Обложка
ищется

Обложка
ищется

XLVIII Сем. № 10.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

И

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 574.

Содержаніе: О максимальныхъ и минимальныхъ свойствахъ плоскихъ фигуръ. *Д. Крыжановскаго.* (Окончаніе). — Фотохимія будущаго. *Дж. Чіамичіана.* Научная хроника: Дельта лучи. *А. П.* — Задачи №№ 62—65 (6 сер.). — Рѣшеніе задачъ: №№ 32 и 36 (6 сер.). — Книги и брошюры, поступившія въ редакцію. — Объявленія.

О максимальныхъ и минимальныхъ свойствахъ плоскихъ фигуръ.

Д. Крыжановскаго.

(Окончаніе)

Представимъ себѣ, что намъ удалось построить механизмъ, съ помощью котораго можно непрерывно преобразовывать плоскій контуръ, образуемый гибкой нерастяжимой нитью, такимъ образомъ, чтобы площадь фигуры, ограниченной этимъ контуромъ, все время увеличивалась. Это, какъ мы видѣли (стр. 183), геометрически вполнѣ мыслимо до тѣхъ поръ, пока контуръ не приметъ формы окружности, ибо площадь всякой фигуры, отличной отъ круга, можно увеличить, не измѣняя ея периметра. Итакъ, процессъ деформаціи контура и одновременнаго увеличенія площади можетъ остановиться только въ томъ случаѣ, если контуръ обратится въ окружность **). Но наступитъ ли

*) См. „Вѣстникъ" № 572—573.

**) Вмѣсто механизма, о которомъ идетъ рѣчь, мы могли бы представить себѣ геометра, который преобразовывалъ бы данную фигуру въ бо́льшую изопериметрическую фигуру по способу Штейнера, описанному выше (стр. 183), эту фигуру въ еще бо́льшую, по тому же способу, и т. д., пока не придетъ къ кругу. Если предположить, что нашъ гипотетическій геометръ тратитъ на преобразованіе одной фигуры въ другую столько секундъ на сколько квадратныхъ сантиметровъ вторая фигура больше первой, то его дѣятельность не можетъ продолжаться сколь угодно долго, ибо за n секундъ онъ увеличитъ фигуру на n квадратныхъ сантиметровъ, а между это черезъ конечный промежутокъ времени? Мы знаемъ въ природѣ процессы двоякаго рода: въ однихъ случаяхъ процессъ завершается въ конечное время, въ другихъ случаяхъ онъ продолжается безконечно, постоянно приближаясь къ цѣли, но никогда не достигая ея вполнѣ. A priori невозможно предугадать, къ какому именно типу относился бы нашъ воображаемый процессъ деформированія изопериметрической фигуры. Если бы онъ закончился въ конечное время, т. е. если бы начальная фигура, послѣ непрерывнаго деформированія, увеличивающаго ея площадь, фактически превратилась въ кругъ, то это доказывало бы, что кругъ есть наибольшая изъ изопериметрическихъ фигуръ. Къ счастью, можно дѣйствительно осуществить такой процессъ и онъ оказывается конечнымъ. Для этого надо только воспользоваться стремленіемъ жидкихъ пленокъ къ сокращенію своей поверхности, которое объясняютъ поверхностнымъ натяженіемъ жидкостей.

Самый опытъ (почти общеизвѣстный) заключается въ слѣдующемъ. Проволочную рамку погружаютъ въ мыльный растворъ и осторожно вынимаютъ изъ него. Рамка оказывается затянутой тонкой пленкой изъ мыльной воды. На эту пленку помѣщаютъ связанную концами тонкую нитку (длина которой меньше периметра рамки), предварительно смоченную въ мыльной водѣ. Эта петля плаваетъ по пленкѣ, имѣя неправильную форму (рис. 18a). Затѣмъ пленку внутри петли прокалываютъ горячей иглой, отчего она лопается, а петля мгновенно принимаетъ форму правильной окружности (рис. 18b). Объясняется это тѣмъ, что пленка, оставшаяся внѣ петли, стремится сократиться и, не встрѣчая болѣе препятствія со стороны внутренней пленки, которая уничтожена, дѣйствительно стягивается и растягиваетъ петлю пока возможно. Возможно же это до тѣхъ поръ, пока петля не приметъ формы окружности. Здѣсь максимуму площади дыры (внутри петли) соотвѣтствуетъ минимумъ площади наружной пленки, ибо сумма обѣихъ площадей постоянна, будучи равна площади рамки. Описанный опытъ представляетъ физическое доказательство или, по крайней мѣрѣ, подтвержденіе теоремы Штейнера о кругѣ, такъ какъ, прежде чѣмъ прорвать пленку внутри петли, послѣдней можно

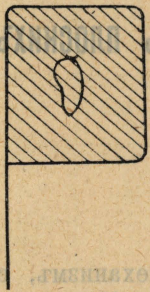

Рис. 18a.

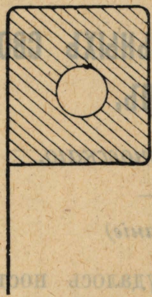

Рис. 18b.

тѣмъ изъ нити данной длины невозможно образовать сколь угодно большую фигуру. Итакъ, съ одной стороны, нашъ геометръ можетъ прекратить свою преобразовательную дѣятельность только придя къ кругу, а съ другой — онъ не можетъ дѣйствовать дольше извѣстнаго максимума времени. Казалось бы, что отсюда надо заключить, что геометръ долженъ придти къ кругу въ конечное время, откуда слѣдуетъ, что кругъ дѣйствительно больше исходной изопериметрической фигуры. Нетрудно видѣть, въ чемъ заключается логическій дефектъ такого разсужденія.

придать любую форму, а послѣ уничтоженія пленки петля всегда превращается въ кругъ, во время же этого превращенія площадь фигуры, образуемой петлею, можетъ только увеличиваться.

Можно придумать опыты, подобные описанному, для иллюстраціи другихъ теоремъ объ изопериметрахъ. Такъ, если изъ двухъ спичекъ AB и CD и нитокъ AC и BD построить прямоугольникъ и, окунувъ

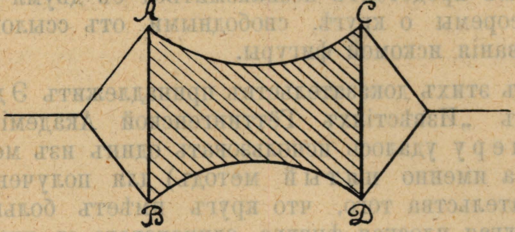

Рис. 19.

его въ мыльный растворъ, дать спичкамъ нѣсколько сблизиться, то нитяныя стороны принимаютъ форму правильныхъ дугъ круга (рис. 19), что соотвѣтствуетъ теоремѣ, приведенной на стр. 211. Шёнтьесъ придумалъ въ 1866 году слѣдующій опытъ для иллюстраціи теоремы Штейнера о максимальной фигурѣ, образованной изъ данныхъ прямолинейныхъ отрѣзковъ a, b, c, ... и произвольной формы линій $l_1, l_2, \ldots$, съ данной длиной (стр. 213). Возьмемъ нѣсколько кусочковъ тонкой соломы, изображающихъ отрѣзки a, b, c, ..., и пропустимъ сквозь нихъ нить, длина которой больше суммы длинъ соломинокъ. Связавъ концы нити вмѣстѣ, получимъ фигуру, въ которой криволинейныя части, образуемыя частями нити между соломинками могутъ произвольно измѣнять форму, сохраняя общую длину. Эту фигуру, смочивъ ее въ водѣ, помѣщаемъ на мыльную пленку, затягивающую рамку, и прокалываемъ пленку внутри фигуры. Послѣдняя при этомъ тотчасъ растягивается, а фигура принимаетъ такую форму, что всѣ нити образуютъ дуги одного и того же круга, а соломинки изображаютъ его хорды (рис. 20).

