№№ 450—451.

ВѢСТНИКЪ

ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

издаваемый

В. А. Гернетомъ

подъ редакціей

Приватъ-Доцента В. Ф. Кагана.

XXXVIII-го Семестра №№ 6—7-й.

ОДЕССА.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66.
1907

ВЫШЛИ ВЪ СВѢТЪ СЛѢДУЮЩІЯ ИЗДАНІЯ:

1 и 2. Г. АБРАГАМЪ, проф. **СБОРНИКЪ ЭЛЕМЕНТАРНЫХЪ ОПЫТОВЪ ПО ФИЗИКѢ**, составленный при участіи многихъ профессоровъ и преподавателей физики. Переводъ съ французскаго подъ редакціей Приватъ-доцента *Б. П. Вейнберга*.

Часть I: Работы въ мастерской. Различные рецепты—Геометрія. Механика—Гидростатика. Гидродинамика. Капиллярность—Теплота—Числовыя таблицы.

Учен. Ком. М. Н. Пр. допущено въ учен. библ. средн. учебн. заведеній, учит. семинарій и гор. по Положенію 31 мая 1872 г., училищъ, а равно и въ безп. нар. читальни и библіотеки.

XVI+272 стр. Со многими (свыше 300) рисунками. Цѣна 1 р. 50 к.

Часть II: Звукъ—Свѣтъ—Электричество—Магнитизмъ.

LXXV+434 стр. Со многими (свыше 400) рисунками. Цѣна 2 р. 75 к.

3. С. АРРЕНІУСЪ, проф. **ФИЗИКА НЕБА.** Разрѣшенный авторомъ и дополненный по его указаніямъ переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей Приватъ-доцента *А. Р. Орбинскаго*. Содержаніе: Неподвижныя звѣзды—Солнечная система—Солнце—Планеты, ихъ спутники и кометы—Космогонія.

VIII+250 стр. Съ 66 черными и 2 цвѣтными рисунками въ текстѣ и 1 черной и 1 цвѣтной отдѣльными таблицами. Цѣна 2 руб.

Учен. Ком. М. Н. П. допущено въ учен., старш. возр., библ. средн. учебн. заведеній, а равно и въ безпл. нар. библ. и читальни.

4. **УСПѢХИ ФИЗИКИ**, сборникъ статей о важнѣйшихъ открытіяхъ послѣднихъ лѣтъ въ общедоступномъ изложеніи. Подъ редакціей „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики". Содержаніе: *Винеръ*, Расширеніе нашихъ чувствъ—*Пильчиковъ*. Радій и его лучи—*Дебіернъ*, Радій и радіоактивность—*Рихарцъ*, Электрическія волны—*Слаби*, Телеграфированіе безъ проводовъ—*Шмидтъ*, Задача объ элементарномъ веществѣ (основанія теоріи электроновъ).

IV+144 стр. Съ 41 рисункомъ и 2 таблицами. Изд. 2-е. Цѣна 75 коп.

Учен. Ком. М. Н. П. первое изданіе допущено въ учен., старш. возр., библ. средн. учебн. заведеній, а равно и въ безпл. нар. библ. и читальни.

5. Ф. АУЭРБАХЪ, проф. **ЦАРИЦА МІРА И ЕЯ ТѢНЬ.** Общедоступное изложеніе основаній ученія объ *энергіи и энтропіи*. Переводъ съ нѣмецкаго. Съ предисловіемъ *Ш. Э. Гильома*, Вице-Директора Международнаго Бюро Мѣръ и Вѣсовъ.

VIII+56 стр. Изд. 2-е. Цѣна 40 к.

Учен. Ком. М. Н. П. первое изданіе допущено въ учен., старш. возр., библ. средн. учебн. заведеній, а равно и въ безпл. нар. библ. и читальни.

6. С. НЬЮКОМЪ, проф. **АСТРОНОМІЯ ДЛЯ ВСѢХЪ**. Переводъ съ англійскаго. Съ предисловіемъ Приватъ-доцента *А. Р. Орбинскаго*.

XXIV+285 стр. Съ портретомъ Автора, 64 рис. и 1 таблицей Цѣна 1 р 50 к.

Учен. Ком. М. Н. П. допущено въ учен., старш. возр., библ. средн. учебн. заведеній, а равно и въ безпл. нар. библ. и читальни.

7. Г. ВЕБЕРЪ и І. ВЕЛЬШТЕЙНЪ. **ЭНЦИКЛОПЕДІЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ. Томъ I. Энциклопедія элементарной алгебры,** обраб. проф. *Веберомъ*. Переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей Приватъ-доцента *В. Ф. Кагана*. Книга I, **Основанія ариѳметики**, гл. I—X. Книга II. **Алгебра**, гл. XI—XIX. Книга III. **Анализъ**. гл. XX—XXVIII 650 стр. **Цѣна 3 р. 50 к.**

Выпусками: вып. I, стр. 256, ц. 1 р. 50 к., вып. II окончаніе, ц. 2 р.

8. Дж. ПЕРРИ, проф. **ВРАЩАЮЩІЙСЯ ВОЛЧОКЪ.** Публичная лекція. Переводъ съ англійскаго. VII+96 стр. съ 63 рисунками. **Цѣна 60 к.**

Учен. Ком. М. Н. Пр. признана заслуживающей вниманія при пополненіи учен. библ. средн. учебн. заведеній.

9. Р. ДЕДЕКИНДЪ, проф. **НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ИРРАЦІОНАЛЬНЫЯ ЧИСЛА.** Переводъ Приватъ-доцента *С. Шатуновскаго* съ приложеніемъ его статьи **Доказательство существованія трансцендентныхъ чиселъ.** 40 стр. **Цѣна 40 к.**

учебн. Учен. Ком. М. Н. Пр. признана залуживающей вниманія при пополненіи учен. библ. средн. учебн. заведеній..

10. К. ШЕЙДЪ, проф. **ПРОСТЫЕ ХИМИЧЕСКІЕ ОПЫТЫ для юношества.** Переводъ съ нѣмецкаго, подъ редакціей Лаборанта Новороссійскаго Университета *Е. С. Ельчанинова*. 192 стр. съ 79 рисунками. **Цѣна 1 р. 20 к.**

11. Э. ВИХЕРТЪ, проф. **ВВЕДЕНІЕ ВЪ ГЕОДЕЗІЮ.** Лекціи для преподавателей средн. учебн. заведеній. Переводъ съ нѣмецкаго.

80 стр. съ 41 рис. Цѣна 35 к.

СЪ ТРЕБОВАНІЯМИ ОБРАЩАТЬСЯ: КНИГОИЗДАТЕЛЬСТВО „МАТЕЗИСЪ"

Одесса. Типографія М. Шпенцера, Новосельская 66.

XXXVIII Сем. №№ 6—7.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

Элементарной Математики.

№№ 440—441.

5-го Декабря 1907 г

скончался знаменитый физикъ

серъ **Вилліамъ Томсонъ**

(лордъ Кельвинъ)

и погребенъ въ Вестминстерскомъ аббатствѣ рядомъ съ Исаакомъ Ньютономъ.

Новое сочиненіе Архимеда. *)

Проф. І. Гейберга.

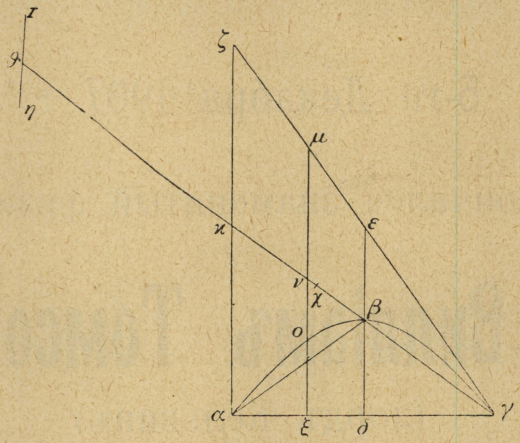
*(Продолженіе *).*

[Все это уже раньше было] мною сообщено. [Кромѣ того, я еще воспользуюсь слѣдующимъ положеніемъ, которое можетъ быть легко доказано].

[Если величины двухъ рядовъ въ порядкѣ ихъ расположенія попарно пропорціональны, далѣе,] если величины [перваго ряда] —всѣ или нѣкоторыя изъ нихъ—находятся въ произвольномъ, но одинаковомъ отношеніи [къ соотвѣтствующимъ величинамъ третьяго ряда], а величины второго находятся въ томъ же отношеніи къ соотвѣтствующимъ величинамъ [четвертаго ряда], то сумма величинъ изъ перваго ряда относится къ суммѣ величинъ, взятыхъ изъ третьяго, какъ сумма соотвѣтствующихъ величинъ второго ряда относится къ суммѣ соотвѣтственно взятыхъ величинъ четвертаго ряда. [8]) [De conoid. 1].

1.

Пусть [фиг. 1] $\alpha\beta\gamma$ будетъ параболическій сегментъ, ограниченный прямой $\alpha\gamma$ и параболой $\alpha\beta\gamma$; положимъ, что прямая $\alpha\gamma$ раздѣлена въ точкѣ δ пополамъ, а прямая $\delta\beta\varepsilon$ параллельна діа-



Фиг. 1.

метру и проведены прямыя $\alpha\beta$, $\beta\gamma$. Сегментъ $\alpha\beta\gamma$ составляетъ въ такомъ случаѣ $\frac{4}{3}$ треугольника $\alpha\beta\gamma$.

[8]) Переводъ совершенно точенъ, и нѣкоторая шереховатость текста должна быть отнесена къ оригиналу; она имѣетъ своимъ источникомъ то обстоятельство, что недостаточно выдѣленъ и выясненъ случай, когда лишь нѣкоторыя величины перваго ряда пропорціональны величинамъ третьяго ряда; тогда нужно брать сумму только этихъ именно величинъ. *Прим. ред.*

*) См. № 445 „Вѣстника“.

Изъ точекъ α, γ мы проводимъ $\alpha\zeta \parallel \delta\beta\varepsilon$ и касательную $\gamma\zeta$, продолжаемъ [$\gamma\beta$ до $\varkappa$ и откладываемъ $\varkappa\vartheta = \gamma\varkappa$]. Представимъ себѣ $\gamma\vartheta$, какъ коромысло вѣсовъ, центръ котораго есть $\varkappa$, и произвольную прямую $\mu\xi \parallel \varepsilon\delta$. Такъ какъ $\gamma\beta\alpha$ есть парабола, $\gamma\zeta$ касательная и $\gamma\delta$ ордината, то $\varepsilon\beta = \beta\delta$, что доказано въ Элементахъ [9]) [т. е. въ ученіи о коническихъ сѣченіяхъ; срав. „*Quadrat. parab.*“ 2. [10])]. На этомъ основаніи и такъ какъ $\zeta\alpha$ и $\mu\xi \parallel \varepsilon\delta$, то $\mu\nu = \nu\xi$, $\zeta\varkappa = \varkappa\alpha$. И такъ какъ $\gamma\alpha : \alpha\xi = \mu\xi : \xi o$ [11]) (тоже доказано въ вспомогательной теоремѣ [срав. Quadrat. parab. 5]), $\gamma\alpha : \alpha\xi = \gamma\varkappa : \varkappa\nu$ и $\gamma\varkappa = \varkappa\vartheta$, то $\vartheta\varkappa : \varkappa\nu = \mu\xi : \xi o$. Такъ какъ $\mu\nu = \nu\xi$, то ν есть центръ тяжести прямой $\mu\xi$; если мы поэтому отложимъ отрѣзокъ $\tau\eta = \xi o$, а за его центръ тяжести возьмемъ точку ϑ, такъ что $\tau\vartheta = \vartheta\eta$, то прямая $\tau\vartheta\eta$ будетъ находиться въ равновѣсіи съ $\mu\xi$ въ томъ мѣстѣ, гдѣ она находится. Дѣйствительно, отрѣзокъ $\vartheta\nu$ раздѣленъ въ обратномъ отношеніи вѣсовъ $\tau\eta$ и $\mu\xi$, т. е. $\vartheta\varkappa : \varkappa\nu = \mu\xi : \eta\tau$, поэтому $\varkappa$ будетъ центромъ тяжести двухъ соединенныхъ вмѣстѣ вѣсовъ. Всѣ прямыя, которыя проведены параллельно $\varepsilon\delta$ въ треугольникѣ $\zeta\alpha\gamma$ въ томъ мѣстѣ, гдѣ онѣ находятся, будутъ точно такъ же находиться въ равновѣсіи со своими частями, отрѣзанными параболой, когда послѣдніе будутъ перенесены въ ϑ, и такимъ образомъ

---

[9]) Отрѣзокъ $\varepsilon\delta$ есть такъ называемая подкасательная на оси параболы; она дѣлится вершиной параболы β пополамъ. *Прим. ред.*

[10]) Сочиненіе Архимеда „О квадратурѣ параболы“. *Прим. ред.*

[11]) Основное свойство параболы заключается въ томъ, что отношеніе $\frac{\alpha\delta^2}{\beta\delta}$ представляетъ собой постоянную величину (т. н. параметръ параболы), т. е. не зависитъ отъ выбора точки α. Архимедъ доказываетъ это свойство, исходя изъ опредѣленія параболы, какъ сѣченія конической поверхности плоскостью, параллельной оси (О квадратурѣ параболы, предл. 4); аналитически это свойство выражается уравненіемъ параболы $y^2 = px$ ($\alpha\delta = y$, $\beta\delta = x$). Если мы поэтому черезъ точку o проведемъ прямую $o\lambda$ (на чертежѣ не панесенную параллельно $\alpha\gamma$ и пересѣкающую прямую $\beta\delta$ въ точкѣ λ, то

$$\frac{o\lambda^2}{\lambda\beta} = \frac{\alpha\delta^2}{\beta\delta} \text{ или } \frac{\beta\delta}{\lambda\beta} = \frac{\alpha\delta^2}{o\lambda^2}.$$

Отсюда

$$\frac{\beta\delta - \lambda\beta}{\beta\delta} = \frac{\alpha\delta^2 - o\lambda^2}{\alpha\delta^2} = \frac{(\alpha\delta + o\lambda)(\alpha\delta - o\lambda)}{\alpha\delta^2}.$$

Но

$$\alpha\delta + o\lambda = \alpha\delta + \xi\delta = \xi\delta + \delta\gamma = \xi\gamma,$$
$$\alpha\delta - o\lambda = \alpha\delta - \xi\delta = \alpha\xi,$$
$$\beta\delta - \lambda\beta = \lambda\delta = o\xi.$$

Поэтому

$$\frac{o\xi}{\beta\delta} = \frac{\alpha\xi . \xi\gamma}{\alpha\delta^2}.$$

Съ другой стороны

$$\frac{\nu\xi}{\beta\delta} = \frac{\gamma\xi}{\delta\gamma} = \frac{\gamma\xi}{\alpha\delta}.$$

Поэтому

$$\frac{o\xi}{\nu\xi} = \frac{\alpha\xi}{\alpha\delta}.$$

А такъ какъ $\mu\xi = 2\nu\xi$, $\alpha\gamma = 2\alpha\delta$, то

$$\frac{o\xi}{\mu\xi} = \frac{\alpha\xi}{\alpha\gamma},$$

что и требовалось доказать. *Прим. ред.*

$\varkappa$ будетъ центромъ тяжести обоихъ соединенныхъ вмѣстѣ вѣсомыхъ фигуръ. И такъ какъ треугольникъ $\gamma\zeta\alpha$ состоитъ изъ прямыхъ въ треугольникѣ $\gamma\zeta\alpha$, а параболическій сегментъ—изъ разсматриваемыхъ прямыхъ ξo въ сегментѣ $\alpha\beta\gamma$, то треугольникъ $\zeta\alpha\gamma$ въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ находится, будетъ въ равновѣсіи относительно точки $\varkappa$ съ параболическимъ сегментомъ, который будетъ перенесенъ такъ, чтобы точка ϑ была его центромъ тяжести, и при этомъ $\varkappa$ будетъ центръ тяжести обоихъ соединенныхъ вмѣстѣ вѣсомыхъ фигуръ. Теперь мы раздѣлимъ $\gamma\varkappa$ въ χ такимъ образомъ, чтобы $\gamma\varkappa = 3\varkappa\chi$; тогда χ будетъ центромъ тяжести треугольника $\alpha\zeta\gamma$, что доказано въ ученіи о равновѣсіи [срав. De plan. aequil. I, 15, p. 186, 3 съ Eutokios. p 320, 5 и сл. [12])]. Треугольникъ $\zeta\alpha\gamma$ въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ находится, будетъ теперь въ равновѣсіи относительно точки $\varkappa$ съ сегментомъ $\beta\alpha\gamma$, когда этотъ сегментъ будетъ перенесенъ такъ, чтобы ϑ была его центромъ тяжести, а центромъ тяжести треугольника $\zeta\alpha\gamma$ будетъ χ; поэтому $\triangle\alpha\zeta\gamma$ относится къ сегменту $\alpha\beta\gamma$, перенесенному такъ, чтобы ϑ была его центромъ тяжести, какъ $\vartheta\varkappa:\varkappa\chi$; но $\vartheta\varkappa = 3\varkappa\chi$, поэтому и $\triangle\alpha\zeta\gamma =$ 3 сегментамъ $\alpha\beta\gamma$; но $\triangle\zeta\alpha\gamma$ равенъ также 4 $\triangle\alpha\beta\gamma$, такъ какъ $\zeta\varkappa = \varkappa\alpha$ и $\alpha\delta = \delta\gamma$; поэтому сегментъ $\alpha\beta\gamma = \frac{4}{3} \triangle\alpha\beta\gamma$. Это станетъ ясно . . . . Посредствомъ всего, здѣсь теперь сказаннаго, эта теорема не доказана, но изложенныя разсужденія все-таки убѣждаютъ, что выводъ правиленъ. Такъ какъ мы видѣли, что сдѣланный выводъ не доказанъ, но предполагали, что онъ все-таки вѣренъ, то мы придумали для него геометрическое доказательство, которое раньше уже сообщили и которое ниже еще приведемъ.

II.

Что шаръ въ четыре раза больше конуса, который имѣетъ основаніемъ большой кругъ этого шара и высота котораго равна радіусу этого шара, и что цилиндръ, основаніемъ котораго служитъ тоже большой кругъ шара, а высота равна его діаметру, въ полтора раза больше, чѣмъ шаръ, можно уяснить посредствомъ названнаго метода слѣдующимъ образомъ [13]). Положимъ, что

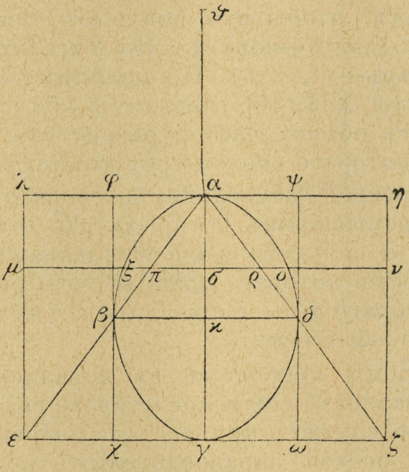
---

[12]) Первая ссылка относится къ сочиненію Архимеда „О равновѣсіи плоскихъ фигуръ", о которомъ уже упоминалось выше; вторая—къ комментатору Архимеда Евтоцію Асколонскому, жившему въ IV вѣкѣ.

Нужно имѣть въ виду, что вставки въ прямоугольныхъ скобкахъ принадлежатъ Гейбергу. *Прим. ред.*

[13]) Эти предложенія доказаны Архимедомъ въ сочиненіи „О сферѣ и цилиндрѣ". Архимедъ въ такой мѣрѣ дорожилъ установленными имъ соотношеніями между объемами шара, конуса и цилиндра, что одно изъ нихъ, а именно: отношенія между объемами шара, конуса, у котораго высота и радіусъ основанія равны діаметру этого шара, и цилиндра, у котораго радіусъ основанія равенъ діаметру, а высота равна радіусу этого шара, выражающіяся числами 1: 2: 3, завѣщалъ изобразить на своей могилѣ. *Прим. ред.*

намъ данъ (фиг. 2) шаръ, $\alpha\beta\gamma\delta$ въ которомъ есть большой кругъ, а $\alpha\gamma$, $\beta\delta$ суть два взаимно-перпендикулярныхъ діаметра; возьмемъ въ этомъ шарѣ кругъ діаметра $\beta\delta$, перпендикулярный къ кругу $\alpha\beta\gamma\delta$, на этомъ перпендикулярномъ кругѣ построимъ конусъ съ вершиной въ α и затѣмъ продолжимъ его поверхность; этотъ конусъ пересѣчемъ плоскостью, проходящей черезъ γ параллельно основанію; и такимъ образомъ получимъ въ сѣченіи кругъ, перпендикулярный къ $\alpha\gamma$, діаметръ котораго будетъ $\varepsilon\zeta$; на этомъ кругѣ построимъ цилиндръ, ось котораго есть $\alpha\gamma$, а боковыми линіями [14]) служатъ $\varepsilon\lambda$ и $\zeta\eta$; продолжимъ $\gamma\alpha$, отложимъ $\alpha\vartheta=\gamma\alpha$ и представимъ себѣ $\gamma\vartheta$ въ видѣ коромысла вѣсовъ, центромъ котораго служитъ α; проведемъ далѣе произвольную прямую $\mu\nu$ параллельно $\beta\delta$; она



Фиг. 2

пересѣкаетъ кругъ $\alpha\beta\gamma\delta$ въ ξ и o, діаметръ $\alpha\gamma$ въ σ, прямую $\alpha\varepsilon$ въ π и $\alpha\zeta$ въ ρ; черезъ прямую $\mu\nu$ проведемъ плоскость перпендикулярно къ $\alpha\gamma$; въ сѣченіи съ цилиндромъ она образуетъ кругъ діаметра $\mu\nu$, въ сѣченіи съ шаромъ $\alpha\beta\gamma\delta$—кругъ діаметра ξo и съ конусомъ $\alpha\varepsilon\zeta$—кругъ діаметра $\pi\rho$. Такъ какъ $\gamma\alpha\times\alpha\sigma=\mu\sigma\times\sigma\pi$ (ибо $\alpha\gamma=\sigma\mu$, $\alpha\sigma=\pi\sigma$) и $\gamma\alpha\times\alpha\sigma=\alpha\xi^2=\xi\sigma^2+\sigma\pi^2$, то $\mu\sigma\times\sigma\pi=\xi\sigma^2+\sigma\pi^2$. Далѣе, такъ какъ $\gamma\alpha:\alpha\sigma=\mu\sigma:\sigma\pi$ и $\gamma\alpha=\alpha\vartheta$, то $\vartheta\alpha:\alpha\sigma=\mu\sigma:\sigma\pi=\mu\sigma^2:\mu\sigma\times\sigma\pi$. Но было доказано, что $\xi\sigma^2+\sigma\pi^2=\mu\sigma\times\sigma\pi$; слѣдовательно, $\alpha\vartheta:\alpha\sigma=\mu\sigma^2:\xi\sigma^2+\sigma\pi^2$. Но $\mu\sigma^2:\xi\sigma^2+\sigma\pi^2=\mu\nu^2:\xi o^2+\pi\rho^2$ равно отношенію круга діаметра $\mu\nu$ въ цилиндрѣ къ суммѣ круга, діаметромъ котораго служитъ $\pi\rho$, въ конусѣ и круга, діаметромъ котораго служитъ ξo, въ шарѣ; или $\vartheta\alpha:\alpha\sigma$, какъ кругъ въ цилиндрѣ относится къ суммѣ круга въ шарѣ и круга въ конусѣ. Итакъ, кругъ въ цилиндрѣ въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ находится, будетъ въ равновѣсіи относительно точки α съ обоими кругами, діаметрами которыхъ служатъ ξo и $\pi\rho$, когда эти круги будутъ перенесены въ ϑ такъ, чтобы ϑ была центромъ тяжести обоихъ. Такимъ же самымъ образомъ можетъ быть доказано, что когда мы проведемъ въ параллелограммѣ $\zeta\lambda$ другую прямую $\parallel$ $\varepsilon\zeta$

[14]) образующими

и через нее проведемъ плоскость, перпендикулярную къ $\alpha\gamma$, то образовавшійся въ цилиндрѣ кругъ въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ находится, будетъ въ равновѣсіи относительно точки α съ двумя образовавшимися въ шарѣ и конусѣ кругами, когда они будутъ перенесены и помѣщены въ точкѣ ϑ на коромыслѣ вѣсовъ такимъ образомъ, чтобы ϑ была центромъ тяжести обоихъ. Поэтому, если цилиндръ, шаръ и конусъ наполнены взятыми кругами, то цилиндръ въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ находится, будетъ въ равновѣсіи относительно точки α съ шаромъ и конусомъ, взятыми вмѣстѣ, если они будутъ перенесены въ точку ϑ на коромыслѣ вѣсовъ и помѣщены такимъ образомъ, чтобы ϑ была центромъ тяжести обоихъ. Такъ какъ названныя тѣла находятся въ равновѣсіи—цилиндръ съ центромъ тяжести въ $\varkappa$, шаръ и конусъ, перенесенные, какъ сказано, такъ, чтобы ихъ центромъ тяжести было ϑ, —то $\vartheta\alpha : \alpha\varkappa =$цилиндръ: (шаръ$+$конусъ). Но $\vartheta\alpha = 2\alpha\varkappa$, слѣдовательно, и цилиндръ$=2\times$(шаръ$+$конусъ). Но цилинръ также$=3$ конусамъ [Евклидъ, Элементы XII, 10], поэтому 3 конуса$=2$конусамъ $+2$ шара. Если мы отъ обѣихъ частей равенства отнимемъ эти 2 конуса, то конусъ, котораго осевой треугольникъ $\alpha\varepsilon\zeta$ равенъ 2 шарамъ; но конусъ, осевой треугольникъ котораго $\alpha\varepsilon\zeta$ равенъ 8 конусамъ, осевой треугольникъ которыхъ $\alpha\beta\delta$, такъ какъ $\varepsilon\zeta = 2\beta\delta$; итакъ, названные 8 конусовъ равное 2 шарамъ. Слѣдовательно, шаръ, большой кругъ котораго $\alpha\beta\gamma\delta$, въ четыре раза больше конуса, вершина котораго α, а основаніемъ служитъ кругъ діаметра $\beta\delta$, перпендикулярный къ $\alpha\gamma$.

Черезъ β и δ мы проводимъ въ параллелограммѣ $\lambda\zeta$ прямыя $\varphi\beta\chi$ и $\psi\delta\omega$ параллельно $\alpha\gamma$ и представляемъ себѣ цилиндръ, основаніями котораго служатъ круги съ діаметрами $\varphi\psi$, $\chi\omega$, а осью $\alpha\gamma$. Но цилиндръ, осевой параллелограммъ котораго $\varphi\omega$, вдвое большецилиндра, осевой параллелограммъ котораго $\varphi\delta$, а послѣдній втрое больше конуса, у котораго осевой треугольникъ $\alpha\beta\delta$, какъ это доказано въ элементахъ [Евклидъ, элем. XII, 10]; поэтому цилиндръ, осевой параллелограммъ котораго $\varphi\omega$, въ шесть разъ больше конуса, у котораго осевой треугольникъ $\alpha\beta\delta$. Но доказано, что шаръ, большой кругъ котораго $\alpha\beta\gamma\delta$, въ четыре раза больше то же самаго конуса; слѣдовательно, этотъ цилиндръ составляетъ $\frac{3}{2}$ шара; что и требовалось доказать.

Благодаря изложенной теоремѣ о томъ, что шаръ въ четыре раза больше конуса, котораго основаніемъ служитъ большой кругъ, а высота равна радіусу круга, мнѣ пришла въ голову мысль, что поверхность шара въ четыре раза больше его большого круга, причемъ я исходилъ изъ представленія, что кругъ равенъ треугольнику, основаніемъ котораго служитъ періферія круга, а высота равна радіусу круга, такъ же, какъ шаръ равенъ конусу, котораго основаніемъ служитъ поверхность шара, а высота равняется радіусу этого шара.

(Продолженіе слѣдуетъ)

Атомныя измѣненія въ радіоактивныхъ тѣлахъ. [1]

Проф. А. Риги.

*(Окончаніе *).*

Что радій является продуктомъ превращенія, вытекаетъ изъ величины его радіоактивной константы, такъ какъ, какое бы большое количество радія ни существовало на земномъ шарѣ даже и въ болѣе близкія геологическія эпохи, теперь уже нельзя было бы открыть ни малѣйшихъ слѣдовъ его. Такъ какъ, далѣе, радій всегда находится въ минералахъ, содержащихъ торій и уранъ, то невольно возникаетъ мысль, что радій является продуктомъ превращенія одного изъ этихъ веществъ. Химическое изслѣдованіе многихъ минераловъ и измѣреніе ихъ радіоактивности или количества ихъ эманаціи доказываютъ, что количество радія въ нихъ почти пропорціонально количеству входящаго въ ихъ составъ урана. Но этого мало. Замѣчено было, что значительное количество соли урана, не заключавшей радія, спустя извѣстное время обнаруживало его присутствіе. Если этотъ фактъ будетъ вполнѣ установленъ, т. е. подтвердится очень продолжительными опытами, то предполагаемое родство между радіемъ и ураномъ будетъ доказано.

Во всякомъ случаѣ есть основаніе полагать, что радій, если и составляетъ продуктъ превращенія урана, не является его непосредственнымъ продуктомъ. Такимъ образомъ, если когда-нибудь первый и послѣдній изъ рядовъ вышеприведенной таблицы составятъ одну цѣльную серію, то между ураномъ-X и радіемъ должны занять мѣсто нѣкоторыя вещества, еще неизвѣстныя намъ. Однимъ изъ этихъ промежуточныхъ звеньевъ служитъ, по всей вѣроятности, актиній, который, согласно новѣйшимъ изслѣдованіямъ, можетъ дать кэманацію радія. Именно, Больтвудъ, выдѣливъ изъ килограмма карнотита содержавшаго 200 *г.* урана, актиній въ видѣ хлористой соли и заключивъ ее въ стеклянномъ пріемникѣ, запаянномъ на лампѣ, черезъ нѣсколько времени обнаружилъ эманацію радія въ количествѣ, соотвѣтствовав-

*) См №№ 448—449 „Вѣстника“.

шемъ количеству радія, находящемуся въ радіоактивномъ равновѣсіи съ 200 *г* урана.

Атомный вѣсъ радія, принимаемый въ настоящее время, равняется 225, тогда какъ вѣсъ урана значительно больше (238·5), и не будь этого, трудно было бы вѣрить, что первый является продуктомъ второго,есл уголько неи допустить, что нѣсколько различныхъ продуктовъ могутъ соединиться и образовать новый съ бо́льшимъ атомнымъ вѣсомъ, чему до сихъ поръ еще не было примѣровъ. По аналогичнымъ основаніямъ можно предполагать, что торій также происходитъ изъ урана. Стрёттъ констатировалъ, впрочемъ, что минералы торія всегда содержатъ радій и уранъ. Если все это подтвердится, то радіоакивныя вещества составятъ со временемъ одно генеалогическое дерево.

Что касается окончательнаго устойчиваго продукта, которымъ заключается смѣна поколѣній радія, то есть нѣкоторое основаніе предполагать, что имъ служитъ свинецъ; если же и въ послѣднемъ откроется извѣстная степень радіоактивности, то надо будетъ заключить, что цѣпь атомныхъ превращеній заканчивается, по всей вѣроятности, серебромъ.

Одно время полагали, что окончательнымъ устойчивымъ продуктомъ, которымъ заканчиваются превращенія радія, служитъ гелій. Но теперь уже установлено, что этотъ газъ, который находится во всѣхъ минералахъ, содержащихъ радій, и существованіе котораго впервые открыто было спектральнымъ анализомъ солнца, откуда и происходитъ его названіе, получается во время превращеній радія, такъ какъ многіе опыты указываютъ на его постепенное появленіе въ газахъ, содержашихъ эманацію радія.

Уже раньше Рётгерфордъ и Содди высказывали предположеніе, что гелій производится радіемъ, а затѣмъ Рамзэй и Содди доказали присутс твіе гелія въ газѣ, содержащемъ эманацію одной изъ солей радія. Ихъ послѣдніе опыты показали, что свѣтъ электрическаго разряда, проходящаго черезъ содержащій эманацію газъ, даетъ вначалѣ спектръ эманаціи, спустя же нѣсколько дней въ немъ появляются характерныя линіи гелія.

Послѣдующіе опыты Дьюора и Кюри поставили внѣ всякаго сомнѣнія фактъ происхожденія гелія изъ эманаціи радія.

Они въ теченіе 3 мѣсяцевъ хранили около 4 дециграммовъ чистаго и сухого бромистаго радія въ склянкѣ, сообщавшейся въ Гейсслеровой трубкой, т. е. трубкой, снабженной двумя впаянными въ стекло электродами, которые, при пропусканіи электрическаго тока, вызываютъ свѣченіе заключающаго внутри газа. Въ обоихъ пріемникахъ былъ сначала выкачанъ надлежащимъ образомъ воздухъ, и тогда изъ радіоактивнаго тѣла непрерывно выдѣлялся газъ, въ количествѣ одного кубическаго сантиметра (при обыкновенномъ давленіи) въ мѣсяцъ. Пропуская черезъ электроды токъ и изслѣдуя этотъ свѣтъ при помощи спектроскопа, изслѣдователи констатировали присутствіе линій водорода и ртути; послѣднія, очевидно, происходили отъ насоса, которымъ выкачивался воздухъ. Никакихъ слѣдовъ гелія при этомъ не было обнаружено.

Но затѣмъ та же соль помѣщалась въ кварцевую трубку и нагрѣвалась до плавленія соли, причемъ газъ выкачивался насосомъ черезъ трубку, погруженную въ жидкій воздухъ. Такимъ образомъ удалось собрать около 2,6 куб. сант. газа, который подъ дѣйствіемъ содержавшейся тамъ эманаціи издавалъ свѣченіе. Перенесши этотъ газъ въ Гейсслерову трубку, изслѣдователи не открыли въ его спектрѣ ничего, кромѣ линій азота, даже послѣ того, какъ азотъ былъ тщательно удаленъ при помощи сгущенія и охлажденія жидкимъ водородомъ. Тогда, выкачавъ изъ кварцевой трубки газъ, ее герметически закрыли. Двадцать дней спустя, когда газъ, содержавшійся въ трубкѣ, былъ приведенъ въ состояніе свѣченія при помощи наружныхъ электродовъ изъ фольги, спектроскопъ ясно показалъ весь спектръ гелія.

Безукоризненные опыты того же рода, произведенные Гимштедтомъ и Мейеромъ, дали тѣ же окончательные результаты.

Въ виду всего этого теперь уже нельзя думать, что гелій составляетъ конечный продуктъ послѣдовательныхъ атомныхъ распаденій радія, такъ какъ нѣкоторые изъ промежуточныхъ продуктовъ, въ особенности радій-*D*, превращаются такъ медленно, что нельзя было бы понять сравнительно скорое образованіе гелія изъ эманаціи.

Рётгерфордъ полагаетъ, напротивъ, что частицы, составляющія α-лучи, испускаемые эманаціей, суть не что иное, какъ атомы гелія. Чтобы рѣшить, соотвѣтствуетъ ли это предположеніе истинѣ или нѣтъ, необходимо съ достаточною точностью опредѣлить массу каждой изъ частицъ α, т. е. выяснить, дѣйствительно ли она превышаетъ въ четыре раза массу атома водорода, какъ это имѣетъ мѣсто для атома гелія. Произведенныя до настоящаго времени изслѣдованія при помощи методовъ, аналогичныхъ тѣмъ, которые описаны ниже въ главѣ VII, дали значительно меньшія величины. Такъ, Мэккензи нашелъ, что отношеніе между зарядомъ и массой частицы α составляетъ 4600, а такъ какъ это отношеніе для водорода составляетъ 10000, то отсюда вытекаетъ, что частицы α лишь въ $2^1/_5$ раза больше частицъ водорода.

Однако, какъ замѣтилъ Рётгерфордъ измѣренія, этого рода не обладаютъ такою точностью, чтобы изъ нихъ можно было увѣренно сдѣлать указанные выводы, а потому явилась надобность въ новыхъ болѣе точныхъ опытахъ, которые недавно и были доведены до конца Рётгерфордомъ, сначала однимъ, а затѣмъ въ сотрудничествѣ съ Ганомъ. Изъ этихъ опытовъ явствуетъ, во-первыхъ, что отношеніе между зарядомъ и массой частицъ остается неизмѣннымъ при ихъ прохожденіи сквозь вѣсомую матерію, причемъ скорость ихъ постепенно уменьшается; во-вторыхъ, что указанное отношеніе имѣетъ одинаковую величину для α-лучей, испускаемыхъ радіемъ-A, радіемъ-C, полоніемъ (или радіемъ-F) и даже актиніемъ и торіемъ, и наконецъ, что это отношеніе для частицъ α вдвое меньше того же отношенія для атомовъ водорода.

Этотъ послѣдній результатъ особенно важенъ, такъ какъ измѣренія, изъ которыхъ онъ былъ выведенъ, имѣютъ такую точность, что вѣроятная ошибка въ окончательномъ числовомъ результатѣ не можетъ превышать одной пятидесятой. Конечно, тотъ выводъ, что частицы α представляютъ собою молекулы водорода, представляется болѣе или менѣе произвольнымъ, но возможны также двѣ другія гипотезы, способныя объяснить образованіе гелія изъ эманаціи или другихъ продуктовъ послѣдовательныхъ превращеній радія. Одна гипотеза состоитъ въ предположеніи, что частицы α суть атомы гелія и поэтому имѣютъ вчетверо большую массу по сравненію съ атомами водорода, но что ихъ зарядъ превышаетъ лишь вдвое зарядъ одновалентныхъ іоновъ. Другая гипотеза заключается въ допущеніи, что эти частицы имѣютъ вдвое большую массу, чѣмъ атомы водорода, и, соединяясь попарно, образуютъ затѣмъ атомы гелія. Обѣ гипотезы одинаково допустимы, будемъ ли мы считать, что частицы α извергаются уже заряженными, или же, что этотъ зарядъ онѣ пріобрѣтаютъ впослѣдствіи, при столкновеніяхъ съ молекулами окружающей среды.

Если мы примемъ, что частицы α суть атомы гелія, атомный вѣсъ котораго равенъ 4, то будетъ нѣсколько затруднительно объяснить образованіе радія изъ урана и свинца изъ радія, такъ какъ атомный вѣсъ урана составляетъ 238·5, атомный вѣсъ радія 225, а атомный вѣсъ свинца 206·5, и, слѣдовательно, разность между этими тремя числами не составляетъ кратнаго 4, что было бы неизбѣжно, еслибы превращеніе атомовъ урана въ атомы радія и свинца обусловливалось послѣдовательнымъ отниманіемъ атомовъ гелія по одному. Однако, затрудненіе это исчезнетъ, если мы примемъ атомный вѣсъ радія равнымъ 226·5 вмѣсто 225; въ этомъ нѣтъ ничего невозможнаго, если вспомнить, что первыя опредѣленія г-жи Кюри дали для него лишь 146, а послѣдующія изслѣдованія постепенно увеличивали этотъ вѣсъ по мѣрѣ того, какъ удавалось получить это вещество въ болѣе чистомъ видѣ.

Гипотеза Рётгерфорда объясняетъ очень просто нахожденіе гелія въ той газообразной смѣси, которая выдѣляется изъ растворовъ радія и актинія. И такъ какъ свойства α-лучей, извергаемыхъ различными радіоактивными тѣлами, вполнѣ одинаковы, то въ высшей степени вѣроятно, что частицы α во всѣхъ случаяхъ суть не что иное, какъ атомы гелія.

Во всякомъ случаѣ можно считать установленнымъ научнымъ фактомъ непрерывное образованіе одного опредѣленнаго химическаго элемента (гелія) изъ другого (радія), который непрерывно уничтожается.

Разъ мы считаемъ безспорно доказаннымъ фактъ постояннаго распада атомовъ радіоактивныхъ веществъ, остается еще указать на его вѣроятную причину. Лоджъ видитъ главную причину неустойчивости атомовъ въ непрерывной потерѣ энергіи отрицательными электронами, движущимися по замкнутымъ орбитамъ. Какъ мы увидимъ въ послѣдней главѣ, каждый электронъ, вращаясь такимъ образомъ, производитъ въ электромагнитныхъ силахъ постоянное и періодическое возмущеніе, которое при посредствѣ эѳира распространяется со скоростью свѣта и представляетъ поэтому непрерывную потерю энергіи. Такимъ образомъ, скорость электроновъ измѣняется, а, слѣдовательно, измѣняется и ихъ кажущаяся масса, которая, какъ будетъ отмѣчено ниже, представляетъ собою функцію скорости. Такимъ образомъ ясно, что вслѣдствіе постепеннаго измѣненія механическихъ условій атомъ можетъ превратиться въ неустойчивую систему, которая не замедлитъ раздробиться, выбросивъ часть своихъ составныхъ элементовъ, послѣ чего остальныя составныя части снова координируются въ стойкій, по крайней мѣрѣ на нѣкоторое время, аггрегатъ.

Жидкіе кристаллы и теоріи жизни.

Проф. О. Лемана.

Переводъ съ нѣмецкаго.

(Продолженіе *).

Таковы были взгляды 30 лѣтъ тому назадъ. Я изучалъ тогда темножелтую модификацію іодистаго серебра, получаемую при нагрѣваніи выше 146°, которая считалась вязкой жидкостью. Она проводитъ электрическій токъ такъ же хорошо, какъ и текучій сплавъ, который изъ нея получается при дальнѣйшемъ нагрѣваніи; скорость іоновъ серебра, какъ я нашелъ позднѣе, въ обоихъ случаяхъ совершенно одинакова, только іоны іода повидимому встрѣчаютъ непреодолимо большое сопротивленіе. Но, къ своему удивленію, подъ микроскопомъ я нашелъ, что эта тягучая масса никоимъ образомъ не есть обыкновенная жидкость, а аггрегатъ чрезвычайно мягкихъ октаэдрическихъ кристалловъ, которые при давленіи текли, какъ будто они были жидкими. При этомъ, не смотря на происшедшее нарушеніе сѣтки кристалла, выступаютъ свойства тѣлъ неаморфнаго состоянія: кристаллы ростутъ, какъ и преже, и сохраняютъ свойственную имъ рѣзкую точку плавленія, тогда какъ аморфныя тѣла и размягчаются и твердѣютъ постепенно, а рости, какъ кристаллы, не могутъ. Съ другой стороны, здѣсь не наблюдается измѣненія свойствъ скачками, напримѣръ, окраски, какъ у іодистой ртути, каковое измѣненіе могло бы быть

*) См. №№ 448—449 „Вѣстника“.

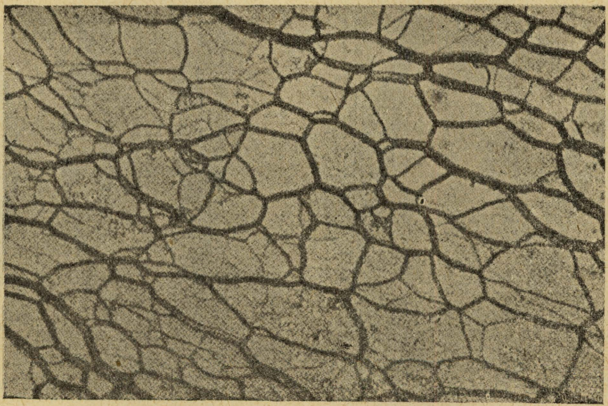
принято за переходъ въ полиморфную модификацію. Сообразно установившейся теоріи оставалось только принять, что здѣсь происходитъ раздробленіе кристалловъ на ничтожные осколки, невидимые подъ микроскопомъ, не смотря на сильное увеличеніе, что сѣтки этихъ кристалловъ сохраняютъ свою структуру, а связь между осколками поддерживается прилипаніемъ, равнымъ сцѣпленію, такъ что можетъ получиться впечатлѣніе, будто масса течетъ. Но такое раздробленіе кристалловъ должно было бы обнаружиться въ видѣ увеличенія объема, т. е. уменьшенія плотности, въ видѣ помутнѣнія массы, наступающаго вслѣдствіе образованія безчисленныхъ трещинъ и скважинъ. Однако, ничего подобнаго нельзя было замѣтить. Обломками, такимъ образомъ, могли быть только отдѣльныя молекулы; это, очевидно, было доказательствомъ того, что, вопреки господствующей теоріи аморфизма и полиморфизма, сѣтка кристалла можетъ быть разрушена безъ того, чтобы за такимъ разрушеніемъ послѣдовало и существенное измѣненіе его свойствъ. Опровергались, слѣдовательно, тѣ теоріи, которыя не признавали возможнымъ существованія у кристалла дѣйствительной способности течь.

Но въ виду большого уваженія, которымъ пользовались эти теоріи—насколько мнѣ извѣстно, онѣ лежатъ въ основѣ всѣхъ учебниковъ еще и по настоящее время—я не осмѣлился бы усомниться въ ихъ справедливости, если бы не пришелъ къ такому же выводу вторымъ, совершенно независимымъ отъ перваго, путемъ. Если полиморфное превращеніе есть простой переходъ отъ одной структуры кристалла къ другой, безъ измѣненія самыхъ молекулъ, то въ тѣхъ случаяхъ, когда достаточно повышенія или пониженія температуры, чтобы преодолѣть внутреннее треніе и вызвать такое превращеніе въ томъ или иномъ видѣ, не можетъ быть никакой „температуры превращенія", ибо самая ничтожная сила производитъ превращеніе въ томъ или иномъ направленіи; здѣсь могутъ быть только „предѣльныя температуры", при которыхъ возбужденнаго тепловымъ измѣненіемъ молекулярнаго напряженія достаточно, чтобы преодолѣть сопротивленіе внутренняго тренія. Такъ это фактически въ то время и принималось. Но при помощи своего кристаллизаціоннаго микроскопа, который даетъ возможность производить быстрыя и слабыя колебанія температуры, я убѣдился, что строго опредѣленная температура превращенія существуетъ, но только въ томъ случаѣ, если обѣ модификаціи находятся въ тѣсномъ внутреннемъ соприкосновеніи. Отсюда я вывелъ заключеніе, что полиморфное превращеніе не можетъ зависѣть отъ простого измѣненія сѣтки кристалла, но что послѣдняя скорѣе измѣняется отъ того, что испытываютъ измѣненіе сами молекулы, что при такомъ измѣненіи ихъ проявляются совершенно новыя силы.

Сильнымъ подкрѣпленіемъ такого толкованія послужили дальнѣйшія наблюденія, что диссоціація и обратное полученіе рыхлыхъ химическихъ соединеній, которое частью происходитъ при измѣненіи температуры также и въ твердыхъ тѣлахъ, протекаютъ совершенно аналогично полиморфному превращенію. Само собою получалось тогда распространеніе теоріи и на жидкое и газообразное, такъ называемое аггрегатное состояніе вещества, и представлялась возможность допустить также смѣшеніе такихъ состояній, какъ напримѣръ, растворъ льда въ водѣ, что, конечно, не имѣетъ никакого смысла, коль скоро считать молекулы обѣихъ частей тожественными. Точка замерзанія этого раствора льда была бы теперь точкой насыщенія его, переохлажденная вода — пересыщеннымъ ледянымъ растворомъ, а аморфная вода, полученная при дальнѣйшемъ переохлажденіи, если бы таковое возможно было провести до амфорнаго застыванія, считалась бы смѣсью молекулъ воды съ молекулами различныхъ модификацій льда. Этимъ устанавливалось нѣкоторое представленіе о сущности аморфныхъ модификацій; въ противность старой теоріи непрерывности это были бы тогда неправильные молекулярные аггрегаты, состоящіе не изъ одина-ово, а изъ различно построенныхъ молекулъ, такъ какъ именно совершенно идентичныя молекулы не могутъ смѣшиваться.

Мы не имѣемъ, такимъ образомъ, права изъ противорѣчія со старой теоріей полиморфизма и аморфизма дѣлать выводъ, что наблюдаемая пластичность кристалловъ іодистаго серебра только кажущаяся. Кристаллы іодистаго серебра дѣйствительно текутъ, хотя теорія совершенно несовмѣстима съ этимъ фактомъ. Гегель однажды въ такомъ случаѣ сказалъ: „Тѣмъ хуже для фактовъ“. Учебники до сихъ поръ столь же просто справлялись съ этимъ затрудненіемъ; именно, они игнорировали вовсе существованіе текучихъ кристалловъ; но въ настоящее время этого уже дѣлать нельзя, ибо число веществъ, дающихъ жидкіе кристаллы, возросло уже до полусотни, даже больше, — особенно благодаря открытію Форлэндера (Vorländer) о связи жидкихъ кристалловъ со строеніемъ молекулъ; для большого числа ихъ Шенкомъ (R. Schenck) уже точно опредѣлены константы.

Вамъ всѣмъ извѣстенъ опытъ Плато для демонстраціи поверхностнаго натяженія. Капля масла, свободно плавающая въ разбавленномъ алкоголѣ, принимаетъ совершенно шарообразную форму. Если мы ее деформируемъ, скажемъ, помощью двухъ палочекъ, то, предоставленная сама себѣ, она снова быстро принимаетъ форму шара. Если раздѣлить ее на нѣсколько меньшихъ капель, то каждая такая

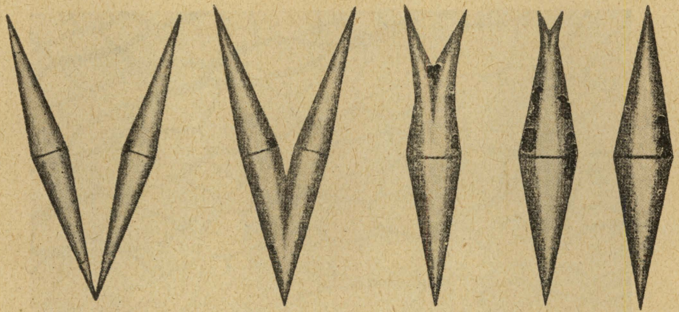


Фиг. 6.

капелька быстро округляется въ шарикъ; если же нѣсколько капель сливаются, то въ результатѣ снова получается правильный шаръ.

Не приметъ ли жидкій кристаллъ при соотвѣтствующихъ условіяхъ вмѣсто шара форму, скажемъ, октаэдра и не сохранится ли эта форма также при раздѣленіи кристалла начасти или при сліяніи его съ другими? Еще нѣсколько лѣтъ тому назадъ это считалось абсолютно немыслимымъ; жидкости такъ и опредѣлялись, какъ тѣла, у которыхъ нѣтъ собственной формы, въ противоположность твердымъ тѣламъ и, въ особенности, кристалламъ, характеризующимся полиэдрическими формами. Даже тотъ, кто допускаетъ, точпри достаточно сильномъ давленіи и при обстоятельствахъ, исключающихъ появленіе скачковъ, кристаллы могутъ течь какъ, напримѣръ, вязкая смола, тотъ все-таки еще далекъ отъ убѣжденія, что могутъ существовать кристаллы, текущіе подъ вліяніемъ своего собственнаго поверхностнаго натяженія и принимающіе, свободно плавая, форму не капли, а многогранника.

Для экспериментальнаго рѣшенія этого вопроса кристаллы іодистаго серебра, вслѣдствіе своей значительной вязкости, столь же мало пригодны, какъ и капля сиропа вмѣсто масла въ опытѣ Плато. Лучшій примѣръ я нашелъ въ 1888 году — это бензойно-кислый холестерилъ Рейнитцера (Reinitzer). Послѣдній, открывъ это вещество, указалъ мнѣ на то, что при его плавленіи получается мутная жидкость, повидимому, смѣсь двухъ жидкостей, изъ которыхъ одна

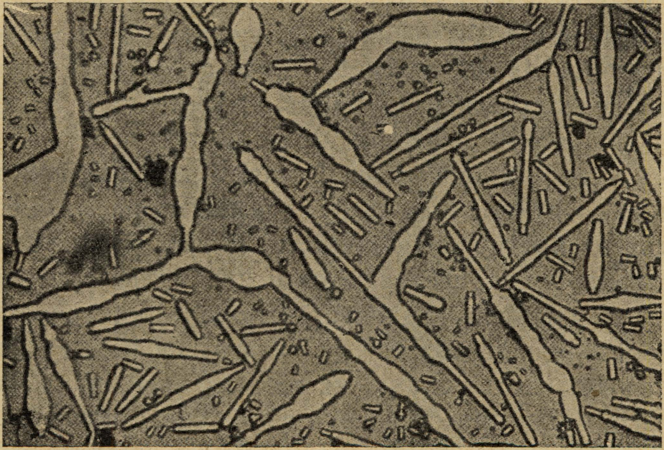


Фиг. 7.

образуетъ въ другой „маслянистыя полосы", подобно смолянымъ нитямъ, ясно видные между скрещенными николями. При дальнѣйшемъ нагрѣваніи полосы внезапно исчезаютъ, и жидкость становится совершенно ясной. При обратномъ же охлажденіи изъ прозрачнаго сплава выдѣляются такъ же внезапно звѣздообразные кристаллы, которые, повидимому, при дальнѣйшемъ охлажденіи, становятся жидкими и маслянистыя полосы вновь появляются. Какъ нужно понимать эти удивительныя явленія, удивительныя тѣмъ болѣе, что мутная жидкость не имѣетъ кашеобразной консистенціи, а въ большей массѣ течетъ такъ же легко, какъ и оливковое масло?

Благодаря продолжительнымъ занятіямъ химическимъ анализомъ, основаннымъ на опредѣленіи подъ микроскопомъ кристаллической формы, „кристаллографическимъ анализомъ" я зналъ, что—въ разрѣзъ съ обыкновеннымъ методомъ изслѣдованія, обозначаемымъ въ настоящее время методомъ фазъ, принимающимъ во вниманіе исключительно скалярныя свойства аггрегата, и вопреки пріемамъ химиковъ, рѣшительно отвергающихъ прибавленіе посторонняго вещества, какъ приводящее только къ ошибкамъ,—первымъ средствомъ распутать такой хаосъ является изолированіе отдѣльныхъ кристаллическихъ индивидуумовъ путемъ примѣшиванія растворителя и изученіе ихъ векторіальныхъ, въ особенности оптическихъ свойствъ; послѣднее обстоятельство предполагаетъ возможнымъ катить кристаллы подъ микроскопомъ такъ, чтобы можно было ихъ изслѣдовать постепенно со всѣхъ сторонъ. Долго это мнѣ не удавалось вслѣдствіе необычайной малости индивидуумовъ и ихъ текучести; однако терпѣніе въ концѣ концовъ привело все-таки къ цѣли. Я нашелъ, что звѣздообразные, мнимо твердые кристаллы Рейнитцера, которые получаются сначала при охлажденіи, въ дѣйствительности жидкіе кристаллы; а то обстоятельство, что они какъ будто растекаются и что появляются маслянистыя полосы другой жидкости, есть только оптическій обманъ, происходящій вслѣдствіе взаимнаго сліянія. Мутная жидкая масса ни въ какомъ случаѣ не состоитъ изъ двухъ различныхъ жидкостей, а представляетъ собой единственную „кристаллическую“ жидкость, состоящую изъ многихъ отдѣльныхъ индивидуумовъ.

Благодаря изслѣдованію Квинке (Quincke) въ 1894 г., изъ котораго можно было бы заключить, что такой выводъ неправиленъ, мнѣ удалось тогда открыть текучіе кристаллы олеиновокислаго аммонія, родъ смазочнаго мыла, у которыхъ сліяніе тонкихъ одноосныхъ пирамидъ поддавалось наблюденію въ удивительно красивой формѣ. Если двѣ такія пирамиды приходятъ въ соприкосновеніе въ нѣкоторой точкѣ, то онѣ сливаются, и сростаніе ихъ продолжается, какъ это изображено на фиг. 7 а-е, до тѣхъ поръ, пока оба индивидуума не сольются въ одинъ той же структуры. Въ обыкновенномъ свѣтѣ эти кристаллы очень плохо видны, ибо ихъ способность преломлять свѣтъ лишь очень мало отличается отъ преломленія, которое даетъ растворъ. Гораздо болѣе удобны для наблюденія, вслѣдствіе темнаго оттѣнка, пластично выступающіе текучіе кристаллы этиловаго эфира параазоксибензойной кислоты Форлэндера (открытые въ 1904 г.), которые кромѣ того сливаются гораздо энергичнѣе съ сильнымъ толчкомъ, если приходятъ въ соприкосновенiе. Но красивѣе всего объектъ, полученный въ самое послѣднее время Форлэндеромъ. Это текучая кристаллическая модификацiя этиловаго эфира параазоксибромкоричной кислоты, которая выступаетъ въ видѣ строго прямыхъ одноосныхъ жидкихъ столбиковъ, ограниченныхъ плоскостями, съ почти совершенно заостренными краями, какъ это видно на фотографiи, полученной самимъ Форлэндеромъ (фиг. 8) при помощи Цейссовскаго большого кристаллизацiоннаго микроскопа.



Фиг. 8.

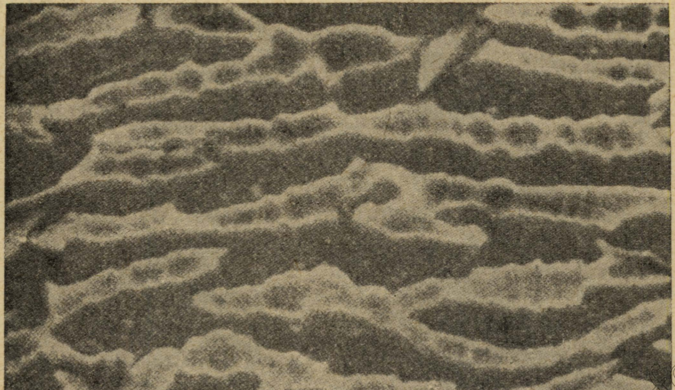
Что эти кристаллы, хотя и жидкiе, не сдавливаются силою своего поверхностнаго натяженiя въ шаръ, подобно масляной каплѣ Плато, указываетъ на дѣйствiе силы, природа которой должна еще быть ближе изслѣдована. Предварительно я ее назвалъ „формирующей силой“ (Gestaltungskraft).

Характеристику твердаго тѣла часто усматривали въ извѣстномъ размѣрѣ внутренняго тренiя послѣднее присуще, однако, и жидкостямъ. Если, напримѣръ, нитка сиропа плаваетъ въ смѣси такого же удѣльнаго вѣса ксилола и хлороформа, то эта форма удерживается довольно долго, пока поверхностное натяженiе не придастъ нити форму шара, преодолѣвъ внутреннее тренiе, которое пропорцiонально скорости и остается незамѣтнымъ только при очень медленномъ измѣненiи формы. Но въ концѣ концовъ это всегда произойдетъ, если сиропъ дѣйствительно жидкiй; текучiй же кристаллъ сохраняетъ продолжительно свою форму. Съ внутреннимъ тренiемъ, такимъ образомъ, формирующая сила идентичной быть не можетъ. Если же мы будемъ при названномъ опытѣ температуру все болѣе и болѣе понижать, пока она не опустится ниже точки, при которой устанавливается упругость сдвига, т. е. нитка сиропа застываетъ аморфно, то форма шара уже не получится; нитка, какъ и текучій кристаллъ, сохранитъ продолжительно свою форму. Быть можетъ, формирующая сила идентична съ упругостью сдвига? Никоимъ образомъ, ибо упругость стремится исключительно сохранить форму, которую тѣло имѣетъ; она не можетъ создать новую форму. Если мы представимъ себѣ далѣе свободно плавающій текучій кристаллъ, которому мы придадимъ, отрѣзывая края, форму шара, то мы замѣтимъ, что онъ стремится снова быстро принять нормальную форму равновѣсія, напримѣръ, растянуться въ призматическій столбикъ. Такого дѣйствія упругость никогда не можетъ производить; масса, срѣзанная въ видѣ шара, не имѣетъ стремленія растягиваться въ длину; такимъ образомъ, формирующая сила и упругость—совершенно различныя силы.

Остается еще сопоставить формирующую силу съ экспансивностью (осмотическимъ давленіемъ), силой, которой, по кинетической теоріи, обладаетъ всякая жидкость, благодаря движеніямъ ея молекулъ, но которая уравновѣшивается внутреннимъ давленіемъ, обусловливаемымъ сцѣпленіемъ. Почему у текучихъ кристалловъ это равновѣсіе не приводитъ, какъ у другихъ жидкостей, къ образованію шара? Различно ли, какъ допустилъ Кюри (Curie), поверхностное натяженіе, въ различныхъ мѣстахъ поверхности кристалла? Я считаю это непріемлемымъ, ибо такое различіе въ поверхностномъ натяженіи вызвало бы въ текучемъ кристаллѣ непрерывное истеченіе, какъ это имѣетъ мѣсто у подробно изслѣдованныхъ мною „полуограниченныхъ капель".

Поэтому остается только принять, что осмотическое давленіе дѣйствуетъ по различнымъ направленіямъ различно; и такое допущеніе дѣйствительно можно себѣ уяснить, если принять, что молекулы имѣютъ форму, значительно отличающуюся отъ шара, или, по крайней мѣрѣ, что молекулы имѣютъ значительную анизотропность относительно дѣйствующихъ въ нихъ силъ, быть можетъ, вслѣдствіе неравномѣрнаго распредѣленія содержащихся въ нихъ электроновъ. Чтобы выяснить силу экспансивности, ее сравнивали съ толчками, которые получаютъ стѣнки сотрясаемой коробки съ горохомъ. Но если представить себѣ, что горошины замѣнены длинными кусочками проволоки, то послѣднiе будутъ имѣть стремленiе расположиться параллельно длиннѣйшимъ сторонамъ коробки—можно сказать, здѣсь обнаруживается ясно выраженная направляющая сила—и толчки на различныхъ стѣнкахъ получатся различной силы, а коробка вслѣдствiе этого, быть можетъ, даже удлинится, если она растяжима. Точно такъ же можно себѣ представить, что и въ капляхъ жидкости съ сильно анизотропными молекулами проявляется молекулярная направляющая сила, получается анизотропная структура, а вслѣдствiе этого и анизотропность силы экспансивности, такъ что отдѣльныя мѣста поверхностной перепонки выталкиваются сильнѣе, чѣмъ другiя;—такимъ образомъ получается полиэдрическая форма, какъ у твердыхъ кристалловъ, хотя съ закругленными ребрами и углами.

О томъ, что молекулы имѣютъ форму, сильно отличающуюся отъ шара, можно уже заключить изъ двойного лучепреломленiя и дихроизма текучихъ кристалловъ, особенно послѣ того, какъ установившееся представленiе, что оптическiя свойства опредѣляются исключительно сѣткой кри-

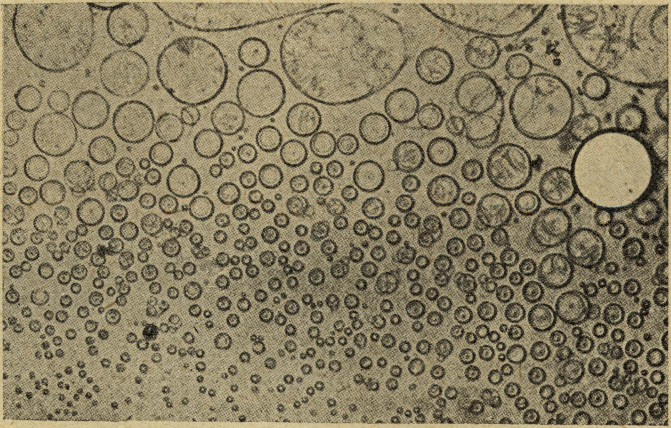


Фиг. 9.

сталла, было отвергнуто, и механическая теорiя свѣтовыхъ волнъ должна была уступить свое мѣсто электромагнитной.

Къ такому же представленiю приводитъ и наблюденiе надъ направленiями, по которымъ происходитъ угасанiе при механической деформаціи текучихъ кристалловъ: они распредѣляются соотвѣтственно направленіямъ, по которымъ было произведено растяженіе или давленіе, и любой сложный аггрегатъ угасаетъ однородно, явленіе, которое я назвалъ вынужденной гомеотропіей. Измѣненной же внутренней структурѣ соотвѣтствуетъ также и внѣшняя форма, что легко можно констатировать у текучихъ кристалловъ олеиновокислаго аммонія въ алкогольномъ растворѣ, если передвигать покровное стеклышко (фиг. 9).

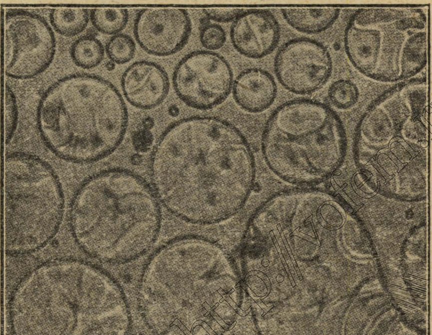
Особенно удивительны явленія съ этиловымъ эфиромъ параазоксикоричной кислоты. Его текучіе кристаллы имѣютъ форму оптически одноосныхъ призмъ или гемиморфныхъ пирамидъ; при наблюденіи ихъ въ направленіи осей, они представляются бѣлыми, при наблюденіи въ другихъ направленіяхъ — желтыми. Если сжимать аггрегатъ такихъ кристалловъ, получающійся при охлажденіи сплава между объективнымъ столикомъ и покровнымъ стеклышкомъ, надавливая послѣднее препаративной иглой, то вся



Фиг. 10.

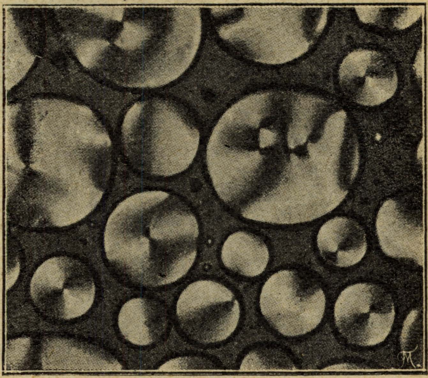
масса становится бѣлой, а между скрещенными николями — темной; это показываетъ, что на всѣхъ мѣстахъ молекулы направлены такъ, что оптическія оси стоятъ перпендикулярно къ поверхности стекла. Понять это можно только такъ, что молекулы имѣютъ форму листиковъ, оптическія оси которыхъ стоятъ перпендикулярно къ ихъ плоскостямъ. Въ согласіи съ такимъ толкованіемъ, мы ощущаемъ при сдавливанiи большее сопротивленiе въ направленiи осей, чѣмъ поперечно. Если нагрѣть полученную бѣлую массу, то тамъ, гдѣ наступаетъ плавленiе, гдѣ соприкосновенiе со стекломъ такимъ образомъ прекращается, получаются желтыя пятна; поверхностное натяженiе здѣсь вновь начинаетъ дѣйствовать и стремится произвести раздѣленiе массы на отдѣльные кристаллическiе индивидуумы.

Анизотропность молекулъ, разумѣетс , должна будетъ обнаружиться въ различной степени—въ зависимости отъ ихъ величины и взаимныхъ разстоянiй. Можно, слѣдовательно, думать, что здѣсь выступаетъ молекулярная направляющая сила, а не формирующая. И дѣйствительно, въ 1890 году я нашелъ, что текучiе кристаллы—жидкiе, какъ вода—параазоксифенетола Гаттермана (Gattermann), дающiе при плавленiи муть, принимаютъ видъ совершенно шарообразныхъ капель и все же обладаютъ правильной внутренней структурой. Уже при наблюденiи въ обыкновенномъ свѣтѣ такую структуру можно обнаружить благодаря тому, что капля, если ее разсматривать въ опредѣленномъ направленiи (въ направленiи оси симметрiи), содержитъ въ центрѣ какъ бы темное зерно (фиг. 10), при прохожденiи же свѣта поперекъ оси симметрiи, наоборотъ—двояковыпуклую линзу. Этихъ образовъ въ дѣйствительности не существуетъ, они обусловливаются только преломленiемъ свѣта. Двѣ такiя кристаллическiя капли, приведенныя въ соприкосновенiе, соединяются, какъ водяныя капли, и нѣкоторое время можно еще видѣть два зерна, между которыми выступаетъ темной точкой третье, особаго строенiя; но мало по малу структура ихъ становится однородной, и видно только одно зерон. При слiянiи нѣсколькихъ кристаллическихъ капель явленiе становится соотвѣтственно болѣе сложнымъ (фиг. 11). Такое слiянiе двухъ



Фиг. 11.

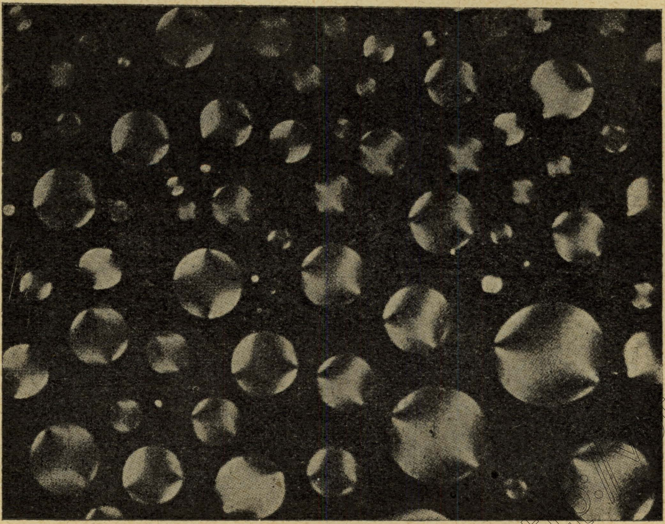
кристаллическихъ капель въ одну можетъ быть разсматриваемо, какъ аналогія копуляціи низшихъ живыхъ существъ.



Фиг. 12.

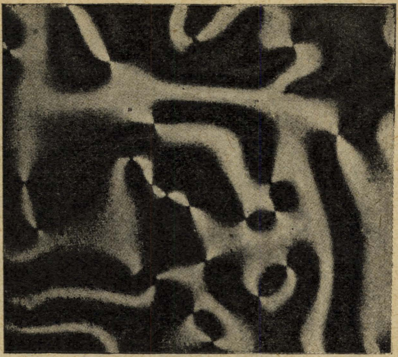
Въ поляризованномъ свѣтѣ структура капель обнаруживается появленіемъ дихроизма, т. е. появленіемъ бѣлаго и желтаго полей (фиг. 12, желтыя поля здѣсь имѣютъ сѣрый цвѣтъ), которыя при вращеніи препарата мѣняютъ свое положеніе. Между скрещенными николями при подходящей толщинѣ препарата получаются красивые интерференціонные цвѣта и темныя полосы (фиг. 13 и 14), совершенно какъ у твердыхъ кристалловъ.

Въ магнитномъ полѣ капли вращаются до сліянія оси симметріи съ магнитными силовыми линіями; кромѣ того,



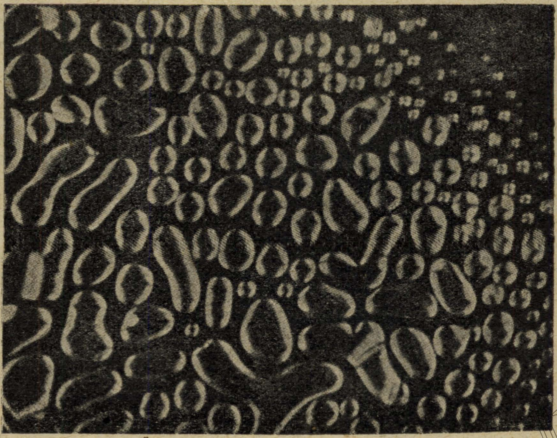
Фиг. 13.

онѣ претерпѣваютъ измѣненіе въ структурѣ такъ, что направленія угасанія, т. е. оси отдѣльныхъ молекулъ по возможности располагаются соотвѣт ственно силовымъ линіямъ (фиг. 15). Всякое искусственно произведенное измѣненіе структуры, напримѣръ, при возбужденіи въ нихъ небольшихъ вихревыхъ потоковъ, снова исчезаетъ, вслѣдствіе внезапно наступающей гомеотропіи, подобно тому, какъ магнитная поляризація въ растворѣ хлористаго желѣза вблизи магнита не зависитъ отъ того, находится ли растворъ въ покоѣ или движется, или подобно тому, какъ амеба при сильномъ искривленіи также не теряетъ свойственной ей структуры, которой она отличается отъ безжизненнаго куска бѣлка. Вращеніе молекулъ не требуетъ никакой замѣтной работы, такъ какъ среднее разстояніе ихъ другъ отъ друга остается неизмѣннымъ.



Фиг. 14.

Рѣшающее значеніе для расположенія молекулъ внутри жидкости имѣетъ оріентировка молекулъ на поверхно-



Фиг. 15.

сти, вызванная поверхностнымъ натяженіемъ. Всякое нарушеніе послѣдней производитъ также соотвѣтствующее измѣненіе структуры внутри. Напримѣръ, вслѣдствіе свѣтопоглощенія стекла, если свободно плавающая капля приходитъ въ соприкосновенiе со стѣнкой, то въ этомъ мѣстѣ оптическая ось становится перпендикулярно къ стеклу; поэтому также и ось симметрiи капли становится перпендикулярно къ стеклу; другими словами, мы видимъ каплю въ такъ называемомъ первомъ главномъ положенiи. Капли же, сдавленныя между объективнымъ столикомъ и покровнымъ стеклышкомъ въ тонкiй слой, устойчиво сохраняютъ второе главное положенiе, которое получается изъ перваго поворотомъ на 90° и имѣетъ существенно другую структуру. Если нѣтъ растворителя, то рѣшающее значенiе для структуры имѣетъ приставшiй къ стеклу невидимый слой молекулъ твердой модификацiи, который защищенъ отъ превращенiя абсорбирующей силой стекла, когда вся масса переходитъ при нагрѣванiи въ текучую кристаллическую модификацiю; получаются жидкiе кристаллы

Фиг. 16.

съ однороднымъ угасанiемъ, копирующiе своей формой первоначально твердые кристаллы. Даже при нагрѣванiи до перехода въ изотропную жидкость, тонкiй слой молекулъ жидкихъ кристалловъ можетъ оставаться приставшимъ къ стеклу и при охлажденiи вновь вызываетъ прежнюю структуру.

Если уменьшить молекулярную направляющую силу кристаллической капли параазоксифенетола примѣсью этиловаго эфира параазоксикоричной кислоты, то и въ присутствiи растворителя сила абсорбцiи стекла дѣйствуетъ такъ интенсивно, что капли сейчасъ же послѣ возникновенія становятся псевдоизотропными, т. е. до самаго края между скрещенными николями становятся темными, потому что всюду оптическія оси устанавливаются перпендикулярно къ поверхности стекла (фиг. 16). Особенно рѣзко происходитъ явленіе съ каприновокислымъ холестериломъ при прибавленіи къ нему очень незначительнаго количества параазоксифенетола. Вновь полученные кристаллы, блещущіе своими яркими поляризаціонными красками, сейчасъ же по полученіи становятся черными.

(Продолженіе слѣдуетъ).

О четыреугольникахъ.

Дм. Ефремова.

*(Окончаніе *).*

28. **Теорема**. *Квадратъ разстоянія между ортоцентромъ чет—ка и центромъ описаннаго круга, сложенный съ суммою квадратовъ медіанъ его сторонъ и діагоналей, равенъ квадрату діаметра описаннаго круга.*

Дѣйствительно, изъ параллелограммовъ KMLN и OQHP (фиг. 5) имѣемъ:

$$\overline{KL}^2+\overline{MN}^2=\frac{1}{2}(\overline{AC}^2+\overline{BD}^2)=\frac{1}{2}(e^2+f^2)$$

и

$$\overline{OH}^2+\overline{PQ}^2=2(\overline{OP}^2+\overline{OQ}^2)=2(v^2+w^2),$$

или, вслѣдствіе равенствъ (12) и (14),

$$\overline{KL}^2+\overline{MN}^2=2R^2(1+\sin 2\alpha.\sin 2\beta)$$

и

$$\overline{OH}^2+\overline{PQ}^2=2R^2(1-\sin 2\alpha\sin 2\beta);$$

отсюда

$$\overline{OH}^2+\overline{KL}^2+\overline{MN}^2+\overline{PQ}^2=4R^2,$$

или

$$\overline{OH}^2+k^2+l^2+m^2=4R^2,$$

что и требуется доказать.

---

*) См. №№ 448 и 449 „Вѣстника".

29. Для ортодіагональнаго вписаннаго чет—ка

$$k = l \text{ и } OH = m;$$

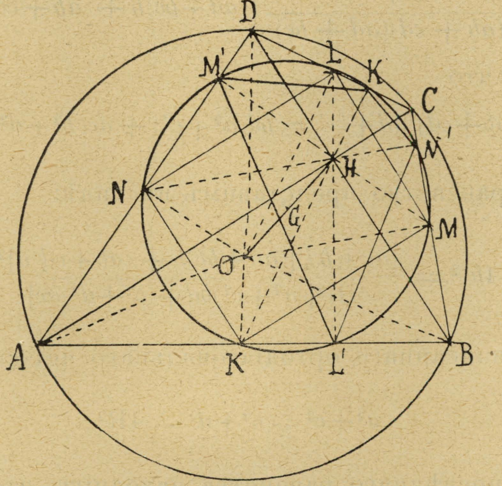
поэтому

$$\overline{OH}^2 + k^2 = \overline{OH}^2 + l^2 = 2R^2,$$

т. е. *квадратъ разстоянія между ортоцентромъ вписаннаго ортодіагональнаго чет—ка и центромъ описаннаго круга, сложенный съ квадратомъ медіаны противоположныхъ сторонъ чет—ка, равенъ удвоенному квадрату радіуса описаннаго круга.*

Замѣтимъ еще, что *разстояніе ортоцентра вписаннаго ортодіагональнаго чет—ка отъ средины каждой его стороны равно половинѣ этой стороны*, т. е. (фиг. 6)

$$HK = OL = \frac{a}{2},\ HM = ON = \frac{b}{2},\ HL = OK = \frac{c}{2},\ HN = OM = \frac{d}{2}.$$



Фиг. 6.

30. Опредѣлимъ высоты вписаннаго ортодіагональнаго чет—ка ABCD чрезъ его стороны. Обозначивъ чрезъ R радіусъ описаннаго круга и, удерживая прежнія обозначенія для высотъ тр—въ ABC и ABD (21), получимъ:

$$2Rh_1' = be \text{ и } 2Rh_1'' = df,$$

откуда (21)

$$2R(h_1' + h_1'') = 4Rh_1 = be + df$$

и

$$16R^2h^2_1 = b^2e^2 + d^2f^2 + 2bdef;$$

но извѣстно, что для вписаннаго чет-ка

$$ef = ac + bd$$

и

$$\frac{e}{f}=\frac{ad+bc}{ab+cd},$$

такъ что

$$e^2=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$$

и

$$f^2=\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc};$$

поэтому

$$16R^2h_1=\frac{(ac+bd)(ad+bc)b^2}{ab+cd}+\frac{(ac+bd)(ab+cd)d^2}{ad+bc}+$$

$$+2bd(ac+bd)=$$

$$=\frac{ac+bd}{(ab+cd)(ad+bc)}\left[(ad+bc)b+(ab+cd)d\right]^2;$$

замѣтивъ же, что

$$(ab+cd)(ad+bc)=bd(a^2+c^2)+ac(b^2+d^2),$$

предыдущее равенство представимъ въ видѣ:

$$4h_1{}^2=\frac{(ac+bd)[(ad+bc)b+(ab+cd)d]^2}{4R^2[(a^2+c^2)bd+(b^2+d^2)ac]}.$$

Но для вписаннаго ортодіагональнаго чет-ка (17)

$$a^2+c^2=b^2+d^2=4R^2;$$

поэтому изъ послѣдняго равенства находимъ, что

$$4h_1{}^2=\frac{[(ad+bc)b+(ab+cd)d]^2}{(b^2+d^2)^2},$$

откуда

$$2h_1=\frac{(ad+bc)b+(ab+cd)d}{b^2+d^2}=$$

$$=\frac{2abd+c(b^2+d^2)}{b^2+d^2},$$

или

$$h_1=\frac{abd}{b^2+d^2}+\frac{c}{2}=\frac{abd}{a^2+c^2}+\frac{c}{2}.$$

Высоты чет—ка h_2, h_3, h_4 выражаются аналогичными формулами, именно:

$$h_2 = \frac{bac}{a^2+c^2} + \frac{d}{2} = \frac{bac}{b^2+d^2} + \frac{d}{2},$$

$$h_3 = \frac{cbd}{b^2+d^2} + \frac{a}{2} = \frac{cbd}{a^2+c^2} + \frac{a}{2},$$

$$h_4 = \frac{dac}{a^2+c^2} + \frac{b}{2} = \frac{dac}{b^2+d^2} + \frac{b}{2}.$$

31. Такъ какъ (фиг. 6)

$$h_1 = \mathrm{LL'} = \mathrm{HL} + \mathrm{HL'} = \frac{abd}{b^2+d^2} + \frac{c}{2}$$

и

$$h_3 = \mathrm{KK'} = \mathrm{HK} + \mathrm{HK'} = \frac{cbd}{b^2+d^2} + \frac{a}{2},$$

при чемъ (29)

$$\mathrm{HL} = \frac{c}{2} \quad \text{и} \quad \mathrm{HK} = \frac{a}{2},$$

то

$$\mathrm{HL'} = \frac{abd}{b^2+d^2} \quad \text{и} \quad \mathrm{HK'} = \frac{cbd}{b^2+d^2};$$

поэтому

$$\text{пл. AHB} = \frac{a^2bd}{2(b^2+d^2)} \quad \text{и пл. CHD} = \frac{c^2bd}{2(b^2+d^2)},$$

отсюда

$$\text{пл. AHB} + \text{пл. CHD} = \frac{bd(a^2+c^2)}{2(b^2+d^2)} = \frac{bd}{2}$$

и, по аналогіи,

$$\text{пл. BHC} + \text{пл. DHA} = \frac{ac}{2},$$

т. е. *сумма площадей двухъ тр—въ, имѣющихъ основаніями двѣ противоположныя стороны вписаннаго ортодіагональнаго чет—ка и общею вершиною—точку пересѣченія діагоналей этого чет—ка, равна половинѣ произведенія двухъ другихъ противоположныхъ сторонъ того же чет-ка.*

32. Понятно, что высоты вписаннаго чет—ка, соотвѣтственныя двумъ сторонамъ его, *антипараллельны* относительно этихъ сторонъ.

Четыреугольникъ, вершины котораго суть основанія высотъ вписаннаго чет—ка, будемъ называть *ортоцентрическомъ чет—комъ* этого чет—ка.

Теорема. *Дополнительный и ортоцентрическій чет—ки вписаннаго ортодіагональнаго чет—ка суть чет—ки, вписанные въ одну окружность.*

Дѣйствительно, такъ какъ (26)

$$OG = GH,$$

то (фиг. 6)

$$GK = GL', \ GM = GN', \ GL = GK' \text{ и } GN = GM';$$

но для ортодіагональнаго чет—ка

$$GK = GL = \frac{KL}{2} = \frac{MN}{2} = GM = GN;$$

поэтому вершины дополнительнаго чет—ка KLMN и ортоцентрическаго чет—ка K'L'M'N' ортодіагональнаго вписаннаго чет—ка ABCD находятся на равныхъ разстояніяхъ отъ центра медіанъ G чет—ка ABCD; слѣдовательно, дополнительный и ортоцентрическій чет—ки чет—ка ABCD вписываются въ одну окружность.

Это слѣдуетъ, впрочемъ, и изъ того, что тр—ки KK'L, KL'L, MN'N и NM'M суть прямоугольные, съ равными гипотенузами KL и MN, дѣлящимися пополамъ въ ихъ точкѣ пересѣченія G.

33. Окружность, описанную около дополнительнаго и ортоцентрическаго чет—въ даннаго ортодіагональнаго вписаннаго чет-ка, будемъ называть *окружностью восьми точекъ* этого чет-ка.*)

Изъ предыдущаго видно, что центромъ окружности восьми точекъ вписаннаго ортодіагональнаго чет—ка служитъ центръ медіанъ этого чет—ка, а радіусъ ея равенъ половинѣ медіаны двухъ противоположныхъ сторонъ его. Поэтому, обозначивъ черезъ r радіусъ окружности восьми точекъ чет—ка ABCD, при прежнихъ обозначеніяхъ медіанъ и діагоналей этого чет—ка, получимъ (4):

$$r = \frac{1}{2}k = \frac{1}{2}l = \frac{1}{4}\sqrt{e^2 + f^2}.$$

Если подставить сюда вмѣсто e^2 и f^2 ихъ выраженія чрезъ стороны чет—ка (30), то, принимая во вниманіе, что для ортодіагональнаго чет—ка

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2,$$

*) Эта окружность аналогична съ *окружностью Эйлера* тр-ка, которую называютъ также окружностью *девяти точекъ*, хотя правильнѣе было бы называть ее окружностью *шести точекъ*. См. „Нов. геом. тр-ка", I, 25.

найдемъ, что

$$r=\frac{1}{4}\sqrt{a^2+c^2+\frac{4abcd}{a^2+c^2}}=\frac{1}{4}\sqrt{b^2+d^2+\frac{4abcd}{b^2+d^2}}.$$

34. Стороны дополнительнаго и ортоцентрическаго чет—въ (напр. LN и K'M'), ограниченныя одними и тѣми-же двумя сторонами (CD и DA) даннаго вписаннаго ортодіагональнаго чет—ка, условимся наз. *соотвѣтственными* сторонами этихъ чет—въ.

Соотвѣтственныя стороны дополнительнаго и ортоцентрическаго чет—въ антипараллельны относительно двухъ сторонъ главнаго чет—ка, между которыми они заключены; напр. (фиг. 6), LN и K'M' антипараллельны относительно сторонъ DC и DA чет—ка ABCD; ибо углы DK'M' и DNL, вписанные въ *окружность восьми точекъ*, равны, такъ какъ каждый изъ нихъ измѣряется половиною дуги LM' этой окружности.

Такъ какъ противоположныя стороны KM и LN дополнительнаго чет—ка параллельны діагонали AC чет—ка ABCD, то соотвѣтственныя имъ *противоположныя стороны* L'N' и K'M' *ортоцентрическаго чет—ка антипараллельны діагонали* AC *главнаго чет—ка относительно тѣхъ сторонъ его, которыми онѣ ограничены* (т. е. AB и BC, CD и DA)

35. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что (фиг. 6)

$$\angle DK'M'=\angle DAC=\angle DBC=\angle CK'N';$$

поэтому

$$\angle HK'M'=\angle HK'N';$$

такимъ же образомъ можно убѣдиться, что

$$\angle HN'K'=\angle HN'L',\ \angle HL'N'=HL'M',\ \ldots\ ;$$

значитъ, *высоты вписаннаго ортодіагональнаго ет—ка суть биссектриссы ортоцентрическаго чет—ка*, подобно тому, какъ высоты тр—ка служатъ биссектриссами ортоцентрическаго тр—ка.

Изъ тѣхъ же равенствъ угловъ видно, что *стороны вписаннаго ортодіагональнаго чет—ка суть биссектриссы внѣшнихъ угловъ ортоцентрическаго чет—ка.* *)

Отсюда замѣчаемъ, что *ортоцентръ (H) и вершины вписаннаго ортодіагональнаго чет—ка* (ABCD) *суть центры круговъ вписаннаго въ ортоцентрическій чет—къ и внѣвписанныхъ въ него, касающихся каждыхъ трехъ его послѣдовательныхъ сторонъ.*

Изъ этого, въ свою очередь, слѣдуетъ, что *діагонали вписаннаго ортодіагональнаго чет—ка суть биссектриссы угловъ, составленныхъ противоположными сторонами ортоцентрическаго чет—ка.*

*) Сравн. „Нов. геом. тр—ка“ Д. Ефремова, I, 40, 42 и 43.

36. **Теорема.** *Радіусы круга, описаннаго около ортодіагональнаго чет—ка, проведенные въ его вершины, перпендикулярны къ сторонамъ ортоцентрическаго чет—ка.*

Ибо стороны ортоцентрическаго чет—ка K′N′L′M′ (фиг. 6) параллельны касательнымъ въ точкахъ D, C, B, A къ кругу ABCD, потому что касательная къ этому кругу, напр., въ точкѣ D образуетъ съ DC уголъ, равный $\angle DAC = \angle DK'M'$.

37. Такъ какъ

$$\angle ADH = \angle AOK,\ \angle DCH = \angle DON,\ \ldots\ ,$$

то

$$\angle HAD = \angle OAK,\ \angle HDC = \angle ODN,\ \ldots\ ;$$

слѣдовательно, *радіусы круга, описаннаго около ортодіагональнаго чет—ка, проведенные въ его вершины, изогональны съ его діагоналями относительно сторонъ, сходящихся въ этихъ вершинахъ.*

Изъ этого слѣдуетъ, что *центръ круга* (O), *описаннаго около ортодіагональнаго чет—ка, и ортоцентръ этого чет—ка суть точки изогонально сопряженныя относительно каждой пары послѣдовательныхъ сторонъ его;* поэтому произведенія разстояній этихъ точекъ (O и H) отъ каждой изъ сторонъ чет—ка равны *), т. е. (фиг. 6)

$$OK.HL' = OM.HN' = OL.HK' = ON.HM'.$$

38. Подставивъ сюда вмѣсто HL′, HK′, ... выраженія ихъ чрезъ стороны чет—ка (31) и принимая во вниманіе, что

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2,$$

получимъ:

$$OK.abd = OM.bac = OL.cbd = ON.dac;$$

отсюда видно, что

$$\frac{OK}{OM} = \frac{c}{d},\ \frac{OM}{OL} = \frac{d}{a},\ \frac{OL}{ON} = \frac{a}{b}$$

и

$$\frac{OK}{OL} = \frac{c}{a},\ \frac{OM}{ON} = \frac{d}{b},$$

т. е. *разстоянія центра круга, описаннаго около ортодіагональнаго чет—ка, отъ двухъ смежныхъ его сторонъ пропорціональны двумъ другимъ сторонамъ его, противоположнымъ первымъ; разстоянія же центра тогожс круга отъ противоположныхъ сторонъ чет—ка обратно пропорціональны этимъ сторонамъ.*

39. Радіусъ круга ρ, вписаннаго въ ортоцентрическій чет—къ L′N′K′M′ даннаго вписаннаго ортодіагональнаго чет—ка ABCD (фиг. 6), опредѣляется изъ извѣстнаго соотношенія между раді-

---

*) „Нов. геом тр-ка“ Д. Ефремова, V, 18.

**) Ib. IV, 50.

усами круговъ, изъ которыхъ одинъ вписанъ въ чет—къ, а другой описанъ около него, именно **)

$$\frac{1}{(r+\mathrm{GH})^2}+\frac{1}{(r-\mathrm{GH})^2}=\frac{1}{\rho^2}.$$

Такъ какъ

$$\mathrm{GH}=\frac{1}{2}\,\mathrm{OH}=\frac{m}{2} \text{ и } r=\frac{k}{2},$$

то изъ этого равенства найдемъ, что

$$\rho^2=\frac{(k^2-m^2)^2}{8\,(k^2+m^2)};$$

но при

$$a^2+c^2=b^2+d^2$$

изъ равенствъ (1), (2) и (3) слѣдуетъ, что

$$2\ (k^2+m^2)=a^2+c^2=b^2+d^2$$

и

$$2(k^2-m^2)=(e^2+f^2)-(a^2+c^2);$$

поэтому

$$\rho^2=\frac{[(e^2+f^2)-(a^2+c^2)]^2}{16(a^2+c^2)};$$

замѣтивъ же, что

$$e^2+f^2=a^2+c^2+\frac{4abcd}{a^2+c^2},$$

полученную формулу представимъ въ видѣ:

$$\rho^2=\frac{a^2b^2c^2d^2}{(a^2+c^2)^3}=\frac{a^2b^2c^2d^2}{(b^2+d^2)^3};$$

отсюда, вслѣдствіе равенства (17)

$$a^2+c^2=b^2+d^2=4\mathrm{R}^2,$$

находимъ, что

$$\rho=\frac{abcd}{8\mathrm{R}^3}.$$

40. Замѣтимъ еще, что изъ найденной формулы для r (33) слѣдуетъ, что

$$r^2=\frac{1}{16}\,(a^2+c^2)+\frac{abcd}{4(a^2+c^2)}=$$

$$=\frac{1}{4}\,\mathrm{R}^2+\frac{abcd}{16\mathrm{R}^2}=\frac{1}{4}\,\mathrm{R}^2+\frac{1}{2}\,\mathrm{R}\rho;$$

отсюда

$$4r^2=\mathrm{R}^2+2\mathrm{R}\rho=\mathrm{R}(\mathrm{R}+2\rho);$$

такъ какъ

$$2r = k = l,$$

то это равенство можно еще представить въ такомъ видѣ:

$$k^2 = l^2 = R(R + 2\rho).$$

Ранѣе (19) было найдено, что

$$k^2 + m^2 = l^2 + m^2 = 2R^2;$$

вычтя отсюда послѣднее равенство, увидимъ, что

$$m^2 = R(R - 2\rho).$$

Объемъ пирамиды.

Н. Элпидинскій.

Теорема. Объемъ треугольной пирамиды равняется трети произведенія площади основанія на высоту.

Доказательство.

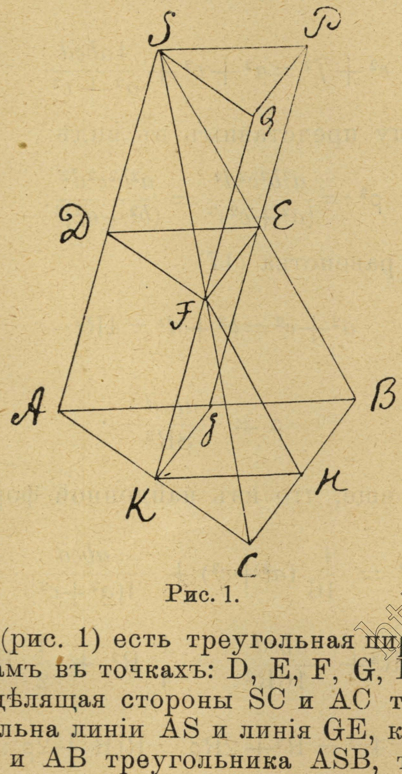


Рис. 1.

Пусть SABC (рис. 1) есть треугольная пирамида. Раздѣлимъ всѣ ея ребра пополамъ въ точкахъ: D, E, F, G, K, H. Замѣчая, что линія FK, какъ дѣлящая стороны SC и AC треугольника SCA пополамъ, параллельна линіи AS и линія GE, какъ дѣлящая пополамъ стороны SB и AB треугольника ASB, также параллельна линіи SA, заключаемъ, что линіи FK и EG параллельны между собой и, слѣдовательно, четыре точки E, F, G, K лежатъ въ одной плоскости. Плоскостями DEF, FKH и FEGK мы раздѣлимъ пирамиду SABC на двѣ пирамиды SDEF, FKHC и на двѣ призмы DEFAGK и FHKEGB. Пирамиды SDEF и FKHC, между собой равны, такъ какъ имѣютъ равныя основанія DEF и HGC и двѣ равныя и одинаково наклоненныя къ основаніямъ грани SDF и FKC, которыя, кро-мѣ того, одинаково расположены. Двѣ же призмы EFAGK иFKHEGB равновелики. Въ самомъ дѣлѣ, дополнивъ призму FKHEGB до параллелопипеда KN и проведя въ немъ діагональ-

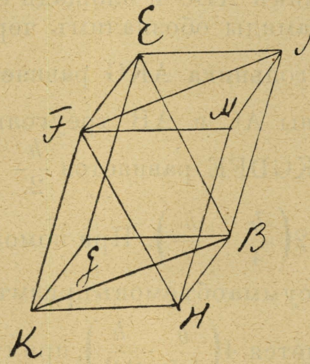


Рис. 2.

ную плоскость FKBN (рис. 2), мы найдемъ, что призмы BGKFEN и DEFAGK равновелики, такъ какъ площади ихъ основаній AGK и KGB, имѣющихъ по равной сторонѣ AG и GB и общую противоположную имъ вершину K, равны, высота же обѣихъ призмъ одна и та же. Слѣдовательно, призмы DEFAGK и FKHEBG, какъ половины одного и того параллелопипеда KN, имѣютъ равные объемы.

Если мы продолжимъ ребра FK и EG до пересѣченія съ прямыми SQ и SP, соотвѣтственно параллельными линіямъ DF и DE, и точки пересѣченія ихъ P и Q соединимъ прямой, то получимъ призму DFESPQ, равную призмѣ AKGDFE и, очевидно, бо́льшую пирамиды SDFE. Отсюда заключаемъ, что обѣ призмы AKGDFE и FKHBEG, вмѣстѣ взятыя, больше половины пирамиды SABC, а двѣ пирамиды SDFE и FKHC меньше половины пирамиды SABC.

То же самое построеніе повторимъ съ пирамидами FKHC и SDFE; получимъ четыре равновеликія призмы и четыре равныя пирамиды; при чемъ послѣднія пирамиды, вмѣстѣ взятыя, будутъ меньше $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$ четверти пирамиды SABC. Если надъ вновь полученными пирамидами мы повторимъ то же самое построеніе, то получимъ восемь равновеликихъ призмъ и восемь равныхъ пирамидъ; причемъ эти восемь пирамидъ составятъ меньше одной восьмой пирамиды SABC. Словомъ, повторивъ то же самое построеніе n разъ, мы получимъ n группъ, состоящихъ изъ 2^n равновеликихъ призмъ и 2^n равныхъ пирамидъ, сумма объемовъ которыхъ будетъ меньше произвольно малой величины, т. е., будетъ имѣть своимъ предѣломъ нуль. Слѣдовательно, для того, чтобы вычислить объемъ пирамиды SABC, намъ нужно найти предѣлъ суммы тѣхъ равновеликихъ призмъ, которыя будутъ получаться при выполненіи нашихъ построеній.

Найдемъ сумму объемовъ двухъ равновеликихъ призмъ полученныхъ при первомъ построеніи. Примемъ за основаніе пирамиды SABC треугольникъ ABC и площадь его обозначимъ черезъ b; высоту данной пирамиды обозначимъ черезъ h. Тогда очевидно, что площадь треугольника AKG равняется $\frac{b}{4}$, такъ какъ линія KG дѣлитъ стороны AC и AB треугольника ABC пополамъ высота же призмы AKGDFE равняется $\frac{h}{2}$. Слѣдовательно, искомая сумма равняется $2\left(\frac{b}{4}\cdot\frac{h}{2}\right)$. При помощи аналогичныхъ разсужденій найдемъ, что сумма объемовъ призмъ, полученныхъ при второмъ построеніи равняется $4\left(\frac{b}{4.4}\cdot\frac{h}{2.2}\right)$, при третьемъ $8\left(\frac{b}{4.4.4}\cdot\frac{h}{2.2.2}\right)$ и т. д. Отсюда заключаемъ, что

$$\text{объемъ пирамиды SABC} = 2\left(\frac{b}{4}\cdot\frac{h}{2}\right) + 4.\left(\frac{b}{4.4}\cdot\frac{h}{2.2}\right) + 8\left(\frac{b}{4.4.4}\cdot\frac{h}{2.2.2}\right) + \ldots = \frac{bh}{4} + \frac{bh}{4.4} + \frac{bh}{4.4.4} + \ldots =$$

$$= \frac{bh}{4}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4.4} + \ldots\right) = \frac{bh}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{bh}{4}\cdot\frac{4}{3} = \frac{bh}{3},$$ ч. т. д.

Упрощенное обращеніе простыхъ правильныхъ дробей съ знаменателемъ 7 въ десятичныя дроби.

С. Гирмана.

Непосредственнымъ дѣленіемъ находимъ, что

$$\frac{1}{7} = 0,(142857).$$

Періодъ этой дроби замѣчателенъ тѣмъ, что его легко написать. не прибѣгая вовсе къ дѣленію. Дѣйствительно, умножая на 2 числителя и знаменателя дроби $\frac{1}{7}$, получимъ, что

$$\frac{1}{7}=\frac{1.2}{7.2}=\frac{2}{14}.$$

Приписавъ къ знаменателю дроби $\frac{2}{14}$, т. е къ 14-и, ея числителя, т. е. 2, получимъ первыя три цыфры періода, а вычти попорядку каждую изъ этихъ ттрехъ цыфръ порознь изъ 9-ти, получимъ остальныя три цыфры періода, ибп

$$999-142=857.$$

Полезно также замѣтить, что первая цыфра періода *дроби $\frac{1}{7}$ равна числителю, а послѣдняя—знаменателю* этой дроби.

Разсматривая произведенія:

$$\left.\begin{array}{l}142857.1=142857,\\ 142857.2=285714,\\ 142857.3=428571,\\ 142857.4=571428,\\ 142857.5=714285,\\ 142857.6=857142,\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

замѣчаемъ, что каждое изъ этихъ произведеній составлено изъ 6-ти цыфръ множимаго, т. е. числа 142857, взятыхъ отъ лѣвой руки къ правой въ круговомъ порядкѣ, начиная съ нѣкоторой изъ нихъ *). Чтобы написать такое произведеніе, умножаемъ послѣднюю цыфру множимаго, т. е. 7, на даннаго множителя, меньшаго 7-и; послѣдняя цыфра этого произведенія будетъ послѣдней цыфрой искомаго произведенія. Отыскавъ эту цыфру въ числѣ 142857, къ цыфрамъ, стоящимъ за ней справа, приписываемъ остальные цыфры того же числа 142857, включая и упомянутую послѣднюю цыфру произведенія. Полученное такимъ образомъ шестизначное число будетъ искомое произведеніе.

Замѣчательно также еще слѣдующее произведеніе:

$$142857.7=999999. \qquad (2)$$

Дѣля почленно каждое изъ 6-и равенствъ (1) на равенство (2), получаемъ послѣ сокращеній, что

$$\frac{1}{7}=\frac{142857}{999999}=0,(142857),$$

*) Lodzer Zeitung, Morgen-Ausgabe. № 246. 31 Aug. (13 sept.) 1905.

$$\frac{2}{7}=\frac{285714}{999999}=0,(285714),$$

$$\frac{3}{7}=\frac{428571}{999999}=0.(428571),$$

$$\frac{4}{7}=\frac{571428}{999999}=0,(571428).$$

$$\frac{5}{7}=\frac{714285}{999999}=0,(714285),$$

$$\frac{6}{7}=\frac{857142}{999999}=0,(857142).$$

Во всѣхъ этихъ дробяхъ послѣдняя цыфра періода десятичной дроби равна послѣдней цыфрѣ произведенія знаменателя обращаемой въ десятичную простой несократимости дроби на ея числителя.

Изъ всего предыдущаго вытекаютъ слѣдующія два правила:

1) *Чтобы получить періодъ дроби* $\frac{1}{7}$, *надо умножить числителя и знаменателя этой дроби на 2: приписавъ къ знаменателю полученной такимъ образомъ дроби ея числителя, получимъ первыя три цыфры періода. Вычтя затѣмъ попорядку каждую изъ этихъ трехъ цыфръ порознь изъ 9-и, получимъ остальныя три цыфры періода*

2) *Чтобы получить періодъ какой-нибудь изъ дробей:* $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$, *надо написать цыфры періода дроби* $\frac{1}{7}$ *въ круговомъ порядкѣ отъ лѣвой руки къ правой, начиная съ цыфры, слѣдующей въ этомъ періодѣ за послѣдней цыфрой произведенія знаменателя обращаемой въ десятичную простой дроби на ея числителя.*

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“ и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 913 (4 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\sin(x-w)=\sin x\cos x.$$

Е. Григорьевъ (Казань).

№ 914 (4 сер.). Построить параллелограммъ $ABCD$ по основанію $AD=a$, данному по величинѣ и положенію, и по діагонали $AC=b$, данной по величинѣ, зная, что вершина B должна лежать на данной линіи MN.

В. Шлыгинъ (ст. Урюпинская).

№ 915 (4 сер.). Построить треугольникъ ABC, зная медіану m_a и си медіану n_a угла A, а также уголъ α между ними.

Н. Агрономовъ (Петербургъ).

№ 916 (4 сер.). Найти сумму n членовъ ряда

$$\frac{m-2}{m-1}+\frac{m^2-2}{(m-1)(m^2-1)}+\frac{m^3-2}{(m-1)(m^2-1)(m^3-1)}+\ldots$$

и вычислить предѣлъ этой суммы, предполагая, что абсолютная величина m болѣе 1.

П. Флоровъ.

№ 917 (4 сер.). Доказать, что число

$$x^9-x^3$$

при всякомъ цѣломъ x кратно 504.

Я. Назаревскій (Харьковъ).

№ 918 (4 сер.). Доказать тожество

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

(Заимств.)

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 804 (4 сер.). *Вычислить сумму* n *первыхъ членовъ ряда*

$$1,\ \frac{6}{5},\ \frac{6.10}{5.9},\ \ldots,\ \frac{6.10.14\ \ldots\ [2(2k-1)].[2(2k+1)]}{5.9.13\ \ldots\ (4k-3).(4k+1)}.$$

Полагая въ тожествѣ

$$\frac{1}{a_1}+\frac{a_1+r}{a_1a_2}+\frac{(a_1+r)(a_2+r)}{a_1a_2a_3}+\ldots+\frac{(a_1+r)(a_2+r)\ldots(a_{n-1}+r)}{a_1a_2\ldots a_{n-1}.a_n}=$$

$$=\frac{1}{r}\left[\frac{(a_1+r)(a_2+r)\ldots(a_{n-1}+r)(a_n+r)}{a_1\ a_2a_3\ldots a_{n-1}\,a_n}-1\right],$$

предложенномъ для доказательства авторомъ задачи въ № 402 „Вѣстника" [см. зад. № 680 (4 сер.); рѣшеніе дано въ № 430 „Вѣстника"], $r=5$, $a_1=1$, $a_2=5$, $a_3=9$, вообще $a_n=4n-3$, получимъ:

$$1+\frac{6}{5}+\frac{6.10}{5.9}+\ldots+\frac{6.10.14\ \ldots\ 2(2n-1)}{5.9.13\ \ldots\ (4n-3)}=$$

$$=\frac{1}{5}\left[\frac{6.10\ \ldots\ 2(n-1)2(2n+1)}{5.9\ \ldots\ldots\ (4n-3)}-1\right]$$

Н. Агрономовъ (Ревель); *Г. Лебедевъ* (Обоянь); *Э. Лейнъкъ* (Рига).

№ 806 (4 сер.). *Рѣшить систему уравненій*

$$x^{10}-y^9.z=a, \quad y^{10}-z^9x=b, \quad z^{10}-x^9.y=0.$$

Помножая первое, второе и третье уравненія данной системы на y,z и x, получимъ $o=x^{10}y-y^{10}z+y^{10}z-z^{10}x+z^{10}x-x^{10}y=ay+bz$ (1). Предположимъ сначала, что $a \neq 0$. Въ этомъ случаѣ изъ равенства (1) находимъ:

$$y=-\frac{b}{a}z \quad (2).$$

Подставляя это значеніе y въ третье изъ данныхъ уравненій, имѣемъ:

$$z^{1}+\frac{b}{a}zx^9=z\left(z^9+\frac{b}{a}x^9\right)=0,$$

откуда или $z=0$ или $z^9=-\frac{b}{a}x^9$ (3). Если $z=0$, то [см. (2)], $y=0$, а потому, согласно со вторымъ даннымъ уравненіемъ, $b=0$; если это условіе соблюдено то изъ перваго уравненія находимъ: $x=\sqrt[10]{a}$. Изъ уравненія (3) имѣемъ: $z=\sqrt[9]{-\frac{b}{a}}.x$ (4), откуда [см. (2)] $y=-\frac{b}{a}\sqrt[9]{-\frac{b}{a}}x$ (5). Подставляя значенія y и z изъ равенствъ (4) и (5) въ первое изъ данныхъ уравненій, получимъ:

$$x^{10}+\left(\frac{b}{a}\right)^9\cdot\frac{b}{a}\cdot x^9\cdot\sqrt[9]{\frac{b}{a}}.x=a.$$

откуда

$$x=\sqrt[10]{\frac{a}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^{10}\cdot\sqrt[9]{\frac{b}{a}}}}.$$

Подставляя это значеніе x въ равенства (4) и (5), находимъ y и z При $a=0$ и $b\neq 0$ равенство (1) даетъ $z=0$, откуда, согласно съ первымъ и вторымъ уравненіями данной системы, $x=0$, $y=\sqrt[10]{b}$. Пусть теперь $a=0$ и $b=0$. Въ этомъ случаѣ, полагая въ данной системѣ одно изъ неизвѣстныхъ; напримѣръ, x равнымъ нулю, находимъ, что оба другія тоже равны нулю таким образомъ, или $x=y=z=0$ или ни одно изъ неизвѣстныхъ не равно нулю. Полагая $z\neq 0$, опредѣляя x изъ второго уравненія данной системы и подставляя его значеніе въ первое уравненіе, имѣемъ:

$$x=\frac{y^{10}}{z^9},\ \frac{y^{100}}{z^{90}}-y^0.z=0, \text{ откуда } y=\sqrt[91]{z}, \quad x=\frac{\sqrt[91]{z^{10}}}{z^9}.$$

Эти значенія x и y, при произвольномъ значвніи z, удовлетворяютъ также и третьему уравненію данной системы.

А. П. (Сосновицы); *Г. Лебедевъ* (Обоянь).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66.

ОБЩЕДОСТУПНЫЙ

ЖУРНАЛЪ

по физическимъ наукамъ и ихъ приложеніямъ въ школѣ, техникѣ и любительской практикѣ.

IV годъ изданія

ОТКРЫТА ПОДПИСКА

годъ изданія IV

20 нумеровъ въ годъ, 3 руб. съ пересылкой

на $190^{7}/_{8}$ академическ. годъ на журналъ

ФИЗИКЪ-ЛЮБИТЕЛЬ,

Адресъ: Николаевъ *(Херс. губ.)* **Контора Ф.-Л**

который будетъ выходить въ **увеличенномъ форматѣ при прежней годовой цѣнѣ (3 руб.)**, въ томъ-же числѣ (20) нумеровъ въ годъ, по два въ мѣсяцъ съ августа по май, по прежней программѣ, но съ **увеличеніемъ объема** нѣкоторыхъ отдѣловъ (см. ниже, 2-й, 4-й, 5-й и 6-й).

Опредѣленіемъ основного отдѣла **Ученаго Комитета Министерства Народнаго Просвѣщенія** постановлено журналъ „Физикъ-Любитель“ за $190^{5}/_{6}$ годъ признать **заслуживающимъ вниманія** при пополненіи ученическихъ **библіотекъ среднихъ учебныхъ заведеній** (Ж. М. Н. П., февраль 1907 года).

Опредѣленіемъ Отдѣла Ученаго Комитета по техническому и профессіональному образованію журналъ признанъ заслуживающимъ вниманія педагогическихъ совѣтовъ при пополненіи **библіотекъ какъ техническихъ, такъ и ремесленныхъ учебныхъ заведеній**.

За истекшіе годы журналъ удостоился лестныхъ **отзывовъ печати**, какъ напр. *проф. Хвольсона* въ Ж. М. Н. Пр. (за апрѣль 1907), ред. „*Музея Педагогическаго Общества*“ при Императорскомъ Московскомъ Университетѣ, ред. журнала „*Техническое Образованіе*“, изд. Пост. Ком. по техн. образ. при Императорскомъ Русскомъ Техническомъ Обществѣ, ред. „*Педагогическаго Сборника*“ изд. при Главн. Упр. военно-учебныхъ заведеній, ред. журнала „*Природа въ школѣ*“, и др.