что онъ былъ избранъ „иностраннымъ членомъ“ (Foreign Associate) Лондонскаго Королевскаго Астрономическаго Общества, докторомъ honoris causa Падуанскаго университета, членомъ Парижскаго Бюро Долготъ, Общества Итальянскихъ Спектроскопистовъ и многихъ другихъ.

Но въ личности Ф. А. Бредихина была еще одна сторона: не будучи по натурѣ такимъ учителемъ, который воспитываетъ своихъ учениковъ съ начала до конца, постоянно руководя ими и слѣдя за каждымъ шагомъ, онъ обладалъ другимъ свойствомъ,—онъ умѣлъ узнавать людей и умѣлъ зажигать въ нихъ ту искру, которая дѣлаетъ человѣка истиннымъ ученымъ. Достаточно привести имена Бѣлопольскаго, Церасскаго... И вступивъ въ управленіе Пулковской обсерваторіей, Бредихинъ привлекъ къ ней много молодыхъ силъ, въ которыхъ онъ сумѣлъ возбудить влеченіе къ истинной ученой работѣ. Пишущій эти строки, бывшій тогда гостемъ въ Пулковѣ, однимъ изъ лучшихъ своихъ воспоминаній считаетъ то время молодыхъ надеждъ и молодыхъ увлеченій, которыми дышала атмосфера Пулкова и въ которыхъ Бредихинъ игралъ тогда такую роль.

Бредихинъ обладалъ не только умомъ ученаго: онъ былъ также и очень живымъ человѣкомъ, человѣкомъ общества. Во всякомъ обществѣ онъ умѣлъ становиться центромъ, и его живая, удивительно остроумная, иногда парадоксальная и всегда блестящая рѣчь невольно останавливала вниманіе. Недаромъ на его публичныя лекціи, по разсказамъ старыхъ москвичей, ломилась вся Москва. Блестящій умъ, широкая разносторонняя образованность и настойчивая воля дѣлали изъ Ф. А. Бредихина человѣка, память о которомъ не умретъ ни въ комъ изъ знавшихъ его. Но и его, и ихъ всѣхъ переживетъ память о томъ, что онъ внесъ въ нашу науку, въ которой появленіе каждой кометы сдѣлаетъ новую прибавку къ надписи на могилѣ Федора Александровича Бредихина.

О НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКѢ. *)

Профессора K. Schwarzschild'a (въ Геттингенѣ).

Настоящимъ очеркомъ былъ открытъ рядъ докладовъ о задачахъ механики, и, если этотъ рядъ открывается именно небесной механикой, то это отвѣчаетъ ходу историческаго развитія. Движеніе небесныхъ тѣлъ является той задачей, на которой, собственно, и выросла механика, на которой она заслужила свои шпоры. Но вопросъ о движеніи планетъ является не только первой по вре-

*) На послѣднемъ съѣздѣ германскихъ естествоиспытателей и врачей были прочитаны три доклада о современной механикѣ. Настоящая статья представляетъ собой переводъ перваго изъ этихъ докладовъ.

мени великой задачей механики, но также и ея преимущественной, чистѣйшей задачей. Здѣсь не нужно было никакихъ искусственныхъ отвлеченій отъ неоднородности матеріала или вліяній тренія: простая формула Ньютонова закона $\frac{mm'}{r^2}$ управляетъ движеніями солнечной системы на тысячелѣтія впередъ и назадъ съ многозначной точностью.

Правда, въ послѣднее время неоднократно подвергали сомнѣнію старую простую форму Ньютонова закона. Астрономъ *Зеелигеръ* (Seeliger) подчеркиваетъ тѣ затрудненія, которыя возникаютъ при его приложеніи къ массамъ звѣздныхъ системъ, разбросаннымъ въ безконечномъ пространствѣ; физикъ *Лоренцъ* (Lorentz) показываетъ возможность предположенія, что сила тяжести распространяется со скоростью свѣта. При бурномъ движеніи современнаго развитія физики, завтрашній день, можетъ быть, дастъ практическое значеніе этимъ умозрѣніямъ, столь увлекательнымъ съ философской точки зрѣнія; но сегодня — это я подчеркиваю — мы находимся еще въ періодѣ все большаго подтвержденія Ньютонова закона. Еще нѣсколько лѣтъ тому назадъ, для объясненія таинственнаго движенія перигелія Меркурія, принималось, что показатель 2 въ Ньютоновой формулѣ долженъ быть замѣненъ показателемъ $2 + 0{,}000\,000\,16$, а недавно *Броунъ* (E. W. Brown), на основаніи точной теоріи движенія луны, доказалъ, что этотъ показатель можетъ отличаться отъ 2 только на 0,00000004. Онъ отодвинулъ предѣлъ отклоненія на одинъ десятичный знакъ дальше. Гдѣ еще и обнаруживаются отступленія отъ Ньютонова закона, какъ въ движеніи перигелія Меркурія и въ ускореніи луны, тамъ имѣются всѣ основанія предполагать внѣшнія возмущающія вліянія. На практикѣ Ньютоновъ законъ въ настоящее время представляетъ бо́льшія притязанія на абсолютную точность, чѣмъ когда-либо прежде.

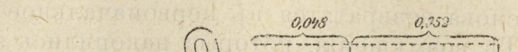
Если охватить одн..мъ взглядомъ астрономическую механику во всей ея общности, то, конечно, она содержитъ болѣе, чѣмъ только приложеніе закона Ньютона. Въ теоріи колебаній высоты полюса, напримѣръ, приходится прилагать къ землѣ теорію упругости. Въ теоріи солнца на сцену выступаетъ термодинамика. Совершенно новая задача для астрономической механики возникаетъ изъ начинающагося познанія соотношеній формъ въ отдѣльныхъ системахъ неподвижныхъ звѣздъ, гдѣ два могучихъ солнца обращаются другъ около друга въ нѣсколько дней въ непосредственной близости или даже въ соприкосновеніи другъ съ другомъ. Было бы довольно заманчиво обрисовать, что дал.. здѣсь теорія равновѣсія фигуръ вращающихся жидкостей и какъ много задачъ возникаетъ еще въ этой области, въ которой современныя математика и физика должны работать въ самой тѣсной связи. Но, когда нужно совершить экспедицію на небо въ теченіе одного получаса, нужно ограничивать себя. Поэтому я остановлюсь на главной задачѣ астрономіи, на простыхъ слѣдствіяхъ Ньютонова закона,—на такъ называемой „задачѣ многихъ тѣлъ“, и попытаюсь доказать, что эта задача, нѣкогда служившая образцомъ для всей механики, не умерла и понынѣ, что ея разработка шла впередъ до самаго послѣдняго времени и что она все еще содержитъ такія постановки вопроса, которыя могутъ стать плодотворными для всей механики.

Эту задачу можно формулировать слѣдующимъ образомъ: нѣкоторое число тѣлъ, массы которыхъ мы будемъ представлять себѣ сосредоточенными въ ихъ центрахъ тяжести, въ опредѣленный моментъ движутся въ различныхъ мѣстахъ пространства съ опредѣленными начальными скоростями. Требуется найти, какія положенія они будутъ имѣть въ какой-нибудь послѣдующій моментъ, если они постоянно притягиваютъ другъ друга, точно слѣдуя закону Ньютона. Очевидно, это и есть, по существу, задача о движеніи планетъ и кометъ въ солнечной системѣ.

Въ своей Mécanique Céleste, этой библіи такъ называемой „классической небесной механики“, Лапласъ въ началѣ прошлаго вѣка даетъ на это слѣдующій отвѣтъ. Движеніе планетъ безконечно сложно, если изслѣдовать его точно. Всякое движеніе Юпитера или Сатурна имѣетъ свое отраженіе въ движеніи земли. Чтобы представить тысячи этихъ тонкихъ неравенствъ, нужны формулы въ нѣсколько страницъ. Но, если отказаться отъ телескопической точности и ограничиться тѣмъ, что можно увидѣть на небѣ невооруженнымъ глазомъ и что можно представить въ рисункѣ планетнаго движенія на листкѣ бумаги, то это движеніе просто. Въ существенномъ, планеты движутся вокругъ солнца по эллипсамъ, согласно законамъ Кеплера. Конечно, эти эллипсы не постоянны, но постепенно медленно измѣняются. Такъ, эксцентриситетъ земной орбиты убываетъ на $\frac{1}{2300}$-ую въ тысячелѣтіе. За то же время большая ось земной орбиты поворачивается на 3^0. Кромѣ этихъ медленныхъ—какъ говорятъ, „вѣковыхъ“—измѣненій планетныхъ орбитъ, существуетъ только одно замѣтное измѣненіе болѣе короткаго періода, такъ называемое великое неравенство Юпитера и Сатурна, которое смѣщаетъ эти планеты въ теченіе 930 лѣтъ на $^2/_3$ и $1^1/_2$ ширины полной луны отъ ихъ средняго мѣста. Эту основную теорію Лапласа я обозначаю названіемъ „классической небесной механики“, хотя обыкновенно въ это понятіе включаютъ и другіе ея дальнѣйшіе шаги, которые сдѣлалъ самъ Лапласъ или которые онъ, по крайней мѣрѣ, внесъ въ теоретическую часть своей Mécanique Céleste. И эта теорія имѣетъ право на названіе классической. На ея полныхъ формулахъ, въ нѣсколько страницъ, какъ сказано, основана еще почти вся система находящихся и нынѣ въ употребленіи планетныхъ таблицъ, и эти полныя формулы согласуются со всѣми полученными отъ древности и ведущимися уже 150 лѣтъ точными до секундъ телескопическими наблюденіями, въ предѣлахъ точности наблюденій.

Этимъ можно было бы и закончить обзоръ задачи многихъ тѣлъ, если бы мы хотѣли остаться на грубо эмпирической точкѣ зрѣнія и довольствоваться удовлетвореніемъ требованій календаря, хронологіи, географіи, мореходства. Но мы хотимъ рядомъ съ реальнымъ вопросомъ поставить идеальный, поднять нашъ взоръ изъ временной ограниченности человѣческаго опыта и попытаться познать судьбу солнечной системы во тьмѣ прошлаго и грядущаго на милліоны лѣтъ. Съ этой высшей, идеальной точки зрѣнія, формулы классической небесной механики ложны и недостаточны. Если бы формула для эксцентриситета земной орбиты $e = e_0 - \frac{t}{2300}$, выражающая его измѣненіе, пропорціональное времени, соотвѣтствовала дѣйствительности, то отсюда слѣдовало бы, что черезъ 2 милліона лѣтъ земная орбита должна обратиться въ параболу.

Лагранжъ показалъ, что это слѣдствіе неправильно, что e только короткое время убываетъ по этому закону, а въ болѣе длинные промежутки времени измѣняется совершенно иначе. Еслибы — чтобы пояснить результаты Лагранжа на простомъ примѣрѣ—кромѣ земли существовалъ только могучій Юпитеръ, то это измѣненіе земного эллипса можно было бы представить слѣдующимъ механизмомъ. Пусть колесо r радіуса 0,0518 со штифтомъ z равномѣрно вращается, дѣлая оборотъ въ 83000 лѣтъ. Планка b, конецъ c которой укрѣпленъ на разстояніи 0,0482 отъ средины колеса, пусть скользитъ своимъ прорѣзомъ по штифту z. Тогда направленіе планки въ каждый моментъ дастъ направленіе



большой оси земной орбиты, а длина планки между концомъ c и штифтомъ z ея эксцентриситетъ. Такимъ образомъ, видно, что эксцентриситетъ земной орбиты не растетъ безконечно, но въ теченіе длинныхъ періодовъ только колеблется между предѣлами 0,003 и 0,100. Соотвѣтственнымъ образомъ измѣняются въ тѣсныхъ предѣлахъ и орбиты всѣхъ другихъ планетъ.

Если этимъ Лагранжъ и преодолѣлъ трудность „вѣковыхъ возмущеній", то остается еще другая, еще болѣе сложная. Мы ее свяжемъ сейчасъ же съ планетоидомъ Гекубой, имя которой своими печальными ассоціаціями указываетъ на ея полное тайнъ положеніе. Гекуба обходитъ кругомъ солнца въ 2101 день, слѣдовательно, въ періодъ, очень близкій къ половинѣ времени оборота Юпитера, достигающаго 4323 дней. Представимъ себѣ Гекубу отодвинутою чуть-чуть дальше; тогда, согласно третьему закону Кеплера, по которому квадраты временъ обращенія пропорціональны кубамъ разстояній, ея время обращенія нѣсколько удлинится. Пусть это удлиненіе доведетъ время оборота до половины Юпитерова. Приложимъ теперь формулу классической небесной механики и мы получимъ такой результатъ: большая ось орбиты Гекубы растетъ пропорціонально времени, а именно, на 0,01 въ 400 лѣтъ. До наглядности легко понять, какъ можетъ получиться такой результатъ. Если отношеніе временъ обращенія двухъ планетъ выражается несоизмѣримымъ числомъ, то съ теченіемъ времени онѣ будутъ занимать всевозможныя относительныя положенія на своихъ путяхъ; возмущающія вліянія, оказываемыя ими другъ на друга, будутъ дѣйствовать то въ одномъ, то въ другомъ направленіи, и, такимъ образомъ, въ итогѣ въ значительной части уничтожатся. Другое дѣло — Гекуба. Юпитеръ и Гекуба, послѣ одного обращенія Юпитера и двухъ Гекубы, снова возвратятся въ первоначальное относительное положеніе. Тѣ возмущенія, которыя накопились за это время, будутъ накопляться въ такомъ же количествѣ и въ томъ же направленіи и въ теченіе каждаго слѣдующаго оборота Юпитера. Здѣсь возмущенія не уничтожаются, а суммируются.

И факты наблюденія говорятъ въ пользу этого вывода классической небесной механики. Въ широко раскинутомъ между Марсомъ и Юпитеромъ роѣ астероидовъ оказываются пробѣлы на всѣхъ тѣхъ разстояніяхъ отъ солнца, на которыхъ время обращенія, получающееся, на основаніи третьяго закона Кеплера, должно было бы находиться въ простомъ соизмѣримомъ отношеніи ко времени оборота Юпитера. И, что еще болѣе удивительно, то же самое повторяется и въ кольцѣ Сатурна, которое, какъ извѣстно, также нужно считать состоящимъ изъ густого роя каменныхъ осколковъ. Здѣсь Кассиніево дѣленіе, отдѣляющее внутреннее кольцо отъ наружнаго, находится какъ разъ на томъ мѣстѣ, которому отвѣчаетъ такое время оборота, какое, будучи взято 2, 3, 4 и 6 разъ, очень близко даетъ періоды 4-хъ внутреннихъ спутниковъ Сатурна. Самый естественный выводъ отсюда, что возмущенія, согласно формуламъ классической небесной механики, постоянно растущія, выбрасываютъ всѣ тѣла изъ мѣстъ соизмѣримости.

Однако, и это второе заключеніе ложно. Что здѣсь происходитъ и какія новыя формы движенія здѣсь устанавливаются, стало извѣстнымъ, благодаря Гюльдену (Gyldén) въ послѣднія 20 лѣтъ. Это можно характеризовать приблизительно слѣдующимъ образомъ:

Означимъ чрезъ l уголъ, на который повернулась планета около солнца, считая отъ опредѣленнаго начальнаго положенія. Затѣмъ, если мы для простоты предположимъ круговую орбиту вмѣсто эллипса, то l будетъ просто пропорціонально t, слѣдовательно, $l = nt$. Величину n, указывающую, на какой уголъ передвигается планета въ однѣ сутки, астрономы называютъ „среднимъ суточнымъ движеніемъ“.

Напримѣръ, для Гекубы мы имѣемъ:

$$l = 617{,}41''.t = nt$$

и для Юпитера

$$l' = 299{,}13''.t = n't.$$

Теперь образуемъ вспомогательный уголъ

$$\zeta = l - 2l' = (n - 2n')t = 19{,}15''.t.$$

По этому углу лучше всего видно, насколько близки мы къ полной соизмѣримости временъ обращенія. Если бы время обращенія Гекубы было какъ разъ равно половинѣ времени обращенія Юпитера, то было бы $n = 2n'$, $\zeta = 0$. Согласно послѣдней формулѣ, ζ для Гекубы еще увеличивается со временемъ, но уже такъ медленно, что только въ 185 лѣтъ оно проходитъ полную окружность.

Но эта формула, конечно, имѣетъ мѣсто, если не принимать во вниманіе возмущеній. А вліяніе возмущеній лучше всего прослѣдить при помощи угла ζ. Окончательный результатъ этихъ новѣйшихъ изслѣдованій можетъ быть въ существенномъ выраженъ такъ, что уголъ ζ можетъ быть представленъ въ видѣ отклоненія маятника отъ его положенія равновѣсія. Если мы стоимъ далеко отъ мѣста соизмѣримости, то ζ является аналогичнымъ маятнику съ такимъ размахомъ, что онъ въ короткое время дѣлаетъ полный оборотъ около своей оси подвѣса. Здѣсь не получается ничего новаго: ζ измѣняется по существу такъ, какъ еслибы возмущеній не было вовсе. Приближеніе къ мѣсту соизмѣримости отвѣчаетъ уменьшенію начальной скорости маятника. Мы приходимъ къ случаямъ, въ которыхъ маятникъ имѣетъ только небольшой излишекъ силы и далѣе проходитъ верхнюю точку своего пути очень медленно. Теперь уголъ ζ будетъ имѣть очень неравномѣрное, сначала быстрое, потомъ медленное движеніе. Рядомъ съ этимъ, рука объ руку, будетъ происходить соотвѣтственное колебаніе угловъ l и l', измѣненіе темпа скорости обращенія самихъ планетъ. Въ концѣ концовъ, мы дойдемъ до движенія маятника съ „ассимптотическимъ" характеромъ. Маятникъ отходитъ отъ верхней точки безконечно медленно и пролетаетъ подъ точкой подвѣса, чтобы послѣ безконечно долгаго времени снова приблизиться къ верхней точкѣ съ другой стороны. Точно такимъ же образомъ измѣняется ζ при ассимптотическихъ движеніяхъ въ планетной системѣ. Въ этомъ ассимптотическомъ движеніи достигается предѣльный случай. При дальнѣйшемъ приближеніи къ соизмѣримости мы приходимъ къ качающемуся маятнику. Уголъ ζ уже вовсе не проходитъ полной окружности, возмущающія силы крѣпко держатъ его и позволяютъ ему выполнять колебанія только около извѣстной средней величины. Астрономы называютъ это явленіе либраціей. Какъ только наступаетъ либрація, движеніе совершенно мѣняетъ свой характеръ въ томъ смыслѣ, что теперь разсматриваемыя тѣла съ теченіемъ времени не могутъ на самомъ дѣлѣ независимо другъ отъ друга занимать всѣ возможныя положенія на своихъ орбитахъ, но, такъ какъ уголъ $\zeta = l - 2l'$ необходимо долженъ оставаться въ опредѣленныхъ границахъ, одно тѣло нѣкоторымъ образомъ связано съ другимъ. Именно такого рода либрація, такого рода связь и не позволяетъ никогда тремъ внутреннимъ спутникамъ Юпитера находиться одновременно на одной и той же сторонѣ Юпитера, и потому не позволяетъ никогда вступать въ затменіе тѣнью Юпитера всѣмъ тремъ одновременно.

Амплитуда либраціи можетъ становиться все меньше и меньше, пока, наконецъ, мы не дойдемъ до маятника въ состояніи покоя; ζ становится постоянной, наступаетъ точная соизмѣримость, и оба тѣла черезъ опредѣленное время въ точности возвращаются въ прежнее положеніе другъ относительно друга: мы имѣемъ дѣло съ такъ называемымъ періодическимъ рѣшеніемъ задачи трехъ тѣлъ.

Періодическія, ассимптотическія и либраціонныя движенія и являются тѣми новыми формами движенія, съ которыми мы знакомимся въ этой „задачѣ соизмѣримостей". Основнымъ результатомъ при этомъ является то, что орбиты—въ противность классической небесной механикѣ—ни въ коемъ случаѣ не претерпѣваютъ возмущеній, безгранично растущихъ въ одну сторону; если отвлечься отъ телескопически-мелкихъ колебаній, то скорѣй эти измѣненія, напримѣръ, большой оси или эксцентриситета зависятъ непосредственно отъ угла ζ, и эти элементы возвращаются къ своимъ исходнымъ значеніямъ, когда уголъ ζ снова принимаетъ прежнее значеніе, когда маятникъ заканчиваетъ поворотъ или колебаніе. Во всякомъ случаѣ — и въ этомъ классическая небесная механика оказалась правой—въ мѣстахъ соизмѣримости элементы подвергаются необыкновенно большимъ и быстрымъ измѣненіямъ. У Гекубы большая ось можетъ измѣняться на $^1/_{100}$ своей величины, эксцентриситетъ достигаетъ значеній 0,006 и 0,15.

(Окончаніе слѣдуетъ).

Отдѣленіе трехъ вещественныхъ корней уравненія третьей степени. *)

Я. Сыченкова. (Орелъ).

Имѣемъ уравненіе третьей степени общаго вида, съ вещественными коэффиціентами и тремя вещественными корнями:

$$x^3+ax^2+bx+c=0;$$

пусть α есть одинъ изъ корней этого уравненія; тогда

$$\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c=0;$$

вычитая изъ перваго уравненія, получимъ:

$$(x-\alpha)[x^2+(a+\alpha)x+\alpha^2+a\alpha+b]=0.$$

Возьмемъ $x^2+(a+\alpha)x+\alpha^2+a\alpha+b=0$ и рѣшимъ его относительно x, получимъ:

$$x=-\frac{a+\alpha}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(a+\alpha)^2-4(\alpha^2+a\alpha+b)} \qquad \text{(A).}$$

Величина x должна быть вещественна; для этого необходимо и достаточно, чтобы подкоренная величина была $\geqslant 0$, т. е.

$$(a+\alpha)^2-4\,(\alpha^2+a\alpha+b)\geqslant 0,$$

или

$$-3\alpha^2-2a\alpha-4b+a^2\geqslant 0,\ \text{или}\ \left(\alpha+\frac{a}{3}\right)^2-\frac{4}{9}\,(a^2-3b)\leqslant 0.$$

преобразуемъ это неравенство въ слѣдующее:

$$\left[\alpha+\frac{a}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{a^2-3b}\right]\left[\alpha+\frac{a}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{a^2-3b}\right]\leqslant 0.$$

Если $a^2-3b\leqslant 0$, то неравенство не можетъ имѣть мѣста ни при какихъ значеніяхъ для α, ибо въ одномъ случаѣ лѣвая часть приводится къ суммѣ положительныхъ величинъ, а въ другомъ къ квадрату количества, что меньше нуля быть не можетъ. Поэтому въ нашемъ случаѣ $a^2-3b>0$.

Тогда ему можно удовлетворить, полагая

$$\alpha<-\frac{a}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{a^2-3b}$$

и

$$\alpha>-\frac{a}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{a^2-3b}.$$

---

*) Статья нѣсколько переработана редакціей.

За α можетъ быть принятъ любой корень уравненія; поэтому большій корень не превосходитъ

$$-\frac{a}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{a^2-3b}$$

и меньшій больше

$$-\frac{a}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{a^2-3b},$$

ибо всѣ три корня содержатся между

$$-\frac{a}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{a^2-3b}$$

и

$$-\frac{a}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{a^2-3b}.$$

Напишемъ рядъ уменьшающихся чиселъ, такихъ:

$$-\frac{a}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{a^2-3b}=s;\quad -\frac{a}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{a^2-3b}=t;$$

$$-\frac{a}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{a^2-3b}=v \text{ и } -\frac{a}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{a^2-3b}=u.$$

Предыдущій результатъ можно поэтому выразить такъ: всѣ три корня уравненія содержатся между s и t. Такъ какъ междъ этими предѣлами содержится нечетное число вещественныху корней уравненія, то, подставляя s и t въ лѣвую его часть, мы должны получить результаты различныхъ знаковъ.

Теперь, подставивъ послѣдовательно значенія s, t, v и u въ лѣвую чисть уравненія вмѣсто x, получимъ:

1) при подстановкѣ $x=s$

$$M=\frac{2a^3+27c-9ab+2(a^2-3b)\sqrt{a^2-3b}}{27},$$

1) при подстановкѣ $x=t$,

$$N=\frac{2a^3+27c-9ab-2(a^2-3b)\sqrt{a^2-3b}}{27},$$

3) при подстановкѣ $x=v$,

$$M=\frac{2a^3+27c-9ab+2(a^2-3b)\sqrt{a^2-3b}}{27},$$

4) при подстановкѣ $x=u$,

$$N=\frac{2a^3+27c-9ab-2(a^2-3b)\sqrt{a^2-3b}}{27}.$$

Такъ какъ результаты первой подстановки и третьей равны, равно какъ второй и четвертой подстановокъ, то изъ сравненія ихъ заключаемъ слѣдующее: 1) если результаты первой и четвертой подстановокъ различныхъ знаковъ, то они будутъ разныхъ при первой и второй, второй и третьей, третьей и четвертой подстановкахъ; иначе, между каждыми двумя числами s, t, v и u содержится по одному дѣйствительному корню уравненію.

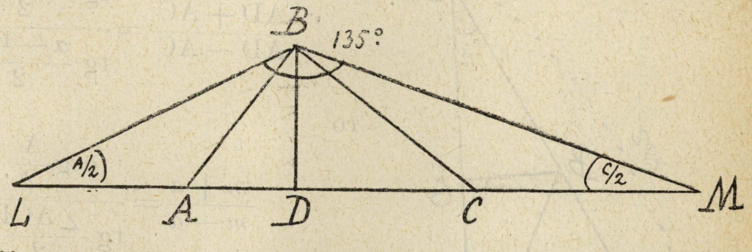
Такимъ образомъ, если уравненіе третьей степени имѣетъ три вещественныхъ корня, то числа s, t, v и u раздѣляютъ эти корни. Вмѣстѣ съ тѣмъ изъ сказаннаго слѣдуетъ, что уравненіе третьей степени имѣетъ три вещественныхъ корня въ томъ и только въ томъ случаѣ, если количества M и N имѣютъ противоположные знаки, т. е. если $MN < 0$. Легко видѣть, что это совпадаетъ съ условіемъ, вытекающимъ изъ формулы Кардана. *)

О рѣшеніи нѣкоторыхъ тригонометрическихъ задачъ.

В. Контера (Вильна).

Въ настоящей замѣткѣ я желалъ бы обратить вниманіе преподавателей на одну вещь, съ которой приходится считаться при прохожденіи курса тригонометріи, именно, на особые случаи рѣшенія прямоугольныхъ и косоугольныхъ треугольниковъ. Та искусственность, съ которой рѣшается большинство этихъ задачъ, служитъ лишь обремененіемъ для учащихся; между тѣмъ какъ примѣненіе обычныхъ и весьма несложныхъ пріемовъ графическаго построенія треугольниковъ совмѣстно съ аналитическими пріемами ведетъ къ быстрому и изящному рѣшенію упомянутыхъ вопросовъ, при чемъ нерѣдко мы избавляемся отъ утомительнаго приведенія формулы рѣшенія къ виду, удобному для логариѳмированія. Укажу на нѣсколько случаевъ, особенно интересныхъ.

1. Рѣшить прямоугольный треугольникъ по периметру, равному $2p$, и по высотѣ h, соотвѣтствующей гипотенузѣ.



Пусть ABC искомый треугольникъ, такъ что $AB + BC + AC = 2p$ и $BD = h$. Найдемъ $\angle A$. Вспоминаемъ анализъ, ко-

*) Авторъ утверждаетъ также, что M и N представляютъ собой maximum и minimum функціи x^3+ax^2+bx+c. При $a^2-3b<0$ это дѣйствительно такъ, но утвержденіе авторомъ не доказано.

торый даетъ намъ способъ рѣшенія этой задачи построеніемъ. Для этого продолжаемъ гипотенузу въ ту и другую сторону и откладываемъ $AL = AB$ и $CM = BC$. Тогда $\angle L = \frac{1}{2}\angle A$; $\angle M = \frac{1}{2}\angle C$; $\angle LBM$, очевидно, равенъ 135^0.—Далѣе, прибѣгаемъ къ помощи тригонометріи. Изъ $\triangle$-овъ LBD и MBD имѣемъ: $LD = h.\text{ctg}\,\frac{A}{2}$; $DM = h.\text{ctg}\,\frac{C}{2}$; складывая почленно 2 равенства, находимъ, что

$$LM = \frac{h.\sin\frac{A+C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}} = \frac{h.\sin 45^0}{\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}} = \frac{h.\sin 45^0}{\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\left(45^0 - \frac{A}{2}\right)}.$$

Замѣчая, что $LM = 2p$ и

$$\sin\frac{A}{2}\sin\left(45^0 - \frac{A}{2}\right) = \frac{\cos(A - 45^0) - \cos 45^0}{2},$$

получаемъ:

$$p = \frac{h\sqrt{2}}{2\cos(A - 45^0) - \sqrt{2}},$$

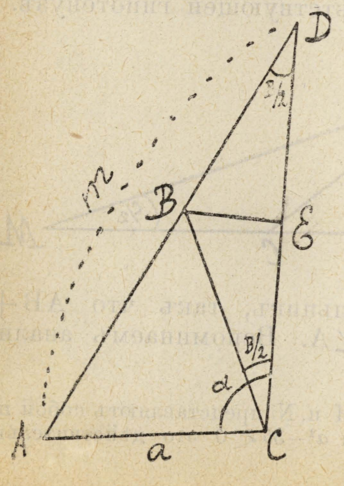
откуда

$$\cos(A - 45^0) = \frac{p + h}{p\sqrt{2}}.$$

2. Приведемъ два примѣра на рѣшеніе косоугольныхъ треугольниковъ.

Рѣшить треугольникъ по сторонѣ a, прилегающему углу A и суммѣ двухъ другихъ сторонъ, равной m.

Прилагаемый чертежъ напомнитъ о рѣшеніи этой задачи графическимъ способомъ.



Такъ какъ

$$\frac{AD + AC}{AD - AC} = \frac{\text{tg}\,\frac{\alpha + B/2}{2}}{\text{tg}\,\frac{\alpha - B/2}{2}},$$

то

$$\frac{m + a}{m - a} = \frac{\text{ctg}\,\frac{A}{2}}{\text{tg}\,\frac{\angle ACB}{2}};$$

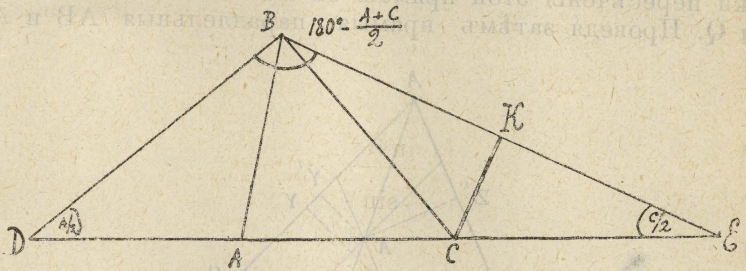
отсюда

$$\text{tg}\,\frac{\angle ACB}{2} = \frac{(m - a).\,\text{ctg}\,\frac{A}{2}}{m + a}.$$

3. Рѣшить треугольникъ по угламъ A и B и периметру $2p$.

Примѣняя тотъ же анализъ, что и для рѣшенія задачи № 1, находимъ, что

$$DE = 2p, \quad \angle D = \angle A/_2 \text{ и } \angle E = \angle C/_2.$$



На основаніи зависимости между сторонами и углами въ косоугольномъ треугольникѣ, изъ $\triangle$ DBE получаемъ:

$$\frac{2p}{BE} = \frac{\sin\frac{A+C}{2}}{\sin\frac{A}{2}},$$

откуда

$$BE = \frac{2p \cdot \sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}};$$

затѣмъ изъ $\triangle$ CKE находимъ CE:

$$CE = BC = \frac{p \cdot \sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2}}.$$

АНТИВЗАИМНЫЯ ТОЧКИ ТРЕУГОЛЬНИКА.

Дм. Ефремова (Иваново-Вознесенскъ).

Двѣ точки M и M′, разстоянія которыхъ x, y, z и x', y', z' отъ сторонъ основного треугольника ABC удовлетворяютъ условію

$$\frac{xx'}{\operatorname{tg}A} = \frac{yy'}{\operatorname{tg}B} = \frac{zz'}{\operatorname{tg}C},$$

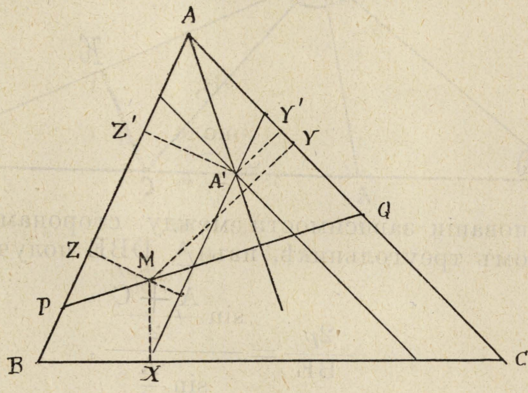
называются *антивзаимными точками* (*points antiréciproques*. Burgess.)[1]).

---

[1]) *Mathesis:* 1904, № 1. Сравн. *взаимныя* и *обратныя* точки треугольника. „Новая геометрія треугольника“ Д. Ефремова.

Пусть X, У, Z суть проекціи точки M на стороны треугольника BC, CA и AB (фиг. 1).

Для построенія точки M′, антивзаимной съ данною точкою M, проводимъ чрезъ M прямую, антипараллельную сторонѣ BC; точки пересѣченія этой прямой съ AB и AC обозначимъ чрезъ P и Q. Проведя затѣмъ прямыя, параллельныя AB и AC и от-



Фиг. 1.

стоящія отъ нихъ на разстоянія, соотвѣтственно равныя QУ и PZ, обозначимъ точку пересѣченія этихъ прямыхъ чрезъ A′ и докажемъ, что искомая точка M′ находится на прямой AA′.

Пусть Z′ и У′ суть проекціи точки A′ на AB и AC; такъ какъ [2])

$$\angle APQ = \angle C \text{ и } \angle AQP = \angle B,$$

то

$$A'Z' = QУ = MУ.\mathrm{ctg}B = \frac{y}{\mathrm{tg}B}$$

и

$$A'У' = PZ = MZ.\mathrm{ctg}C = \frac{z}{\mathrm{tg}C};$$

отсюда

$$\frac{A'Z'}{A'У'} = \frac{y}{\mathrm{tg}B} : \frac{z}{\mathrm{tg}C},$$

или

$$\frac{y.A'У'}{\mathrm{tg}B} = \frac{z.A'Z'}{\mathrm{tg}C}.$$

Сравнивъ это равенство съ равенствомъ

$$\frac{yy'}{\mathrm{tg}B} = \frac{zz'}{\mathrm{tg}C},$$

находимъ, что

$$\frac{y'}{A'У'} = \frac{z'}{A'Z'};$$

слѣдовательно, точка M′ находится на прямой AA′.

[2]) „Новая геометрія треугольника“ Д. Ефремова, гл. V.

Построивъ, подобно предыдущему, точку B′, получимъ искомую точку M′ въ пересѣченіи прямыхъ AA′ и BB′.

Примѣромъ антивзаимныхъ точекъ треугольника могутъ служить ортоцентръ треугольника H и его точка Лемуана (центръ симедіанъ) K.

Дѣйствительно, такъ какъ ортоцентръ треугольника H и описаннаго около него круга O суть изогональныя точки треугольника, то, обозначивъ ихъ разстоянія отъ сторонъ треугольника чрезъ x, y, z и x_1, y_1, z_1, получимъ [1])

$$xx_1 = yy_1 = zz_1;$$

но

$$x_1 = \mathrm{R.cosA}, \quad y_1 = \mathrm{R.cosB}, \quad z_1 = \mathrm{R.cosC},$$

гдѣ R—радіусъ круга, описаннаго около треугольника; поэтому

$$x.\mathrm{cosA} = y.\mathrm{cosB} = z.\mathrm{cosC}.$$

Разстоянія же x', y', z' точки Лемуана отъ сторонъ треугольника пропорціональны соотвѣтственнымъ сторонамъ его [2]), т. е.

$$\frac{x'}{a} = \frac{y'}{b} = \frac{z'}{c},$$

или

$$\frac{x'}{\mathrm{sinA}} = \frac{y'}{\mathrm{sinB}} = \frac{z'}{\mathrm{sinC}};$$

слѣдовательно,

$$\frac{xx'.\mathrm{cosA}}{\mathrm{sinA}} = \frac{yy'.\mathrm{cosB}}{\mathrm{sinB}} = \frac{zz'.\mathrm{cosC}}{\mathrm{sinC}},$$

или

$$\frac{xx'}{\mathrm{tgA}} = \frac{yy'}{\mathrm{tgB}} = \frac{zz'}{\mathrm{tgC}};$$

значитъ, *ортоцентръ треугольника и его точка Лемуана суть точки антивзаимныя.*

Двѣ совпадающія антивзаимныя точки треугольника называются *двойною антивзаимною точкою.*

Такъ какъ при совпаденіи антивзаимныхъ точекъ M и M′

$$x = x', \quad y = y', \quad z = z',$$

то равенства

$$\frac{xx'}{\mathrm{tgA}} = \frac{yy'}{\mathrm{tgB}} = \frac{zz'}{\mathrm{tgC}}$$

принимаютъ видъ

$$\frac{x^2}{\mathrm{tgA}} = \frac{y^2}{\mathrm{tgB}} = \frac{z^2}{\mathrm{tgC}},$$

---

[1]) Ibid. V, 18, 19.

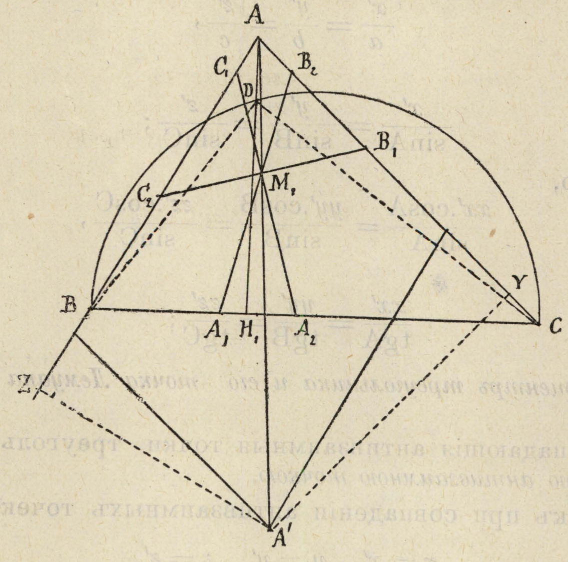
[2]) Ibid. VI, 24, 25.

или
$$\frac{x}{\sqrt{\operatorname{tg} A}}=\frac{y}{\sqrt{\operatorname{tg} B}}=\frac{z}{\sqrt{\operatorname{tg} C}};$$
отсюда видно, что *тупоугольный треугольникъ не имѣетъ двойныхъ антивзаимныхъ точекъ.*

Въ случаѣ прямоугольнаго тр-ка, у котораго $\angle A = 90^0$,
$$\frac{x}{\sqrt{\operatorname{tg} A}}=\frac{y}{\sqrt{\operatorname{tg} B}}=\frac{z}{\sqrt{\operatorname{tg} C}}=0,$$
что возможно только при $y=0$ и $z=0$; значитъ, *двойная антивзаимная точка прямоугольнаго треугольника совпадаетъ съ вершиною его прямого угла.*

Двойныя антивзаимныя точки остроугольнаго треугольника находятся слѣдующимъ построенiемъ.

Обозначимъ чрезъ D одну изъ точекъ пересѣченiя высоты треугольника AH_1 съ окружностью, имѣющею дiаметромъ сторону BC (фиг. 2), и проведемъ прямыя, параллельныя сторонамъ



Фиг. 2.

AB и AC и отстоящiя отъ нихъ на разстоянiя, соотвѣтственно равныя BD и CD; если эти прямыя пересѣкаются въ A′, то прямая AA′ проходитъ чрезъ двойную антивзаимную точку треугольника M_1.

Дѣйствительно, обозначивъ проекцiи точки A′ на AC и AB чрезъ У и Z, получимъ
$$A'Z = BD = \sqrt{BC.BH_1} = \sqrt{BC.AH_1.\operatorname{ctg} B}$$
и
$$A'У = CD = \sqrt{BC.CH_1} = \sqrt{BC.AH_1.\operatorname{ctg} C},$$

откуда

$$\frac{A'Y}{A'Z}=\frac{\sqrt{\operatorname{ctg} C}}{\sqrt{\operatorname{ctg} B}};$$

или

$$\frac{A'Y}{\sqrt{\operatorname{tg} B}}=\frac{A'Z}{\sqrt{\operatorname{tg} C}},$$

сравнивъ это равенство съ равенствомъ

$$\frac{Y}{\sqrt{\operatorname{tg} B}}=\frac{Z}{\sqrt{\operatorname{tg} C}},$$

находимъ, что

$$\frac{y}{A'Y}=\frac{z}{A'Z};$$

слѣдовательно, двойная антивзаимная точка (M_1) находится на прямой AA'.

Построивъ подобнымъ же построеніемъ точку B', получимъ искомую двойную точку въ пересѣченіи прямыхъ AA' и BB'.

Теорема: *Прямыя, антипараллельныя сторонамъ треугольника и проходящія чрезъ его двойную антивзаимную точку, образуютъ со сторонами треугольника равновеликіе равнобедренные треугольники.*

Чрезъ двойную антивзаимную точку M_1 треугольника ABC проведемъ прямыя A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2, соотвѣтственно антипараллельныя сторонамъ AB, BC и CA (фиг. 2). Такъ какъ, по построенію,

$$\angle M_1A_1A_2=\angle M_1A_2A_1=\angle A,$$

$$\angle M_1B_1B_2=\angle M_1B_2B_1=\angle B,$$

$$\angle M_1C_1C_2=\angle M_1C_2C_1=\angle C,$$

то треугольники $M_1A_1A_2$, $M_1B_1B_2$, $M_1C_1C_2$—равнобедренные.

Обозначивъ разстоянія точки M_1 отъ BC, CA и AB чрезъ x, y, z, получимъ:

$$\text{площ. } M_1A_1A_2=\frac{A_1A_2}{2}\cdot x=x^2.\operatorname{ctg}A=\frac{x^2}{\operatorname{tg}A},$$

$$\text{площ. } M_1B_1B_2=\frac{B_1B_2}{2}\cdot y=y^2.\operatorname{ctg}B=\frac{y^2}{\operatorname{tg}B},$$

$$\text{площ. } M_1C_1C_2=\frac{C_1C_2}{2}\cdot z=z^2.\operatorname{ctg}C=\frac{z^2}{\operatorname{tg}C};$$

но

$$\frac{x^2}{\operatorname{tg}A}=\frac{y^2}{\operatorname{tg}B}=\frac{z^2}{\operatorname{tg}C};$$

слѣдовательно, треугольники $M_1A_1A_2$, $M_1B_1B_2$, $M_1C_1C_2$—равновелики.

Классные опыты къ законамъ Кирхгофа и Джоуля—Ленца.

А. Вольфенсона (Варшава).

Доказательство законовъ Кирхгофа и Джоуля—Ленца путемъ измѣреній возможно лишь во внѣклассное время, при чемъ измѣренія должны производиться учащимися или при ближайшемъ ихъ участіи. Послѣ же вывода законовъ, для „подтвержденія“ ихъ, могутъ быть произведены слѣдующіе качественные опыты:

А) Простое развѣтвленіе.

1⁰ Въ каждомъ изъ полюсовъ батареи (10 Грене) зажимаются по двѣ недлинныя, средней толщины, изолированныя проволоки. Въ первую вѣтвь вводится ярко горящая лампочка. При замыканіи второй вѣтви лампочка гаснетъ.

2⁰ Вводимъ во вторую вѣтвь перемѣнное сопротивленіе. Сопротивленіе должно мѣняться быстро и удобно въ широкихъ предѣлахъ: таковымъ является электролитъ, напримѣръ, растворъ мѣднаго купороса въ прямоугольной ваннѣ съ мѣдными электродами въ размѣрѣ сѣченія ванны. При замыканіи второй вѣтви свѣтъ лампочки замѣтно (до $^1/_2$) убавляется. Станемъ сближать электроды въ жидкости: свѣтъ лампочки непрерывно ослабѣваетъ, и, при разстояніи 2—3 см. между электродами, лампочка потухаетъ.

В) Къ закону Джоуля—Ленца.

1⁰ Полюсы той же батареи непосредственно соединяются двумя послѣдовательно введенными тонкими проволоками, желѣзной и мѣдной, одинаковой длины и приблизительно одного діаметра. Какъ извѣстно, желѣзная проволока накаливается токомъ, мѣдная остается темной. *) Въ самомъ дѣлѣ, обозначая через $Q_ж$ и $Q_м$ количества теплоты, выдѣляющіяся въ желѣзной и мѣдной проволокахъ, черезъ $r_ж$ и $r_м$ ихъ сопротивленія, имѣемъ:

$$Q_ж : Q_м = r_ж : r_м .$$

2⁰ Тѣ же двѣ проволоки тщательно сплетаются концами, для одинаковости контакта, и вводятся непосредственно межъ зажимы батареи параллельно.

По закону Кирхгофа,

$$i_ж : i_м = r_м : r_ж .$$

Отсюда, принимая силу неразвѣтвленнаго тока за единицу,

$$i_ж = \frac{r_м}{r_м + r_ж}, \quad i_м = \frac{r_ж}{r_м + r_ж} .$$

---

*) Проволока можетъ расплавиться: чтобы не усложнять цѣпи введеніемъ реостата, медленно опускаемъ цинки батареи или цинкъ послѣдняго элемента.

По закону Джоуля—Ленца,

$$Q_ж = k \frac{r_м^2 \cdot r_ж}{(r_м + r_ж)^2}, \quad Q_м = k \frac{r_ж^2 r_м}{(r_м + r_ж)^2},$$

откуда

$$Q_ж : Q_м = r_м : r_ж.$$

Накаливается мѣдная проволока.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 484 (4 сер.). Окружность радіуса R раздѣлена на n равныхъ частей и одна изъ точекъ дѣленія A соединена хордами со всѣми остальными точками дѣленія. Найти предѣлъ средняго ариѳметическаго этихъ хордъ при возрастаніи n до безконечности.

Л. Ямпольскій (Braunschweig).

№ 485 (4 сер.). Рѣшить уравненіе

$$2\sqrt{3\sin x} = \frac{3\operatorname{tg} x}{2\sqrt{\sin x} - 1} - \sqrt{3}.$$

В. Гейманъ (Ѳеодосія).

№ 486 (4 сер.). Построить треугольникъ ABC по основанію a и медіанѣ m_a, проведенной къ нему, зная длину l разстоянія между точками встрѣчи медіанъ и высотъ.

Н. Сагателянцъ (Шуша).

№ 487 (4 сер.). По радіусу R круга и по сторонѣ a_{3n} вписаннаго въ него правильнаго многоугольника о $3n$ сторонахъ вычислить сторону a_{2n} правильнаго вписаннаго многоугольника о $2n$ сторонахъ.

Н. Агрономовъ (Вологда).

№ 488 (4 сер.). Доказать, что при всякихъ цѣлыхъ значеніяхъ m и n число

$$mn[m^3 - n^3 - mn(m - n)](m + n)$$

дѣлится на 30.

Н. Пѣтуховъ (Екатеринбургъ).

№ 489 (4 сер.). Струна, длиною l, даетъ основной звукъ, отвѣчающій N колебаніямъ въ секунду; при помощи кобылки ее дѣлятъ на двѣ части x и $l - x$, дающія соотвѣтственно n и n' колебаній въ секунду. Найти соотношеніе, которымъ связаны n, n' и N при всякихъ l и x.

Обобщить задачу на случай раздѣленія струны на большее число частей.

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 376 (4 сер.). *Рѣшить систему уравненій*

$$\sqrt[3]{6x+5}-\sqrt[3]{4x-3y}=1,$$

$$6x+3y=4.$$

Подставивъ въ первое уравненіе $4-6x$ вмѣсто $3y$ изъ второго, находимъ:

$$\sqrt[3]{6x+5}-\sqrt[3]{10x-4}=1 \qquad (1).$$

Полагая

$$\sqrt[3]{6x+5}=u, \quad \sqrt[3]{10x-4}=v \qquad (2),$$

получимъ:

$$6x+5=u^3, \quad 10x-4=v^3 \qquad (3)$$

и (см. предложенное уравненіе и (2))

$$u-v=1 \qquad (4).$$

Исключая x между уравненіями (3) находимъ: $5u^3-25=3v^3+12$. Подставляя въ это уравненіе (см. (4)) $u-1$ вмѣсто v, приходимъ къ уравненію

$$5u^3-25=3(u-1)^3+12, \text{ или } 2u^3+9u^2-9u-34=0 \qquad (5).$$

Представивъ уравненіе (5) въ видѣ $2u^3-16+9u^2-9u-18=0$, или

$$2(u^3-8)+9(u^2-u-2)=2(u-2)(u^2+2u+4)+9(u-2)(u+1)=$$

$$=(u-2)[2(u^2+2u+4)+9(u+1)]=(u-2)(2u^2+13u+17)=0,$$

находимъ, что либо $u-2=0$, либо $2u^2+13u+17=0$, откуда

$$u_1=2, \; u_2=\frac{-13+\sqrt{33}}{4}; \quad u_3=\frac{-13-\sqrt{33}}{4} \qquad (6).$$

Подставляя полученныя (см. (6)) значенія u въ первое изъ равенствъ (2), находимъ три значенія для x, для каждаго изъ которыхъ найдемъ соотвѣтствующее значеніе y при помощи второго изъ данныхъ уравненій.

Такимъ образомъ получаемъ рѣшенія:

$$x_1=\frac{1}{2}; \; y_1=\frac{1}{3}; \; x_2=\frac{-317+45\sqrt{33}}{32}; \; y_2=\frac{1015-135\sqrt{33}}{48};$$

$$x_3=\frac{-317-41\sqrt{33}}{32}; \quad y_3=\frac{1015+135\sqrt{33}}{48}.$$

В. Винокуровъ (Калязинъ); *Степановъ* (Александровскъ); *А. Колегаевъ* (Короча); *Х. Мнацакановъ* (Тифлисъ); *Я. Подрядовъ* (Троицкъ); *Я. Тамаркинъ* (Спб.); *Н. Пѣтуховъ* (Екатеринбургъ); *А. Чесскій* (Слуцкъ); *Н. Готлибъ* (Митава); *В. Верроntz* (Москва); *Н. Сагателовъ* (Шуша); *Н. Доброгаевъ* (Немировъ).

№ 399 (4 сер.). *Поршень вертикальнаго цилиндра предназначенъ для поднятія груза. На этотъ поршень дѣйствуютъ паромъ такой температуры, при которой упругость пара уравновѣшиваетъ давленіе столба ртути въ 2 метра высоты. Опредѣлить діаметръ поршня при условіи, чтобы онъ могъ поднять грузъ въ одну тонну.*

Обозначимъ діаметръ поршня въ сантиметрахъ черезъ x, а атмосферное давленіе во время опыта, выраженное въ сантиметрахъ ртутнаго столба, черезъ h. Давленіе пара на поршень выражается, по условію, вѣсомъ ртутнаго столба, объемъ котораго равенъ $\frac{\pi x^2}{4}\cdot 200$ куб. сантиметровъ, а вѣсъ — $\frac{\pi x^2}{4}\cdot 200.13{,}596$ граммовъ (13,596 — плотность ртути). Это давленіе должно уравновѣсить вѣсъ груза въ 1000 килограммовъ (1 метрическая тонна = 1000 килограммовъ), или 1000000 граммовъ да еще давленіе атмосферы на поршень, равное $\frac{\pi x^2}{4}\cdot h.13{,}596$ граммовъ. Поэтому

$$200\,.\,13{,}596\cdot\frac{\pi x^2}{4} = 1000000 + \frac{\pi x^2}{4}\cdot h\,.\,13{,}596,$$

откуда

$$x = \sqrt{\frac{4000000}{\pi\,.\,13{,}596\,.\,(200-h)}} \qquad (1).$$

Полагая $h = 76$ сантиметровъ, находимъ изъ формулы (1), что $x = 27{,}5$ сантиметра, (съ избыткомъ, съ ошибкой меньше 0,05 сант.).

Л. Ямпольскій (Одесса); *С. Андреевъ.*

№ 405 (4 сер.). *Съ аэростата пущенъ въ море безъ начальной скорости полый желѣзный шаръ. Шаръ всплылъ на поверхность воды черезъ* 25 *секундъ послѣ того, какъ онъ въ нее погрузился. Опредѣлить высоту, на которой находился аэростатъ, если дано, что вѣсъ шара равенъ* 2 *килограммамъ, объемъ его равенъ двумъ литрамъ, а плотность морской воды равна* 1,1. *Треніе шара о воздухъ и воду не принимается въ разсчетъ.*

Пусть h — высота аэростата надъ поверхностью моря, v — скорость, которую имѣетъ шаръ въ моментъ погруженія въ море. Вѣсъ воды, вытѣсняемой шаромъ, выраженный въ граммахъ, равенъ (2 литра = 2 куб. децим. = = 2000 куб. сант.) 2000.1,1, т. е. 2200 граммовъ, а вѣсъ шара, по условію равенъ 2000 граммовъ; слѣдовательно, по закону Архимеда, шаръ, съ момента погруженія въ воду, будетъ двигаться равнозамедленно подъ вліяніемъ постоянной силы, равной вѣсу 200 граммовъ, т. е. силы, равной $200g$ динъ, гдѣ g — ускореніе силы тяжести въ мѣстѣ опыта. Эта сила сообщаетъ шару ускореніе j, опредѣляемое равенствомъ

$$200g = 2000j,$$

гдѣ 2000 — масса шара, выраженная въ граммахъ, такъ что

$$j = \frac{g}{10} \qquad (2).$$

Такимъ образомъ движеніе шара въ водѣ опредѣляется формулой (см. (2))

$$s = vt - \frac{gt^2}{10.2} \qquad (3),$$

гдѣ s — пройденное пространство, отсчитанное отъ поверхности моря, а t — число секундъ, отсчитанное отъ момента погруженія шара въ воду. По условію при $t = 25$, $s = 0$, такъ что (см. (3))

$$v\,.\,25 - \frac{g\,.\,25^2}{10.2} = 0, \text{ откуда } v = \frac{5g}{4} \qquad (4).$$

Но по формулѣ равноускореннаго движенія подъ вліяніемъ силы тяжести

$$v = \sqrt{2gh}, \text{ откуда } h = \frac{v^2}{2g}, \text{ или (см. (4))}$$

$$h = \frac{25}{32}\cdot g = 7{,}66 \text{ метра (съ недостаткомъ, съ ошибкой } < 0{,}005),$$

если принять $g = 981$ сантим. Рѣшая задачу, мы предположили, что море было на мѣстѣ опыта достаточно глубоко, чтобы шаръ не ударился о дно, а также пренебрегли особенностями того періода движенія, пока шаръ двигался отъ прикосновенія къ поверхности моря до окончательнаго погруженія.

С. Андреевъ.

№ 427 (4 сер.). *Рѣшить систему уравненій*

$$\sqrt[3]{\frac{x+y}{x-y}}-\sqrt[3]{\frac{x-y}{x+y}}=1{,}5,$$

$$x^2-y^2=32.$$

Возвышая въ кубъ первое изъ предложенныхъ уравненій, находимъ:

$$\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}-3\sqrt[3]{\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{x-y}{x+y}}+3\sqrt[3]{\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{27}{8},$$

или

$$\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{x^2-y^2}-3\sqrt[3]{\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{x-y}{x+y}}\left(\sqrt[3]{\frac{x+y}{x-y}}-\sqrt[3]{\frac{x-y}{x+y}}\right)=\frac{27}{8}\qquad(1).$$

Замѣняя на основаніи предложенныхъ уравненій въ равенствѣ (1) выраженія

x^2-y^2 и $\sqrt[3]{\frac{x-y}{x+y}}-\sqrt[3]{\frac{x-y}{x+y}}$ соотвѣтственно черезъ 32 и 1,5, получимъ:

$$\frac{4xy}{32}-3\cdot\frac{3}{2}=\frac{27}{8},\ \text{откуда}\ xy=63\qquad(2).$$

Введемъ обозначенія:

$$x^2=u,\quad -y^2=v\qquad(3).$$

Тогда, на основаніи уравненія $x^2-y^2=32$, и уравненія (см. (2))

$$x^2.(-y^2)=63^2$$

получимъ, что u и v суть корни квадратнаго уравненія

$$t^2-32t-63^2=0,\ \text{откуда}\ t_1=81,\quad t_2=-49,\ \text{т. е. (см. (3))}$$

$$x^2=81,\quad y^2=49\ (4)\ \text{или}\ x^2=-49,\quad y^2=-81\ (5).$$

Изъ равенствъ (4) и (5) находимъ, что $x=\pm 9$, $y=\pm 7$ или $x=\pm 7i$, $y=\pm 9i$, гдѣ $i=\sqrt{-1}$. Посредствомъ подстановки убѣждаемся, что дѣйствительно годныя рѣшенія суть слѣдующія:

$$x_1=9,\ y_1=7;\ x_2=-9,\ y_2=-7;\ x_3=7i,\ y_3=-9i;\ x_4=-7i,\ y_4=9i.$$

В. Ковальскій (Спб.); *В. Винокуровъ* (Калязинъ); *С. Бѣликовъ* (Короча); *А. Колегаевъ* (Короча); *Ѳ. Бублейниковъ* (Екатеринодаръ); ***А. Т—въ*** и ***М. К—ій*** (Вятка).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса 16-го Іюня 1904 г.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66.