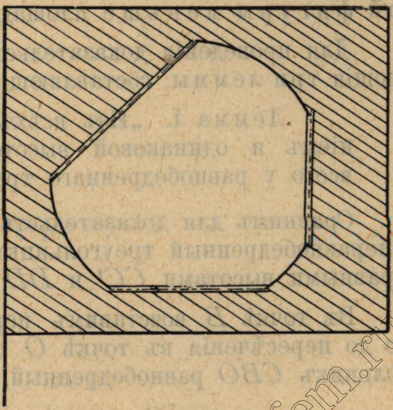

Рис. 20.

На этомъ мы закончимъ наше физическое отступленіе*) и вернемся къ геометріи.

* * *

*) Извѣстный опытъ Плато представляетъ подтвержденіе максимальнаго свойства сферы, но это и другія свойства выходятъ за предѣлы настоящей статьи, посвященной максимальнымъ свойствамъ плоскихъ фигуръ.

Въ началѣ статьи былъ указанъ принципіальный недочетъ доказательствъ Штейнера, заключающійся въ томъ, что Штейнеръ считаетъ очевиднымъ существованіе максимальной фигуры, между тѣмъ какъ это утвержденіе нуждается въ строгомъ доказательствѣ не менѣе всякаго другого утвержденія, не входящаго въ систему принятыхъ постулатовъ.

Теперь намъ предстоитъ познакомиться съ двумя полными доказательствами теоремы о кругѣ, свободными отъ ссылокъ на очевидность существованія искомой фигуры.

Первое изъ этихъ доказательствъ принадлежитъ Эдлеру (Edler) и помѣщено въ „Извѣстіяхъ Гёттингенской Академіи Наукъ" за 1882 годъ. Эдлеру удалось использовать одинъ изъ методовъ самого Штейнера (а именно пятый методъ) для полученія безупречно строгаго доказательства того, что кругъ имѣетъ большую площадь, чѣмъ всякая другая плоская фигура одинаковаго съ нимъ периметра. Все доказательство распадается на три части:

Во-первыхъ, доказывается, что всякій неправильный многоугольникъ меньше нѣкотораго правильнаго многоугольника съ тѣмъ же периметромъ;

во-вторыхъ, сравнивая площади любого правильнаго многоугольника и круга съ равными периметрами, Эдлеръ показываетъ, что первая площадь меньше второй;

въ-третьихъ, дается доказательство того, что площадь любой фигуры меньше площади изопериметрическаго круга.

Для проведенія доказательства Эдлера, намъ понадобятся слѣдующія три леммы, составляющія сущность пятаго метода Штейнера.

Лемма I. „Изъ всѣхъ треугольниковъ съ общимъ основаніемъ и одинаковой высотой сумма боковыхъ сторонъ меньше всего у равнобедреннаго треугольника".

Сравнимъ для доказательства равнобедренный треугольникъ ACB и неравнобедренный треугольникъ ADB съ общимъ основаніемъ AB и равными высотами CC' и DD' (рис. 21).

Въ точкѣ B возставимъ перпендикуляръ къ AB и продолжимъ его до пересѣченія въ точкѣ O съ продолженіемъ стороны AC. Треугольникъ CBO равнобедренный, такъ какъ

$$\angle COB = \angle ACC', \quad \angle CBO = \angle BCC' \quad \text{а} \quad \angle ACC' = \angle BCC'.$$

Поэтому прямая CD дѣлитъ основаніе OB въ точкѣ K пополамъ, такъ что $BD = DO$ и, слѣдовательно,

$$AC + CB = AC + CO = \overline{AO},$$

$$AD + DB = AD + DO = \text{лом. } ADO.$$

Мы видимъ, что, дѣйствительно, сумма боковыхъ сторонъ у равнобедреннаго треугольника меньше такой же суммы у всякаго другого треугольника съ равнымъ основаніемъ и высотой, ибо прямая $\overline{AO}$ короче ломанной ADO.

Разсматривая еще одинъ треугольникъ AEB съ такой же высотой EE', видимъ, что $BE = EO$, такъ что

$$AE + EB = AE + EO = \text{лом. } AEO > \text{лом. } ADO,$$

ибо объемлющая ломанная длиннѣе объемлемой выпуклой ломанной. Въ то же время $C'E' > C'D'$. Итакъ, изъ двухъ треугольниковъ съ общимъ основаніемъ и равными высотами сумма боковыхъ сторонъ больше у того треугольника, у котораго основаніе высоты отстоитъ дальше отъ средины основанія.

Лемма II. „Изъ всѣхъ трапецій съ равными основаніями и высотами, сумма боковыхъ сторонъ меньше всего у равнобочной трапеціи“.

Помѣстимъ двѣ трапеціи — равнобочную $ACDB$ и неравнобочную $AEFB$ — на общемъ основаніи AB

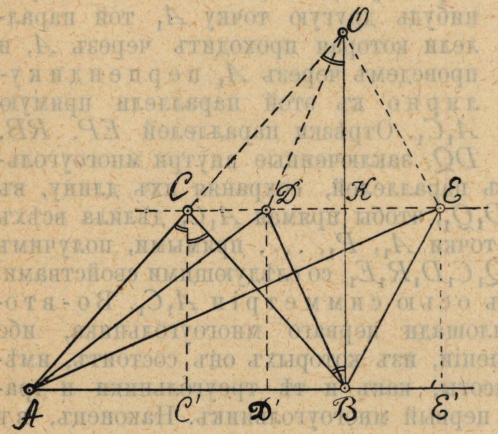

Рис. 21.

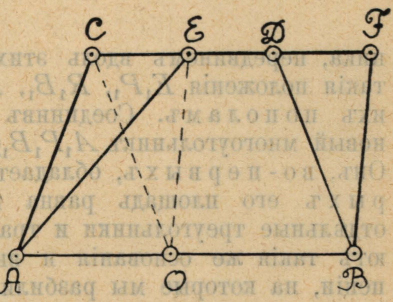

Рис. 22.

(рис. 22). Такъ какъ, по условію, $CD = EF$, то прямыя CO, параллельная DB, и EO, параллельная FB пересѣкутъ основаніе AB въ одной и той же точкѣ O. Суммы боковыхъ сторонъ трапецій, т. е. $AC + DB$ и $AE + FB$, равны соотвѣтственно суммамъ боковыхъ сторонъ $AC + CO$ и $AE + EO$ треугольниковъ ACO, AEO, имѣющихъ общее основаніе AO и равныя высоты. Такъ какъ первый треугольникъ равнобедренный, то, по первой леммѣ, первая сумма меньше второй, что и требовалось доказать.

Лемма III. „Изъ всѣхъ треугольниковъ съ общимъ основаніемъ и съ равными углами при противоположныхъ ему вершинахъ наибольшую площадь имѣетъ равнобедренный треугольникъ“.

Дѣйствительно, около всѣхъ треугольниковъ съ общимъ основаніемъ AB и съ равными углами α при противоположныхъ ему вершинахъ можно описать одну общую окружность (рис. 23). Равнобедренному треугольнику AOB принадлежитъ, очевидно, наибольшая высота, такъ что онъ больше всѣхъ другихъ разсматриваемыхъ треугольниковъ.

Теперь мы можемъ перейти къ изложенію доказательства Эдлера.

1°. Возьмемъ какой-нибудь неправильный многоугольникъ $ABCDE$ (рис. 24). Черезъ всѣ его вершины проведемъ параллельныя между собой прямыя въ какомъ-нибудь направленіи, отличномъ отъ направленій сторонъ многоугольника. Эти параллели раздѣлятъ нашъ многоугольникъ на два треугольника и на нѣсколько трапецій. Общее число тѣхъ и другихъ не превосходитъ $(n-1)$, если у многоугольника n сторонъ *). Вершину A перенесемъ въ какую-нибудь другую точку A_1 той параллели которая проходитъ черезъ A, и проведемъ черезъ A_1 перпендикулярно къ этой параллели прямую A_1C_1. Отрѣзки параллелей EP, RB, DQ, заключенные внутри многоугольника, передвинемъ вдоль этихъ параллелей, сохраняя ихъ длину, въ такія положенія E_1P_1, R_1B_1, D_1Q_1, чтобы прямая A_1C_1 дѣлила всѣхъ ихъ пополамъ. Соединивъ точки A_1, P_1, ..., прямыми, получимъ новый многоугольникъ $A_1P_1B_1Q_1C_1D_1R_1E_1$ со слѣдующими свойствами. Онъ, во-первыхъ, обладаетъ осью симметріи A_1C_1. Во-вторыхъ его площадь равна площади перваго многоугольника, ибо отдѣльные треугольники и трапеціи, изъ которыхъ онъ состоитъ, имѣютъ такія же основанія и высоты, какъ и тѣ треугольники и трапеціи, на которые мы разбили первый многоугольникъ. Наконецъ, въ третьихъ, периметръ его меньше, чѣмъ у перваго многоугольника. Дѣйствительно, по первой леммѣ суммы боковыхъ сторонъ у равнобедренныхъ треугольниковъ $A_1P_1E_1$, и $C_1D_1Q_1$ не больше, чѣмъ у треугольниковъ APE и CDQ; т. е.

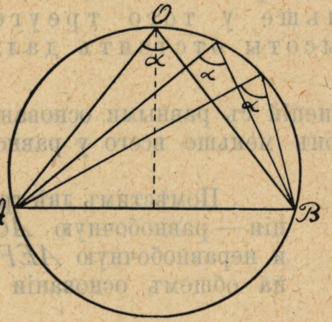

Рис. 23.

$$A_1P_1 + A_1E_1 \leqq AP + AE \quad \text{и} \quad C_1D_1 + C_1Q_1 \leqq CD + CQ;$$

а по второй леммѣ

$$E_1R_1 + B_1P_1 \leqq ER + BP \text{ и т. д.,}$$

при чемъ знакъ равенства не можетъ имѣть мѣсто во всѣхъ случаяхъ разомъ, если только многоугольникъ $ABCDE$ уже не былъ симмет-

*) Это число будетъ меньше $(n-1)$, если хоть одна параллель проходитъ разомъ черезъ двѣ вершины.

ричнымъ по отношенію къ перпендикуляру къ параллелямъ проходящему черезъ точку A. Но въ этомъ послѣднемъ случаѣ достаточно сколь угодно мало измѣнить направленіе параллелей, чтобы такая симметрія нарушилась. Поэтому, всегда можно выбрать направленіе параллелей такъ, чтобы хоть въ одномъ соотношеніи имѣлъ мѣсто знакъ $<$, такъ что сумма лѣвыхъ частей или периметръ второго многоугольника окажется меньше суммы правыхъ частей или периметра перваго многоугольника.

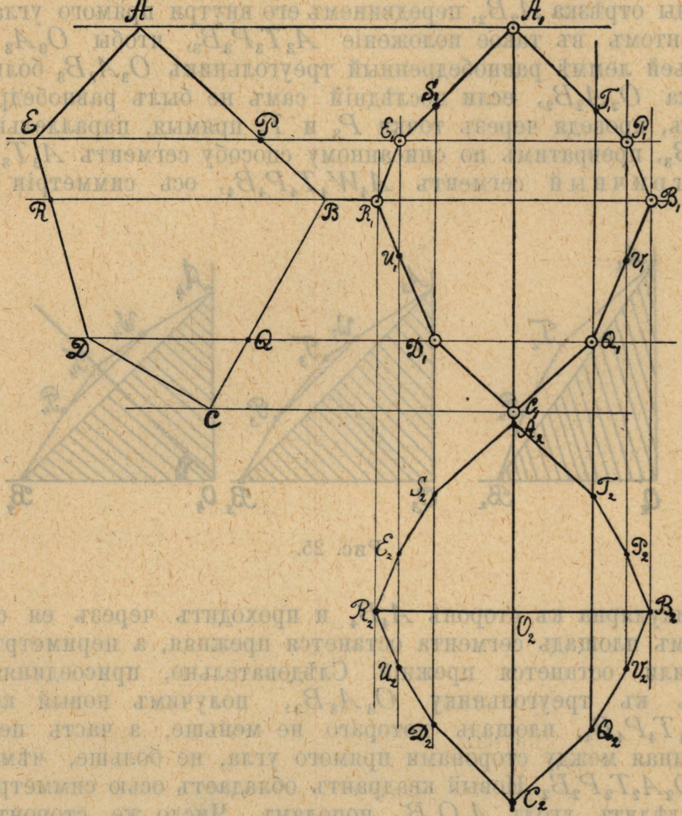

Рис. 24.

Такъ какъ каждая часть многоугольника $ABCDE$, т. е. каждый треугольникъ или трапеція, даетъ по 2 стороны второго многоугольника, то послѣдній имѣетъ не больше $2(n-1)$ сторонъ *).

Со вторымъ многоугольникомъ поступимъ такъ же, какъ съ первымъ, при чемъ, за направленіе параллелей возьмемъ ось симметріи A_1C_1. Получится третій многоугольникъ $A_2T_2 \ldots S_2$. Легко

*) Точнѣе, имѣетъ $2k$ сторонъ, гдѣ $k \leqq n-1$.

видѣть, что второй многоугольникъ распадается самое большее на $2(n-2)$ частей (треугольниковъ и трапецій), такъ что третій многоугольникъ будетъ имѣть не больше $4(n-2)$ сторонъ. Онъ будетъ обладать двумя взаимно перпендикулярными осями симметріи A_2C_2 и B_2R_2. Его площадь равна площади второго многоугольника, его периметръ не больше периметра второго многоугольника.

Для дальнѣйшихъ преобразованій, разсмотримъ отдѣльно квадрантъ $O_2A_2T_2P_2B_2$ (рис. 25). Прямой A_2B_2 раздѣлимъ его на прямоугольный треугольникъ $O_2A_2B_2$ и на сегментъ $A_2T_2P_2B_2$. Не измѣняя длины отрѣзка A_2B_2, передвинемъ его внутри прямого угла вмѣстѣ съ сегментомъ въ такое положеніе $A_3T_3P_3B_3$, чтобы $O_3A_3 = O_3B_3$. По третьей леммѣ равнобедренный треугольникъ $O_3A_3B_3$ больше треугольника $O_2A_2B_2$, если послѣдній самъ не былъ равнобедреннымъ. Наконецъ, проведя черезъ точки P_3 и T_3 прямыя, параллельныя прямой A_3B_3, превратимъ по описанному способу сегментъ $A_3T_3P_3B_3$ въ симметричный сегментъ $A_4W_4T_4P_4B_4$, ось симметріи котораго

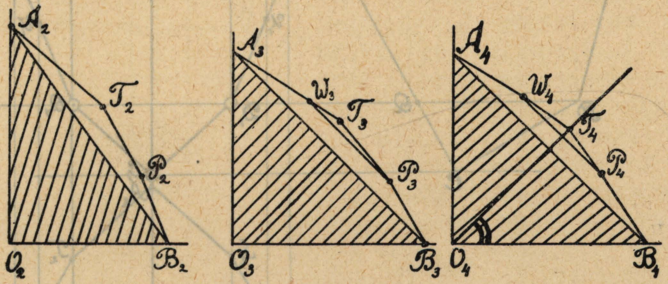

Рис. 25.

перпендикулярна къ сторонѣ A_4B_4 и проходитъ черезъ ея середину. При этомъ площадь сегмента останется прежняя, а периметръ уменьшится или останется прежній. Слѣдовательно, присоединяя новый сегментъ къ треугольнику $O_3A_3B_3$, получимъ новый квадрантъ $O_4A_4W_4T_4P_4B_4$, площадь котораго не меньше, а часть периметра, заключенная между сторонами прямого угла, не больше, чѣмъ у квадранта $O_2A_2T_2P_2B_2$. Новый квадрантъ обладаетъ осью симметріи O_4T_4, которая дѣлитъ уголъ $A_4O_4B_4$ пополамъ. Число же сторонъ, заключенныхъ внутри этого угла, которое у перваго квадранта не превосходитъ $(n-2)$, у новаго квадранта не больше $2(n-3)$.

Произведя съ каждымъ изъ квадрантовъ третьяго многоугольника $A_2T_2 \ldots S_2$ описанное преобразованіе, составимъ изъ новыхъ квадрантовъ четвертый многоугольникъ съ 4 осями симметріи и не больше, чѣмъ съ $8(n-3)$ сторонами. Площадь четвертаго многоугольника не меньше, а периметръ не больше, чѣмъ у третьяго многоугольника. Октантъ $O_4A_4W_4T_4$ новаго многоугольника раздѣлимъ на треугольникъ $O_4A_4T_4$ и на сегментъ $A_4W_4T_4$. Повторяя описанное преобразованіе, превратимъ треугольникъ $O_4A_4T_4$ въ равнобедренный, сохраняя основаніе A_4T_4 и уголъ при вершинѣ O_4, а сегментъ превратимъ въ симметричный, осью симметріи котораго служитъ биссекторъ угла $A_4O_4T_4$. Изъ преобразованныхъ октантовъ составимъ пятый многоугольникъ съ 8 осями симметріи. Продолжая поступать такимъ образомъ, получимъ рядъ многоугольниковъ, число осей симметріи у которыхъ равно соотвѣтственно:

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 2^2, \quad 2^3, \quad 2^4, \ldots,$$

а число сторонъ не превышаетъ чиселъ:

$$n, \; 2(n-1), \; 2^2(n-2), \; 2^3(n-3), \; 2^4(n-4), \; 2^5(n-5), \; \ldots,$$

при чемъ въ дѣйствительное число сторонъ множители $2, 2^2, 2^3, \ldots$, должны входить непремѣнно, въ силу существованія $1, 2, 3, \ldots$, осей симметріи, вторые же множители могутъ быть меньше написанныхъ. Понятно, что самое большее послѣ $n-1$ операціи, подобныхъ описанныхъ, второй множитель обратится въ 1, и получится многоугольникъ, имѣющій не больше 2^{n-2} осей симметріи и вдвое больше сторонъ, такъ что между каждыми двумя сосѣдними полуосями будетъ заключаться по одной сторонѣ многоугольника. Остается передвинуть эти стороны внутри угловъ между полуосями такъ, чтобы онѣ образовали равные углы съ послѣдними (рис. 26), отчего площадь многоугольника увеличится (по III леммѣ) и мы получимъ правильный многоугольникъ, имѣющій не больше 2^{n-1} сторонъ.

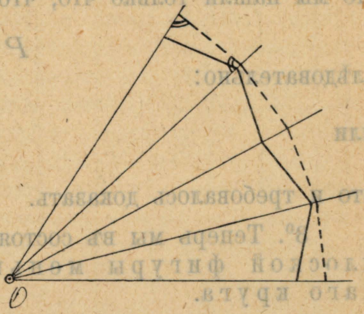

Рис. 26.

Такъ какъ площадь каждаго новаго многоугольника не меньше, а периметръ не больше, чѣмъ у предыдущаго, при чемъ въ частности у второго многоугольника периметръ навѣрно меньше, чѣмъ у перваго, то послѣдній, правильный, многоугольникъ имѣетъ не меньшую площадь, но меньшій периметръ, чѣмъ первый, неправильный, многоугольникъ. Построивъ же многоугольникъ, подобный послѣднему, правильному, но изопериметрическій съ первымъ, получимъ новый правильный многоугольникъ, имѣющій завѣдомо большую площадь, чѣмъ первый, неправильный. Этимъ доказано первое утвержденіе Эйлера.

2°. Докажемъ, что всякій правильный многоугольникъ меньше изопериметрическаго круга.

Обозначимъ черезъ P и K правильный многоугольникъ и кругъ съ периметрами, равными p; черезъ R и R' обозначимъ радіусъ вписаннаго въ P круга K' и радіусъ круга K (рис. 27). Опишемъ около K правильный многоугольникъ P', подобный P, и обозначимъ черезъ p' его периметръ. Отношеніе площадей P и K равно:

$$P:K = \tfrac{1}{2}pR : \tfrac{1}{2}pR' = R:R'.$$

Такъ какъ периметръ описанной фигуры P' больше периметра круга, то $p' > p$.

Съ другой стороны апоѳемы подобныхъ многоугольниковъ P и P' относятся, какъ ихъ периметры:

$$R : R' = p : p' < 1.$$

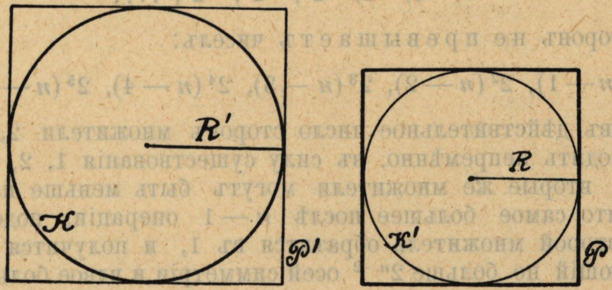

Рис. 27.

Но мы нашли только что, что

$$P : K = R : R';$$

слѣдовательно:

$$P : K < 1$$

или

$$P < K,$$

что и требовалось доказать.

3°. Теперь мы въ состоянiи доказать, что **площадь всякой плоской фигуры меньше площади изопериметрическаго круга.**

Пусть дана какая-нибудь отличная отъ круга фигура F съ периметромъ p и кругъ K съ такимъ же периметромъ. Въ началѣ статьи (стр. 183) мы познакомились со способомъ, придуманнымъ Штейнеромъ для увеличенiя площади любой фигуры, отличной отъ круга, безъ измѣненiя ея периметра. Примѣняя этотъ способъ къ фигурѣ F, построимъ выпуклую фигуру F' съ периметромъ p, но съ большей, чѣмъ у F площадью, такъ что $F' - F = d > 0$. Въ фигуру F' впишемъ многоугольникъ P со столь малыми сторонами, чтобы разность площадей $(F' - P)$ была меньше d. Для этого достаточно, чтобы всѣ точки периметра F' отстояли отъ сосѣднихъ сторонъ многоугольника P меньше чѣмъ на $\frac{d}{p}$. Дѣйствительно, если p' означаетъ периметръ многоугольника P, то сумма площадей сегментовъ, заключенныхъ между периметрами F' и P, будетъ въ такомъ случаѣ меньше $p' \cdot \frac{d}{p}$ и подавно меньше $p \cdot \frac{d}{p} = d$, ибо $p' < p$ (рис. 28).

Итакъ,

$$F' - F = d, \quad F' - P < d;$$

слѣдовательно, $F < P$: въ то же время $p > p'$.

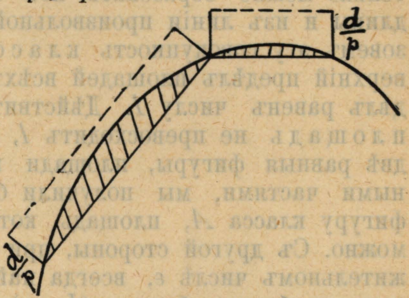

Рис. 28.

По доказанному въ 1^0, многоугольникъ P меньше нѣкотораго правильнаго многоугольника P' съ тѣмъ же периметромъ p'. А этотъ многоугольникъ P' въ свою очередь, по 2^0, меньше круга K' съ тѣмъ же периметромъ p'. Но такъ какъ $p' < p$, то $K' < K$. Итакъ,

$$F < P < P' < K' < K$$

или

$$F < K, \quad q.e.d.$$

* * *

Въ приведенномъ доказательствѣ Эдлера характерно то, что для сравненія любой фигуры съ кругомъ онъ вводитъ промежуточные элементы сравненія, а именно правильные и неправильные многоугольники. Въ противоположность этому, приводимое ниже доказательство Carathéodory совершенно не опирается на свойства многоугольниковъ и разсматриваетъ всѣ плоскія фигуры съ даннымъ периметромъ, какъ равноцѣнные элементы одной совокупности. Но въ то время какъ разсужденія Эдлера не выходятъ за предѣлы элементарно-геометрическихъ соображеній и этимъ вполнѣ соотвѣтствуютъ духу мемуаровъ Штейнера, доказательство Каратеодори пользуется нѣкоторыми понятіями и теоремами ученія о множествахъ и теоріи непрерывныхъ функцій.

Это доказательство, помѣщенное въ журналѣ „Mathematische Annalen" въ 1910 г.*), я изложу въ нѣсколько переработанномъ видѣ, представляющемъ на мой взглядъ болѣе естественный порядокъ идей.

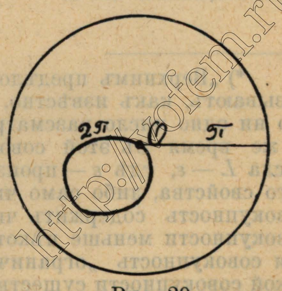

Рис. 29.

Назовемъ классомъ A совокупность всѣхъ плоскихъ фигуръ, периметръ которыхъ равенъ 2π. Каждую такую фигуру можно помѣстить цѣликомъ внутри круга съ радіусомъ равнымъ π, который описанъ, напримѣръ околой какой нибудь точки периметра взятой фигуры (рис. 29). Слѣдовательно, площади всѣхъ нашихъ фигуръ меньше площади такого круга. Отсюда заключаемъ, что существуетъ верхній

*) Въ той же тетради „Math. Ann." находится еще одно доказательство теоремы Штейнера, принадлежащее Study.

предѣлъ*) площадей всѣхъ фигуръ класса A. Обозначимъ этотъ верхній предѣлъ черезъ $2I$.

Разсмотримъ теперь совокупность всѣхъ плоскихъ фигуръ, какія только можно образовать изъ прямолинейнаго отрѣзка произвольной длины и изъ линіи произвольной формы, длина которой равна π. Назовемъ эту совокупность классомъ B. Покажемъ, что существуетъ верхній предѣлъ площадей всѣхъ фигуръ класса B и что этотъ предѣлъ равенъ числу I. Дѣйствительно, ни у одной фигуры класса B площадь не превосходитъ I, ибо въ противномъ случаѣ, сложивъ двѣ равныя фигуры, площади которыхъ больше I, ихъ прямолинейными частями, мы получили бы фигуру съ периметромъ 2π, т. е. фигуру класса A, площадь которой была бы больше $2I$, что невозможно. Съ другой стороны, при сколь угодно маломъ заданномъ положительномъ числѣ ε, всегда найдется такая фигура класса B, что ея площадь будетъ больше $(I-\varepsilon)$. Для полученія такой фигуры достаточно раздѣлить хордой пополамъ периметръ одной изъ фигуръ класса A, площадь которой больше $(2I-2\varepsilon)$. По крайней мѣрѣ у одной изъ полученныхъ двухъ фигуръ класса B площадь будетъ больше $(I-\varepsilon)$.

Если мы докажемъ, что существуетъ фигура класса B, площадь которой равна I, то изъ двухъ такихъ фигуръ можно будетъ составить одну фигуру класса A съ площадью $2I$, которая будетъ поэтому, максимальной фигурой класса A.

Въ поискахъ за наибольшей фигурой класса B мы можемъ оставить въ сторонѣ всѣ вогнутыя фигуры, ибо мы умѣемъ превращать такія фигуры въ выпуклыя, имѣющія большую площадь и принадлежащія къ тому же классу B.

Мы видѣли, что I есть верхній предѣлъ площадей фигуръ класса B. Мы можемъ, слѣдовательно, выбрать среди нихъ безконечный**) рядъ выпуклыхъ фигуръ:

$$C_1, \quad C_2, \; \ldots, \; C_n, \; \ldots,$$

съ возрастающими площадями I_1, I_2, ...:

$$I_1 < I_2 < \ldots < I_n < \ldots,$$

стремящимися къ I:

$$\text{пред.}_{n=\infty} \; I_n = I.$$

---

*) „Верхнимъ предѣломъ“ какой нибудь совокупности чиселъ $a, b, c, \ldots$ называютъ, какъ извѣстно, постоянное число L, обладающее тѣмъ свойствомъ, что ни одно число разсматриваемой совокупности не превосходитъ L и въ то же время въ этой совокупности имѣются такія числа, которыя больше числа $L-\varepsilon$, гдѣ ε — произвольно малое положительное число. Въ силу второго свойства, либо само число L принадлежитъ ко взятой совокупности, либо совокупность содержитъ числа, сколь угодно близкія къ L. Если всѣ числа совокупности меньше нѣкотораго постояннаго числа A, то говорятъ, что такая совокупность „ограничена сверху“. По извѣстной теоремѣ, для всякой такой совокупности существуетъ верхній предѣлъ L, который можетъ быть $\leqq A$.

**) Если бы невозможно было построить такой безконечный рядъ, то это значило бы, что существуетъ фигура класса B съ площадью I, превосходящая (на конечную величину) всѣ остальныя фигуры того же класса.

Расположимъ фигуры C_1, C_2, ..., такимъ образомъ, чтобы ихъ прямолинейныя части лежали на одной прямой LL' и совпадали однимъ изъ своихъ концовъ A; тогда другіе концы B_1, B_2, ..., образуютъ рядъ точекъ на этой же прямой (рис. 30), лежащихъ въ конечномъ разстояніи отъ A, меньшемъ π, такъ что существуетъ хоть одна точка сгущенія для этихъ точекъ B_i *).

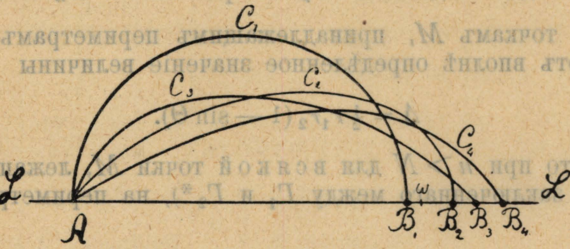

Рис. 30.

Обозначая черезъ ω одну изъ этихъ точекъ сгущенія, выдѣлимъ изъ совокупности точекъ B_i рядъ точекъ B_1', B_2', B_3', ..., имѣющихъ ω своей точкой сгущенія. Фигуры, которымъ принадлежатъ эти точки, назовемъ C_1', C_2', ..., C_n', ...; ихъ площади обозначимъ черезъ I_1', I_2', ... I_n', ... Обозначимъ черезъ l длину отрѣзка $A\omega$.

Извѣстный намъ пріемъ Штейнера позволяетъ увеличить площадь всякой фигуры C_i, не измѣняя длины ея криволинейной части. Найдемъ величину этого увеличенія.

Взявъ на дугѣ AB (рис. 31) какую нибудь точку M, гдѣ уголъ $\Theta = \angle AMB \mp \frac{\pi}{2}$, сдвинемъ (или раздвинемъ) стороны этого угла AM и BM такъ, чтобы онѣ образовали прямой уголъ $A_1M_1B_1$. Соединивъ A_1 и B_1 прямой и прибавивъ къ сторонамъ A_1M_1 и M_1B_1 заштрихованные сегменты прежней фигуры, получимъ новую фигуру класса B; разность площадей обѣихъ фигуръ равна:

$$\Delta = \tfrac{1}{2} r_1 r_2 - \tfrac{1}{2} r_1 r_2 \sin\Theta$$
$$= \tfrac{1}{2} r_1 r_2 (1 - \sin\Theta) > 0,$$

гдѣ $r_1 = AM$, $r_2 = BM$.

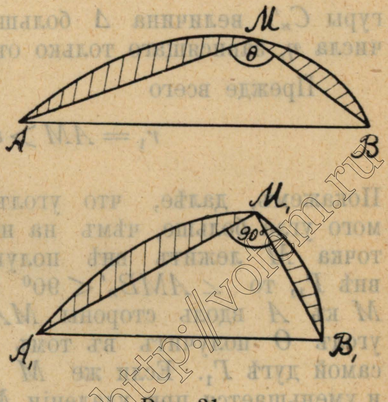

Рис. 31.

*) „Точкой сгущенія“ по отношенію къ точкамъ нѣкоторой совокупности называютъ, какъ извѣстно, такую точку P, что внутри сколь угодно малой окружности, съ центромъ въ P, имѣются точки разсматриваемой совокупности.

Докажемъ, что верхній предѣлъ I равенъ площади полукруга Q съ діаметромъ $A\omega = l$.

Построимъ двѣ полуокружности Γ_1 и Γ_2 на діаметрахъ SS' и TT', равныхъ $l + 2\varepsilon$ и $l - 2\varepsilon$, съ общимъ центромъ въ срединѣ отрѣзка $A\omega$; здѣсь ε означаетъ произвольно малое положительное число (рис. 32). Такъ какъ ω есть точка сгущенія точекъ B_i' то существуетъ такое число N, что для индексовъ $n > N$ разстояніе $B_n'\omega$ меньше $\frac{\varepsilon}{2}\cdot$ Различнымъ точкамъ M, принадлежащимъ периметрамъ фигуръ C_i', соотвѣтствуютъ вполнѣ опредѣленное значеніе величины

$$\Delta = \tfrac{1}{2} r_1 r_2 (1 - \sin\Theta).$$

Покажемъ, что при $n > N$ для всякой точки M, лежащей внѣ полукольца K, заключеннаго между Γ_1 и Γ_2 *), на периметрѣ любой фи-

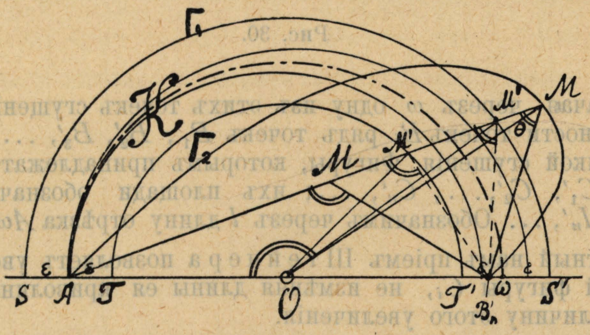

Рис. 32.

гуры C_n', величина Δ больше опредѣленнаго положительнаго числа η, зависящаго только отъ взятаго числа ε.

Прежде всего

$$r_1 = AM > \varepsilon, \quad r_2 = MB_n' > \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Покажемъ, далѣе, что уголъ $\Theta = \angle AMB_n'$ отличается отъ прямого угла больше, чѣмъ на нѣкоторое положительное число α, если точка M лежитъ внѣ полукольца K. Если точка M находится внѣ Γ_1, то $\angle AMB_n' < 90^0$ и увеличивается по мѣрѣ приближенія M къ A вдоль стороны MA. Слѣдовательно, наибольшія значенія уголъ Θ получитъ въ томъ случаѣ, если точка M находится на самой дугѣ Γ_1. Если же M лежитъ внутри Γ_2, то $\angle AMB_n' > 90^0$ и уменьшается при удаленіи M отъ A вдоль AM, такъ что въ этомъ случаѣ наименьшія значенія уголъ Θ получаетъ для точекъ M на самой дугѣ Γ_2. Итакъ, чтобы найти нижній предѣлъ значеній разности

*) Т. е. лежащей внѣ полукруга Γ_1 или внутри полукруга Γ_2.

$\left|\frac{\pi}{2}-\Theta\right|$ для точекъ M, лежащихъ внѣ полукольца K, достаточно разсматривать значенія этой разности для точекъ M', лежащихъ на дугахъ Γ_1 и Γ_2. Для каждой изъ этихъ дугъ величина изслѣдуемой разности представляетъ непрерывную функцію двухъ параметровъ: разстоянія $\overline{\omega B_n'}$ (съ его знакомъ) и величины угла AOM' гдѣ O — средина отрѣзка $\overline{A\omega}$. Если измѣнять оба эти параметра въ конечныхъ предѣлахъ включая ихъ концы, а именно первый отъ $-\frac{\varepsilon}{2}$ до $+\frac{\varepsilon}{2}$ и второй отъ O до π, то по извѣстной теоремѣ обѣ функціи должны дѣйствительно достигать своего нижняго предѣла. Если бы онъ былъ равенъ нулю, напримѣръ, для дуги Γ_1, то для нѣкоторой точки B_0', отстоящей отъ ω не больше чѣмъ на $\frac{\varepsilon}{2}$, и для нѣкоторой точки M' на Γ_1 разность $\frac{\pi}{2}-\Theta$ равнялась бы нулю. Но это невозможно, ибо $\Theta=\frac{\pi}{2}$ только для точекъ M, лежащихъ на полукругѣ, построенномъ на діаметрѣ AB_0' а такой полукругъ не имѣетъ общихъ точекъ ни съ Γ_1, ни съ Γ_2. Итакъ, нижніе предѣлы больше нуля для Γ_1 и для Γ_2. Назовемъ меньшій изъ нихъ черезъ α. Слѣдовательно, для всѣхъ точекъ M внѣ полукольца K и для всѣхъ точекъ B_n', гдѣ $n>N$, всегда

$$\left|\Theta-\frac{\pi}{2}\right|>\alpha>0.$$

Поэтому

$$\sin\Theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\Theta\right)<\cos\alpha,$$

такъ что

$$\Delta=\tfrac{1}{2}r_1r_2(1-\sin\Theta)>\tfrac{1}{2}\cdot\varepsilon\cdot\frac{\varepsilon}{2}(1-\cos\alpha)$$

или

$$\Delta>\eta>0,$$

гдѣ

$$\eta=\tfrac{1}{4}\varepsilon^2(1-\cos\alpha),$$

чѣмъ доказано высказанное выше утвержденіе.

Такъ какъ фигуры C_i' взяты изъ ряда фигуръ C_i, площади которыхъ I_i стремятся къ предѣлу I, то и площади I_i' фигуръ C_i' стремятся къ тому же предѣлу. Слѣдовательно, существуетъ такое число N', что при $n>N'$ будетъ всегда

$$I-I_n'<\eta.$$

Если въ то же время $n>N$ (см. выше), то фигура C_n' должна лежать цѣликомъ внутри полукольца K. Дѣйствительно, если бы она имѣла хоть одну точку внѣ этого полукольца, то, какъ мы только что видѣли, ея площадь I_n' можно было бы увеличить на $\Delta > \eta$. Но тогда ея площадь стала бы больше $I_n' + \eta$ и, слѣдовательно, подавно больше I (въ виду послѣдняго неравенства), что невозможно, ибо I есть верхній предѣлъ для площадей фигуръ класса B, къ которому принадлежала бы и эта новая фигура.

Слѣдовательно, при $n > N$ и $\underline{n > N'}$ разность площадей фигуры C_n' и полукруга Q съ діаметромъ $\overline{A\omega}$ меньше площади полукольца K; послѣдняя же площадь стремится къ нулю вмѣстѣ съ числомъ ε. Отсюда заключаемъ, что площади I_n' стремятся, при возрастаніи n до безконечности, къ площади полукруга Q, какъ къ предѣлу. Въ то же время

$$\text{пред.}_{n=\infty}\, I_n' = \text{пред.}_{n=\infty}\, I_n = I.$$

Итакъ, I равно площади полукруга Q.

Съ другой стороны, длины криволинейныхъ частей фигуръ C_n', равныя π, заключаются между длинами полуокружностей Γ_1 и Γ_2 ибо объемлющая кривая длиннѣе выпуклой объемлемой кривой, такъ что

$$\pi \cdot \frac{l + 2\varepsilon}{2} > \pi > \pi \cdot \frac{l - 2\varepsilon}{2}$$

или

$$l + 2\varepsilon > 2 > l - 2\varepsilon,$$

откуда

$$2 + 2\varepsilon > l > 2 - 2\varepsilon.$$

Слѣдовательно, l, какъ величина постоянная, равно 2*), а длина криволинейной части полукруга Q съ діаметромъ $l = 2$ равна π.

Итакъ, мы доказали, что верхняя граница I всѣхъ фигуръ класса B равна полощади полукруга Q и что дуга этого полукруга равна π, такъ что онъ самъ принадлежитъ къ тому же классу B. Этимъ доказано, что полукругъ Q есть наибольшая изъ фигуръ класса B.

Такъ какъ площадь полукруга Q равна I, то площадь полнаго круга съ тѣмъ же діаметромъ $l = 2$ равна $2I$, а его периметръ равенъ 2π. Слѣдовательно, такой кругъ не меньше всѣхъ фигуръ класса A и самъ принадлежитъ къ этому классу; другими словами, онъ есть одна изъ наибольшихъ фигуръ этого класса, состоящаго изъ всѣхъ фигуръ съ периметромъ 2π. Съ другой стороны, мы умѣемъ увеличивать площадь всякой фигуры, отличной отъ круга, сохраняя длину ея периметра. Слѣдовательно, кругъ съ периметромъ 2π представляетъ единственную максимальную фигуру перваго класса.

---

*) Отсюда слѣдуетъ, что точка ω, находящаяся на разстояніи $l = 2$ отъ точки A, есть единственная точка сгущенія точекъ B_n.

Фотохимія будущаго.

Дж. Чіамичіана.

(Переводъ съ итальянскаго).

Современная цивилизація есть дочь ископаемаго каменнаго угля, который даетъ цивилизованному человѣчеству солнечную энергію въ ея наиболѣе сгущенномъ видѣ; этимъ запасомъ, накопившемся въ теченіе длиннаго ряда вѣковъ, современный человѣкъ пользовался до сихъ поръ и теперь продолжаетъ пользоваться для завоеванія міра, проявляя при этомъ все возрастающую жадность и безумную расточительность. Подобно миѳическому золоту Рейна, каменный уголь служитъ теперь главнымъ источникомъ силы и богатства.

Залежи его въ землѣ огромны: но онѣ никоимъ образомъ не неистощимы. Вопросъ о будущемъ начинаетъ уже интересовать насъ; доказательствомъ этого служитъ то, что въ прошломъ году о немъ почти одновременно говорили сэръ Вильямъ Рамсей (sir William Ramsay) въ „Британской Ассоціаціи для прогресса науки" (British Association for the advancement of Science) въ Портсмутѣ и профессоръ Карлъ Энглеръ (Carl Engler) въ „Собраніи нѣмецкихъ естествоиспытателей и врачей" (Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte) въ Карлсруэ. По вычисленіямъ послѣдняго Европа владѣетъ наслѣдіемъ приблизительно въ 700 милліардовъ тоннъ *) каменнаго угля и около того же имѣетъ Америка; къ этимъ залежамъ нужно присоединить еще находящіяся въ неизвѣданныхъ частяхъ Азіи. Запасъ этотъ громаденъ, но по мѣрѣ роста потребленія эксплоатація становится все дороже, такъ какъ приходится спускаться за нимъ на все большую глубину, и потому было бы ошибкой пренебрежительно отнестись къ вопросу, не станутъ ли залежи въ нѣкоторыхъ странахъ практически непригодными къ разработкѣ еще задолго до ихъ фактическаго истощенія.

Но спрашивается: является ли ископаемая солнечная энергія единственнымъ источникомъ, который можетъ питать нашу жизнь и всю современную цивилизацію? „Вотъ въ чемъ вопросъ!"

Довольно точное изслѣдованіе этой проблемы съ точки зрѣнія интересовъ Англіи было произведено сэромъ Вильямомъ Рамсеемъ. Онъ подвергъ учету самые разнообразные источники энергіи, какъ, напримѣръ, приливы и отливы, внутреннюю теплоту земли, теплоту солнца, водопады, ростъ лѣсовъ и торфяниковъ и, наконецъ, даже распаденіе атомовъ, и пришелъ къ заключенію, что ни одинъ изъ нихъ не имѣетъ практическаго значенія для Англіи при ея существующихъ орографическихъ и климатическихъ условіяхъ.

Несомнѣнно, что приручить и покорить себѣ внутреннія силы земли, которыя, проявляясь въ вулканической дѣятельности и землетрясеніяхъ, могутъ производить такія ужасныя разрушенія, было бы не-

*) Тонна — около 60 пудовъ.

посильной задачей для человѣка. То же самое относится и къ энергіи, проистекающей изъ вращенія земли (приливы и отливы), такъ какъ тутъ пришлось бы обуздать громадныя количества воды. Превращеніе атомовъ было разсмотрѣно недавно Ф. Содди (F. Soddy), и выяснено значеніе его, какъ важнаго эзоэнергетическаго процесса: если человѣку суждено когда нибудь осуществить подобную мечту, т. е. научиться утилизировать внутреннюю энергію атомовъ, то его могущество далеко превзойдетъ тѣ предѣлы, которые поставлены ему теперь. А эти послѣдніе ограничены въ настоящее время солнечной энергіей: посмотримъ же, можетъ ли получаемая нами непосредственно солнечная энергія вообще замѣнить энергію, заключенную въ ископаемыхъ минералахъ? Принимая постоянную солнечнаго излученія равной приблизительно 3 малымъ калоріямъ въ 1 минуту на 1 *кв. см.* или, что все равно, 30 большимъ калоріямъ на 1 *кв. м.* въ 1 минуту или 1800 — въ 1 часъ, мы можемъ сравнить это количество тепла съ тѣмъ, которое получается при полномъ сгораніи одного *кгр.* угля и которое равно 8000 большихъ калорій. Считая для тропиковъ продолжительность солнечнаго дня въ шесть часовъ, мы получимъ для одного дня количество тепла, соотвѣтствующее тому, которое можетъ дать 1,35 *кгр.* или, въ круглыхъ числахъ, 1 *кгр.* угля. Для одного *кв. км.* это количество тепла будетъ соотвѣтствовать тому, которое получилось бы при полномъ сгораніи 1000 тоннъ угля. Для территоріи, имѣющей поверхность въ 10 000 *кв. км.*, количество солнечной энергіи, получаемой въ теченіе одного года, считая день въ шесть часовъ, соотвѣтствуетъ, слѣдовательно, тому количеству, которое дали бы 3 650 000 000 или, въ круглыхъ числахъ, 3 милліарда тоннъ угля. Количество каменнаго угля, добываемаго въ теченіе одного года (1909 г.) въ рудникахъ Европы и Америки, исчисляется въ 925 милліоновъ тоннъ; присоединяя сюда 175 милліоновъ тоннъ лигнита, получимъ 1100 милліоновъ, или немного больше одного милліарда. Такъ что, даже принимая въ разсчетъ поглощеніе въ атмосферѣ и другія неблагопріятныя условія, мы все таки видимъ, что количество солнечной энергіи, получаемое ежегодно небольшой тропической територіей — поверхность которой равна, напримѣръ, поверхности Лаціума — соотвѣтствуетъ ежегодной добычѣ каменнаго угля на всемъ земномъ шарѣ! Пустынная Сахара съ ея поверхностью въ 6 000 000 *кв. км.* получаетъ ежедневно количество энергіи, соотвѣтствующее 6 милліардамъ тоннъ угля.

Это огромное количество энергіи, получаемое землею отъ солнца, рядомъ съ которымъ кажется ничтожнымъ то, что было накоплено растеніями геологическихъ періодовъ, въ большей своей части безрезультатно разсѣивается. Утилизируется она въ водопадахъ и въ растеніяхъ. Не разъ ужъ подымался вопросъ о возможности непосредственно использовать ее термо-механическимъ способомъ при помощи зеркалъ, и какъ разъ теперь въ этомъ направленіи производятся многообѣщающіе опыты въ Египтѣ и Перу; но въ этой, правда, очень интересной сторонѣ вопроса я не считаю себя компетентнымъ, а потому и не буду говорить о ней. Энергія всѣхъ водопадовъ, находящихся на земной поверхности, согласно даннымъ, заключеннымъ въ прекрасной рѣчи профессора Энглера, соотвѣтствуетъ ежегодно 70 милліардамъ тоннъ угля. Очевидно — и этого слѣдовало ожидать — что это количество составляетъ лишь очень небольшую долю всей солнечной энергіи, падающей на землю въ теченіе года. Посмотримъ теперь, чему равно то количество солнечной энергіи, которое ежегодно фиксируется растеніями: на поверхности земныхъ материковъ, составляющей 128 милліоновъ *кв. км.*, ежегодно образуются въ растеніяхъ 32 милліарда тоннъ сухого органическаго вещества, сжиганіе котораго могло бы дать количество тепла, соотвѣтствующее 18 милліардамъ тоннъ угля. Это немного по сравненію со всѣмъ количествомъ энергіи, получаемой землей отъ солнца, но и это немногое уже въ 17 разъ превышаетъ ежегодную добычу каменнаго угля и лигнита во всемъ мірѣ.

I.

Теперь обратимся къ первой части разсматриваемой нами темы. Возможно ли или — лучше сказать — можно ли представить себѣ, что со временемъ окажется возможнымъ вообще увеличить это производство органическаго растительнаго вещества, повысить его интенсивность въ желаемыхъ мѣстахъ, повліять, наконецъ, на культуру растеній такимъ образомъ, чтобы заставить ихъ производить въ большемъ изобиліи тѣ вещества, которыя являются источниками энергіи или могутъ какимъ нибудь другимъ образомъ послужить на пользу дѣлу цивилизаціи? Я думаю, что да. Въ этомъ, конечно, еще нѣтъ претензіи замѣнить каменный уголь органическимъ веществомъ, выработаннымъ растеніями, но мы имѣемъ право подумать о томъ, не слѣдуетъ ли использовать эти послѣднія болѣе широко.

Не разъ уже утверждалось — и вполнѣ авторитетными лицами — что превращеніе угля въ хлѣбъ можетъ стать въ одинъ прекрасный день не только возможнымъ, но даже съ экономической точки зрѣнія желательнымъ. Въ такомъ случаѣ идеалъ будущаго долженъ былъ бы состоять въ томъ, чтобы при помощи искусственнаго синтеза получать изъ угля всѣ основныя вещества, необходимыя для питанія человѣка: крахмалъ, сахаръ, жиры, даже протеины и, больше того, быть можетъ и самую клѣтчатку, т. е. уничтожить земледѣліе и превратить весь міръ въ громадный паркъ безполезныхъ цвѣтовъ. Но это — величайшее заблужденіе, какое только когда либо приходило въ голову человѣку: вопросъ этотъ имѣетъ смыслъ только въ обратномъ направленіи. Мой другъ профессоръ Анджели (Angeli) вполнѣ справедливо указалъ мнѣ однажды на то обстоятельство, что, въ то время какъ наши внѣшнія условія жизни глубоко измѣнились съ прогрессомъ промышленности, и нашъ современный, такъ называемый, „комфортъ“ утилизируетъ всѣ открытія техники, природа и количество человѣческихъ пищевыхъ продуктовъ не подверглись почти никакимъ измѣненіямъ; возникла даже новая наука, являющаяся именно наукой о пищевыхъ веществахъ (броматологія), которая слѣдитъ за тѣмъ, чтобы никакой продуктъ промышленности не сталъ предметомъ злоупотребленія въ качествