

№ 538.

# ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

— И —

## ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

ИЗДАВАЕМЫЙ

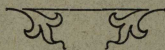
В. А. ГЕРНЕТОМЪ

ПОДЪ РЕДАКЦІЕЙ

Приватъ-Доцента В. Ф. КАГАНА.

---

XLV-го Семестра № 10-й.



ОДЕССА.

Типографія Акц. Южно-Русскаго О-ва Печ. Дѣла. Пушкинская, 18.

1911.

<http://vofem.ru>



ДВУХНЕДѢЛЬНЫЙ ИЛЛЮСТРИРОВАННЫЙ ЖУРНАЛЪ

„**НОВОСТИ ТЕХНИКИ И ПРОМЫШЛЕННОСТИ**“

Болѣе 400 страницъ текста въ годъ.

На Екатеринославской областной выставкѣ 1910 года журналъ награжденъ **Похвальнымъ листомъ** за **полезность** изданія.**Программа:** Сообщенія, распоряженія и узаконенія. Общества, собранія и съезды. Выставки, конкурсы и экспертизы. Теорія и практика въ техникѣ и промышленности. Открытія, изобрѣтенія и усовершенствованія. Критика и библиографія. Послѣдніе номера журналовъ. Хроника и мелкія замѣтки.**Подписная плата:** **ДВА РУБЛЯ** въ годъ (24 №№) съ доставкой и пересылкой. За границу 4 рубля. Наложеннымъ платежемъ на 20 к. дороже.**Подписная плата можетъ быть высылаема почт. марками въ ЗАКАЗНОМЪ письмѣ. ПРОБНЫЙ НОМЕРЪ БЕЗПЛАТНО.****АДРЕСЪ РЕДАКЦИИ:** г. **ЕКАТЕРИНОСЛАВЪ**, Проспектъ, домъ Павловской. „Новости техники и Промышленности“ печатаются въ 1000 экземплярахъ, изъ которыхъ 500 экземпляровъ каждому номера рассылаются бесплатно попеременно инженерамъ различныхъ специальностей, рудникамъ, заводамъ, конторамъ и Правительственнымъ учреждениямъ**12000 адресовъ въ годъ** кромѣ постоянныхъ подписчиковъ.**ПЛАТА ЗА ОБЪЯВЛЕНІЯ:** страница среди объявленій 200 руб. въ годъ (24 раза), среди текста 400 рублей. Дробныя части страницы (половина и четверть) пропорціонально меньше. Спросъ и предложеніе труда 25 копѣекъ за одинъ разъ.**О всѣхъ книгахъ, присылаемыхъ въ редакцію, или дается отзывъ или трижды печатается въ отдѣлѣ „новыя книги“.**

Ред.-Изд. Инж.-Техн. Н. Ивановъ.

12 книгъ, до  
1200 стран.,  
12 приложен.,  
до 500 иллюстр.

ПРИНИМАЕТСЯ ПОДПИСКА НА 1911 Г.

НА ДѢТСКІЙ

ИЛЛЮСТРИРОВАННЫЙ ЖУРНАЛЪ

**4 руб.****въ годъ  
съ пересыл.**„**МАЯКЪ**“**3-й годъ  
изданія.**для дѣтей старшаго и средняго возраста  
СЪ ОТДѢЛОМЪ ДЛЯ МАЛЕНЬКИХЪ.

Подъ редакціей И. ГОРБУНОВА-ПОСАДОВА.

**3-й годъ  
изданія.**

При участіи Л. Н. Толстого, Е. М. Бемъ, П. А. Буланже, Е. Е. Горбуновой, В. И. Лукьянской, И. Ф. Наживина, С. А. Порѣцкаго, С. Т. Семенова, Г. К. Соломина, А. К. Чертковой и другихъ постоянныхъ сотрудниковъ „Библиотекѣ Горбунова-Посадова для дѣтей и для юношества“.

Журналъ дастъ въ 1911 году 12 книгъ и 12 приложеній, содержащихъ въ себѣ разнообразный матеріалъ для дѣтскихъ занятій и развлеченій, способствующихъ умственному и физическому развитію дѣтей. Въ текстѣ журнала и приложеніяхъ будетъ помѣщено множество иллюстрацій.

Въ журналѣ помѣщаются: 1) Разсказы, повѣсти и стихотворенія. 2) Географическіе очерки и путешествія. 3) Историческіе очерки и біографіи. 4) Мысли мудрыхъ людей. 5) Бесѣды по естествознанію и наблюденіямъ природы. 6) Объ изобрѣтеніяхъ и открытіяхъ. 7) Почтовый ящикъ (переписка читателей и редакціи). 8) Смѣсь (задачи, игры, шутки и т. д.).

Въ числѣ 12 приложеній будутъ даны руководства о томъ, какъ дѣтямъ самимъ дѣлать интересныя для нихъ приборы, машины, какъ дѣлать опыты и наблюденія, совѣты о рисованіи, вообще руководства къ разнымъ занятіямъ и играмъ въ комнатѣ и на воздухѣ и такъ далѣе.

**Журналъ за 1909 г. допущенъ въ библиот. городскихъ училищъ.**

Подписка съ пересылкой на годъ 4 р., за полгода 2 р. Въ Москвѣ безъ доставки 3 р. 50 к. Подписка приним. въ конторѣ „Маяка“: Москва, Дѣвичье поле, Трубецкой пер., 8. Въ другихъ городахъ въ контор. и книжн. магазин., принимающихъ подписку.

Издательница М. В. Горбунова.

Редакторъ И. И. Горбуновъ-Посадовъ.



# Вѣстникъ Опытной Физики

И

## ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.



№ 538.



**Содержаніе:** О преподаваніи геометріи. *Проф. Ф. Клейна.* (Продолженіе). — Наблюденіе іоновъ въ микроскопъ и опредѣленіе элементарнаго электрическаго заряда. *А. Голлоса.* — Проектъ положенія о 1-мъ Всероссийскомъ Сѣздѣ преподавателей математики. — Рецензіи: С. Слугиновъ. „Теорія радикаловъ“. С. В. А. А. Ляминъ. „Приложеніе алгебры къ геометріи“. С. В. — Рѣшенія задачъ: №№ 285, 287, 299, 304 и 305 (5 сер.). — Книги и брошюры, поступившія въ редакцію. — Объявленія.

При этомъ № разсылается проспектъ издательства Саблина о книгѣ І. В. Цингера „Начальная физика“.

## О преподаваніи геометріи.

*Проф. Ф. Клейна.*

(Продолженіе \*).

### II. Преподаваніе во Франціи.

Оно представляетъ для насъ большой интересъ въ виду того вліянія, которое оно оказало на преподаваніе у насъ въ Германіи. Здѣсь предъ нами открывается совсѣмъ другая картина, чѣмъ въ Англіи. Англичане весьма консервативны въ своихъ учрежденіяхъ, тогда какъ французы склонны къ новшествамъ, и часто вводятъ ихъ не путемъ постепенныхъ преобразованій существующихъ учреждений, но путемъ внезапной реформы, скорѣе напоминающей революцію. Организация преподаванія здѣсь тоже совершенно другая: во Франціи установилась не только централизація экзаменовъ, она обусловливается пріемными испытаніями въ высшія школы, въ особенности Парижскія, — но и вообще строго централизованная организація преподаванія; высшее вѣдомство — такъ называемое „conseil d'instruction superieure“, въ составъ котораго, замѣтимъ, всегда входили и первоклассныя научныя силы, является полнымъ хозяиномъ учебнаго дѣла, и можетъ, когда ему угодно, предписывать по своему усмотрѣнію самыя глубокія реформы и измѣненія. Эти реформы

\*) См. № 537 „Вѣстника“.



сейчас же проводятся въ жизнь во всей странѣ, и учителямъ ничего другого не остается, какъ приспособиться къ новымъ требованіямъ. Индивидуальная свобода отдѣльнаго учителя, которая въ столь высокой степени культивируется въ Германіи, тамъ весьма стѣснена. Такая система справедливо можетъ быть названа „системой революціи сверху“.

Что касается спеціально преподаванія геометріи, то его модернизироваііе, т. е. освобожденіе отъ строгаго слѣдованія Евклиду, во Франціи началось уже очень давно, круглымъ счетомъ около 1550 г.; оно возникло, какъ одно изъ проявленій разыгравшейся тогда великой борьбы гуманизма противъ старой схоластики. Къ этому времени представитель новыхъ идей Петръ Рамусъ, весьма извѣстный не только въ математикѣ, но и въ другихъ областяхъ, написалъ учебникъ математики („*Arithmeticae libri 2, geometricae libri 27*“ \*); какъ по формѣ, такъ и по матеріалу эта книга совершенно отличается отъ Евклида: для Рамуса, какъ онъ заявляетъ въ началѣ первой книги, геометрія есть искусство хорошо измѣрять („*ars bene metiendi*“). Сообразно съ этимъ практическіе интересы стоятъ у него на первомъ планѣ; онъ сперва объясняетъ, какъ производить простыя геодезическія измѣренія, описываетъ инструменты, и все это поясняетъ многочисленными интересными рисунками. Лишь на второмъ планѣ стоятъ у него логическія дедукціи, „но отнюдь не какъ самоцѣль, но лишь какъ средство для нахожденія новыхъ, практически полезныхъ геометрическихъ предложеній, которыя не могутъ быть получены непосредственно изъ наблюденія“. Вытѣсненіе дедукціи здѣсь, конечно, не заходитъ такъ далеко, какъ у Перри.

Эта обработка геометріи удержалась во Франціи въ теченіе долгаго времени. Круглымъ счетомъ 200 лѣтъ послѣ Рамуса появились знаменитые „Элементы геометріи“ Клеро. Это тотъ самый Клеро, который извѣстенъ, какъ выдающійся изслѣдователь; вообще во Франціи, въ противоположность тому, что мы видимъ въ Германіи и Англіи, выдающіеся ученые постоянно принимали дѣятельное участіе въ разработкѣ дидактическихъ вопросовъ. Книга Клеро замѣчательно своимъ прекраснымъ стилемъ; нужно замѣтить, что французы вообще въ высокой мѣрѣ владѣютъ искусствомъ плавнаго удобочитаемаго изложенія даже трудныхъ и отвлеченныхъ вопросовъ, которые чрезвычайно выгодно отличаются отъ скучной и шаблонной расчлененности „Евклидоваго“ изложенія. Такія книги читаются, „какъ романъ“ и являются лучшимъ опроверженіемъ стараго взгляда, будто хорошія научныя книги непременно должны быть скучны. Что касается содержанія, то и Клеро исходитъ исключительно изъ практическихъ проблемъ землемѣрія и затѣмъ весьма постепенно вводитъ идеи общаго характера, при чемъ строгаго логическаго момента отступаетъ на задній планъ. Въ очень интересномъ предисловіи онъ объясняетъ, почему онъ выбралъ такой родъ изложенія. Такъ какъ практическія задачи землемѣрія были тѣмъ стимуломъ, который

\*) Basel, 1580.



побуждалъ людей развить геометрическую науку, то гораздо легче будетъ заинтересовать каждаго, если начинать съ этихъ задачъ, а не давать начинающему отвлеченной системы аксіомъ и теоремъ, внутренний смыслъ которыхъ онъ не такъ-то скоро будетъ въ состояніи понять. Клеро обнаруживаетъ здѣсь тенденцію сдѣлать свой трудъ доступнымъ для болѣе широкихъ круговъ неспеціалистовъ; нужно замѣтить, вообще, что въ ту эпоху математика въ гораздо большей степени, чѣмъ теперь, являлась въ тогдашнемъ обществѣ необходимымъ образовательнымъ элементомъ.

Переломъ въ дѣлѣ преподаванія вновь наступилъ въ концѣ восемнадцатаго столѣтія, какъ одно изъ слѣдствій переворота, вызваннаго великой французской революціей 1789 г. До этой эпохи преподаваніе имѣло своей главной цѣлью подготовку лицъ высшихъ сословій и, въ частности, офицеровъ; теперь же на первый планъ выступилъ новый социальный слой — буржуазія, и дѣлу преподаванія поставлены были новыя задачи, которыя нужно было разрѣшить новыми методами. При этомъ намѣтились два теченія, находившіяся въ связи съ двумя высшими школами, которыя тогда были основаны въ Парижѣ: одна — „Ecole Polytechnique“ — предназначалась для подготовки инженеровъ и саперовъ, и на ней отразился наступившій тогда подъемъ техники; другая школа — „Ecole Normale Supérieure“, — имѣла своей задачей готовить учителей для среднихъ учебныхъ заведеній. Въ „Ecole Polytechnique“ наиболѣе сильнымъ вліяніемъ пользовался знаменитый геометръ Монжъ (Monge). Онъ создалъ ту постановку преподаванія геометріи, которая и теперь еще существуетъ въ высшихъ техническихъ школахъ и другихъ подобныхъ институтахъ; онъ ввелъ въ программу обширный курсъ начертательной геометріи и аналитической геометріи. Прежде дѣлали успѣхи только отдѣльные слушатели, проявлявшіе особенную склонность къ предмету; теперь же, благодаря цѣлесообразной организаціи преподаванія, множество студентовъ одновременно научались работать успѣшно и самостоятельно. Особенно сильное впечатлѣніе произвело на современниковъ Монжа, когда онъ въ первый разъ велъ практическія занятія, въ которыхъ одновременно работало за своими столиками до 70 лицъ.

Съ другой стороны, въ „Ecole Normale“ работалъ Лежандръ, книга котораго „Eléments de geometrie“, долгое время оказывала исключительное вліяніе на преподаваніе геометріи. Здѣсь предъ мною лежитъ 4-е изданіе этой книги (Paris, 1802). По своему распространенію эта книга послѣ „Началъ“ Евклида занимаетъ первое мѣсто между всѣми учебниками элементарной геометріи, и, что замѣчательно, — не только во Франціи, гдѣ она выдерживала одно изданіе за другимъ на протяженіи всего девятнадцатаго столѣтія, но и въ другихъ странахъ; особенно сильное вліяніе она имѣла долгое время въ Америкѣ и Италіи.

Въ сравненіи съ Клеро, а тѣмъ болѣе съ Рамусомъ, книга Лежандра представляетъ большой шагъ обратно къ Евклиду: ея главная цѣль — дать замкнутую абстрактную систему элементарной геометріи. Съ другой стороны, однако, изложеніе Лежандра отли-



чается отъ Евклида существенными пунктами, на которыхъ мы сейчасъ остановимся нѣсколько подробнѣе, въ виду важнаго историческаго значенія Лежандра.

1) Въ отношеніи стиля изложеніе Лежандра отличается связностью и удобочитаемостью; по своей формѣ оно приближается болѣе къ Клеро, чѣмъ къ расчлененной и, можно даже сказать, размельченной формѣ Евклида.

2) Въ отношеніи содержанія самое существенное отличіе отъ Евклида состоитъ въ томъ, что Лежандръ сознательно пользуется элементарной ариметикой своего времени; онъ, является, слѣдовательно, сторонникомъ сліянія ариметики съ геометрией, и при этомъ имѣетъ въ виду также и тригонометрію, которую онъ включилъ въ свой учебникъ.

3) Принципіальная точка зрѣнія Лежандра сравнительно съ Евклидомъ нѣсколько перемѣщена отъ логической стороны къ интуитивной. Евклидъ, какъ я неоднократно указывалъ, особенное значеніе придаетъ логическому разсужденію, которое онъ сохраняетъ или, по крайней мѣрѣ, стремится сохранить свободнымъ отъ интуитивныхъ элементовъ; всѣ факты интуиціи, которыми ему впослѣдствіи придется пользоваться, онъ старается предпослать въ своихъ аксіомахъ и т. п. Напротивъ, Лежандръ при случаѣ вводитъ въ свои логическія доказательства соображенія, основанныя на интуиціи.

4) Что касается частныхъ, то особенно интересно сравнить у обоихъ авторовъ разработку ирраціональных чиселъ. Въ книгѣ V Евклидъ, какъ мы уже знаемъ, даетъ подробное опредѣленіе ирраціональнаго числа въ формѣ такъ называемой *logos*, или отношенія двухъ несоизмѣримыхъ величинъ, и изслѣдуетъ его вполне аналогично современной теоріи ирраціональных чиселъ; въ дальнѣйшемъ изложеніи Евклидъ ведетъ доказательства тѣхъ предложеній, въ которыя существенно должны входить ирраціональные числа, съ особенной тщательностью и строгостью, удовлетворяющей даже современнымъ требованіямъ (доказательства методомъ исчерпыванія!). Лежандръ же скользитъ мимо всего этого, не останавливаясь на нихъ; числа, какъ рациональные, такъ и ирраціональные, онъ считаетъ извѣстными изъ ариметики, въ которой тогда тоже не слишкомъ заботились о строгомъ обоснованіи. Онъ не пользуется доказательствами по методу исчерпыванія и т. п. и считаетъ самоочевиднымъ, что предложеніе, имѣющее силу для всѣхъ рациональных чиселъ, вѣрно также для всѣхъ ирраціональных чиселъ. Въ этомъ пунктѣ онъ, впрочемъ, сходится со всѣми великими математиками своего времени.

5) Несмотря на это свободное отношеніе къ логической строгости изложенія, Лежандръ отнюдь не остается индифферентнымъ къ принципіальнымъ вопросамъ объ основахъ геометріи; въ этомъ пунктѣ онъ, въ противоположность своимъ предшественникамъ во Франціи, не только возобновляетъ съ живымъ интересомъ



Евклидову традицію, но подвигаетъ ее впередъ и обогащаетъ существенно новыми идеями.

Особенное вниманіе Лежандръ удѣляетъ теоріи параллельныхъ линій; на этомъ пунктѣ мы остановимся нѣсколько подробнѣе. При этомъ мы будемъ имѣть въ виду лишь первыя изданія, такъ какъ послѣдующія именно въ этомъ пунктѣ подверглись существеннымъ измѣненіямъ.

Я исхожу изъ слѣдующаго замѣчанія: выше мы различали Евклидову геометрію и различные неевклидовскія въ зависимости отъ того, существуетъ ли одна параллельная прямая, или двѣ, или ни одной; но вмѣсто этого мы можемъ воспользоваться также суммой угловъ любого прямолинейнаго треугольника, и мы получимъ слѣдующій способъ отличія, который, какъ можно доказать, въ точности аналогиченъ предыдущему. Въ Евклидовой геометріи эта сумма всегда равна  $\pi$ , въ неевклидовой геометріи перваго рода (гиперболической) она всегда меньше  $\pi$ , а въ неевклидовой геометріи второго рода (эллиптической) — всегда больше  $\pi$ . Исходя изъ этого положенія, Лежандръ желаетъ доказать, что двѣ послѣднія геометріи невозможны. Такъ какъ это равносильно доказательству Евклидовой аксіомы о параллельныхъ линіяхъ, то Лежандръ достигаетъ этого лишь посредствомъ того, что принимаетъ нѣкоторыя начала, неявно содержащія въ себѣ аксіому о параллельныхъ, и искусственнымъ образомъ выбираетъ въ качествѣ такихъ началъ столь самоочевидныя предложенія, что читатель, а также несомнѣнно и самъ авторъ, не замѣчаетъ, что въ дѣйствительности онъ при этомъ принимаетъ новыя ограничительныя предпосылки.

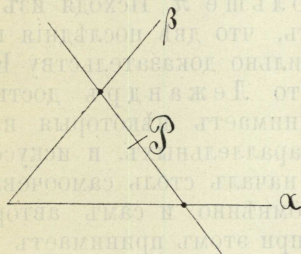
Чтобы доказать невозможность эллиптической геометріи, т. е. что сумма угловъ не можетъ быть больше  $\pi$ , Лежандръ молчаливо допускаетъ безконечную длину прямой. Это допущеніе несомнѣнно отличается большой правдоподобностью, и его справедливость не возбуждала сомнѣній ни у Лежандра, ни у его читателей, всѣ послѣдующіе геометры до Риманна считали его самоочевиднымъ. Тѣмъ не менѣе эллиптическая геометрія показываетъ, что всѣ другія аксіомы геометріи совмѣстимы также съ допущеніемъ конечной длины прямой, если принять, что она неограничена, т. е. сама собой замыкается; необходимо поэтому сознать, что, принимая безконечную длину прямой, мы вводимъ новый независимый фактъ, доставляемый интуиціей.

Чтобы исключить также возможность гиперболической геометріи, Лежандръ пользуется, опять-таки не подчеркивая этого, простымъ интуитивнымъ фактомъ, въ которомъ не усомнится ничей разсудокъ, не испорченный, такъ сказать, изученіемъ геометріи: если  $P$  есть какая-нибудь точка внутри угла двухъ полупрямыхъ  $\alpha$ ,  $\beta$ , то черезъ  $P$  всегда можно провести прямую, которая пересѣкала бы какъ полупрямую  $\alpha$ , такъ и  $\beta$  (фиг. 1). При помощи этого положенія Лежандръ доказываетъ далѣе безукоризненнымъ образомъ,

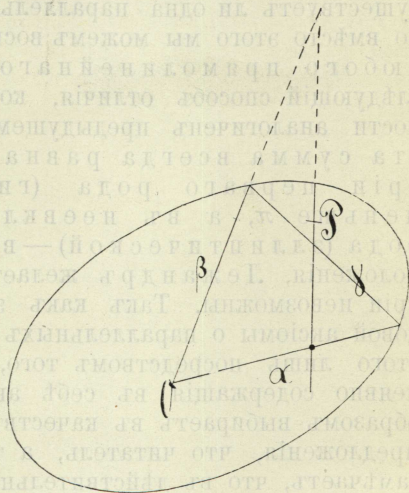


что сумма угловъ треугольника не можетъ также быть меньше  $\pi$ , такъ что остается лишь одна возможная геометрія \*)—Евклидова.

Выяснимъ теперь, въ какой мѣрѣ этотъ столь правдоподобный фактъ не имѣетъ мѣста въ неевклидовой геометріи перваго рода; тогда только мы поймемъ, какимъ образомъ Лежандру при его помощи удастся исключить эту геометрію. Раньше я указалъ вкратцѣ, что къ неевклидовой геометріи можно придти, положивъ въ основу мѣроопредѣленія общую поверхность второго порядка вмѣсто дегенерировавшей специально въ мнимый сферическій кругъ; я привелъ основныя формулы, не входя, однако, въ геометрическія подробности; для нашей цѣли мы теперь должны частью навестать это, для чего достаточно будетъ говорить лишь о плоскости. Въ качествѣ основнаго коническаго сѣченія для неевклидоваго гиперболическаго



Фиг. 1.



Фиг. 2.

опредѣленія мѣръ мы тогда должны были взять кривую, имѣющую въ координатахъ прямой уравненіе:

$$\varphi \equiv \alpha^2 + \beta^2 - \epsilon \delta^2 = 0 \quad \text{при } \epsilon > 0,$$

т. е. вещественное коническое сѣченіе (фиг. 2), а формула разстоянія

$$r = k \cdot \arccos \frac{\epsilon (\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2) - \tau_1 \tau_2}{V \epsilon (\xi_1^2 + \eta_1^2) - \tau_1^2 V \epsilon (\xi_2^2 + \eta_2^2) - \tau_2^2}$$

даетъ вещественныя значенія лишь при условіи, чтобы  $k$  было чистымъ мнимымъ числомъ, и обѣ точки 1, 2 лежали внутри вещественнаго коническаго сѣченія; при этомъ словомъ „внутри“ мы обозначаемъ всѣ тѣ точки плоскости, черезъ которыя нельзя провести ни одной вещественной касательной къ коническому сѣченію. Поэтому область операцій вещественной гиперболической гео-

\*) Читателю, незнакому съ мѣроопредѣленіемъ Кели-Клейна, придется пропустить только одну страницу.



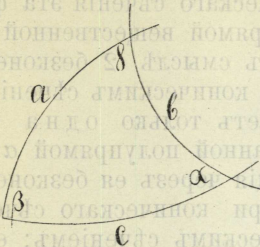
метріи состоитъ исключительно изъ такихъ внутреннихъ точекъ и изъ прямыхъ, поскольку онѣ идутъ „внутри“ коническаго сѣченія; точки самого коническаго сѣченія представляютъ собою бесконечно удаленные элементы, потому что для разстоянія любой точки  $O$  отъ точки коническаго сѣченія эта формула даетъ значеніе  $\infty$ . Поэтому на всякой прямой вещественной гиперболической геометріи существуетъ въ этомъ смыслѣ 2 бесконечно удаленныя точки — двѣ точки ея пересѣченія съ коническимъ сѣченіемъ  $\Phi = 0$ ; на каждой же полупрямой  $a$  существуетъ только одна бесконечно удаленная точка. Параллельными данной полупрямой  $a$  мы должны будемъ называть всѣ прямыя, проходящія черезъ ея бесконечно удаленную точку, т. е. всѣ лучи, идущіе внутри коническаго сѣченія изъ точки пересѣченія полупрямой  $a$  съ коническимъ сѣченіемъ; если мы рассматриваемъ всю прямую  $a$ , то существуетъ еще и второй пучокъ параллельныхъ линій, проходящихъ черезъ вторую бесконечно удаленную точку прямой. Если имѣемъ 2 луча  $a, \beta$  черезъ точку  $O$ , то существуетъ одна прямая  $\gamma$ , которая параллельна какъ лучу  $a$ , такъ и  $\beta$ , а именно, линія, соединяющая точки ихъ пересѣченія съ коническимъ сѣченіемъ  $\Phi = 0$  (на фигурѣ последнее представлено эллисомъ); въ Евклидовой геометріи это, конечно, не можетъ имѣть мѣста. Если мы теперь выберемъ точку  $P$  между лучами  $a$  и  $\beta$  внѣ треугольника, ограниченнаго прямыми  $a, \beta, \gamma$ , (но, конечно, внутри нашего эллипса), то къ ней уже непримѣнимо допущеніе Лежандра; дѣйствительно, всякая прямая, проведенная черезъ точку  $P$ , пересѣчетъ внутри коническаго сѣченія только одинъ изъ лучей  $a, \beta$ , другой же лучъ — внѣ коническаго сѣченія, т. е. въ смыслѣ нашей геометріи, вовсе не пересѣчетъ его. Это именно мы и желали доказать.

Оставимъ теперь Лежандра и рассмотримъ, какимъ путемъ пошло дальнѣйшее развитіе преподаванія геометріи во Франціи. Замѣчательно, что организація школьнаго дѣла во Франціи въ теченіе девятнадцатаго столѣтія измѣнилась очень мало; вообще, во всѣхъ культурныхъ областяхъ учрежденія, созданныя Наполеономъ I, удержались въ теченіе долгаго времени, несмотря на всѣ политическіе перевороты. Въ преподаваніи геометріи, такимъ образомъ, неограниченно господствовалъ Лежандръ, съ той лишь перемѣной, что въ новыхъ изданіяхъ \*) произведена нѣкоторая фильтрація матеріала, а именно, урѣзаны части, относящіяся къ приложеніямъ и сохранившіяся еще у Лежандра. У послѣдняго, правда, искусство геометрическаго изложенія не играетъ такой выдающейся роли, какъ у Клеро, не говоря уже о Петрѣ Рамусѣ; но все же Лежандръ не проявляетъ къ этой сторонѣ дѣла и того пренебреженія, которое распространилось въ послѣдствіи; кромѣ того, Лежандръ придаетъ немалое значеніе развитію математической сноровки и численнымъ задачамъ. Все, относящееся сюда, было въ большей или меньшей степени урѣзано въ позднѣйшихъ изданіяхъ; въ частности, въ нихъ выпущена тригонометрическая глава, въ которой Лежандръ удѣ-

\*) Преодо мною лежитъ здѣсь 33 изд., обработанное Бланшемъ (A. Blanche, Paris, 1893).



ляютъ особенное вниманіе указаннымъ приложеніямъ. Характернымъ примѣромъ можетъ служить такъ называемая теорема Лежандра изъ сферической тригонометріи: если возьмемъ на шаровой поверхности сферическій треугольникъ со сторонами  $a, b, c$  и углами  $\alpha, \beta, \gamma$ , то такъ называемый сферическій избытокъ  $a + \beta + \gamma - \pi = \varepsilon$ , какъ извѣстно, всегда будетъ положительнымъ. Если стороны не слишкомъ велики въ сравненіи съ радіусомъ шара, на примѣръ, если на поверхности земли онѣ не превышаютъ 100 км., то мы можемъ съ точностью, достаточной для всѣхъ практическихъ цѣлей, замѣнить сферическій треугольникъ плоскимъ, углы котораго равны



Фиг. 3.

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{3}, \quad \beta - \frac{\varepsilon}{3}, \quad \gamma - \frac{\varepsilon}{3}.$$

Эту замѣчательную теорему, которая часто примѣняется въ геодезической практикѣ, Лежандръ доказываетъ очень простымъ способомъ, а именно, въ формулахъ сферической тригонометріи онъ беретъ лишь первые члены рядовъ, получаемыхъ для тригонометрическихъ формулъ. Въ позднѣйшихъ изданіяхъ вы уже не найдете этой теоремы.

На ряду съ продолжающимися новыми изданіями Лежандра замѣчается еще и другое теченіе, представленное большимъ учебникомъ Руше и Комберусса (Rouché et Comberousse): „Traité de géométrie“\*). Во Франціи университетскому курсу предшествуетъ гораздо большая математическая подготовка учащихся, чѣмъ у насъ; переходной ступенью къ высшей школѣ служитъ двухлѣтній курсъ — такъ называемый *classes de Mathématiques spéciales*, который состоитъ, по меньшей мѣрѣ, изъ 16 недѣльных часовъ математики и даетъ основательную подготовку всѣмъ тѣмъ, которымъ позже придется пользоваться математикой. Благодаря этому подготовительному курсу, потребовалось ввести въ учебники элементарной геометріи большое количество новаго матеріала; типичнымъ образомъ такого дополненнаго учебника и является названная выше книга Руше-Комберусса, пользующаяся чрезвычайно большимъ распространеніемъ; она содержитъ множество примѣчаній изъ области неевклидовой геометріи, геометріи треугольника, геометріи тетраэдра, ученія о важнѣйшихъ кривыхъ и поверхностяхъ и изъ многихъ другихъ отдѣловъ.

Я перехожу теперь къ новому реформаторскому движению въ преподаваніи математики\*\*); оно началось во Франціи около 1900 г. и весьма сходно съ реформаторскимъ теченіемъ у насъ

\*) Р. 1. 2. — 6 éd. Paris, 1891.

\*\*) См. Борель-Штеккель. „Элементарная математика“. Вступительная статья В. Кагана „О реформѣ преподаванія математики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ Германіи и Франціи“.



въ Германіи. Это движеніе тоже можно объяснить сдвигомъ, который совершился тѣмъ временемъ во всей культурной жизни страны. Благодаря мощному подъему торговли и обмѣна, техники и промышленности, въ широкихъ слояхъ населенія назрѣваетъ настоятельная потребность пріобщиться ко всѣмъ культурнымъ завоеваніямъ, растеть жажда разностороннихъ познаній, — въ немалой степени и математическихъ; руководящую роль при этомъ играетъ, конечно, не безкорыстный интересъ къ теоретическому знанію, но стремленіе пріобрѣсти полезныя знанія, которые можно было бы непосредственно примѣнить на практикѣ. Однако, руководителей этого движенія отнюдь нельзя упрекнуть въ поверхностномъ утилитаризмѣ, такъ какъ ихъ вдохновляетъ несомнѣнно возвышенная цѣль — поднять производительность народнаго труда.

Характерно для французовъ, что эту реформу они начали обсужденіемъ въ Парижской палатѣ депутатовъ; выбранная тамъ коммиссія снеслась со многими общественными корпораціями, и представила обширный докладъ о реформѣ преподаванія въ средней школѣ вообще, при чемъ преподаваніе математики составляетъ лишь важное звено длинной цѣпи. Реформа имѣетъ цѣлю, съ одной стороны, упростить преподаваніе и сдѣлать его болѣе нагляднымъ, а съ другой стороны, ввести въ курсъ школы нѣкоторые вопросы, которые до сихъ поръ принято было изучать лишь въ курсахъ высшей математики, хотя они совершенно доступны и при томъ имѣютъ чрезвычайно важное значеніе для всей современной культуры, въ особенности для естествознанія и техники: я имѣю въ виду понятіе о функціи, методъ графическаго изображенія и начала счисленія безконечно-малыхъ. Благодаря этимъ новымъ идеямъ достигается, между прочимъ, гораздо болѣе тѣсная связь ариѳметики съ геометрией, чѣмъ можно было представлять себѣ когда-либо раньше. Здѣсь мы видимъ кульминаціонный пунктъ слиянія обѣихъ наукъ. Программа этой реформы была изложена въ учебномъ планѣ 1902 г. \*) и немедленно же проведена въ жизнь по всей странѣ. Въ этомъ единообразіи ярко сказывается вліяніе упомянутой уже нами французской централизаціи школьнаго дѣла, благодаря которой столь обширная реформа для своего осуществленія требуетъ лишь распоряженія высшаго вѣдомства. Весь этотъ ходъ развитія подробно изложенъ въ моихъ „Лекціяхъ о преподаваніи математики въ средней школѣ“, изданныхъ Шиммакомъ (Schimmack \*\*); вы найдете въ этой книгѣ множество подробныхъ свѣдѣній относительно развитія преподаванія математики вообще, которые дополняютъ и поясняютъ предметъ моихъ настоящихъ лекцій, посвященныхъ специально геометріи. Что касается новыхъ французскихъ учебныхъ плановъ, то я желаю бы лишь отмѣтить въ частности, что въ нихъ прежняя элементарная геометрія въ

\*) Plan d'études et programmes d'enseignement dans les lycées et colleges de garçons. Paris, 1903. (Имѣется изданіе 1910 г.).

\*\*) Ч. I. „Von der Organisation des mathematischen Unterrichts“. Leipzig, 1907.



духъ Евклида въ весьма сильной степени вытѣснена современными новыми идеями. Вы убѣдитесь въ этомъ, если познакомитесь съ однимъ изъ лучшихъ учебниковъ геометріи, написаннымъ примѣнительно къ новымъ планамъ, — съ „Геометріей“ Бореля (Borel\*); эта очень интересная книга отличается простымъ и естественнымъ распределеніемъ матеріала и удѣляетъ очень много вниманія различнымъ приложеніямъ.

Замѣчательно, что на ряду съ этимъ теченіемъ во Франціи теперь проявляютъ также интересъ къ строго логической разработкѣ учебной системы элементарной геометріи по образцу Евклида. Въ этомъ отношеніи особаго вниманія заслуживаетъ весьма выдающаяся книга Мерэ (Ch. Merau) въ Дижонѣ „Nouveaux éléments de géométrie“, которая появилась впервые еще въ 1874 г., но лишь въ послѣдніе годы привлекла къ себѣ вниманіе болѣе широкихъ круговъ\*\*). Въ своихъ доказательствахъ Мерэ, раньше чѣмъ пользоваться какимъ-либо положеніемъ, основаннымъ на интуиціи, всякій разъ формулируетъ его въ видѣ аксіомы, и такимъ образомъ развиваетъ полную геометрическую систему аксіомъ; при этомъ онъ, однако, въ большей степени, чѣмъ строгіе приверженцы Евклида, удовлетворяетъ дидактическимъ требованіямъ, такъ какъ онъ не стремится непременно свести аксіомы къ минимальному числу независимыхъ предложеній, и обыкновенно формулируетъ ихъ лишь въ тѣхъ случаяхъ, когда онъ, дѣйствительно, долженъ ими пользоваться. Особенно же характерно для Мерэ то, что онъ проводитъ полностью, насколько это возможно, сліяніе планиметріи съ стереометріей, и, кромѣ того, въ противоположность Евклиду онъ исходитъ изъ понятія о группѣ движеній, и съ полной послѣдовательностью строитъ на немъ всю свою систему геометріи. Такимъ образомъ, получается знаніе, совершенно аналогичное тому, которое мы недавно набросали: уже въ самомъ началѣ мы находимъ здѣсь понятіе о параллельномъ перенесеніи на ряду съ понятіемъ о вращеніи; изъ перваго вытекаетъ понятіе о параллельности, а изъ второго, — такъ какъ авторъ сейчасъ же рассматриваетъ трехмѣрное пространство, — понятіе о перпендикулярности оси вращенія плоскостямъ, въ которыхъ лежатъ траекторіи всѣхъ точекъ окружности. Я рекомендую вамъ самимъ прослѣдить, какъ Мерэ развиваетъ свою систему, и упомяну лишь, что онъ съ особенной тщательностью стремится вездѣ точно провести всѣ предѣльные процессы, съ которыми приходится имѣть дѣло въ геометріи; при этомъ онъ пользуется при случаѣ современнымъ понятіемъ о числѣ въ его точной формулировкѣ, хотя онъ въ своемъ изложеніи и не доводитъ сліянія съ арифметикой и аналитической геометріей такъ далеко, какъ мы здѣсь.

\*) Paris, 1905. Въ ближайшемъ будущемъ выйдетъ въ свѣтъ русскій переводъ, сдѣланный съ нѣмецкой обработки Штеккеля, изд. „Mathesis“. Это второй томъ сочиненія, указанного въ примѣчаніи на стр. 256.

\*\*) Nouv. éd. Dijon, 1903, 3 ed. 1906.



Вліяніе взглядовъ Мерэ явственно отражается на современныхъ французскихъ учебникахъ. Такъ, напримѣръ, понятіе о движеніи играетъ существенную роль въ упомянутой книгѣ Бореля и въ особенности въ новой книгѣ „Elements de geometrie“\*) Бурле (С. Bourlet), автора многихъ очень распространенныхъ учебниковъ; во всѣхъ ихъ ясно говорится о группѣ движенія и о геометрическихъ понятіяхъ, какъ объ ея инвариантахъ.

Оставимъ теперь Францію и перейдемъ къ преподаванію геометріи въ Италіи.

*(Продолженіе слѣдуетъ).*

## Наблюденіе іоновъ въ микроскопъ и опредѣленіе элементарнаго электрическаго заряда.

*А. Юллоса.*

За послѣдній годъ мы обогатились новымъ многообъщяющимъ способомъ для непосредственнаго опредѣленія элементарнаго электрическаго заряда  $e$ , того атома электричества, который является столь фундаментальной величиной въ электронной теоріи. Величина эта, какъ извѣстно, тѣсно связана съ другими молекулярными величинами, и поэтому всѣ тѣ разнообразныя методы, которые позволяютъ опредѣлить, напримѣръ, число молекулъ  $N$  въ граммъ-молекулѣ вещества, косвенно даютъ намъ и величину атома электричества\*\*). Непосредственныхъ же способовъ опредѣленія элементарнаго заряда  $e$  было два. Одинъ изъ нихъ совсѣмъ недавняго происхожденія — это опыты надъ радіаціей радиоактивныхъ тѣлъ, среди которыхъ первое мѣсто занимаетъ подсчетъ  $\alpha$ -частицъ, выбрасываемыхъ за опредѣленное время радіемъ, по чрезвычайно остроумному методу Рѣтгерфорда (Rutherford). Изъ всѣхъ  $\alpha$ -частицъ, выбрасываемыхъ препаратомъ радія во всѣ стороны, подсчитывается лишь извѣстная малая доля, проходящая черезъ узкую діафрагму въ промежутокъ между пластинками конденсатора и іонизирующая воздухъ въ этомъ промежуткѣ. Каждая отдѣльная  $\alpha$ -частица порождаетъ большое число іоновъ воздуха, устремляющихся къ пластинкамъ заряженнаго конденсатора. Каждая  $\alpha$ -частица, проскользнувшая черезъ діафрагму, такимъ образомъ даетъ отдѣльное отклоненіе стрѣлки электрометра, а число наблюденныхъ отклоненій электрометра равно числу прошедшихъ за время наблюденія  $\alpha$ -частицъ, изъ котораго легко вычисляется число всѣхъ частицъ, излученныхъ за то же время препаратомъ радія. То же число получается также при помощи спинтерископа Крукса (Crookes), гдѣ каждая  $\alpha$ -частица, падая на фосфоресцирующій экранъ, даетъ

\*) Paris, 1908.

\*\*) См. статью „Броуновское движеніе“ въ № № 520 и 521 „Вѣстника“, гдѣ приведены наиболѣе важные способы опредѣленія молекулярныхъ величинъ и элементарнаго электрическаго заряда.



отдѣльное вспыхиваніе фосфоресценціи и, слѣдовательно, подсчетъ этихъ искорокъ даетъ число  $\alpha$ -частицъ. Ретерфордъ опредѣлялъ число это обоими способами. Если, кромѣ того, извѣстно общее количество (положительнаго) заряда, переносимаго въ то же время  $\alpha$ -частицами, то остается лишь дѣлить это число на число  $\alpha$ -частицъ, чтобы получить зарядъ одной  $\alpha$ -частицы.

Но не на этомъ способѣ опредѣленія  $e$  я хотѣлъ сегодня остановиться. Болѣе непосредственное отношеніе къ моей темѣ имѣетъ другой болѣе ранній методъ — это знаменитый опытъ Дж. Дж. Томсона (J. J. Thomson), въ слѣдствіи усовершенствованный Вильсономъ (H. A. Wilson). Состоитъ онъ въ слѣдующемъ: нѣкоторый объемъ влажнаго воздуха (не содержащаго пылинокъ) освѣщается рентгеновскими или ультрафіолетовыми лучами, подъ дѣйствіемъ которыхъ въ немъ образуются положительные и отрицательные іоны, и подвергается быстрому (адиабатическому) расширенію. Благодаря расширенію онъ охлаждается и водяные пары конденсируются въ мелкія капельки; получается облако тумана, медленно падающее подъ дѣйствіемъ силы тяжести. При конденсаціи, за отсутствіемъ пыли, капельки воды образуются только около іоновъ, какъ центровъ. Каждая капелька носитъ, слѣдовательно, элементарный электрическій зарядъ. Если вести опытъ осторожно, т. е. подвергать объемъ воздуха не слишкомъ большому расширенію, то центрами образованія капель служатъ только отрицательные іоны и получаемое облачко тумана заряжено отрицательно. Капельки падаютъ подъ дѣйствіемъ тяжести, но въ виду своей малой величины испытываютъ сильное треніе въ воздухѣ, благодаря чему скорость паденія ихъ становится постоянной. Случай этотъ теоретически изслѣдованъ Стоксомъ (Stokes), который далъ слѣдующую формулу для равномерно падающей капельки:

$$6 \pi \mu a v_0 = m g,$$

гдѣ  $v_0$  есть названная скорость,  $a$  — радіусъ капельки,  $m$  — ея масса ( $= \frac{4}{3} \pi a^3 \cdot s$ , если черезъ  $s$  обозначить удѣльный вѣсъ),  $g$  — ускореніе силы тяжести и  $\mu$  — коэффициентъ вязкости окружающей среды (воздуха),

Въ опытѣ Томсона измѣряется скорость не отдѣльной капельки, а скорость паденія верхней границы всего облачка. Изъ наблюдаемой скорости на основаніи формулы Стокса вычисляется радіусъ ( $a$ ) капелекъ и вѣсъ ( $\frac{4}{3} \pi a^3 s$ ) отдѣльной капельки. Если далѣе опредѣлить общій вѣсъ всей освѣщенной влаги, то путемъ простого дѣленія получается число капелекъ въ облачкѣ. Наконецъ, надо измѣрить общее количество (отрицательнаго) электричества, которымъ заряжено облачко, и раздѣлить его на число капелекъ, чтобы получить зарядъ одной капельки или одного іона — элементарный зарядъ  $e$ .

Эти послѣднія измѣренія, которыя трудно произвести съ большой точностью, Вильсонъ измѣнилъ слѣдующимъ образомъ: облачко капелекъ падаетъ въ промежуткѣ между двумя пластинками конденсатора. Сперва наблюдается опять скорость паденія его подъ дѣйствіемъ одной силы тяжести и отсюда по формулѣ Стокса получается радіусъ капелекъ. Затѣмъ между пластинками конденсатора устанавливается извѣстная разность потенціала. На каждую отрицательно заряженную капельку теперь кромѣ силы тяжести дѣйствуетъ еще сила электрическаго поля, содѣйствующая или противоудѣйствующая силѣ тяжести и количественно равная  $\pm eE$ , если  $E$  есть паденіе по-



тенціала на протяженіи одного сантиметра. Скорость капелекъ теперь, слѣдовательно, будетъ иная; именно, она будетъ выражаться формулой:

$$6\pi\mu av_1 = mg \pm eE.$$

Зная изъ перваго опыта радіусъ  $a$ , зная силу поля  $E$  и измѣривъ новую скорость  $v_1$ , изъ этого уравненія можно непосредственно вычислить элементарный зарядъ  $e^*$ ).

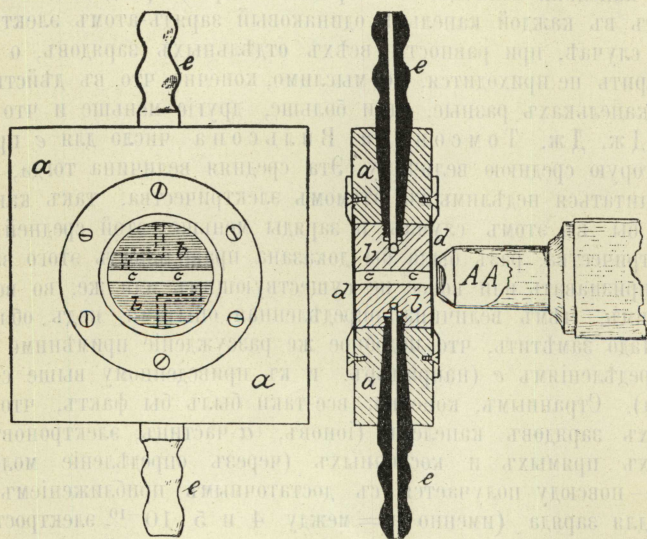
Отъ опыта Вильсона — непосредственный переходъ къ новому методу опредѣленія заряда  $e$ , пользующемуся микроскопомъ, который становится все болѣе популярнымъ инструментомъ въ современной физикѣ. Отъ наблюденія паденія всего облачка теперь перешли къ наблюденію движенія отдѣльных капелекъ или частицъ подѣ дѣйствіемъ силы тяжести и въ электрическомъ полѣ между двумя пластинками конденсатора. Новый методъ принципиально чрезвычайно важенъ по слѣдующему соображенію: при наблюденіи цѣлаго облачка зарядъ  $e$  въ сущности математически получается, какъ средній зарядъ одной капельки облачка. Электронная теорія, правда, полагаетъ, что мы имѣемъ тутъ въ каждой капелькѣ одинаковый зарядъ-атомъ электричества, и, въ такомъ случаѣ, при равности всѣхъ отдѣльных зарядовъ, о «среднемъ» зарядѣ говорить не приходится. Но мыслимо, конечно, что въ дѣйствительности, заряды въ капелькахъ разные, одни больше, другіе меньше и что полученное по методу Дж. Дж. Томсона и Вильсона число для  $e$  представляетъ лишь нѣкоторую среднюю величину. Эта средняя величина тогда, конечно, не могла бы считаться недѣлимымъ атомомъ электричества, такъ какъ вѣдь существовали бы въ этомъ случаѣ и заряды меньше этой средней величины. Атомъ электричества, разъ была бы доказана правильность этого взгляда, слѣдовало бы признавать или вовсе не существующимъ или же, во всякомъ случаѣ, меньшимъ, чѣмъ величина, опредѣленная опытами надъ облачками изъ капелекъ. Надо замѣтить, что подобное же разсужденіе примѣнимо и ко всѣмъ другимъ опредѣленіямъ  $e$  (напримѣръ, и къ приведенному выше способу Ретерфорда). Страннымъ, конечно, все-таки былъ бы фактъ, что при всѣхъ опредѣленіяхъ зарядовъ капелекъ (іоновъ,  $\alpha$ -частицъ, электроновъ и т. д.), опредѣленіяхъ прямыхъ и косвенныхъ (черезъ опредѣленіе молекулярныхъ величинъ) — повсюду получается съ достаточнымъ приближеніемъ одно и то же число для заряда (именно  $e =$  между 4 и  $5 \cdot 10^{-10}$  электростатическихъ единицъ) или цѣлое кратное его; страннымъ, если видѣть въ этомъ числѣ лишь нѣкоторый «средній» зарядъ, а не атомъ электричества. Но при всемъ этомъ совершенно отвергать этой возможности нельзя.

И тутъ-то новый микроскопическій методъ даетъ намъ возможность непосредственной провѣрки. Въ самомъ дѣлѣ, если наблюдать вмѣсто всего облачка отдѣльныя капли, то изъ ихъ скоростей получимъ ихъ индивидуальныя заряды и сможемъ убѣдиться, всегда ли эти заряды равны одной и той же величинѣ — атому электричества (или, при нѣкоторомъ видоизмѣненіи опыта, о которомъ рѣчь впереди, цѣлому кратному ей) и совпадаетъ ли опредѣленная такимъ путемъ величина съ полученной примѣнявшимися до сихъ поръ другими методами.

\*) Болѣе подробное изложеніе этихъ методовъ можно найти въ сочиненіи Дж. Дж. Томсонъ. „Корпускулярная теорія вещества“. Одесса. Mathesis, 1910. Первые главы этого сочиненія были напечатаны въ „Вѣстникѣ“ въ 1909 г.



За рѣшеніе этой важной задачи взялись сразу нѣсколько изслѣдователей: Эренгафтъ (Ehrenhaft) и Пржибрамъ (Prizbram) въ Вѣнѣ, Милликанъ (Millikan) и Флечеръ (Fletcher) въ Чикаго и Регенеръ (Regener) въ Берлинѣ. Но наблюдали они капельки и частицы разной величины и разного происхожденія — и результатъ тоже получился разный. Выяснимъ сперва еще обстоятельнѣе самый способъ измѣренія. Для этого намъ послужатъ прилагаемыя два чертежа аппарата, которымъ пользовался Регенеръ. Первый изъ нихъ изображаетъ конденсаторъ сверху, второй — въ разрѣзѣ; *aa* есть кусокъ эбонита въ  $1\frac{1}{2}$  см. толщины. Въ немъ посреди просверлено отверстіе въ 2 см. діаметромъ, въ которое вставлены два куска мѣди въ видѣ полукруговъ (*bb*). Между ними остается прорѣзъ *cc* въ  $\frac{1}{4}$  см. Такимъ образомъ, мѣдные полукруговые диски образуютъ маленькій конденсаторъ, съ воздушнымъ пространствомъ между обоими пластинками въ  $\frac{1}{4}$  см. глубины. (Диски — полукруги при опытѣ стоятъ вертикально другъ надъ другомъ, такъ что ихъ обращенныя другъ къ другу плоскія поверхности горизонтальны). *dd* — покровныя



стекла, а *ee* — каналы, позволяющіе ввести подлежащіе изслѣдованію газы или воздухъ съ находящимися въ немъ капельками въ пространство *cc* между двумя плоскостями конденсатора. Въ тѣ же каналы входятъ электрическіе провода для заряженія конденсатора. Наконецъ, *AA* есть микроскопъ. Наблюдаемыя капельки и частицы очень малы, онѣ на границѣ разрывающей способности обыкновеннаго микроскопа или доступны наблюдению только въ ультрамикроскопѣ. Но будь онѣ еще микроскопическими или уже лишь ультрамикроскопическими — наблюдать ихъ и въ первомъ случаѣ удобнѣе по принципу ультрамикроскопіи, т. е. направляя свѣтъ на нихъ такъ, чтобы онѣ не попадали въ глазъ наблюдателя. (Въ фиг. 2 свѣтъ пускается въ пространство *cc*, напримѣръ, вертикально къ плоскости рисунка). Наблюдатель видитъ тогда частицы благодаря разсѣянію ими свѣта, какъ свѣтлыя звѣздочки на темномъ фонѣ, подобно тому какъ видны пылинки въ солнечномъ лучѣ, падающемъ въ



темную комнату. При такомъ способѣ можно пользоваться сравнительно малымъ увеличеніемъ, чтобы различать капельки и частицы, еле видныя или совсѣмъ не видныя въ простой микроскопъ при самыхъ большихъ увеличеніяхъ. Такъ Регенеръ пользовался увеличеніемъ лишь въ 95 разъ для наблюденія ниже указанныхъ капелекъ.

Простѣйшій опытъ съ этимъ аппаратомъ состоитъ въ томъ, что въ пространство между пластинками конденсатора вводятся заряженные капельки и наблюдается сначала время, въ которое одна капелька упадетъ на нѣкоторую высоту подъ дѣйствіемъ только силы тяжести. Затѣмъ въ конденсаторѣ устанавливается электрическое поле, которое смотря по знаку заряда капельки и направленію поля либо ускоритъ паденіе капельки, либо замедлитъ, а при достаточной силѣ поля заставитъ капельку вновь подняться. Измѣряется прохожденіе капелькой того же разстоянія, какъ въ первомъ опытѣ. Изъ полученныхъ двухъ скоростей, какъ у Вильсона, вычисляется зарядъ капельки. Такіе именно опыты, числомъ нѣсколько сотъ, дѣлали Эренгафтъ и Пржибрамъ. Первый въ качествѣ заряженныхъ капелекъ пользовался тѣми чрезвычайно мелкими частицами, которыя получались при распыленіи въ вольтовой дугѣ электродовъ изъ серебра, золота и платины. Воздухъ, въ который были распылены эти частицы, перегонялся въ конденсаторъ. Радіусъ этихъ частицъ (вычисляемый по формулѣ Стокса изъ скорости паденія) былъ отъ  $\frac{3}{10}$  внизъ до  $\frac{3}{100} \mu$  (тысячныхъ миллиметра), т. е. самыя большія изъ нихъ находятся у крайняго предѣла микроскопической наблюдаемости: это частицы вполне ультрамикроскопическія. Онѣ заряжены уже по самому своему происхожденію. Наблюденія надъ ними дали такіе разнообразныя заряды, что на основаніи ихъ Эренгафтъ готовъ рѣшительно отрицать существованіе въ природѣ недѣлимаго атома электричества. Наблюдаются, правда, какъ будто болѣе часто количества заряда, близкія къ одному опредѣленному числу и его цѣлымъ кратнымъ; но, во-первыхъ, это число не всегда близко къ общепринятой до сихъ поръ величинѣ элементарнаго электрическаго заряда, и, во-вторыхъ, не только получаются между этимъ числомъ и его цѣлыми кратными любыя другія числа, которыя никоимъ образомъ нельзя представить въ видѣ цѣлаго кратнаго основнаго заряда, но вычисляются даже заряды, много меньшіе, чѣмъ общепринятый элементарный электрическій зарядъ — вплоть до  $\frac{1}{10}$  его величины.

Далѣе тотъ же изслѣдователь и особенно Пржибрамъ такимъ же образомъ наблюдали капельки тумана, получаемыя, если проводить влажный воздухъ надъ бѣлымъ фосфоромъ (и затѣмъ, конечно, ввести этотъ воздухъ съ капельками въ конденсаторъ) и капельки ѣдкаго калия въ кислородъ, получаемыя при добываніи кислорода путемъ электролиза ѣдкаго калия. Капельки эти тоже при самомъ своемъ образованіи заряжены электричествомъ. Радіусъ ихъ варіировалъ отъ  $\frac{8}{10}$  до  $\frac{2}{10} \mu$ ; онѣ, слѣдовательно, въ общемъ въ 10 разъ больше металлическихъ частицъ Эренгафта и уже видимы и въ микроскопъ. Результатъ у вѣнскихъ физиковъ получился тотъ же самый. Нѣсколько болѣе выражено скопленіе чиселъ около той величины заряда, которая считается атомомъ электричества, но на ряду съ этимъ — всевозможные заряды, не соотвѣтствующіе никакому цѣлому кратному этой величины. 14

Однако, діаметрально противоположный результатъ получили Милликаны и Флечеръ. Американскіе физики распыляли оливковое масло пульверизаторомъ. Получаемыя при этомъ мелкія капельки носятъ и здѣсь элек-



трическіе заряды. Распыленіе производилось надъ верхней пластинкой плоскаго конденсатора, въ которой было отверстіе. Нѣкоторое число капелекъ попадало черезъ отверстіе въ промежутокъ между двумя пластинками; послѣ этого отверстіе въ верхней пластинкѣ закрывалось и производились наблюденія. При этомъ методъ былъ усовершенствованъ слѣдующимъ остроумнымъ образомъ. Въ пространство между пластинками вводился препаратъ радія, который іонизировалъ находящійся тамъ воздухъ. Сперва опять наблюдалась скорость паденія капельки безъ электрическаго поля. Но вмѣстѣ съ тѣмъ капелька, проходя внизъ опредѣленное разстояніе черезъ іонизированный воздухъ, могла сталкиваться съ іонами воздуха и ловить заряды того или другого знака. Послѣ того какъ капелька упала до опредѣленной глубины, препаратъ радія удалялся и къ конденсатору прилагалось нѣкоторое очень значительное электрическое поле такого знака, чтобы капелька теперь противъ силы тяжести поднималась наверхъ на то же разстояніе, которое ею было пройдено раньше внизъ. Такъ какъ поле очень сильное, то оно моментально притягиваетъ всѣ іоны воздуха къ пластинкамъ и капелька на своемъ пути вверхъ уже не захватываетъ новыхъ зарядовъ. Скорость же ея подъема зависитъ отъ того количества зарядовъ, которое она отчасти имѣла съ самаго начала, отчасти успѣла наловить при предыдущемъ паденіи. Когда она дошла до исходной верхней точки, конденсаторъ опять разряжался, вводился опять препаратъ радія для новой іонизаціи и капелькѣ вновь предоставлялось совершить свободное паденіе. Такимъ образомъ паденіе и подъемъ черезъ одно и то же разстояніе могъ наблюдаться надъ одной и той же капелькой любое число разъ. Милликантъ приводитъ наблюденія надъ одной и той же капелькой, произведенныя въ теченіе  $4\frac{1}{2}$  часовъ. При этомъ время паденія остается, конечно, неизмѣннымъ (въ данномъ случаѣ 23 секунды), такъ какъ размѣры капельки не мѣняются отъ захвата іоновъ, и дѣйствуетъ только сила тяжести. Времена же подъема при одномъ и томъ же электрическомъ полѣ получаются разныя, смотря по тому, сколько іоновъ и какого знака попали на капельку. Такъ, для приведеннаго примѣра капельки, наблюдавшейся въ теченіе  $4\frac{1}{2}$  часовъ, времена подъема были отъ 7-ми до 380-ти секундъ. При этомъ время подъема мѣнялось скачками, и повторялись одни и тѣ же числа: нѣсколько разъ подъ рядъ, напримѣръ, капелька подымалась въ 40 секундъ, затѣмъ вдругъ время подъема получается въ 70 секундъ — это значитъ, что при послѣднемъ паденіи капелька успѣла присоединить къ себѣ нѣкоторый зарядъ; затѣмъ, послѣ двухъ-трехъ подъемовъ въ 70 секундъ, новый скачокъ до 380 секундъ, затѣмъ опять 70, опять 380, опять 40 и т. д. Эти скачки во временахъ подъема указываютъ, конечно, на такіе же скачки въ зарядѣ капельки. Тутъ съ точностью можно сказать, что вотъ сейчасъ капелька захватила элементарный, двойной, тройной зарядъ и т. д. Вычисленіе соотвѣтственно показываетъ какъ зарядъ капельки всегда цѣлое кратное нѣкотораго заряда, который надо признать за атомъ электричества. Наблюдалось на одной капелькѣ сосредоточеніе отъ одного до 150-ти элементарныхъ зарядовъ. Величина же самого элементарнаго заряда  $e$  получена равной  $4,9 \cdot 10^{-10}$  электростатическихъ единицъ, т. е. въ полномъ согласіи съ до сихъ поръ принятой величиной. Замѣтимъ еще, что радіусъ масляныхъ капелекъ Милликана и Флечера былъ отъ  $6,6 \mu$  до  $0,3 \mu$ . Самыя маленькія изъ нихъ, слѣдовательно, равны по величинѣ тѣмъ каплямъ тумана въ воздухѣ, пропущенномъ надъ фосфоромъ, которыя изслѣдовались Прибриамомъ.



Итакъ, опыты Милликана дали блестящее подтвержденіе атомистической теоріи электричества и новое опредѣленіе величины электрическаго атома, опыты же Эренгафта, напротивъ, клонятся къ опроверженію той же теоріи. Чѣмъ объясняется это противорѣчіе? Выяснить этотъ вопросъ, по крайней мѣрѣ, до нѣкоторой степени, удалось какъ будто Регенеру. Въ вышеописанномъ конденсаторѣ онъ наблюдалъ капельки масла въ воздухѣ и капельки ѣдкаго калия въ кислородѣ, радіусомъ отъ  $\frac{8}{10}$  до  $\frac{3}{10} \mu$ , т. е. той же величины, какъ капельки Пржибрама и часть капелекъ Милликана, а также частицы серебра, полученныя по способу Эренгафта распыленіемъ серебряныхъ электродовъ. Эти опыты для капелекъ масла и ѣдкаго калия вполне подтвердили результатъ Милликана. Такъ же, какъ американскому физику и Регенеру удавалось наблюдать много разъ подъ рядъ паденія и подъемы одной и той же капельки и какъ величину заряда получить  $4,9 \cdot 10^{-10}$  электростатическихъ единицъ или въ точности цѣлая кратная этого элементарнаго заряда. Отклоненія, полученные для капелекъ той же величины и отчасти такого же происхожденія (капельки ѣдкаго калия) Пржибрамомъ и также Эренгафтомъ берлинскій физикъ склоненъ приписать тому обстоятельству, что они наблюдали капельки слишкомъ близко къ краю конденсатора и къ покровному стеклышку. На краяхъ конденсатора силовыя линіи поля вообще отклоняются отъ вертикали, и эта деформация электрическаго поля можетъ еще усиливаться, если на стеклышкахъ осаждаются заряженныя частицы. Что у вѣнскихъ физиковъ могли быть такія нарушенія правильности электрическаго поля, это Регенеръ заключаетъ изъ того, что имъ лишь изрѣдка удалось наблюдать повторно одну и ту же капельку: она, по мнѣнію Регенера, у нихъ выходила изъ той плоскости, на которую былъ наставленъ микроскопъ, благодаря искривленію силовыхъ линій электрическаго поля. Если же наблюдать въ достаточно большомъ конденсаторѣ на достаточномъ разстояніи отъ краевъ, гдѣ силовыя линіи уже безспорно прямыя и вертикальныя, то легко слѣдить за одной и той же капелькойъ цѣлыми часами, какъ это дѣлалъ Милликанъ и повторилъ Регенеръ.

Съ такимъ объясненіемъ готовъ согласиться самъ Пржибрамъ. Но все же этого оказывается еще недостаточнымъ для объясненія опытовъ Эренгафта съ металлическими частицами ультрамикроскопическихъ размѣровъ. Ибо при повтореніи этихъ опытовъ и Регенеръ получилъ для заряда частицъ всѣвозможныя отклоненія отъ элементарнаго заряда и, между прочимъ, такіе заряды, которые въ нѣсколько разъ меньше элементарнаго заряда  $4,9 \cdot 10^{-10}$  электростатическихъ единицъ.

Но тутъ приходится сказать, что данныя, на основаніи которыхъ вычисляется зарядъ именно этихъ чрезвычайно малыхъ металлическихъ частицъ, настолько неопредѣленны, что несогласіе результата съ тѣмъ, который полученъ для болѣе крупныхъ капелекъ, не можетъ еще заставить насъ отказаться отъ атомистической теоріи электричества. Регенеръ указываетъ на то, что при распыленіи электродовъ въ дугѣ образуются окиси азота и озонъ, съ которыми металлическая пыль вступаетъ въ соединеніе. Поэтому остается неопредѣленнымъ уѣбный вѣсъ частицъ, а между тѣмъ этотъ вѣсъ вѣдь входитъ въ формулу Стокса. Милликанъ и Флечеръ полагаютъ, что Эренгафтомъ, вообще не обращено достаточное вниманіе на броуновское движеніе частицъ



которое сильнѣе должно сказаться именно на столь малыхъ частицахъ. Наконецъ, крайне сомнительна вообще примѣнимость формулы Стокса къ частицамъ, порядокъ величины которыхъ совпадаетъ съ такъ называемымъ свободнымъ путемъ молекулъ газа, т. е. со средней длиной пути молекулы между двумя столкновениями съ другими молекулами. Этотъ средній свободный пробѣгъ равенъ приблизительно  $\frac{1}{10} \mu$ , а частицы металловъ въ опытахъ Эренгафта имѣли радіусъ отъ  $\frac{3}{10}$  до  $\frac{3}{100} \mu$ . Для своихъ значительно большихъ капелекъ Милликанъ непосредственно показалъ, что уже для нихъ формула Стокса нуждается въ поправкѣ, и онъ опредѣлилъ эту поправку на основаніи многочисленныхъ опытовъ. Поправка эта оказалась въ полномъ согласіи съ той поправкой формулы Стокса для очень малыхъ капелекъ, которую теоретически на основаніи кинетической теоріи газовъ вывелъ Кеннингхемъ (Cunningham). По Эренгафту введеніе той же поправки въ его вычисленія не помогаетъ дѣлу — и послѣ этого не получается единого элементарнаго заряда и не исчезаютъ величины заряда значительно меньшія, чѣмъ  $4,9 \cdot 10^{-10}$ . Но надо сказать, что вопросъ осложняется указанной выше неопредѣленностью удѣльнаго вѣса частицъ, влекущей за собою такую же неопредѣленность въ вычисленномъ изъ скорости паденія радіусѣ ихъ. А величина поправки Милликана-Кеннингхема, конечно, зависитъ отъ радіуса: чѣмъ меньше частица, тѣмъ замѣтнѣе поправка. Вдобавокъ остается подъ вопросомъ, насколько самая поправка Милликана-Кеннингхема правильна для столь малыхъ частицъ. Наконецъ, въ случаѣ частицъ, которыя могутъ наблюдаться уже только ультрамикроскопическимъ способомъ, о формѣ которыхъ, слѣдовательно, трудно судить, мы не всегда можемъ быть увѣрены, что онѣ шарообразны или почти шарообразны: онѣ могутъ имѣть форму кристалловъ.

Выводъ изъ всѣхъ имѣющихся до сихъ поръ работъ, очевидно, таковъ, что опыты Милликана и Флечера (повторенные Регенеромъ) представляютъ новый изящный методъ опредѣленія элементарнаго электрическаго заряда изъ наблюдений отдѣльныхъ заряженныхъ капелекъ («большихъ іоновъ»). Величина атома электричества, согласно со всѣми другими прямыми и косвенными опредѣленіями, получена равной  $4,9 \cdot 10^{-10}$  электростатическихъ единицъ. Опыты же Эренгафта при всемъ представляемомъ ими интересѣ врядъ ли еще оправдываютъ заключенія ихъ автора, что въ нихъ мы встрѣчаемъ заряды, много меньшіе, чѣмъ указанная величина, и что, слѣдовательно, эта величина не есть недѣлимый атомъ электричества. Для такого утвержденія эти опыты еще слишкомъ богаты неопредѣленностями, которыя, однако, можно надѣяться, будутъ устранены дальнѣйшими изслѣдованіями.



## Проектъ положенія о 1-мъ Всероссийскомъ Съѣздѣ преподавателей математики\*).

§ 1. Первый Всероссийскій Съѣздъ преподавателей математики создается Организационнымъ Комитетомъ.

§ 2. Организационный Комитетъ, подъ предсѣдательствомъ имъ избраннаго лица, избираетъ товарищей предсѣдателя, секретарей и казначея, а также особое Бюро Съѣзда. При этомъ допускается кооптація новыхъ лицъ.

§ 3. Занятія Съѣзда продолжаются 8 дней, — съ 27 декабря 1911 года по 3 января 1912 года.

§ 4. Съѣздъ имѣетъ цѣлью обсужденіе слѣдующихъ вопросовъ: 1) психологическія основы обученія математикѣ (активность, наглядность, роль интуиціи и логики, и т. п.); 2) содержаніе курса школьной математики съ точекъ зрѣнія: а) современныхъ научныхъ тенденцій, б) современныхъ запросовъ жизни, в) современныхъ общепедагогическихъ воззрѣній; 3) согласованіе программъ математики средней школы съ программами низшихъ и высшихъ школъ; 4) вопросы методики школьной математики; 5) учебники и учебныя пособія; 6) историческіе и философскіе элементы въ курсѣ математики средней школы; 7) рисованіе, лѣпка и ручной трудъ, какъ вспомогательныя средства при обученіи математикѣ; 8) подготовка учителей математики.

§ 5. При Съѣздѣ организуется выставка наглядныхъ пособій, діаграммъ и литературы, соотвѣствующихъ программѣ Съѣзда. Для завѣдыванія выставкой Организационный Комитетъ избираетъ особыхъ лицъ.

§ 6. Подготовительныя къ Съѣзду работы ведутся Бюро, избирающимъ изъ своей среды предсѣдателя и секретарей.

§ 7. Въ случаѣ необходимости Организационный Комитетъ устраиваетъ секціи Съѣзда по отдѣльнымъ вопросамъ программы и избираетъ изъ своей среды предсѣдателя каждой секціи.

§ 8. Предсѣдателю секціи предоставляется право организовать бюро секціи.

§ 9. Членами Съѣзда могутъ быть профессора и преподаватели математики и физики, представители ученыхъ обществъ и учебныхъ заведеній, а также лица, заявившія себя трудами въ области математики или педагогики. Всѣ прочія лица, интересующіяся программой Съѣзда, могутъ принимать участіе во всѣхъ работахъ Съѣзда, но безъ права рѣшающаго голоса.

§ 10. Лица, желающія участвовать въ Съѣздѣ въ качествѣ членовъ или гостей, заявляютъ объ этомъ Организационному Комитету и вносятъ одновременно денежный взносъ въ размѣрѣ трехъ рублей.

§ 11. Доклады по программѣ Съѣзда представляются въ Организационный Комитетъ по возможности не позже 1 октября 1911 года, по адресу: СПб., Фонтанка 10, въ Канцелярію Педагогическаго Музея В.-Уч. Зав.

§ 12. По открытіи Съѣзда новые доклады могутъ быть допущены не иначе, какъ съ разрѣшенія Предсѣдателя Съѣзда.

\*) Вслѣдъ за сообщеніемъ профессора Д. М. Си н ц о в а, помѣщеннымъ въ предыдущемъ номерѣ, мы получили извѣщеніе отъ Директора Педагогическаго Музея В.-Уч. Зав. ген.-лейт. З. А. Макшеева, ставшаго во главѣ группы лицъ, подписавшихъ ходатайство объ организациіи Съѣзда. Все, что содержится въ этомъ извѣщеніи существеннаго, уже вошло въ замѣтку профессора Д. М. Си н ц о в а. Мы печатаемъ поэтому только полный проектъ положенія о Съѣздѣ.



§ 13 Доклады на Съездѣ могутъ продолжаться не болѣе 1 часа; во время же обсужденія рѣчь каждого лица не должна продолжаться болѣе 10 минутъ.

§ 14. Организационный Комитетъ, руководствуясь постановленіями какъ общихъ собраній Съезда, такъ и секціонныхъ засѣданій, вноситъ въ послѣднее Общее Собраніе рядъ резолюцій по вопросамъ, обсуждавшимся на Съездѣ, для голосованія.

§ 15. Резолюціи принимаются или отвергаются простымъ большинствомъ голосовъ.

## РЕЦЕНЗІИ.

**С. Слугиновъ.** *1. Теорія радикаловъ.* Казань, 1910. Стр. 20. Цѣна 20 к.  
*II. Пропорции и прогрессія.* Казань, 1910. Стр. 37. Цѣна 30 к.

Объ названныя брошюры не вносятъ какихъ-либо усовершенствованій въ обычное изложеніе разсматриваемыхъ вопросовъ, имѣющееся во всѣхъ курсахъ элементарной алгебры. Обѣ онѣ страдаютъ отсутствіемъ систематичности и даже нѣкоторою спутанностью изложенія и содержатъ явные промахи. Напримѣръ, въ первой брошюрѣ смѣшиваются термины: „реальное значеніе корня“ и „арифметическое значеніе корня“ (стр. 4); вводится безъ всякихъ поясненій символъ  $a^{\frac{1}{n}}$  (стр. 15, форм. 17); смѣшиваются понятія: „реальное число“ и „раціональное число“ и неправильно передается основная мысль теоріи съѣдиненій Дедекинда (стр. 19 и 20); во второй брошюрѣ при выводѣ общаго свойства арифметической (геометрической) прогрессіи берется по неизвѣстной причинѣ возрастающая прогрессія (стр. 16 и 17); на стр. 15 имѣется убывающая арифметическая прогрессія съ разностью 4; на стр. 28 приводится сомнительное построеніе ряда. — Чтеніе брошюръ оставляетъ впечатлѣніе, что авторъ недостаточно продумалъ то, что хотѣлъ передать читателямъ.

С. В. (Москва).

**А. А. Ляминъ.** *Приложеніе алгебры къ геометріи.* — Алгебраическій методъ рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе. — Составлено примѣнительно къ послѣдней программѣ, утвержденной Министерствомъ Народнаго Просвѣщенія. — Москва, 1911. Цѣна 25 коп.

Какъ видно изъ предисловія, брошюра составлена съ цѣлью дать ученикамъ VIII класса мужскихъ гимназій краткое, но удовлетворяющее всѣмъ требованіямъ программы пособие при продолженіи курса приложенія алгебры къ геометріи. Въ общемъ брошюра удовлетворяетъ своей цѣли. Къ ея недостаткамъ слѣдуетъ отнести неясное и тяжелое изложеніе § 2 (начало), пропускъ указанія на значенія буквъ  $a$ ,  $b$ ,  $c$  въ началѣ § 9, неясность послѣдней фразы § 11, сложность построенія въ задачѣ 3 § 14 и тамъ же ошибку въ истолкованіи формулы (2).

С. В. (Москва).



## РѢШЕНИЯ ЗАДАЧЪ.

№ 285 (5 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$4x^4 - 16x^3 + 27x^2 - 21x + 9 = 0.$$

Умноживъ предложенное уравненіе на 4, имѣемъ:

$$\begin{aligned} 16x^4 - 64x^3 + 108x^2 - 84x + 36 &= \\ &= (25x^4 - 70x^3 + 109x^2 - 84x + 36) - (9x^4 - 6x^3 + x^2) = \\ &= (5x^2 - 7x + 6)^2 - (3x^2 - x)^2 = (8x^2 - 8x + 6)(2x^2 - 6x + 6) = \\ &= 4(4x^2 - 4x + 3)(x^2 - 3x + 3) = 0. \end{aligned}$$

Такимъ образомъ, данное уравненіе распадается на два квадратныхъ уравненія

$$4x^2 - 4x + 3 = 0, \quad x^2 - 3x + 3 = 0,$$

откуда

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{2}}{2}, \quad x_{3,4} = \frac{3 \pm i\sqrt{3}}{3},$$

гдѣ  $i = \sqrt{-1}$ . Итакъ, всѣ четыре корня даннаго уравненія мнимые.

Г. Варкентинъ (Бердянскъ); Л. Богдановичъ (Ярославль).

№ 287 (5 сер.). Пусть  $F(z)$  обозначаетъ трехчленъ второй степени относительно  $z$ . Доказать, что выраженіе

$$F(x)F''(y) + F'(x)F'(y) + F''(x)F(y)$$

равно значенію нѣкотораго другого трехчлена второй степени при  $z = x+y$  [ $F'(z)$ ,  $F''(z)$  суть первая и вторая производныя по  $z$  трехчлена  $F(z)$ ].(Заимств. изъ *L'Éducation Mathématique*).Пусть  $F(z) = az^2 + bz + c$ . Тогда

$$F'(z) = 2az + b, \quad F''(z) = 2a,$$

$$\begin{aligned} F(x)F''(y) + F'(x)F'(y) + F''(x)F(y) &= (ax^2 + bx + c)2a + \\ &+ (2ax + b)(2ay + b) + 2a(ay^2 + by + c) = 2a^2(x^2 + 2xy + y^2) + 4ab(x + y) + \\ &+ b^2 + 4ac = 2a^2(x + y)^2 + 4ab(x + y) + (b^2 + 4ac) = f(x + y) = f(z), \end{aligned}$$

гдѣ  $f(z) = 2a^2z^2 + 4abz + b^2 + 4ac$ .

А. Д. (Лодзь); Н. Доброгаевъ (Тульчинъ); Г. Варкентинъ (Вальдгеймъ); В. Богомоловъ (Шацкъ); Е. Бабицкий (Минскъ); Г. Пистракъ (Лодзь); Л. Богдановичъ (Ярославль).



№ 299 (5 сер.). Доказать тождество

$$l_a^2(b+c)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)+l_b^2(a+c)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+l_c^2(a+b)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)=$$

$$=4s^2\frac{(r_a r_b+r_b r_c+r_c r_a)^2}{r_a^2 r_b^2 r_c^2},$$

где  $a, b, c$ ;  $s$ ;  $l_a, l_b, l_c$ ;  $r_a, r_b, r_c$  суть соответственно стороны, площадь, биссектрисы и радиусы кругов, вневписанных какого-либо треугольника.

Называя через  $p$  полупериметр треугольника, имеем, согласно с формулой, выражающей биссектрису с помощью сторон треугольника,

$$l_a^2 = \frac{4}{(b+c)^2} bcp(p-a),$$

откуда

$$l_a^2(b+c)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right) = l_a^2(b+c)\frac{b+c}{bc} = \frac{l_a^2(b+c)^2}{bc} = 4p(p-a).$$

Подобным же образом находим:

$$l_b^2(a+c)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right) = 4p(p-b), \quad l_c^2(a+b)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right) = 4p(p-c).$$

Следовательно,

$$l_a^2(b+c)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)+l_b^2(a+c)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+l_c^2(a+b)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)=$$

$$=4p[(p-a)+(p-b)+(p-c)] = 4p(3p-2p) = 4p^2. \quad (1)$$

Изъ формуль

$$r_a = \frac{s}{p-a}, \quad r_b = \frac{s}{p-b}, \quad r_c = \frac{s}{p-c},$$

находимъ:

$$r_a r_b = \frac{s^2}{(p-a)(p-b)} = \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-a)(p-b)} = p(p-c),$$

$$r_b r_c = p(p-a), \quad r_c r_a = p(p-b),$$

откуда

$$r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = p[(p-a)+(p-b)+(p-c)] = p^2.$$

Кромѣ того,

$$r_a r_b r_c = \frac{s^3}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{ps^3}{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{ps^3}{s^3} = ps.$$

$$4s^2 = \frac{(r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a)^2}{r_a^2 r_b^2 r_c^2} = \frac{4s^2 \cdot (p^2)^2}{(ps)^2} = 4p^2. \quad (2)$$

Изъ формуль (1) и (2) вытекаетъ предложенное для доказательства тождество.

*Н. Доброгаевъ* (Тульчинъ); *В. Богомоловъ* (Шацкъ); *Л. Богдановичъ* (Ярославль); *Л. Марголисъ* (С.-Петербургъ); *Е. Бабицкий* (Минскъ); *В. Моргулевъ* (Одесса); *Ч. Павловичъ* (Рига); *Г. Варкентинъ* (Бердянскъ); *М. Превратухинъ* (Козловъ).



№ 304 (5 сер.). Доказать справедливость тождества

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4p^2 - 2D(h_a + h_b + h_c),$$

где  $a, b, c, p, D, h_a, h_b, h_c$  суть стороны, полупериметръ, діаметръ описаннаго круга и высоты нѣкотораго треугольника.

Называя черезъ  $s$  площадь и черезъ  $R$  радіусъ круга описаннаго для нѣкотораго треугольника, имѣемъ  $R = \frac{abc}{4s}$ , откуда

$$Dh_a = 2Rh_a = \frac{abch_a}{2s} = \frac{ah_a}{2s} bc = bc,$$

такъ какъ  $2s = ah_a$ . Подобнымъ же образомъ:

$$Dh_b = ac, \quad Dh_c = ab.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} 4p^2 - 2D(h_a + h_b + h_c) &= (2p)^2 - 2(Dh_a + Dh_b + Dh_c) = \\ &= (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ac) = a^2 + b^2 + c^2. \end{aligned}$$

Итакъ,  $a^2 + b^2 + c^2 = 4p^2 - 2D(h_a + h_b + h_c)$ .

*Н. Доброгаевъ* (Тульчинъ); *В. Богомоловъ* (Шацкъ); *А. Марголисъ* (С.-Петербургъ); *Е. Бабицкий* (Минскъ); *Л. Богдановичъ* (Ярославль); *Г. Пистракъ* (Лодзь); *А. Масловъ* (Москва); *Ч. Павловичъ* (Рига); *Г. Варкентинъ* (Бердянскъ); *Р. Витвинскій* (Добровеличковка); *Н. Превратухинъ* (Козловъ); *В. Моргулевъ* (Одесса).

№ 305 (5 сер.). Доказать, что выражение

$$10^n + 11^n - 9n - 9n \cdot 2^{n-1} - 2^n - 1$$

дѣлится на 81 при всякомъ цѣломъ и неотрицательномъ значеніи  $n$ .

Назвавъ данное выраженіе для краткости черезъ  $P$ , представимъ его (при  $n$  цѣломъ и положительномъ) въ видѣ:

$$P = (1 + 9)^n + (2 + 9n)^n - 9n - 9n \cdot 2^{n-1} - 2^n - 1$$

и разлагая выраженія  $(1 + 9)^n + (2 + 9)^n$  по формулѣ бинома, получимъ:

$$\begin{aligned} P &= 1 + 9n + 9^2 \cdot a + 2^n + 9n \cdot 2^{n-1} + 9^2b - 9n - 9n \cdot 2^{n-1} - 2^n - 1 = \\ &= 9^2(a + b) = 81(a + b), \end{aligned}$$

гдѣ  $a$  и  $b$  суть всегда числа цѣлыя (при  $n = 1$  имѣемъ  $a = 0, b = 0$ ). Значитъ при  $n$  цѣломъ и положительномъ  $P$  дѣлится на 81, а при  $n = 0$   $P$  обращается въ нуль, а потому также кратно 81. Итакъ,  $P$  кратно 81 при всякомъ цѣломъ и неотрицательномъ значеніи  $n$ .

*Н. Доброгаевъ* (Тульчинъ); *В. Богомоловъ* (Шацкъ); *Л. Богдановичъ* (Ярославль); *Г. Пистракъ* (Лодзь); *А. Масловъ* (Москва); *Р. Витвинскій* (Одесса); *В. Моргулевъ* (Одесса); *М. Превратухинъ* (Козловъ).



## Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника“, подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

**Успѣхи физики.** Сборникъ статей о важнѣйшихъ открытіяхъ послѣднихъ лѣтъ въ общедоступномъ изложеніи подъ редакціей „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики“. Выпускъ I. Содержание: Винеръ. *Расширеніе нашихъ чувствъ*.—Пильчиковъ. *Радій и его лучи*.—Дебриенъ. *Радій и радиоактивность*.—Рихардъ. *Электрическія волны*.—Слаби. *Телеграфированіе безъ проводовъ*.—Шмидтъ. *Задача объ элементарномъ веществѣ (основаніе теоріи электроновъ)*. Съ 41 рисункомъ и 2 таблицами. Изданіе третье. „Mathesis“. Одесса, 1910. Стр. 148. Ц. 75 к.

**Успѣхи физики.** Сборникъ статей о важнѣйшихъ открытіяхъ послѣднихъ лѣтъ въ общедоступномъ изложеніи подъ редакціей „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики“. Выпускъ II. Содержание. Максъ Планкъ. *Единство физическаго міросозерцанія*.—Проф. А. Риги. *Новые взгляды на внутреннее строеніе вещества*.—Е. Ретгерфордъ. *Атомная теорія въ физикѣ*.—Эдуардъ Рике. *О радиоактивномъ превращеніи*.—Дж. Дж. Томсонъ. *О новѣйшихъ успѣхахъ физики*.—А. Слаби. *Спутники электричества—тепло и свѣтъ*.—К. Штреккеръ. *Современное состояніе безпроводной телеграфіи*. Съ 50 рисунками. Изданіе „Mathesis“. Одесса, 1911. Стр. 205. Ц. 1 р. 20 к.

**Максъ Планкъ.** *Теоретическая физика*. Восемь лекцій, читанныхъ въ Columbia University in the City of New-York весной 1909 г. Переводъ съ нѣмецкаго доктора прикладной математики И. М. Занчевскаго. Книгоиздательство „Образованіе“. СПБ. 1911. Стр. 157. Ц. 70 к.

**Ф. Н. Индриксонъ.** *Работы по физикѣ для средней школы*. Изданіе второе, исправленное и значительно дополненное. Изданіе А. С. Суворина. СПБ. 1911. Стр. VIII+256. Ц. 1 р. 50 к.

**В. В. Рюминъ,** инженеръ-технологъ. *Опыты по электричеству на самодѣльныхъ приборахъ и въ физическомъ кабинетѣ средней школы*. Часть 2-я. Опыты съ индуктивнымъ токомъ, разрядами въ газахъ малой упругости и съ электрическими волнами. Съ 63 рисунками. Изданіе книгоиздательства „Электричество и Жизнь“. Николаевъ, 1911. Стр. 59. Ц. 65 к.

**Грація Ч. Юнгъ и У. Г. Юнгъ.** *Первая книжка по геометріи*. Переводъ съ англійскаго А. І. Бачинскаго, прив.-доц. Московскаго университета. Москва, 1911. Стр. XII+199. Ц. 50 к.

**К. Б. Пеніонжкевичъ.** *Основанія аналитической геометріи*. Курсъ дополнительнаго класса реальныхъ училищъ. По программѣ 1907 г. Изданіе книжнаго магазина В. В. Думнова. СПБ., 1911. Стр. 198. Ц. 1 р.

**В. Я. Гебель.** *Начала аналитической геометріи въ пространствѣ и собраніе задачъ*. Для среднихъ техническихъ училищъ и для самообразованія. Москва, 1911. Стр. 60. Ц. 50 к.



# СЕМЕЙНОЕ ВОСПИТАНИЕ

Съ 1-го января 1911 года.

Редакторъ женсина-врачъ Дернова-Ярмоленко.

Слѣдующія лица изъявили согласіе принимать участіе въ журналѣ: Проф. В. М. Бехтеревъ, В. А. Беклеиовъ, П. А. Голубевъ, А. С. Гибшъ, Н. И. Долгополовъ, М. П. Граціонова, Е. Е. Соловьева, Н. А. Шишло, О. А. Шишло, Прив.-доцентъ Моск. У-та Н. А. Филипповъ, А. В. Якубъ и др. врачи, педагоги и родители.

**Подписная цѣна на 1 годъ—3 руб., на полгода 1 р. 50 коп.** съ пересылкой и доставкой. Адресъ редакціи: г. Астрахань, Демидовская ул., д. Капинина. Въ др. городахъ подписка принимается въ мѣстныхъ книжныхъ магазинахъ.

## ПРОГРАММА:

**1. Отъ редакціи.** Значеніе семейнаго воспитанія. **2. Результаты современнаго воспитанія.** Смертность, заболѣваемость и данныя изслѣдованія физическаго и психическаго состоянія дѣтей. Самоубійства дѣтей и т. п. **3. Особенности дѣтскаго возраста.** Научныя данныя о ходѣ развитія тѣла и души дѣтей по возрастамъ. **4. Гигіена тѣла и души ребенка.** **5. Ненормальности дѣтскаго возраста.** Значеніе наследственности и условій жизни для развитія дѣтей. Различныя отклоненія отъ нормы. Недостатки физическіе и психическіе. Пороки. Преступность. Односторонность развитія, отсталость, гениальность и т. п. **6. Программы и способы наблюденій за дѣтьми.** Составленіе характеристикъ. **7. Данныя экспериментальной психологіи и педагогики.** **8. Дневники родителей и воспитателей.** Воспоминанія и личныя наблюденія изъ дѣтской жизни. **9. Ошибки и промахи въ дѣлѣ воспитанія.** Письма родителей и воспитателей и отвѣты на нихъ. **10. Дѣтское творчество.** Рисунки, вымыслы, фантазія, оригиналы, игры, работы и т. п. **11. Вліяніе семьи и ея склада на образованіе личности.** Критика и разборъ біографій великихъ людей. Отношеніе взрослыхъ къ дѣтямъ. **12. Половой вопросъ въ дѣлѣ воспитанія.** **13. Фотографіи и рисунки,** характеризующіе дѣтскую жизнь и воспитательныя приемы. **14. Справочный отдѣлъ.** Таблицы, картограммы и др. данныя о правильномъ развитіи дѣтей. Общества родителей и воспитателей, ихъ цѣли, программы, дѣятельность. Литература педагогическая и дѣтская. Игрушки, пособія и предметы гигиены. Съѣзды, выставки и т. п. **15. Критика и библіографія.** Изъ газетъ и журн. Старыя и новыя книги Рефераты. **16. Сравнительная педагогика.** Постановка воспитанія у различныхъ народовъ и въ различныхъ странахъ. Вліяніе природы, общественнаго строя, религіи и семьи на образованіе народныхъ типовъ. **17. Иностранный отдѣлъ.** Обзоръ иностранной литературы. Корреспонденціи. Статьи. Переводы.

20-й годъ  
изданія.

ПРИНИМАЕТСЯ ПОДПИСКА НА 1911 ГОДЪ  
НА ПЕДАГОГИЧЕСКІЙ ЖУРНАЛЪ

20-й годъ  
изданія.

## ТЕХНИЧЕСКОЕ и КОММЕРЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ,

ИЗДАВАЕМЫЙ

Постоянною Коммиссіею по техническому образованію при Императорскомъ Русскомъ Техническомъ Обществѣ,

подъ редакціей А. Г. Неболсина, при ближайшемъ участіи А. Н. Выкова.

Журналъ посвященъ разработкѣ вопросовъ техническаго, коммерческаго, торгово-мореходнаго, сельскохозяйственнаго и промышленнаго образованія, а также разработкѣ вопросовъ внѣшкольнаго образованія взрослыхъ рабочихъ.

**ПРОГРАММА ИЗДАНІЯ:** I. Правительственныя распоряженія. II. Статьи по вопросамъ упомянутаго образованія. III. Хроника техническаго и Коммерческаго образованія въ Россіи и за границей. IV. Критика и библіографія. V. Приложение: Брошюры по техническимъ знаніямъ для народа и рабочихъ.

„Техническое и Коммерческое Образованіе“ въ 1911 г. будетъ выходить ежемѣсячно кромѣ 4 лѣтнихъ мѣсяцевъ (Май—Августъ) книжками отъ 4½ до 6 печатныхъ листовъ каждая. Книжки осенняго полугодія выходятъ въ началѣ, а весенняго въ концѣ каждаго мѣсяца.

**ПОДПИСНАЯ ЦѢНА:** съ доставк. и перес. въ Россіи 3 р. За ½ г. 1 р. 50 к., за гран. за г. 4 р.

**Подписка принимается:** въ конторѣ редакціи (С.-Петербургъ, Пантелеймоновская, 2) и въ книжныхъ магазинахъ Н. П. Карбасникова, „Нов. Вр.“, Риккера и Цинзерлинга (Мелье).

**Тарифъ за объявленія, печатаемые въ журналѣ.**

За 8 разъ.  
100 руб.

За 4 раза.  
60 руб.

За 2 раза.  
30 руб.

За 1 разъ.  
15 руб.

1 страница впереди текста.

½ страницы впереди текста или 1 страница позади текста.

60 руб.

35 руб.

20 руб.

10 руб.

½ страницы позади текста

35 руб.

20 руб.

12 руб.

5 руб.

Обложка и исключительныя страницы по соглашенію.



# ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ и Элементарной Математики.

Выходитъ 24 раза въ годъ отдѣльными выпусками, не  
мѣнѣ 24 стр. каждый,

подъ редакціей приватъ-доцента В. Ф. Кагана.



**ПРОГРАММА ЖУРНАЛА:** Оригинальныя и переводныя статьи изъ области физики и элементарной математики. Статьи, посвященныя вопросамъ преподаванія математики и физики. Опыты и приборы. Научная хроника. Разныя извѣстія. Математическія мелочи. Темы для сотрудниковъ. Задачи для рѣшенія. Рѣшенія предложенныхъ задачъ съ фамиліями рѣшившихъ. Упражненія для учениковъ. Задачи на премію. Библиографическій отдѣлъ: обзоръ специальныхъ журналовъ; замѣтки и рецензіи о новыхъ книгахъ.

Статьи составляются настолько популярно, насколько это возможно безъ ущерба для научной стороны дѣла.

Предыдущіе семестры были рекомендованы: Учен. Ком. Мин. Нар. Пр. для гимн. муж. и жен., реальн. уч., прогимн. город. уч., учит. инст. и семинарій; Главн. Упр. Воен.-Учебн. Зав.—для воен.-уч. заведеній; Учен. Ком. при Св. Синодѣ — для дух. семинарій и училищъ.

Пробный номеръ высылается за одну 7-коп. марку.

Важнѣйшія статьи, помѣщенныя въ 1910 г.

43-й семестръ.

*Г. Пуанкаре* Новая механика. — *П. Флоревъ*. Способъ вычисленія отношенія окружности къ діаметру съ пятью десятичными знаками, пригодный для преподаванія въ среднихъ школахъ. — *И. Мессеримидтъ*. Марсъ и Сатурнъ. — *П. Лоуэлъ*. Марсъ — *С. Виноградовъ*. Развитие понятія о числѣ въ его исторіи и въ школѣ. — *Е. Григорьевъ*. О разложеніи въ ряды функцій  $\sin x$  и  $\cos x$ . — Проф. *Д. Синцовъ*. Къ вопросу о преподаваніи математики. Я. Штейнеръ, какъ преподаватель — *Г. Урбанъ*. Являются ли основныя законы химіи точными или же лишь приближенными. — *Е. Смирновъ*. Объ ирраціональныхъ числахъ — *П. Ренаръ*. Авіація, какъ спортъ и наука. — Проф. *О. Лоджъ*. Мировой эфиръ — *К. Лебединцевъ*. Понятіе объ ирраціональномъ числѣ въ курсѣ средней школы. — *Э. Кроммелингъ*. Происхожденіе и природа кометъ. — *А. Филипповъ*. Дѣйствія съ періодическими дробями. — Прив.-доц. *В. Бобынинъ*. Естественныя и искусственныя пути возстановленія историками математики древнихъ доказательствъ и выводовъ

44-ый семестръ.

О построеніяхъ, производимыхъ циркулемъ и линейкой. Прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго*. О биссектрисахъ треугольника. *Н. Извольскаго*. О четырехугольникѣ, имѣющемъ при данныхъ сторонахъ наибольшую площадь. Проф. *Б. К. Млодзневскаго*. Практическія занятія по физикѣ въ германской средней школѣ. *К. Иванова*. Замѣтка по вопросу о трисекціи угла. Проф. *Д. Синцова*. Нѣкоторыя свойства вращающагося твердаго тѣла. *Н. Васильева*. Броуновское движеніе. *А. Голлоса*. Движеніе на 9. *А. Филиппова*. Объ ирраціональныхъ числахъ. *Е. Смирнова*. Основы беспроволочной телеграфіи. *Л. Мандельштама* и *Н. Папалекси*. О биссектрисахъ треугольника. *Е. Томашевича*. О геометрическихъ построеніяхъ съ помощью линейки при условіи, что дана неизмѣнная дуга круга съ центромъ. Проф. *Д. Мордухай-Болтовскаго*. Отношеніе новѣйшей физики къ механистическому міровоззрѣнію. *М. Планка*. Генезисъ минераловъ. *Г. Е. Бѣкке*. Еще къ вопросу объ ирраціональныхъ числахъ. *К. Лебединцева*. Приближенное рѣшеніе задачи объ удвоеніи куба. Прив.-доц. *А. А. Дмитровскаго*. Причина землетрясеній, горообразованія и родственныхъ явленій. *Т. Арльта*.

## Условія подписки:

Подписная цѣна съ пересылкой: за годъ 6 руб., за полгода 3 руб. Учителя и учительницы низшихъ училищъ и всѣ учащіеся, выписывающіе журналъ непосредственно изъ конторы редакціи, платятъ за годъ 4 руб., за полугодіе 2 руб. Допускается разсрочка подписной платы по соглашенію съ конторой редакціи. Книгопродавцамъ 5% уступки.

Журналъ за прошлые годы по 2 р. 50 к., а учащимся и книгопродавцамъ по 2 р. за семестръ. Отдѣльные номера текущаго семестра по 30 к., прошлыхъ семестровъ по 25 коп.

Адресъ для корреспонденціи: Одесса. Въ редакцію „Вѣстника Опытной Физики“.