№ 545.

# ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

И

# ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

ИЗДАВАЕМЫЙ

В. А. ГЕРНЕТОМЪ

ПОДЪ РЕДАКЦІЕЙ

Приватъ-Доцента В. Ф. КАГАНА.

XLVI-го семестра № 5-й.



ОДЕССА.
Типографія Акц. Южно-Русскаго О-ва Печ. Дѣла. Пушкинская, 18.
1911.

*„См 3-ью стр. обложки“.*

XLVI Сем. № 5.

# Вѣстникъ Опытной Физики

и

## ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 545.



# Эволюція законовъ.

*Г. Пуанкаре.*

*(Окончаніе *).*

## VI.

Но, можетъ быть, человѣчеству суждено существовать дольше, чѣмъ мы предположили, столь долго, что оно могло бы видѣть, какъ на его глазахъ измѣняются законы? Или, можетъ быть, человѣчество изобрѣтетъ столь тонкіе инструменты, что это измѣненіе, несмотря на его медленность, можно будетъ обнаружить черезъ нѣсколько поколѣній? Тогда мы узнали бы объ измѣненіяхъ законовъ не путемъ индукціи или умозаключенія, но изъ непосредственнаго наблюденія. Не теряютъ ли въ такомъ случаѣ предыдущія разсужденія своего значенія? Мемуары, въ которыхъ излагаются опыты нашихъ предшественниковъ, представляли бы собой лишь слѣды прошлаго, которые давали бы намъ лишь косвенныя свѣдѣнія объ этомъ прошломъ. Старые документы для историка имѣютъ такое же значеніе, какъ ископаемыя для геолога, а труды прежнихъ ученыхъ представляютъ собой лишь старые документы. О мысляхъ этихъ ученыхъ они говорятъ намъ лишь постольку, поскольку люди прежнихъ временъ походили на насъ. Если бы законы міра претерпѣли измѣненіе, это отразилось

*) См. „Вѣстникъ“, № 544.

бы на всѣхъ частяхъ вселенной, и человѣчество также не могло бы ускользнуть отъ этого дѣйствія; если допустимъ, что ему удалось бы выжить въ новой средѣ, то оно должно было бы подвергнуться измѣненію, чтобы приспособиться. Тогда языкъ прежнихъ людей сталъ бы для насъ непонятнымъ: слова, которыми они пользовались, не имѣли бы для насъ смысла, или, въ лучшемъ случаѣ, имѣли бы для насъ не тотъ смыслъ, что для нихъ. Не происходитъ ли это уже и теперь по истеченіи нѣсколькихъ столѣтій, хотя законы физики остались неизмѣнными?

Такимъ образомъ, мы каждый разъ наталкиваемся на одну и ту же дилемму: либо свидѣтельства прежнихъ временъ совершенно ясны для насъ, міръ остался тѣмъ же самымъ, и они ни о чемъ другомъ намъ не могутъ сказать; либо же эти документы являются непонятными для насъ, и мы ничего не узнаемъ изъ нихъ, не узнаемъ даже, что законы измѣнились; намъ хорошо извѣстно, что не такъ много требуется, чтобы эти документы превратились для насъ въ мертвую букву.

Кромѣ того, люди прошлыхъ временъ, подобно намъ, обладали лишь отрывочными свѣдѣніями о законахъ природы. Намъ пришлось бы немало потрудиться, чтобы согласовать два отрывка, даже если бы они остались совершенно цѣлыми; во сколько же разъ это было бы труднѣе, если отъ прошлаго намъ остались лишь скудные, сомнительные и полуистертые обрывки.

## VII.

Станемъ теперь на другую точку зрѣнія. Законы, которые даетъ намъ непосредственное наблюденіе, всегда имѣютъ характеръ равнодѣйствующихъ. Возьмемъ, напримѣръ, законъ Маріотта. Для большинства физиковъ онъ представляетъ собой лишь слѣдствіе изъ кинетической теоріи газовъ; молекулы газовъ обладаютъ значительными скоростями; онѣ описываютъ сложныя траекторіи, точное уравненіе которыхъ мы могли бы написать, если бы мы знали, по какимъ законамъ онѣ взаимно притягиваются или отталкиваются. Разсуждая объ этихъ траекторіяхъ по правиламъ теоріи вѣроятностей, можно доказать, что плотность газа пропорціональна его давленію.

Такимъ образомъ, законы, которымъ подчинены тѣла, доступныя наблюденію, суть не что иное, какъ слѣдствія изъ молекулярныхъ законовъ.

Ихъ простота лишь кажущаяся, и за ней скрывается чрезвычайно сложная дѣйствительность, такъ какъ степень ея сложности измѣряется числомъ самыхъ молекулъ. Но именно благодаря тому, что это число очень велико, отличія въ деталяхъ взаимно уравновѣшиваются, и мы вѣримъ въ гармоничное соотношеніе.

Самыя молекулы, въ свою очередь, можетъ быть, суть цѣлые міры; ихъ законы, можетъ быть, также имѣютъ характеръ равнодѣйствующихъ, и, чтобы найти ихъ основаніе, пришлось бы спуститься къ молекуламъ молекулъ и т. д.; неизвѣстно, гдѣ можно было бы остановиться.

Законы, которые открываетъ намъ наблюденіе, зависятъ, слѣдовательно, отъ двухъ вещей: отъ молекулярныхъ законовъ и отъ расположенія молекулъ. Неизмѣняемостью отличаются молекулярные законы, такъ какъ это истинные законы, а другіе суть лишь кажущіеся. Но распредѣленіе молекулъ можетъ измѣняться, и вмѣстѣ съ тѣмъ измѣняются и наблюдаемые законы. Это могло бы служить доводомъ въ пользу эволюціи законовъ.

## VIII.

Вообразимъ міръ, различныя части котораго обладаютъ столь совершенной теплопроводностью, что между ними постоянно поддерживается состояніе термическаго равновѣсія. Обитатели этого міра не имѣли бы никакого представленія о томъ, что̀ мы называемъ разностью температуръ; въ ихъ трактатахъ по физикѣ совершенно отсутствовала бы глава о термометріи. За исключеніемъ этого пункта, ихъ теоріи могли бы быть довольно полными и содержали бы множество законовъ, даже гораздо болѣе простыхъ, чѣмъ наши.

Вообразимъ теперь, что этотъ міръ медленно охлаждается путемъ лучеиспусканія; температура его остается повсюду одинаковой, но съ теченіемъ времени уменьшается. Предположимъ, что одинъ изъ обитателей этого міра впадаетъ въ летаргическій сонъ и просыпается лишь по истеченіи нѣсколькихъ столѣтій; разъ мы уже столь щедры на допущенія, то допустимъ еще, что онъ можетъ жить въ охлажденномъ мірѣ, и что онъ сохранилъ память о прошломъ. Онъ увидитъ, что его потомки попрежнему составляютъ трактаты по физикѣ и, какъ и раньше, ничего не говорятъ о термометріи, но законы, которымъ они учатъ, совершенно отличны отъ тѣхъ, которые ему были извѣстны. Напримѣръ, въ свое время его учили, что вода кипитъ подъ давленіемъ въ 10 *мм.* ртутнаго столба, тогда какъ по наблюденіямъ новыхъ физиковъ вода закипаетъ лишь, если понизить давленіе до 5 *мм.* То тѣло, которое онъ прежде зналъ въ жидкомъ видѣ, теперь будетъ встрѣчаться лишь въ твердомъ состояніи и т. д. Взаимныя соотношенія между различными частями вселенной всѣ зависятъ отъ температуры, и съ измѣненіемъ послѣдней все измѣняется до неузнаваемости.

Спрашивается, не существуетъ ли нѣкоторый физическій дѣятель, столь же непознаваемый для насъ, какъ температура для обитателей нашего фантастическаго міра? Не измѣняется ли этотъ дѣятель постоянно, подобно температурѣ шара, теряющаго теплоту черезъ лучеиспусканіе, и не влечетъ ли это измѣненіе за собой измѣненія всѣхъ законовъ?

## IX.

Возвратимся къ нашему мнимому міру. Спрашивается, не могли ли бы его обитатели, не повторяя исторіи спящихъ жителей Эфеса, замѣтить эту эволюцію? Какъ бы совершенна ни была теплопроводность на ихъ планетѣ, она, несомнѣнно, не была бы абсолютной, такъ что очень небольшія разности температуры на ней были бы еще возможны. Долгое время онѣ ускользали бы отъ наблюденія, но современемъ могли бы быть изобрѣтены болѣе чувствительные измѣрительные приборы, и какой-либо геніальный физикъ доказалъ бы существованіе этихъ ничтожныхъ разностей. Была бы построена теорія, и оказалось бы, что эти различія въ температурѣ вліяютъ на всѣ физическія явленія, и, наконецъ, какой-нибудь философъ, взгляды котораго показались бы большинству его современниковъ смѣлыми и легкомысленными, выступилъ бы съ утвержденіемъ, что въ прошломъ могло произойти измѣненіе средней температуры вселенной и вмѣстѣ съ тѣмъ всѣхъ извѣстныхъ законовъ.

Не могли ли бы мы также сдѣлать нѣчто подобное? Напримѣръ, долгое время основные законы механики считались абсолютными. Въ настоящее время нѣкоторые физики утверждаютъ, что они должны быть измѣнены или, лучше сказать, расширены, что они приблизительно вѣрны лишь для обыкновенныхъ скоростей, и что они теряютъ силу для скоростей, сравнимыхъ съ скоростью свѣта; въ подтвержденіе своихъ взглядовъ они ссылаются на нѣкоторые опыты, произведенные при помощи радія. Тѣмъ не менѣе старые законы динамики фактически остаются вѣрными для окружающаго насъ міра. Нельзя ли, однако, съ нѣкоторой правдоподобностью утверждать, что въ силу постояннаго разсѣиванія энергіи скорости тѣлъ должны были стремиться убывать, такъ какъ ихъ живая сила стремилась превратиться въ теплоту, и что, восходя къ достаточно отдаленному прошлому, мы дошли бы до эпохи, когда скорости того же порядка, что и скорость свѣта, не были исключительными, такъ что классическіе законы динамики тогда еще не были вѣрны?

Предположимъ, съ другой стороны, что законы, открываемые наблюденіемъ, имѣютъ лишь характеръ равнодѣйствующихъ, которыя зависятъ одновременно отъ молекулярныхъ законовъ и расположенія молекулъ. Современемъ, когда мы благодаря успѣхамъ науки постигнемъ эту зависимость, мы несомнѣнно будемъ въ состояніи заключить, что въ силу самыхъ молекулярныхъ законовъ расположеніе молекулъ въ прежнее время должно было быть не такимъ, какъ теперь, и, слѣдовательно, законы, открываемые наблюденіемъ, не всегды были одинаковы. Мы пришли бы къ заключенію объ измѣняемости законовъ, но, замѣтимъ это хорошенько, основаніемъ для такого заключенія служило бы не что иное, какъ принципъ ихъ неизмѣняемости! Мы утверждали бы, что видимые законы измѣнились, но мы дѣлали бы это лишь въ силу того, что молекулярные законы, которые мы отнынѣ разсматривали бы, какъ истинные законы, были бы объявлены неизмѣняемыми.

## X.

Такимъ образомъ, нѣтъ ни одного закона, о которомъ мы могли бы сказать съ увѣренностью, что во всѣ прошлыя времена онъ былъ вѣренъ съ той же степенью приближенія, какъ и въ настоящее время;

болѣе того, мы не можемъ даже знать навѣрное, не будетъ ли когда-нибудь доказано, что онъ въ прошлыя времена вовсе не имѣлъ мѣста. Тѣмъ не менѣе въ этомъ нѣтъ ничего такого, что помѣшало бы ученому сохранить свою вѣру въ принципъ неизмѣняемости, такъ какъ всегда, когда законъ понижается до степени временнаго закона, онъ замѣняется другимъ закономъ, болѣе общимъ и болѣе объемлющимъ: своимъ разжалованіемъ всякій законъ обязанъ именно воцаренію новаго закона, и, такимъ образомъ, не можетъ наступить междуцарствіе, и принципы остаются неприкосновенными; только для нихъ и совершаются перемѣны, и самыя революціи служатъ лишь блестящимъ подтвержденіемъ принциповъ.

Дѣло происходитъ не такъ, что измѣненія обнаруживаются изъ опыта или индукціи, и мы лишь потомъ стараемся ихъ объяснить, подводя ихъ во что бы то ни стало подъ болѣе или менѣе искусственный синтезъ. Нѣтъ, сперва идетъ синтезъ, и если мы допускаемъ измѣненія законовъ, то для того лишь, чтобы не нарушить синтеза.

## XI.

Подобный синтезъ всегда возможенъ. Я позволю себѣ на одинъ моментъ прибѣгнуть къ языку математики. Предположимъ, что состояніе вселенной опредѣляется $n$ параметрами $x_1, x_2, \ldots, x_n$; если предположимъ, что законы этой вселенной неизмѣняемы, то они выражаются дифференціальными уравненія вида:

$$\frac{dx_i}{dt} = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Если же предположимъ, что эти законы подвержены измѣненію, то мы должны написать:

$$\frac{dx_i}{dt} = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t). \tag{2}$$

Дифференцируя первое изъ уравненій системы (2), мы получимъ:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \tag{3}$$

если подставимъ въ правой части вмѣсто производныхъ $\frac{dx_i}{dt}$ ихъ значенія (2). Теперь исключимъ изъ уравненій (2) и (3) перемѣнную $t$ и положимъ

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1;$$

мы получимъ $n+1$ уравненій, которыя можно написать такъ:

$$\frac{dv_1}{dt} = \beta(x_1, x_2, \ldots, x_n, v_1),$$
$$\frac{dx}{dt} = \theta_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, v_1); \tag{4}$$

въ эти уравненія время не входитъ явно. Слѣдовательно, они выражаютъ математически систему неизмѣняемыхъ законовъ. Къ параметрамъ $x$, опредѣляющимъ состояніе міра, мнѣ достаточно было прибавить новый параметръ $v$. Это аналогично новому понятію температуры, введенному нами въ физику фиктивнаго міра, исторію котораго мы представили себѣ выше.

Выборъ этого параметра допускаетъ широкую степень свободы; я выше произвелъ его нѣсколько грубымъ образомъ. Лучше было бы взять

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} - \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0);$$

наблюдатели, живущіе около эпохи $t=0$ и не знающіе еще объ измѣняемости законовъ, написали бы:

$$\frac{dx_i}{dt} = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0)$$

и полагали бы, что скорость $v_1$ постоянно равна нулю; впослѣдствіи болѣе точныя измѣренія показали бы имъ, что $v_1$ медленно измѣняется и что производныя $\frac{dx_i}{dt}$ зависятъ не только отъ параметровъ $x$, но еще и отъ медленно измѣняющагося параметра $v_1$; послѣдній, такимъ образомъ, играетъ ту же роль, какъ температура для обитателей нашей вымышленной планеты.

## XII.

До сихъ поръ мы не задавали вопроса о томъ, измѣняются ли законы въ дѣйствительности, но спрашивали лишь, могутъ ли люди полагать, что законы измѣняются. Но являются ли неизмѣнными въ себѣ законы, если разсматривать ихъ, какъ существующіе внѣ разума, который создалъ ихъ или который наблюдаетъ ихъ? Такой вопросъ не только неразрѣшимъ, но не имѣетъ даже никакого смысла. Къ чему намъ спрашивать, могутъ ли законы измѣняться съ временемъ въ мірѣ вещей въ себѣ, если въ такомъ мірѣ самое слово время, можетъ быть, не имѣетъ смысла? О томъ, что̀ представляетъ собой этотъ міръ, мы ничего не можемъ ни сказать ни мыслить, но можемъ лишь говорить о томъ, чѣмъ этотъ міръ кажется или могъ бы показаться уму, не слишкомъ отличному отъ нашего.

Вопросъ, поставленный такимъ образомъ, допускаетъ рѣшеніе. Представимъ себѣ два ума, сходные съ нашимъ и наблюдающіе вселенную въ двѣ различныя эпохи, — напримѣръ, отдѣленныя одна отъ другой милліонами лѣтъ; каждый изъ нихъ построитъ науку, т. е. систему законовъ, выведенныхъ изъ фактовъ, открываемыхъ наблюденіемъ. Эти науки будутъ, вѣроятно, сильно отличаться одна отъ другой, и въ этомъ смыслѣ можно сказать, что законы подверглись эволюціи. Но сколь велико бы ни было различіе, мы можемъ всегда вообразить умъ, который, подобно первымъ двумъ, имѣетъ ту же природу, что и нашъ, но гораздо бо́льшую силу, или надѣленъ гораздо большей долговѣчностью, чѣмъ мы; такой умъ будетъ въ состояніи произвести синтезъ и соединить въ одну единственную совершенно связную формулу двѣ отрывочныя и приближенныя формулы, полученныя нашими двумя эфемерными изслѣдователями за время ихъ короткой жизни. Для этого ума законы останутся неизмѣнными и наука будетъ непреложной, и лишь окажется, что ученые были не вполнѣ освѣдомлены.

Пояснимъ это геометрическимъ сравненіемъ. Предположимъ, что измѣненія міра можно представить посредствомъ аналитической кривой. Каждый изъ насъ можетъ видѣть лишь очень малую дугу этой кривой. Если бы кто-либо обладалъ точнымъ знаніемъ кривой, то онъ могъ бы составить ея уравненіе и неограниченно продолжить ее. Но онъ не вполнѣ знаетъ эту дугу и можетъ ошибиться относительно уравненія кривой; если онъ попытается продолжить кривую, то линія, которую онъ проведетъ, будетъ тѣмъ сильнѣе отклоняться отъ дѣйствительной кривой, чѣмъ меньше протяженіе извѣстной ему дуги и чѣмъ дальше онъ будетъ продолжать эту дугу. Другой же наблюдатель будетъ знать лишь другую дугу и притомъ лишь несовершеннымъ образомъ.

Если оба наблюдателя будутъ находиться на далекомъ разстояніи другъ отъ друга, то эти два продолженія, которыя они начертятъ, не совпадутъ; но отсюда вовсе не слѣдуетъ, что новый, болѣе дальнозоркій наблюдатель, который непосредственно видитъ болѣе длинную часть кривой и такимъ образомъ охватываетъ своими глазами одновременно обѣ эти дуги, не будетъ въ состояніи написать болѣе точное уравненіе и согласовать обѣ формулы; какъ бы причудлива ни была дѣйствительная кривая, всегда можно найти аналитическую кривую, которая на протяженіи произвольно заданной большой длины будетъ сколь угодно мало отклоняться отъ дѣйствительной кривой.

Многіе читатели, несомнѣнно, будутъ протестовать противъ того, что я, повидимому, замѣняю міръ системой простыхъ символовъ. Однако, я сдѣлалъ это не только лишь по профессіональной привычкѣ математика: къ этому меня вынуждаетъ самая природа разсматриваемаго вопроса. Міръ собственно не имѣетъ законовъ; имѣть ихъ можетъ лишь болѣе или менѣе деформированная картина міра, созданная учеными. Когда говорятъ, что природа управляется законами, то подразумѣваютъ, что этотъ портретъ обладаетъ еще достаточной степенью сходства. О немъ и только о немъ мы можемъ размышлять безъ опасенія, что самая идея закона, составляющая предметъ нашего изученія, обратится въ ничто. Съ другой стороны, эту картину міра можно разобрать: можно разбить ее на элементы, различить среди нихъ моменты, внѣшніе другъ относительно друга, и независимыя части. Если я иногда черезчуръ упрощалъ и сводилъ эти элементы къ слишкомъ малому числу, то это лишь вопросъ степени; это не измѣняетъ ни природы ни значенія моихъ разсужденій, и лишь сокращаетъ изложеніе.

## Международная Коммиссія по преподаванію математики*).

Работы національныхъ подкоммиссій въ настоящее время въ полномъ ходу, а въ нѣкоторыхъ странахъ даже приходятъ къ завершенію. Строго говоря, онѣ должны были быть вездѣ закончены къ сентябрю, къ Миланскому Съѣзду (см. ниже). Но коллективную работу, разбросанную по всему міру, трудно вести съ такою правильностью, и даже прославленные своей аккуратностью нѣмцы еще не вполнѣ выполнили взятыя на себя обязательства.

Задача національныхъ подкоммиссій заключалась, какъ извѣстно, въ томъ, чтобы составить доклады, дающіе полное представленіе объ организаціи, формѣ и методахъ преподаванія математики на всѣхъ ступеняхъ обученія. Эти доклады составятъ, конечно, наиболѣе существенный результатъ дѣятельности Коммиссіи: они представятъ ясную картину постановки преподаванія математики во всемъ мірѣ въ началѣ XX-го столѣтія.

Наиболѣе кипучую дѣятельность проявила Германская Подкоммиссія. Оно и понятно. Здѣсь душою дѣла является проф. Клейнъ, инициаторъ и организаторъ Коммиссіи, всѣ помыслы котораго въ настоящее время заняты вопросомъ о преподаваніи математики; врядъ ли гдѣ-либо и преподаватель достигъ такой интеллигентности и привычки къ литературной работѣ, — это даетъ Подкоммиссіи большой кадръ дѣятельныхъ сотрудниковъ. Наконецъ, фирма Тейбнеръ (B. G. Teubner) въ Лейпцигѣ взяла на себя изданіе трудовъ Подкоммиссіи.

Труды Германской Подкоммиссіи состоятъ изъ двухъ серій. Первая называется „Сообщенія и извѣстія, вызванныя Международной Подкоммиссіей по преподаванію математики“ **). Эта серія состоитъ изъ небольшихъ брошюръ, содержащихъ нѣмецкіе переводы „Предварительнаго доклада объ организаціи Коммиссіи“ ***), циркуляровъ

*) См. „Вѣстникъ“, №№ 475—476, 481, 485—486, 487, 488, 498, 502, 505, 514, 524, 525.

**) „Berichte und Mitteilungen, veranlasst durch die Internationale Mathematische Unterrichts-Kommission“.

***) См. „Вѣстникъ“, № 475—476, а также отдѣльное изданіе Русской Національной Подкоммиссіи, выпущенное въ 1909 г.

Центральнаго Комитета, отчетовъ о съѣздахъ делегацій и т. д. Повидимому, только случайно въ эту серію попала брошюрка Ноодта „О преподаваніи математики въ женскихъ учебныхъ заведеніяхъ“ *). Но главную роль играетъ вторая серія, носящая заглавіе „Статьи о преподаваніи математики въ Германіи, вызванныя Международной Коммиссіей по преподаванію математики“ **). Эта серія состоитъ изъ пяти томовъ. Первый томъ содержитъ отчеты о преподаваніи математики въ среднихъ школахъ сѣверной Германіи; во второмъ томѣ содержатся отчеты о преподаваніи математики въ среднихъ школахъ въ средней и южной Германіи. Наибольшій интересъ представляетъ третій томъ. Онъ озаглавленъ „Отдѣльные вопросы преподаванія математики въ средней школѣ“ съ небольшой вступительной статьей проф. Клейна. Въ этомъ томѣ содержатся слѣдующія отдѣльныя статьи: 1) Р. Шиммакъ — „Развитіе реформы преподаванія математики въ Германіи“. 2) Г. Тиммерлингъ — „Математика въ учебникахъ физики“. 3) П. Цюльке — „Преподаваніе геометрическаго черченія и начертательной геометріи въ германскихъ реальныхъ учебныхъ заведеніяхъ“. 4) Б. Гофманъ — „Астрономія, землемѣріе и математическая географія“. 5) М. Гебгардъ — „Исторія математики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ“. 6) Верникe — „Математика и философская пропедевтика“. 7) В. Лорей — „Преподаваніе математики въ германскихъ университетахъ съ 1870 года“. 8) Г. Тиммердингъ — „Коммерческая ариѳметика“ ***). Нужно сказать, что далеко не всѣ выпуски этого тома уже появились въ свѣтъ. Вышли только первые три выпуска, изъ которыхъ особый интересъ представляетъ первый, дающій отчетъ о существѣ, задачахъ и ходѣ реформы, руководимой Клейномъ. До сихъ поръ мы не имѣли такого рода сводки спеціально

*) Noodt, G. „Über die Stellung der Mathematik im Lehrplan der höheren Mädchenschule vor und nach der Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens in Preussen“. 1909.

**) „Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, veranlasst durch die Internationale Mathematische Unterrichts-Kommission“. Herausgegeben von F. Klein. 5 Bände.

***) Band III. Einzelfragen des höheren mathematischen Unterrichts. Mit einem Einführungswort von F. Klein.

1. Schimmack, R., „Die Entwicklung der mathematischen Unterrichtsreform in Deutschland“. 146 S.

2. Timerding, H. E., „Die Mathematik in den physikalischen Lehrbüchern“. Mit 22 Figuren. (VI u. 112 S.). 1910. M. 2.80.

3. Zühlke, P., „Der Unterricht im Linearzeichnen und in der darstellenden Geometrie an den deutschen Realanstalten“.

4. Hoffmann, B., „Astronomie, Vermessungswesen, mathematische Geographie an den höheren Schulen“. (In Vorbereitung).

5. Gebhardt, M., „Geschichte der Mathematik an den höheren Schulen“. (In Vorbereitung).

6. Wernicke, „Mathematik und philosophische Propädeutik“. (In Vorbereitung).

7. Lorey, W., „Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit 1870“. (In Vorbereitung).

8. Timerding, H. E., „Kaufmännische Mathematik“. (In Vorbereitung).

по математикѣ. Выпущенный въ 1908 году отчетъ Педагогической Коммиссіи Германскаго Союза Естествоиспытателей и Врачей охватывалъ все дѣло преподаванія естествознанія во всемъ его объемѣ, включая сюда и математику. Изъ этой обширной книги приходилось, такимъ образомъ, вылавливать то, что относится къ математикѣ *). Въ настоящее время мы имѣемъ очень обстоятельный и интересный отчетъ, относящійся только къ математикѣ. Замѣтимъ, что на русскомъ языкѣ сущность и задача реформы, хотя и не съ такой подробностью, но все же обстоятельно изложены въ статьѣ прив.-доц. В. Кагана „О реформѣ преподаванія математики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ Германіи и Франціи". Эта статья помѣщена въ качествѣ введенія къ I-ому тому русскаго изданія „Элементарной математики" Бореля-Штеккеля **).

Четвертый томъ серій содержитъ отчеты о преподаваніи математики въ техническихъ учебныхъ заведеніяхъ, а пятый — въ народныхъ училищахъ и въ учительскихъ институтахъ. Въ четвертомъ томѣ еще многіе выпуски не появились въ свѣтъ, а пятый томъ еще весь подготовляется къ печати. Считаемъ нужнымъ указать, что не только каждый томъ, но и каждый выпускъ продается отдѣльно.

Во Франціи работы Подкоммиссіи можно считать законченными. „Труды" Подкоммиссіи также состоятъ изъ пяти томовъ, изъ которыхъ послѣдніе только-что вышли въ свѣтъ. Вся серія выпущена фирмой Hachette ***). Первый томъ содержитъ отчетъ о преподаваніи въ начальной школѣ; второй — о преподаваніи въ средней школѣ; третій — въ высшей школѣ; четвертый — въ техническихъ учебныхъ заведеніяхъ и пятый — въ женскихъ учебныхъ заведеніяхъ.

Что касается остальныхъ странъ, то въ нихъ работы подкоммиссій не отличаются такой обстоятельностью, но вездѣ значительно подвинулись. Въ Англіи выпущено 8 выпусковъ, въ Швейцаріи 4 выпуска, въ Австріи 7 выпусковъ и т. д.

Русская Національная Подкоммиссія тоже опубликовала уже важнѣйшіе доклады. Всѣ доклады опубликованы по-французски, за исключеніемъ доклада К. В. Фогта, опубликованнаго по-нѣмецки. Первымъ появился докладъ профессора К. А. Поссе „О преподаваніи математики въ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ" ****). Этотъ обстоятельный докладъ содержитъ подробный обзоръ преподаванія математики въ настоящее время въ каждомъ университетѣ и въ каждомъ спеціальномъ учеб-

*) A. Gutzmer. „Die Tätigkeit der Unterrichts-Kommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte". 322 S. Leipzig, 1908.

**) Борель-Штеккель. „Элементарная математика". Часть I. Ариѳметика и алгебра. Переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей приватъ-доцента В. Ф. Кагана. Одесса. „Mathesis" 1911.

***) „Commission Internationale de l'enseignement mathématique". Rapports de la Sous-commission Française.

****) C. Possé. „Rapport sur l'enseignement mathématique dans les universités, les écoles techniques superieures et quelques-unes des écoles militaires en Russie". 100 p. 1910.

номъ заведенiи въ частности. Затѣмъ были опубликованы доклады: К. В. Фогтъ — „О преподаванiи въ реальныхъ училищахъ“; В. Кондратьевъ — „О преподаванiи математики въ мужскихъ гимназiяхъ и въ женскихъ учебныхъ заведенiяхъ Императрицы Марiи“; Б. С. — „О преподаванiи математики въ низшихъ учебныхъ заведенiяхъ“; М. Попруженко — „О преподаванiи математики въ кадетскихъ корпусахъ“; М. Макшеевъ — „Замѣтка о подготовленiи преподавателей для кадетскихъ корпусовъ“ *).

Для составленiя отчета о преподаванiя математики въ Финляндiи Финляндскимъ Сенатомъ была организована особая Коммиссiя, которая также представила обстоятельный докладъ на французскомъ языкѣ **).

---

Въ началѣ сентября (отъ 6 по 9 по нашему счету) въ Миланѣ состоялся съѣздъ нацiональныхъ делегацiй; на этомъ съѣздѣ нацiональными делегацiями должны были быть представлены отчеты о дѣятельности Подкоммиссiй. Долженъ былъ быть подвергнутъ обсужденiю вопросъ о той формѣ, въ которой эти отчеты должны быть представлены Конгрессу въ Кэмбриджѣ ***). Это, конечно, вопросы формальнаго свойства, вѣроятно, заранѣе предрѣшенные Центральнымъ Комитетомъ. Значительно большiй интересъ должно было представить обсужденiе двухъ вопросовъ, поставленныхъ Центральнымъ Комитетомъ:

А) Въ какой мѣрѣ можно провести въ среднихъ учебныхъ заведенiяхъ систематическое изложенiе математики и какъ объединить въ этомъ преподаванiи отдѣльные вѣтви математики?

В) Какъ поставить теоретическое и практическое преподаванiе математики для студентовъ, изучающихъ физику и естествознанiе?

На послѣднiй день было назначено публичное засѣданiе, въ которомъ, кромѣ обычныхъ привѣтствiй, профессоръ Энрикесъ имѣлъ произнести рѣчь на тему „О математикѣ и теорiи познанiя“.

---

*) K. W. Vogt. „Bericht über den mathematischen Unterricht an den russischen Realschulen“.

M. Kondratiev. „Rapports présentés à la délégation russe“.

B. S. „L'Enseignement mathématique dans les Ecoles primaires et les Ecoles normales“.

M. Poprugenko. „L'Enseignement des Mathématiques dans les Corps de Cadets“.

M. Makchéev. „Notice sur les Cours pour la préparation des maîtres des Corps des Cadets“.

**) „Rapport sur l'Enseignement des mathématiques dans les écoles de Finlande“. 52 p. Helsingfors. 1910.

***) См. V-й Международный Математическiй Конгрессъ. „Вѣстникъ“, № 543

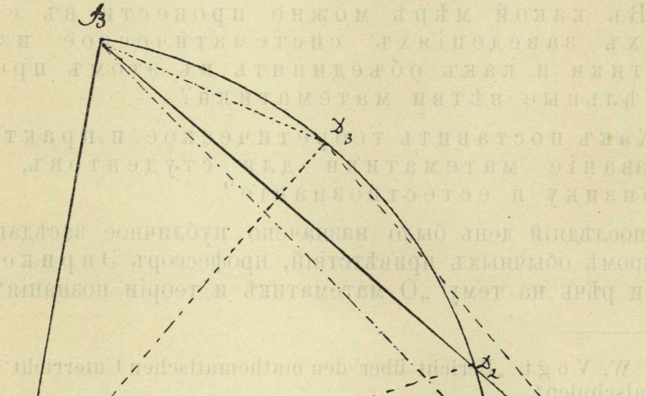
О томъ, какъ прошелъ Съѣздъ, мы еще не имѣемъ свѣдѣній. Номеръ „L'Enseignement Mathématique" (оффиціальнаго органа Международной Коммиссіи) отъ 15 сентября не содержитъ еще никакихъ свѣдѣній о Съѣздѣ. Полагаемъ, однако, что намъ не придется ждать слѣдующаго номера (отъ 15/XI); Центральный Комитетъ пришлетъ, вѣроятно, циркулярный отчетъ, который мы не замедлимъ сообщить читателямъ.

---

# Варіанты доказательствъ нѣкоторыхъ теоремъ элементарной геометріи.

*Б. Цомакіона.*

I. Теорема. Если двѣ стороны одного треугольника равны двумъ сторонамъ другого треугольника, а углы, заключенные между соотвѣтственно равными сторонами, не равны между собой, то въ томъ треугольникѣ, въ которомъ этотъ уголъ больше, противоположная ему сторона больше соотвѣтствующей стороны другого треугольника.



Черт. 1.

Доказательство (черт. 1). Наложимъ одинъ треугольникъ на другой такъ, чтобы совмѣстились двѣ соотвѣтственно равныя стороны. Пусть совмѣщенныя стороны займутъ положеніе $AC$, при чемъ оба треугольника расположатся съ одной стороны отрѣзка $AC$ (на чертежѣ оба сверху). Пусть одинъ изъ треугольниковъ займетъ положеніе $ABC$. Третья вершина $D$ второго треугольника можетъ занять три положенія: $D_1$ — внутри $ABC$, $D_2$ — на сторонѣ $BC$, $D_3$ — внѣ $ABC$.

Точки $D_1$, $D_2$, $D_3$ должны быть на одинаковыхъ разстояніяхъ отъ точки $A$.

1-й случай. Точка $D_1$ лежитъ внутри треугольника $ABC$. Проведя линію $BD_1$, получимъ равнобедренный $\triangle ABD_1$. Слѣдовательно, $\angle AD_1B$ острый, т. е.

$$\angle AD_1B < d.$$

Съ другой стороны,

$$\angle AD_1B + \angle BD_1C > 2d,$$

такъ какъ $\angle AD_1C$, какъ уголъ треугольника, меньше $2d$. Слѣдовательно,

$$\angle BD_1C > d,$$

т. е. уголъ $BD_1C$ тупой. Разсматривая тупоугольный треугольникъ $BD_1C$, замѣчаемъ, что

$$BC > D_1C,$$

что и требовалось доказать.

2-й случай. Точка $D_2$ лежитъ на сторонѣ $BC$. Такъ какъ $BC = BD_2 + D_2C$, то

$$BC > D_2C.$$

3-й случай. Точка $D_3$ лежитъ внѣ $ABC$. Какъ и въ первомъ случаѣ, соединимъ $D_3$ съ $B$. Треугольникъ $ABD_3$ равнобедренный; слѣдовательно,

$$\angle ABD_3 = \angle BD_3A, \quad \angle ABD_3 > \angle CBD_3, \quad \angle BD_3C > \angle BD_3A.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\angle BD_3C > \angle CBD_3.$$

Разсматривая треугольникъ $BD_3C$, замѣчаемъ, что

$$BC > D_3C,$$

что и требовалось доказать.

Изложенный способъ доказательства даетъ возможность помѣстить эту теорему наряду съ теоремами о соотношеніяхъ между сторонами и углами треугольника.

## II. Объ измѣреніи угловъ съ помощью дугъ.

Теорема 1. Вписанный уголъ измѣряется половиной дуги, на которую онъ опирается.

1-й случай (черт. 2). Центръ окружности лежитъ внутри вписаннаго угла $ABC$ или на его сторонѣ.

Проведемъ два діаметра, параллельныхъ сторонамъ угла. Пусть эти діаметры будутъ $DE$ и $FH$; слѣдовательно,

$$DE \parallel AB \quad \text{и} \quad FH \parallel BC; \quad \angle DOF = \angle ABC.$$

Уголъ $DOF$, какъ центральный, измѣряется дугой $DF$. Но

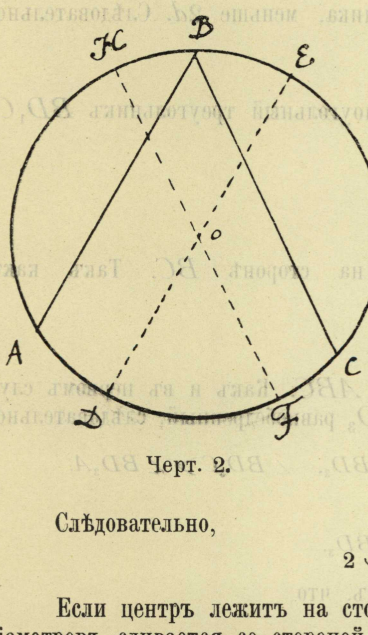
$$\smile DF = \smile HE = \smile HB + \smile BE = \smile AD + \smile FC,$$

такъ какъ

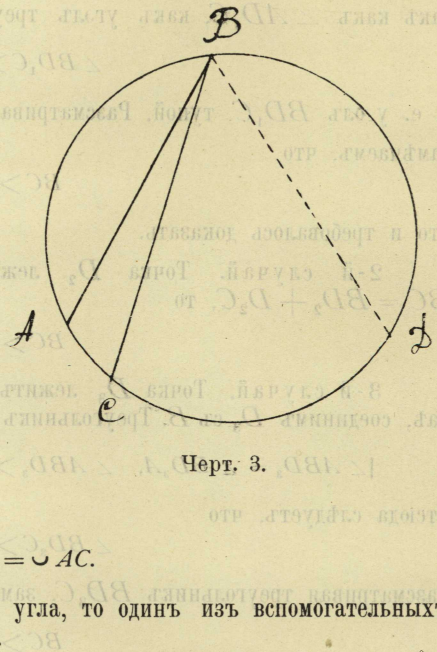
$$\smile HB = \smile FC \quad \text{и} \quad \smile BE = \smile AD.$$

Съ другой стороны,

$$\smile DF + \smile AD + \smile FC = \smile AC.$$




Черт. 2.




Черт. 3.

Слѣдовательно,

$$2 \smile DF = \smile AC.$$

Если центръ лежитъ на сторонѣ угла, то одинъ изъ вспомогательныхъ діаметровъ сливается со стороной угла.

2-й случай. Центръ окружности лежитъ внѣ угла $ABC$ (черт. 3).

Проведя какую-нибудь хорду $BD$ такъ, чтобы центръ лежалъ внутри угловъ $ABD$ и $CBD$, получимъ:

$$\angle ABC = \angle ABD - \angle CBD.$$

Но

$\angle ABD$ измѣряется $^1/_2 \smile AD$, а $\angle CBD$ измѣряется $^1/_2 \smile CD$;

слѣдовательно,

$$\angle ABC \text{ измѣряется } {}^1/_2 \left\{ \smile AD - \smile CD \right\} = {}^1/_2 \smile AC.$$

Теорема 2. Уголъ между касательной и хордой измѣряется половиной дуги, стягиваемой хордой и находящейся между сторонами угла [см. «Геометрію» Давидова] (черт. 4).

Проведя хорду $CD \parallel AB$, найдемъ:

$$\angle ABC = \angle BCD;$$

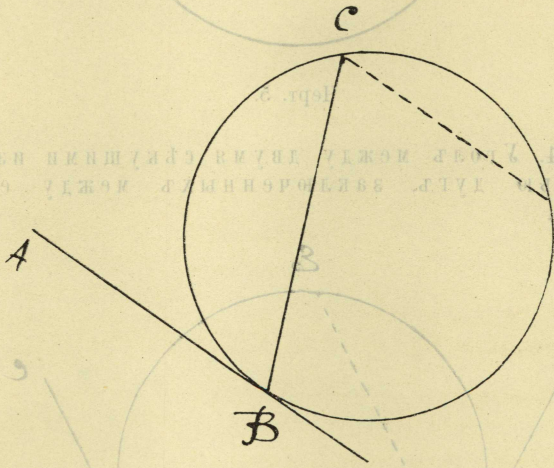
Но

$$\angle BCD \text{ измѣряется } {}^1/_2 \smile BD, \quad \text{а} \quad \smile BD = \smile BC.$$

Слѣдовательно,

$$\angle ABC \text{ измѣряется } {}^1/_2 \smile CB.$$

Можетъ случиться, что $CD$ окажется также касательной, но въ этомъ случаѣ $\angle ABC = d$, а дуга $BC =$ полуокружности, такъ что теорема все же имѣетъ мѣсто.




Черт. 4.

Теорема 3. Уголъ между двумя хордами, пересѣкающимися внутри окружности, измѣряется полусуммой дугъ, заключенныхъ между его сторонами и ихъ продолженіями (черт. 5).

Проведемъ $DF \parallel EC$. Прямая $DF$ можетъ пересѣкать окружность, образуя хорду $DF$, или касаться окружности. Способъ разсужденія отъ этого существенно не зависитъ, — только въ случаѣ касанія нужно вездѣ дугу $FC$ замѣнить дугой $DC$ и дугу $ACF$ — дугой $ACD$. Имѣемъ послѣдовательно:

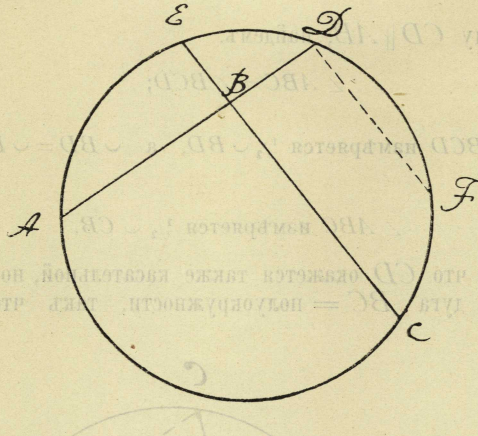
$$\angle ABC = \angle ADF,$$

$$\angle ADF \text{ измѣряется } {}^1/_2 \smile ACF\,(ACD),$$

$$\smile ACF(ACD) = \smile AC + \smile CF(CD), \quad \smile CF(CD) = \smile ED, \quad \smile ACF(ACD) = \smile AC + \smile ED,$$

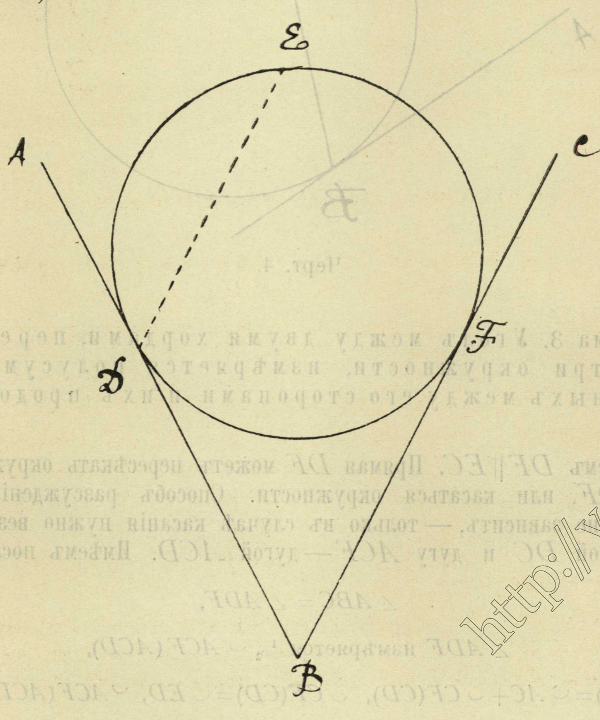
такъ что

$$\smile ABC \text{ измѣряется } {}^1/_2 (\smile AC + \smile ED).$$




Черт. 5.

Теорема 4. Уголъ между двумя сѣкущими измѣряется полуразностью дугъ, заключенныхъ между его сторонами (черт. 6).




Черт. 6.

Проведя хорду $DE \parallel BC$, найдемъ послѣдовательно:

$$\angle ABC = \angle ADE,$$

$$\angle ADE \text{ измѣряется } {}^1/_2 \smile AE,$$

$$\smile AE = \smile AC - \smile EC; \quad \smile EC = \smile DF; \quad \smile AE = \smile AC - \smile DF,$$

такъ что уголъ $ABC$ измѣряется ${}^1/_2(\smile AC - \smile DF)$.

Теорема 5. Описанный уголъ измѣряется полуразностью дугъ, заключенныхъ между его сторонами (черт. 7).

Проведя $DE \parallel BC$, найдемъ послѣдовательно:

$$\angle ABC = \angle ADE;$$

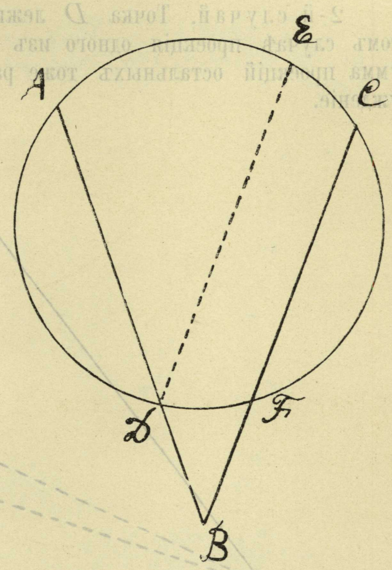
$$\angle ADE \text{ измѣряется } {}^1/_2 \smile DE;$$

$$\smile DE = \smile DEF - \smile EF;$$

$$\smile EF = \smile DF,$$

$$\smile DE = \smile DEF - \smile EF.$$

Изложенный методъ, единообразно примѣнимый во всѣхъ случаяхъ, какъ кажется, упрощаетъ работу памяти.



Черт. 5.

## III. Сумма плоскихъ угловъ многограннаго угла.

Теорема 1. Во всякомъ трехгранномъ углѣ сумма плоскихъ угловъ меньше $4d$ (черт. 8, 9 и 10).

Доказательство. Отложимъ на ребрахъ трехграннаго угла $SABC$ отъ вершины $S$ равные отрѣзки:

$$AS = BS = CS.$$

Черезъ точки $A$, $B$ и $C$ проведемъ плоскость. Изъ вершины $S$ опустимъ на эту плоскость перпендикуляръ. Основаніе этого перпендикуляра $D$ будетъ центромъ окружности, описанный около треугольника $ABC$, такъ какъ проекціи реберъ $AS$, $BS$ и $CS$, какъ равныхъ наклонныхъ, должны быть равны между собой.

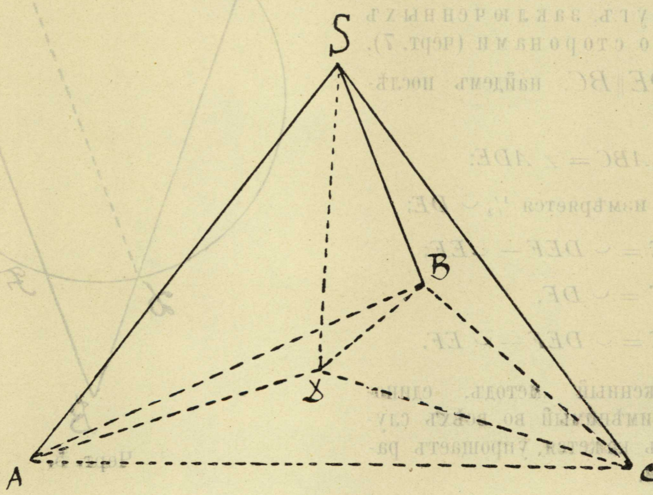
1-й случай (черт. 8). Точка $D$ лежитъ внутри треугольника $ABC$. Треугольники $ASB$ и $ADB$ равнобедренные съ одинаковыми основаніями, но боковыя стороны $ADB$ меньше боковыхъ сторонъ $ASB$. Если совмѣстить плоскости треугольниковъ, вращая около $AB$, то точка $D$ упадетъ внутрь треугольника $ASB$. Слѣдовательно,

$$\angle ASB < \angle ADB, \quad \angle ASC < \angle ADC, \quad \angle BSC < \angle BDC.$$

Откуда

$$\angle ASB + \angle ASC + \angle BSC < 4d \text{ (черт. 8)}$$

2-й случай. Точка $D$ лежитъ на сторонѣ треугольника $ABC$. Въ этомъ случаѣ проекція одного изъ плоскихъ угловъ трехграннаго равна $2d$, сумма проекцій остальныхъ тоже равна $2d$. Имѣетъ мѣсто то же самое разсужденіе.




Черт. 8.

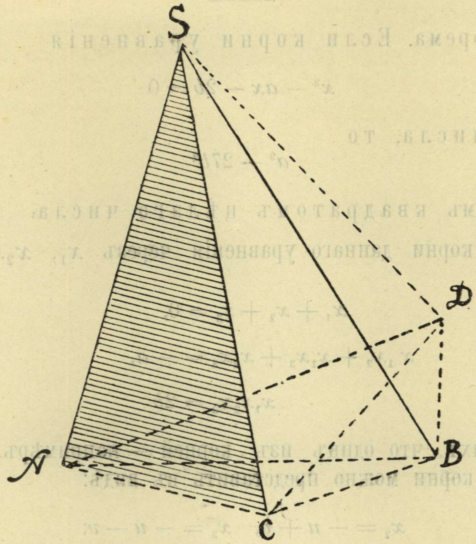
3-й случай (черт. 9). Точка $D$ лежитъ внѣ треугольника $ABC$. Тогда проекція одного изъ угловъ образуетъ уголъ $ADB \angle 2d$, который равенъ суммѣ проекцій остальныхъ.

Теорема 2. Сумма плоскихъ угловъ всякаго выпуклаго многограннаго угла меньше $4d$.

Доказательство. Предположимъ, что теорема справедлива для всякаго $n$-граннаго угла, и докажемъ, что въ этомъ предположеніи она будетъ справедлива для всякаго $(n+1)$-граннаго угла.

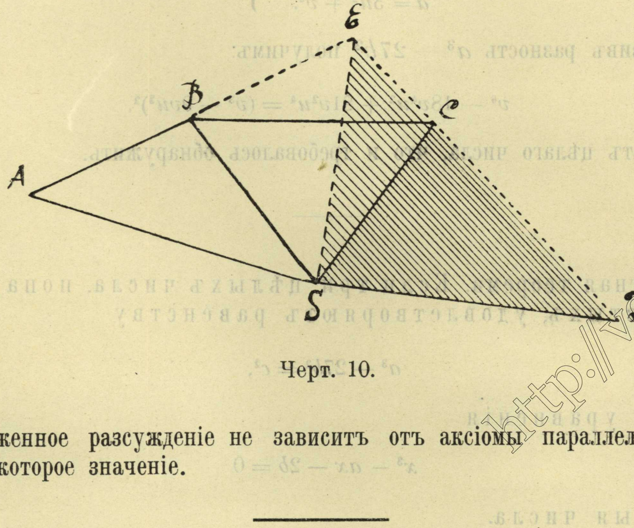
Представимъ себѣ три грани $(n+1)$-граннаго угла, идущія другъ за другомъ (черт. 10): $ASB$, $BSC$ и $CSD$, гдѣ $S$ есть вершина многограннаго угла. Продолжимъ первую и третью до пересѣченія по лучу $SE$, который вслѣдствіе того, что мы разсматриваемъ выпуклые углы пойдетъ внѣ многограннаго угла. Образуемъ новый многогранный уголъ, отличающійся отъ прежняго тѣмъ, что грани $ASB$, $BSC$ и $CSD$ замѣнены двумя гранями $ASE$ и $ESD$. Этотъ новый уголъ будетъ $n$-граннымъ. Докажемъ, что сумма плоскихъ угловъ этого $n$-граннаго угла больше суммы плоскихъ угловъ прежняго $(n+1)$-граннаго. Дѣйствительно, сумма плоскихъ угловъ измѣнилась на разность

$$(\angle BSE + \angle ESC) - \angle BSC,$$




Черт. 9.

которая должна быть положительна, такъ какъ въ трехгранномъ углѣ $SBEC$ сумма двухъ плоскихъ угловъ должна быть больше третьяго.




Черт. 10.

Изложенное разсужденіе не зависитъ отъ аксіомы параллельности, что имѣетъ нѣкоторое значеніе.

# Рѣшеніе задачи на премію № 4.

*А. Астапова.*

Прямая теорема. Если корни уравненія

$$x^3 - ax - 2b = 0$$

суть цѣлыя числа, то

$$a^3 - 27b^2$$

будетъ полнымъ квадратомъ цѣлаго числа.

Обозначимъ корни даннаго уравненія черезъ $x_1$, $x_2$, $x_3$; тогда изъ формулъ:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -a,$$

$$x_1x_2x_3 = 2b$$

слѣдуетъ: во-первыхъ, что одинъ изъ корней — напримѣръ, $x_1$ — есть число четное; остальные корни можно представить въ видѣ:

$$x_2 = -u + v, \quad x_3 = -u - v;$$

во-вторыхъ, что

$$2b = 2u(u^2 - v^2); \quad -a = x_1(x_2 + x_3) + x_2x_3 = -3u^2 - v^2,$$

или

$$\left.\begin{aligned} b &= u^3 - uv^2, \\ a &= 3u^2 + v^2. \end{aligned}\right\}$$

Составивъ разность $a^3 - 27b^2$ получимъ:

$$v^6 - 18v^4u^2 + 81v^2u^4 = (v^3 - 9vu^2)^2,$$

т. е. квадратъ цѣлаго числа, что и требовалось обнаружить.

---

Обратная теорема. Если три цѣлыхъ числа, попарно взаимно простыхъ, удовлетворяютъ равенству

$$a^3 - 27b^2 = c^2,$$

то корни уравненія

$$x^3 - ax - 2b = 0$$

суть цѣлыя числа.

Изъ равенства $a^3 = 27b^2 + c^2$ можно заключить, что $a$ не можетъ быть четнымъ числомъ. Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что $a$ есть число четное; тогда форма $27b^2 + c^2 = a^3$ будетъ дѣлиться на 8. Но $b$ и $c$, по условію теоремы, будутъ при $a$ четномъ числа нечетныя и при дѣленіи на 4 дадутъ въ остаткѣ $\pm 1$.

Положивъ $b = 4p + \varepsilon$, $c = 4q + \eta$ гдѣ $\varepsilon^2 = 1$, $\eta^2 = 1$, приведемъ форму $27b^2 + c^2$ къ виду $8\lambda + 28$. Это число не дѣлится на 8, тогда какъ $a^3$ дѣлится на 8. Допущеніе неправильно.

Положивъ $3b = b_1$, получимъ: $a^3 = 3{b_1}^2 + c^2$, т. е. извѣстную нечетную бинарную квадратичную форму, каждый дѣлитель которой выразится той же формой; поэтому можно положить $a = 3u^2 + v^2$, гдѣ $u$ и $v$ суть цѣлыя числа. Если $a$ есть не простое число, то оно въ этой формѣ можетъ быть представлено не однимъ способомъ, а можетъ имѣть нѣсколько видовъ: $3{u_1}^2 + {v_1}^2$, $3{u_2}^2 + {v_2}^2$, $3{u_3}^2 + {v_3}^2$, ... Число видовъ формы опредѣляется вполнѣ числомъ разложеній числа $a$ на два взаимно простыхъ сомножителя. Но

$$a^3 = (3u^2 + v^2)^3 = 3\left\{ 3\,(u^3 - v^2u) \right\}^2 + \left\{ v^3 - 9u^2v \right\}^2.$$

Число видовъ послѣдней формы то же самое, что и число видовъ формы для $a$, ибо число разложеній на два взаимно простыхъ сомножителя то же самое. Отсюда, сравнивая уравненія

$$a^3 = 27b^2 + c^2, \tag{1}$$

и

$$(3u^2 + v^2)^3 = 27\,(u^3 - v^2u)^2 + (v^3 - 9u^2v)^2, \tag{2}$$

найдемъ *):

$$\left.\begin{aligned} a &= 3u^2 + v^2, \\ b &= u^3 - v^2u. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

---

*) Въ этомъ мѣстѣ заключается нѣкоторый изъянъ, о которомъ мы упоминали въ отчетѣ. Мысль автора заключается въ слѣдующемъ. Число $a$ можетъ быть представлено формой $3u^2 + v^2$, скажемъ, $N$ различными способами. Тождество (2) устанавливаетъ для каждаго выраженія числа $a$ соотвѣтствующее выраженіе для $a^3$; а такъ какъ $a^3$ допускаетъ столько же разложеній, сколько $a$, то выраженія правой части (2), проистекающія изъ разложенія числа $a$, исчерпываютъ всѣ разложенія числа $a^3$; одно изъ нихъ должно поэтому совпадать съ разложеніемъ (1), откуда и вытекаютъ соотношенія (3). Это разсужденіе было бы безупречнымъ, если бы мы могли быть увѣрены, что различнымъ разложеніямъ въ лѣвой части равенства (2) отвѣчаютъ различныя же разложенія въ правой части. Иначе говоря, допустимъ, что

$$a = 3u^2 + v^2 = 3{u_1}^2 + {v_1}^2 \tag{1}$$

суть различныя разложенія числа $a$; можемъ ли мы быть увѣрены, что имъ отвѣчаютъ **различныя** же разложенія числа $a^3$:

$$a^3 = 27\,(u^3 - v^2u)^2 + (v^3 - 9u^2v)^2 = 27\,({u_1}^3 - {v_1}^2u_1)^2 + ({v_1}^3 - 9{u_1}^2v_1)^2. \tag{2}$$

Если допустить, что двумъ различнымъ разложеніямъ (1) отвѣчаетъ одно и то же разложеніе (2), то тождество (2) не исчерпывало бы всѣхъ $N$ разложеній числа $a^3$, и мы не могли бы имѣть увѣренности, что среди нихъ имѣется и разложеніе (1).

Предлагаемъ автору восполнить этотъ пробѣлъ.

*Ред.*

Изъ этихъ формулъ получимъ:

$$2au = 6u^3 + 2uv^2,$$

$$2b = 2u^3 - 2uv^2.$$

Сложивъ, получимъ:

$$a \cdot 2u + 2b = 8u^3,$$

или

$$(2u)^3 - a\,(2u) - 2b = 0.$$

Слѣдовательно, $2u$ служитъ корнемъ уравненія:

$$x^3 - ax - 2b = 0.$$

Легко видѣть, что оно удовлетворится также корнями:

$$x_2 = -u + v,$$

$$x_3 = -u - v.$$

Дѣйствительно, положивъ $x_1 = 2u$, видимъ, что:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -a,$$

$$x_1x_2x_3 = 2b.$$

# НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

**Вычисленія возраста земли на основаніи физическихъ данныхъ.** Изучая исторію земли, мы по необходимости ограничиваемся, главнымъ образомъ, тѣмъ, что устанавливаемъ относительный возрастъ отдѣльныхъ слоевъ и геологическихъ событій; опредѣлить же ихъ абсолютный возрастъ казалось невозможнымъ. Тѣмъ не менѣе геофизики и геологи неоднократно пытались разрѣшить эту задачу, которая весьма интересуетъ также и неспеціалистовъ. Но численные результаты, которые получались представителями двухъ названныхъ наукъ, расходились между собой столь сильно, что ко всѣмъ изслѣдованіямъ этого рода стали относиться съ недовѣріемъ. Особенно сильно расходились мнѣнія о возрастѣ земли, такъ какъ физики никакъ не хотѣли согласиться съ тѣмъ высокимъ возрастомъ, на которомъ настаиваютъ геологи. Однако, за послѣднее время между изслѣдователями начинаетъ устанавливаться согласіе также относительно этого пункта; оказывается, что правы были геологи, требовавшіе милліоновъ лѣтъ для отдѣльныхъ формацій.

Кенигсбергеръ (Königsberger) въ своей работѣ „Возрастъ земли по физическимъ вычисленіямъ" („Geolog. Rundschau" 1910, I, 2 Abt., стр. 241—249) даетъ очень хорошій обзоръ физическихъ методовъ, на которыхъ основано вычисленіе возраста земли. Прежде изслѣдователи старались опредѣлить его, основываясь, главнымъ образомъ, на охлажденіи земли; при этомъ, конечно, приходилось дѣлать допущенія, которыя не вполнѣ соотвѣтствуютъ дѣйствительности, а также вводить въ вычисленіе ненадежныя числа. Вслѣдствіе этого числа, полученныя лордомъ Кельвиномъ (Kelvin) и его послѣдователями для времени, протекшаго отъ охлажденія земли, колеблются между 33 и 100 милліонами лѣтъ. Въ 1908 и 1910 гг. Бекеръ (Becker) опубликовалъ весьма тщательныя вычисленія, въ которыхъ онъ принимаетъ въ расчетъ также и различія во внутреннемъ строеніи земли, вытекающія, напримѣръ, изъ сейсмическихъ наблюденій. Эти вычисленія даютъ возрастъ, который колеблется между 55 и 65 милліонами лѣтъ; для времени, протекшаго отъ начала альгонкійской эпохи, древнѣйшей, въ которой встрѣчаются органическіе остатки, вычисленіе по формулѣ охлажденія даетъ около 30 милліоновъ лѣтъ.

Однако, это число, несомнѣнно, слишкомъ мало, такъ какъ при охлажденіи должны были освободиться весьма значительныя количества теплоты: во-первыхъ, благодаря теплотѣ плавленія, развивающейся при выкристаллизованіи минераловъ; во-вторыхъ, благодаря постепенно совершающемуся окисленію; въ-третьихъ, благодаря радіоактивному выдѣленію теплоты, которому Кенигсбергеръ могъ приписать лишь слабое дѣйствіе; въ-четвертыхъ, благодаря энергіи тяготѣнія, которая освобождалась при сжатіи земли вслѣдствіе охлажденія и должна была превратиться въ теплоту. Итакъ, эти 30 милліоновъ лѣтъ составляютъ лишь минимальное значеніе для періода, протекшаго отъ начала альгонкіана.

Но есть еще и другой путь для опредѣленія возраста. Такъ Натгорстъ (Nathorst) и Неймаеръ (Neumayer) принимаютъ, что со времени силурійской эпохи радіусъ земли сократился приблизительно на 5 *км.* Этому соотвѣтствовало бы пониженіе температуры на 30°; отсюда вычисленіе даетъ возрастъ, равный приблизительно 200 милліонамъ лѣтъ, т. е. значительно превышающій время, которое получается по формулѣ охлажденія, и потому лучше согласующійся съ требованіями геологовъ При всемъ томъ эти значенія весьма неточны; такъ, Рудзкій (Rudzki) аналогичнымъ путемъ вычислилъ, что это время составляетъ 500 милліоновъ лѣтъ, что, несомнѣнно, слишкомъ много.

Другой удовлетворительный методъ мы получили бы, если бы мы для опредѣленныхъ эпохъ могли опредѣлить температуру почвы по органической жизни или также по анормальнымъ геотермическимъ градіентамъ въ вулканическихъ и угольныхъ областяхъ, въ послѣднихъ — путемъ сравненія съ уменьшеніемъ массы угольнаго слоя, которое можно было бы вычислить изъ тектоническихъ нарушеній.

Особенный интересъ представляютъ опредѣленія возраста по радіоактивнымъ процессамъ, преимущественно по количеству гелія, содержащемуся въ металлахъ; этотъ методъ былъ развитъ въ 1905 г. Рётгерфордомъ (Rutherford), который вычислилъ такимъ путемъ, что время, протекшее отъ кэмбрійской эпохи, составляетъ около 140 милліоновъ лѣтъ. Подобными изслѣдованіями особенно много занимался Штрётъ (Strutt). Онъ сперва изслѣдовалъ фосфоритовыя стяженія; оказалось, однако, что послѣднія не удерживаютъ полностью содержащагося въ нихъ гелія, такъ что опредѣленія возраста, которыя приведены въ цитированномъ выше рефератѣ и даютъ около 225 000 лѣтъ для пліоцена и около 3 — 4 милліоновъ для зеленаго песка мѣлового періода, слишкомъ малы. Желѣзныя руды не много лишь лучше подходятъ для этихъ изслѣдованій; зато очень хороши цирконовые кристаллы въ изверженныхъ породахъ, которые Штрёттъ изслѣдовалъ въ послѣдніе годы.

При этихъ вычисленіяхъ мы должны по Кенигсбергеру считать, что предѣлъ погрѣшности составляетъ 50%, т. е. эти опредѣленія значительно точнѣе тѣхъ, которыя основаны на тепловомъ состояніи земли. Такимъ образомъ, судя по содержанію гелія въ цирконахъ, для возраста различныхъ формацій получаются слѣдующія числа:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Четвертичныя породы Соммы . . . | 100 000 | лѣтъ | |
| Четвертичныя породы Эйфеля . . . | 1 | мил. | „ |
| Пліоценовыя породы Новой Зеландіи . | 2 | „ | „ |
| Овернскія міоценовыя породы . . . | 6 | „ | „ |

| | | |
|---|---|---|
| Норвежскій сіенитъ изъ эпохи между Верхнимъ Девономъ и Юрой . . . | 50 мил. лѣтъ | |
| Палеозойскій гранитъ въ Колорадо . | 140 „ | „ |
| Нижнедевонскій (или болѣе древній) Уральскій гранитъ . . . . | 200 „ | „ |
| Архейскія (или болѣе молодыя) Цейлонскія розсыпи . . . . . . . . | 200 „ | „ |
| Архейскія породы въ Канадѣ . . . | 600 „ | „ |

Эти числа очень хорошо согласуются съ опредѣленіями геологовъ, — напримѣръ, относительно возраста верхне-третичной и четвертичной эпохи. Для времени отъ начала альгонкской эпохи получается вѣроятная величина въ 200 милліоновъ лѣтъ.

Значительно менѣе надежны другіе радіоактивные методы, опирающіеся на развитіе плеохроическихъ двориковъ въ кордіеритѣ, слюдѣ и т. д., а также на количествѣ свинца въ ураносодержащихъ минералахъ; такъ, послѣдній методъ далъ Болтвуду (Boltwoord) столь невѣроятную величину, какъ 11 000 милліоновъ лѣтъ! Заслуживаетъ, однако, вниманія результатъ, который получилъ Содди (Soddy); онъ нашелъ, что изъ половины періода, указываемаго ураномъ, можно вывести верхній предѣлъ для возраста земли; послѣдлѣдній, по вычисленію Содди, составляетъ около 1000 милліоновъ лѣтъ.

Итакъ, если мы желаемъ характеризовать современное состояніе вопроса о возрастѣ земли на основаніи физическихъ изысканій, то „мы можемъ съ увѣренностью сказать лишь слѣдующее: по вычисленіямъ, основаннымъ на охлажденіи, время, протекшее отъ начала альгонкійскаго періода, превышаетъ 30 милліоновъ лѣтъ и, согласно радіоактивнымъ измѣреніямъ, меньше 600 милліоновъ лѣтъ“. По мнѣнію Кенигсбергера наиболѣе вѣроятнымъ слѣдуетъ считать возрастъ въ 100 — 200 милліоновъ лѣтъ.

**О происхожденіи вѣковыхъ измѣненій земного магнитнзма.** Обязаны ли измѣненія магнитнаго состоянія земного шара внѣшней причинѣ или причина эта дѣйствуетъ внутри самой земли? Что касается періодическихъ измѣненій (суточнаго или годового), то установлено, что въ значительной части они находятся въ зависимости отъ космическихъ причинъ. Но когда изъ замѣченныхъ измѣненій выдѣлимъ эту періодическую часть, то остается то, что называется вѣковымъ измѣненіемъ, т. е. очень медленное движеніе, происхожденіе котораго необходимо изслѣдовать.

Съ этой цѣлью г. Биндлингсмайеръ (Bindlingsmaier) сдѣлалъ полную статистическую обработку всѣхъ сохранившихся до сихъ поръ источниковъ по наблюденію и изслѣдованію измѣненій стрѣлки склоненія. Онъ пользовался преимущественно замѣчательнымъ сборникомъ г. Ванъ-Беммелена (Van-Bemmelen), гдѣ голландскій ученый собралъ самыя достовѣрныя наблюденія отъ 1600-го до 1850-го года. Для періода 1850 — 1900 были использованы „Основныя таблицы земного магнитизма“ Тилло (Tillo). Съ помощью этихъ источниковъ можно найти для каждаго мѣста на земномъ шарѣ и для каждаго періода въ 10 лѣтъ величину измѣненій склоненія. Десятилѣтніе періоды берутся для того, чтобы исключить вліяніе уклоненій, имѣющихъ короткій періодъ. Вычисляя тогда для каждаго мѣста на земномъ шарѣ общее среднее изъ предыдущихъ чиселъ, можно получить окончательныя числа, представляющія вѣковое измѣненіе склоненія для каждаго мѣста. Можно затѣмъ нанести эти числа въ опредѣленномъ масштабѣ на соотвѣтствующіе пункты земныхъ полушарій и изслѣдовать законъ ихъ распредѣленія.

Этотъ статистическій трудъ, который можетъ показаться очень неблагодарнымъ, привелъ, однако, къ очень интереснымъ результатамъ.

1. Если подраздѣлить землю на пояса по параллелямъ, то эти пояса, повидимому, находятся въ одинаковомъ положеніи съ точки зрѣнія вѣковыхъ колебаній магнитизма. Другими словами, эти колебанія не зависятъ отъ широты мѣста.

2. Если же, напротивъ, подраздѣлить землю на части по меридіанамъ, т. е. на двухсторонники, то распредѣленіе оказывается очень неравномѣрнымъ отъ одного двухсторонника къ другому. Континентальные двухсторонники замѣтно болѣе подвержены колебаніямъ, чѣмъ океаническіе. Если принять дѣленіе земли на два полушарія, материковое и водное, то первое представляетъ наиболѣе сильныя колебанія склоненій. Разница доходитъ до 67%.

Отсюда выводятся два важныхъ заключенія. Во-первыхъ, происхожденіе вѣковыхъ измѣненій земного магнитизма слѣдуетъ, очевидно, искать именно внутри земли, такъ какъ магнитная стрѣлка наиболѣе сильному вліянію подвергается со стороны материковыхъ массъ, надъ кототорыми она находится.

Во-вторыхъ, можно составить удовлетворительную гипотезу объ основной причинѣ этихъ колебаній. Если магнитныя массы, производящія ихъ и расположенныя внутри земли, являются дѣйствительными магнитами, т. е. если ихъ дѣйствіе измѣняется обратно пропорціонально кубу разстоянія, то можно вычислить глубину, на которой онѣ должны находиться для того, чтобы разность разстояній, равная средней глубинѣ морей (3,7 *км.*), произвела отмѣченное болѣе сильное измѣненіе на материковомъ полушаріи, чѣмъ на водномъ. Найдено, что дѣйствующія массы должны находиться на разстояніи около 25 *км* отъ земной поверхности.

На этой глубинѣ температура земли близка къ 750°, т. е. равна критической температурѣ, при которой желѣзо теряетъ магнитныя свойства. Вполнѣ понятно, что небольшія измѣненія температуры въ этой области проявляются въ значительныхъ колебаніяхъ наблюдаемаго магнитизма. Такимъ образомъ, причину колебаній стрѣлки склоненія, а, слѣдовательно, и общую причину земного магнитизма слѣдовало бы видѣть въ существованіи магнитныхъ массъ въ глубинѣ земного шара, подверженныхъ, вслѣдствіе измѣненій въ температурѣ, постоянному колебанію между магнитнымъ и немагнитнымъ состояніемъ.

# ЗАДАЧИ.

## Подъ редакціей привать-доцента Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

**№ 444** (5 сер.). Доказать справедливость тожества

$$\frac{a^2}{r_b+r_c}+\frac{b^2}{r_c+r_a}+\frac{c^2}{r_a+r_b}=2(2R-r),$$

гдѣ $a, b, c, R, r, r_a, r_b, r_c$ суть соотвѣтственно стороны и радіусы описаннаго, вписаннаго и внѣвписанныхъ круговъ нѣкотораго треугольника.

*Л. Богдановичъ* (Ярославль).

**№ 445** (5 сер.). Построить двѣ окружности, касающіяся двухъ сторонъ угла $A$ даннаго треугольника $ABC$ и пересѣкающіяся на сторонѣ $BC$ подъ прямымъ угломъ.

*Р. Витвинскій* (Тирасполь).

**№ 446** (5 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^4 + 3x^3 + 2\sqrt{2}\,x^2 + 3\sqrt{2}\,x + 2 = 0.$$

*С. Адамовичъ* (Суворовскій корпусъ).

**№ 447** (5 сер.). Найти общій видъ такой ариѳметической прогрессіи, квадратъ каждаго изъ членовъ которой равенъ одному изъ членовъ той же прогрессіи.

*Н. С.* (Одесса).

**№ 448** (5 сер). Доказать, что сумма квадратовъ разстояній отъ вершинъ правильнаго многоугольника до прямой, проходящей черезъ его центръ, есть величина постоянная, не зависящая отъ направленія прямой *).

(Заимств.).

**№ 449** (5 сер.). Вычислить коэффиціентъ, получаемый при $x^{14}$ по раскрытіи скобокъ въ выраженіи

$$(1 - x^3)^9 (1 + x^2)^{10}.$$

(Заимств).

# РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

**№ 330** (5 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$x^4 - x^3 + (a + b)\,x - (a + b)^2 = 0.$$

Представивъ уравненіе послѣдовательно въ видѣ:

$$x^4 - (a + b)^2 - [x^3 - (a + b)\,x] = [x^2 - (a + b)]\,[x^2 + (a + b)] - x\,[x^2 - (a + b)] =$$

$$= [x^2 - (a + b)]\,[x^2 - x + (a + b)] = 0,$$

разлагаемъ его на два уравненія $x^2 - (a + b) = 0$, $x^2 - x + (a + b) = 0$, рѣшая которыя находимъ четыре корня:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{a + b}, \quad x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\,(a + b)}}{2}.$$

*Л. Богдановичъ* (Ярославль); *Г. Пистракъ* (Лодзь); *Д. Червенаковъ* (Баку); *Г. Лопато* (Николаевскій городокъ); *Ч. Павловичъ* (Рига); *Р. Витвинскій* (Одесса); *В. Моргулевъ* (Одесса); *Б. Щиголевъ* (Варшава); *И. Лурье* (Смоленскъ); *Д. Чижевскій* (Александрія).

---

*) При рѣшеніи этой задачи можно съ успѣхомъ воспользоваться элементами аналитической геометріи.

**№ 331** (5 сер.). *Вычислить сумму*

$$\frac{1}{\cos x \cos y}+\frac{1}{\cos y \cos z}+\cdots+\frac{1}{\cos t \cos u}+\frac{1}{\cos u \cos v},$$

*если дано, что* x, y, z, ..., t, u, v *образуютъ ариѳметическую прогрессію, разность которой есть* r.

Предположимъ, что ни одно изъ чиселъ $\cos x$, $\cos y$, ..., $\cos u$, $\cos v$ не равно нулю, такъ какъ въ противномъ случаѣ данное выраженіе не имѣло бы смысла. Въ этомъ предположеніи разсмотримъ сперва тотъ случай, когда $\sin r \neq 0$. Въ этомъ случаѣ изъ равенствъ:

$$\operatorname{tg} y-\operatorname{tg} x=\frac{\sin (y-x)}{\cos x \cos y}=\frac{\sin r}{\cos x \cos y},$$

$$\operatorname{tg} z-\operatorname{tg} y=\frac{\sin (z-y)}{\cos y \cos z}=\frac{\sin r}{\cos y \cos z},$$

. . . . . . . . . . . . . .

$$\operatorname{tg} u-\operatorname{tg} t=\frac{\sin (u-t)}{\cos t \cos u}=\frac{\sin r}{\cos t \cos u},$$

$$\operatorname{tg} v-\operatorname{tg} u=\frac{\sin (v-u)}{\cos u \cos v}=\frac{\sin r}{\cos u \cos v}$$

находимъ:

$$\operatorname{tg} y-\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} z-\operatorname{tg} y+\cdots+\operatorname{tg} u-\operatorname{tg} t+\operatorname{tg} v-\operatorname{tg} u=$$
$$=\sin r\left(\frac{1}{\cos x \cos y}+\frac{1}{\cos y \cos z}+\cdots+\frac{1}{\cos u \cos v}\right),$$

или

$$\operatorname{tg} v-\operatorname{tg} x=\sin r\left(\frac{1}{\cos x \cos y}+\frac{1}{\cos y \cos z}+\cdots+\frac{1}{\cos u \cos v}\right),$$

откуда

$$\frac{1}{\cos x \cos y}+\frac{1}{\cos y \cos z}+\cdots+\frac{1}{\cos u \cos v}=\frac{\operatorname{tg} v-\operatorname{tg} x}{\sin r}=\frac{\sin (v-x)}{\cos v \cos x \sin r}.$$

Если $\sin r=0$, то $r=k\pi$, гдѣ $k$ — нѣкоторое цѣлое число. Въ этомъ случаѣ всѣ слагаемыя данной суммы равны между собою, а именно каждое изъ нихъ равно $\frac{(-1)^k}{\cos^2 x}$. Дѣйствительно, $\nu$-ое слагаемое данной суммы при $r=k\pi$ имѣетъ видъ:

$$\frac{1}{\cos[x+(\nu-1)k\pi]\cos(x+\nu k\pi)}=\frac{(-1)^k}{\cos^2 x},$$

такъ какъ числа $x, y, \ldots, u, v$ образуютъ прогрессію и такъ какъ числа $(\nu-1)k$, $\nu k$ либо оба четны, либо лишь одно изъ нихъ четно, смотря по тому, будетъ ли $k$ четно или нечетно. Итакъ, при $\sin r=0$ данная сумма равна $\frac{n(-1)^k}{\cos^2 x}$, гдѣ $n$ — число слагаемыхъ, а $k$ равно отношенію $\frac{r}{\pi}$. Замѣтимъ еще что число слагаемыхъ данной суммы равно $\frac{v-x}{r}$, если только $r \neq 0$; поэтому при $\sin r = 0$ и $r \neq 0$ данная сумма равна $\frac{(v-x)(-1)^{\frac{r}{\pi}}}{r\cos^2 x}$.

*Л. Богдановичъ* (Ярославль); *В. Моргулевъ* (Одесса).

**№ 332** (5 сер.). *Вычислить радіусъ круга, вписаннаго въ треугольникъ, по тремъ его высотамъ.*

Изъ равенствъ:

$$ah_a = 2s, \quad bh_b = 2s, \quad ch_c = 2s, \quad a + b + c = 2p, \quad s = pr,$$

гдѣ $a, b, c, h_a, h_b, h_c, r, s, p$ суть соотвѣтственно стороны, высоты, радіусъ круга вписаннаго, площадь и полупериметръ треугольника, находимъ;

$$a + b + c = 2p = \frac{2s}{h_a} + \frac{2s}{h_b} + \frac{2s}{h_c}, \quad p = s\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right),$$

$$r = \frac{s}{p} = s : s\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) = 1 : \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) = \frac{h_a h_b h_c}{h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a}.$$

*Л. Богдановичъ* (Ярославль); *Р. Витвинскій* (Одесса); *В. Моргулевъ* (Одесса); *Г. Варкентинъ* (Бердянскъ); *И. Лурье* (Смоленскъ) *Д. Чижевскій* (Александрія).

**№ 334** (5 сер.). *Лицо N родилось въ 19-мъ вѣкѣ. Въ 1901 году сумма цифръ двузначнаго числа лѣтъ, прожитыхъ лицомъ N, равнялось суммѣ цифръ года его рожденія. Когда родилось лицо N?*

Пусть $x$ и $y$ суть соотвѣтственно цифры единицъ и десятковъ года рожденія лица $N$. Тогда $1800 + 10y + x$ есть годъ рожденія лица $N$. Покажемъ, что цифра $x$ не можетъ быть болѣе 1. Дѣйствительно, вычисляя разность $1901 - (1800 + 10y + x)$ при $x > 1$ элементарнымъ пріемомъ, получимъ: $10(9 - y) + (11 - x)$, гдѣ $9 - y$ есть цифра десятковъ, а $11 - x$ есть цифра единицъ возраста лица $N$ въ 1901 году. Такимъ образомъ, при $x > 1$ въ 1901 году сумма цифръ числа лѣтъ, прожитыхъ $N$, есть $9 - y + 11 - x = 20 - x - y$, а сумма цифръ года рожденія выражается числомъ $1 + 8 + y + x = 9 + x + y$. По условію задачи мы должны имѣть $9 + x + y = 20 - x - y$, откуда $2x + 2y = 11$, $x + y = \frac{11}{2}$, что невозможно, такъ какъ $x$ и $y$ суть числа цѣлыя. Итакъ, $x \leqq 1$, а потому число лѣтъ, прожитыхъ $N$ къ 1901-му году, т. е. разность $1901 - (1800 + 10y + x)$, выражается по десятичной системѣ числомъ $10(10 - y) + (1 - x)$, гдѣ, такимъ образомъ, $10 - y$ есть цифра десятковъ, а $1 - x$ есть цифра единицъ. По условію задачи имѣемъ: $1 + 8 + y + x = 10 - y + 1 - x$, откуда $2x + 2y = 2$, $x + y = 1$. Слѣдовательно, $x = 1$, $y = 0$ или $x = 0$, $y = 1$, а потому годъ рожденія равенъ одному изъ чиселъ 1801, 1810. Первое изъ нихъ даетъ сумму цифръ 1 числа лѣтъ 100, прожитыхъ $N$ къ 1901-му году, и сумму цифръ 10 года рожденія, а потому оно не годится. Второе же число, послѣ аналогичной провѣрки, оказывается пригоднымъ. Итакъ, лицо $N$ родилось въ 1810 омъ году.

Замѣчаніе. Слово „двузначнаго" можетъ быть опущено въ условіи задачи, не вліяя на ходъ рѣшенія и отвѣтъ; если его удержать, нѣсколько ускоряется разсужденіе, дающее возможность отбросить рѣшеніе 1801, такъ какъ 100 есть число трехзначное.

*Г. Пистракъ* (Лодзь); *Л. Богдановичъ* (Ярославль); *В. Моргулевъ* (Одесса); *Г. Варкентинъ* (Бердянскъ); *Б. Щиголевъ* (Варшава).

**№ 339** (5 сер.). *Равнобедренный треугольникъ* ABC *расположенъ такъ, что вершина его* A *лежитъ въ концѣ діаметра* AP *даннаго полукруга, сторона* AB *лежитъ на діаметрѣ* AP, *а равная ей сторона* AC *есть хорда полукруга. При какой длинѣ стороны* AB *основаніе* BC *равнобедреннаго треугольника будетъ наибольшимъ?*

Опустимъ перпендикуляръ $CD$ на діаметръ $AP$ и введемъ обозначенія $BC = x$, $AB = AC = y$, $AD = z$. Такъ какъ вписанный уголъ $PAC$ опирается на часть полуокружности $PC$, то онъ острый, а потому

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2AB \, . \, AD,$$

или

$$x^2 = 2y^2 - 2yz. \qquad (1)$$

По извѣстному свойству хорды круга имѣемъ:

$$\overline{AC}^2 = AP \, . \, AD,$$

или

$$x^2 = 2rz, \qquad (2)$$

гдѣ $r$ — радіусъ даннаго полукруга. Подставивъ $z$ изъ равенства (2) въ равенство (1), получимъ:

$$x^2 = 2y^2 - \frac{y^3}{r} = \frac{4}{r} \cdot \frac{y}{2} \cdot \frac{y}{2} \cdot (2r - y). \qquad (3)$$

Множитель $\frac{4}{r}$ есть постоянная величина, и сумма множителей $\frac{y}{2}$, $\frac{y}{2}$, $2r - y$ есть постоянная величина, равная $2r$. Поэтому произведеніе $\frac{y}{2} \cdot \frac{y}{2}\,(2r - y)$, а вмѣстѣ съ нимъ и $x^2$ достигаетъ наибольшаго значенія [см. (3)] при равенствѣ сомножителей $\frac{y}{2}$, $\frac{y}{2}$, $2r - y$, т. е. для значенія $y$, удовлетворяющаго уравненію $\frac{y}{2} = 2r - y$, рѣшая которое находимъ: $y = \frac{4r}{3}$. Итакъ, основаніе $BC$ разсматриваемаго треугольника при длинѣ боковой стороны $AB = \frac{4r}{3}$ достигаетъ наибольшаго значенія, равнаго [см. (3)] $\sqrt{2\left(\frac{4r}{3}\right)^2 - \frac{1}{r}\left(\frac{4r}{3}\right)^3} = \frac{4r\sqrt{6}}{9}$.

*Г. Лопато* (Николаевскій городокъ); *Л. Богдановичъ* (Ярославль).

**№ 340** (5 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$(x + a)\sqrt{x + a} - 3bx + (a^2 + 2b^2)\sqrt{x + a} - 3ab = 0.$$

Представивъ уравненіе послѣдовательно въ видѣ:

$$(x + a)\sqrt{x + a} - 3b\,(x + a) + (a^2 + 2b^2)\sqrt{x + a} = 0,$$

$$(x + a)^{\frac{3}{2}} - 3b\,(x + a) + (a^2 + 2b^2)\,(x + a)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

полагаемъ затѣмъ

$$(x+a)^{\frac{1}{2}}=y. \tag{1}$$

Тогда получимъ:

$$y^3-3by^2+(a^2+2b^2)y=0, \quad \text{или} \quad y\,[y^2-3by+(a^2+2b^2)]=0.$$

Послѣднее уравненіе распадается на два,

$$y=0, \quad y^2-3by+(a^2+2b^2)=0,$$

изъ которыхъ находимъ:

$$y=0 \quad \text{или} \quad y=\frac{3b\pm\sqrt{9b^2-4\,(a^2+2b^2)}}{2}=\frac{3b\pm\sqrt{b^2-4a^2}}{2},$$

откуда [см. (1)] имѣемъ соотвѣтственно:

$$(x+a)^{\frac{1}{2}}=0 \quad \text{или} \quad (x+a)^{\frac{1}{2}}=\frac{3b\pm\sqrt{b^2-4a^2}}{2}.$$

Первое уравненіе даетъ:

$$x=-a. \tag{2}$$

Рѣшая второе уравненіе, находимъ послѣдовательно:

$$x+a=\frac{(3b\pm\sqrt{b^2-4a^2})^2}{4}=\frac{9b^2+b^2-4a^2\pm 6b\sqrt{b^2-4a^2}}{4}=$$

$$=\frac{10b^2-4a^2\pm 6b\sqrt{b^2-4a^2}}{4}=\frac{5b^2-2a^2\pm 3b\sqrt{b^2-4a^2}}{2},$$

$$x=\frac{5b^2-2a^2-2a\pm 3b\sqrt{b^2-4a^2}}{2}. \tag{3}$$

Итакъ [см. (2), (3)]:

$$x_1=-a, \quad x_{2,3}=\frac{5b^2-2a^2-2a\pm 3b\sqrt{b^2-4a^2}}{2}$$

суть корни даннаго уравненія.

*Д. Черевенаковъ* (Баку); *Л. Богдановичъ* (Ярославль); *А. Фрумкинъ* (Одесса); *В. Моргулевъ* (Одесса); *Г. Варкентинъ* (Бердянскъ); *Б. Щиголевъ* (Варшава); *Г. Пистракъ* (Лодзь); *М. Рыбкинъ* (Барнаулъ).

**№ 341** (5 сер.). *Вычислить предѣлъ выраженія*

$$\frac{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}\cdot n^{\frac{1}{12}}$$

*при безконечномъ возрастаніи* n.

(Заимств. изъ книги *Fabry „Problèmes et exercices de Mathématiques générales“*).

Полагая $\sqrt[12]{n+1} = x$, $\sqrt[12]{n} = y$, можно представить данное выраженіе въ видѣ:

$$\frac{x^3 - y^3}{x^4 - y^4} \cdot y = \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)y}{(x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3)} = \frac{x^2y+xy^2+y^3}{x^3+x^2y+xy^2+y^3},$$

или же, дѣля числителя и знаменателя на $y^3$, въ видѣ:

$$\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} + 1\right] : \left[\left(\frac{x}{y}\right)^3 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} + 1\right]. \qquad (1)$$

Такъ какъ

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt[12]{n+1}}{\sqrt[12]{n}} = \sqrt[12]{1+\frac{1}{n}}, \quad \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \sqrt[6]{1+\frac{1}{n}}, \quad \left(\frac{x}{y}\right)^3 = \sqrt[4]{1+\frac{1}{n}},$$

то

$$\lim_{n=\infty} \frac{x}{y} = 1, \quad \lim_{n=\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 1, \quad \lim_{n=\infty} \left(\frac{x}{y}\right) = 1. \qquad (2)$$

Поэтому [см. (1), (2)]

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}} \cdot n^{\frac{1}{12}} = \lim_{n=\infty} \left\{\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} + 1\right] : \left[\left(\frac{x}{y}\right)^3 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} + 1\right]\right\} =$$

$$= (1+1+1) : (1+1+1+1) = \frac{3}{4}$$

*Л. Богдановичъ* (Ярославль); *Б. Щиголевъ* (Варшава).

---

# Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

**О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника", подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.**

**П. Ловеллъ,** профессоръ. *Марсъ и жизнь на немъ.* Переводъ съ англійскаго подъ редакціей и съ предисловіемъ приватъ-доцента Императорскаго Новороссійскаго Университета А. Р. Орбинскаго. Со многими рисунками и 1 цвѣтной таблицей. Изданіе „Mathesis". Одесса, 1912. Стр. XXI+272. Ц. 2 р.

**П. Гротъ,** профессоръ. *Введеніе въ химическую кристаллографію.* Переводъ съ нѣмецкаго І. Л. Левинтова, подъ редакціей профессора М. Д. Сидоренко. Изданіе „Mathesis". Одесса, 1912. Стр. VIII+104. Ц. 80 к.

**П. Аппель**, проф. Универси ета въ Парижѣ, и **С. Дотевилль**, профессоръ Университета въ Монпеллье. *Курсъ теоретической механики.* Переводъ съ французскаго I. Л. Левинтова подъ редакціей и съ примѣчаніями С. О. Шатуновскаго, прив.-доц. Императорскаго Новороссійскаго Университета. Выпускъ I. Изд. „Mathesis". Одесса, 1912. Стр. XV + 385. Ц. 2 р. 50 к.

**Е. Нетто**, профессоръ Университета въ Гиссенѣ. *Начала теоріи опредѣлителей.* Переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей и съ примѣчаніями С. О. Шатуновскаго, прив.-доц. Императорскаго Новороссійскаго Университета. Изданіе „Mathesis". Одесса, 1912. Стр. VIII + 156. Ц. 1 р. 20 к.

**Э. Конъ,** профессоръ въ Страсбургѣ **и Г. Пуанкаре,** членъ Парижской Академіи Наукъ. *Пространство и время съ точки зрѣнія физики.* Изданіе „Mathesis". Одесса, 1912. Стр. 81. Ц. 40 к.

**К. Гассертъ,** профессоръ. *Изслѣдованіе полярныхъ странъ.* Исторія путешествій къ сѣверному и южному полюсамъ съ древнѣйшихъ временъ до настоящаго времени. Переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей и съ дополненіями профессора Г. И. Танфильева. Съ двумя картами. Изданіе „Mathesis". Одесса, 1912. Стр. XII+215. Ц. 1 р. 50 к.

**А. А. Эйхенвальдъ.** *Электричество.* (Курсъ лекцій). Съ 575 рисунками въ текстѣ. Москва, 1911. Стр. IV + 624. Ц. 5 р.

**А. П. Грузинцевъ,** проф. *Математическая оптика.* Курсъ лекцій. Харьковъ, 1911. Стр. XIV + 373.

**Н. К. Ди-Сеньи.** *Курсъ прямолинейной тригонометріи.* Составленъ по программамъ и примѣнительно къ требованіямъ конкурсныхъ экзаменовъ для поступленія въ высшія техническія учебныя заведенія. Изданіе 3-е, переработанное и дополненное. С.-Петербургъ, 1912. Стр. VIII+184. Ц. 1 р. 25 к.

**И П. Скворцовъ,** профессоръ. *Силы земли и ихъ проявленія.* Очеркъ геодинамики и геомеханики, какъ часть введенія въ общую геологію. Часть первая. Издательство „Вѣстникъ Знанія". С.-Петербургъ, 1911. Стр. 136. Ц. 85 к.

**С. И. Квятковскій.** *Механика вселенной.* Въ трехъ частяхъ. Изданіе автора. Касимовъ, 1911. Стр. 219. Ц. 2 р.

**В. И. Ярковскій,** инж.-техн. *Планеры.* Теорія скользящаго полета. Техника полета на планерѣ. Постройка планеровъ разныхъ системъ. Съ 82 рис. Изд. „Воздухоплаваніе". С.-Петербургъ, 1911. Стр. 62. Ц. 60 к.

**К. Ціолковскій.** *Защита аэронавта.* Изданіе автора. Калуга, 1911. Стр. 8. Ц. 10 к.

**Эмиль Левинъ.** *Новая теорія физическихъ явленій безъ электроновъ.* Изданіе И. Хармаца. Одесса, 1911. Стр. 67. Ц. 75 коп.

**М. Левинъ,** преподаватель Одесской гимназіи М. Иглицкаго. *Учебникъ природовѣдѣнія.* Составленъ примѣнительно къ программѣ природовѣдѣнія для первыхъ трехъ классовъ мужскихъ гимназій и первыхъ двухъ классовъ реальныхъ училищъ Мин. Нар. Пр. Изданіе книжнаго магазина „Образованіе". Одесса, 1911. Стр. X + 428. Ц. 1 р. 50 к.

**Его же.** *Учебникъ естественной исторіи.* Составленъ примѣнительно къ программѣ естественной исторіи для 4-го и 5-го классовъ женскихъ гимназій Мин. Нар. Пр. Изданіе четвертое книжнаго магазина „Образованіе". Одесса, 1911. Стр. VII + 470. Ц. 1 р. 50 к.

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

нальное, можно назвать образцовымъ въ дидактическомъ отношенiи; оно безусловно популярное, ибо авторъ нигдѣ не пользуется серьезною математикой. Исходя изъ самаго элементарнаго, онъ, шагъ за шагомъ, доходитъ до изложенiя новѣйшихъ завоеванiй науки. Онъ не останавливается и передъ такимъ труднымъ, съ перваго взгляда, вопросомъ, какъ принципъ релятивности, не вошедшiй еще ни въ одинъ изъ учебниковъ, появившихся въ Россiи, и посвящаетъ ему обширную главу. Даже весьма мало знакомый съ физикой безъ труда почерпнетъ изъ этой книги ясное представленiе о современномъ состоянiи ученiя объ электромагнитныхъ явленiяхъ, а спецiалисты, напримѣръ, учителя физики, не только узнаютъ все существенно новое, но и увидятъ передъ собою образецъ строго научнаго и все-таки популярнаго изложенiя.

Этой книгѣ нельзя не пожелать самаго широкаго распространенiя.

Проф. *О. Хвольсонъ.*

**Книга МИ выйдетъ въ свѣтъ 4-мя выпусками.**

Выходъ 1-го выпуска предполагается въ декабрѣ 1911 года, каждаго послѣдующаго черезъ два-три мѣсяца послѣ выхода предыдущаго.

**Подписная цѣна на все изданiе 5 рублей.**

Допускается разсрочка: при подпискѣ 2 руб., по полученiи которыхъ высылается первый выпускъ; выпуски 2-й, 3-й и 4-й высылаются съ наложенiемъ платежа въ 1 руб. 10 коп. на каждый.

*О всякой перемѣнѣ адреса издательство проситъ сообщать немедленно.*

**По выходѣ въ свѣтъ всего изданiя цѣна будетъ повышена.**

---

**Выходитъ 2-мъ исправленнымъ и дополненнымъ изданiемъ:**

# ПЕДАГОГИЧЕСКIЙ КАЛЕНДАРЬ-СПРАВОЧНИКЪ

## ДЛЯ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ на 1911—12 учебный годъ.

составленъ многими преподавателями
подъ общей редакцiей **С. А. Ананьина** и **М. Л. Цитропа**.

### 1-я часть. ЗАПИСНАЯ КНИЖКА и КАЛЕНДАРЬ.

По сравненiю съ первымъ изданiемъ вдвое увеличено число страницъ для классснаго журнала и количество чистой бумаги.

### 2-я часть. НАСТОЛЬНЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКIЙ СПРАВОЧНИКЪ.

I. Библiографическiй отдѣлъ. а) Литература по вопросамъ воспитанiя. б) Литература по отдѣльнымъ предметамъ обученiя (методика, книги научнаго содержанiя для учителя, книги и пособiя для учениковъ). в) Справочно-библiографическiе указатели. г) Списки книгъ, одобренныхъ Ученымъ Комитетомъ Мин. Нар. Пр.

По сравненiю съ первымъ изданiемъ этотъ отдѣлъ совершенно **переработанъ и значительно пополненъ,** введены рецензiи лучшихъ и наиболѣе распространенныхъ учебниковъ и др. книгъ; важнѣйшiе отдѣлы разработаны подъ совмѣстной редакцiей 2-хъ лицъ.

II. Различныя справочныя свѣдѣнiя. Объ учрежденiи учительскихъ обществъ и кассъ. Педагогическiя учебныя заведенiя. Учебно-вспомогательныя учрежденiя. О школьныхъ дачахъ. О прохожденiи учебной службы. Объ экскурсiяхъ учащихся. Лѣтнiй отдыхъ учителей. Краткiя статистическiя свѣдѣнiя. Метрологiя.

**Дополненiя:** Хроника узаконенiй и распоряженiй за послѣднiй годъ. Правила для молодыхъ учителей и др.

**Цѣна за обѣ части 1 р. 10 к.**

Выписывать можно черезъ каждый книжный магазинъ.—**Главный складъ: Кiевъ, Александровская, 27—Издательство „Сотрудникъ“.**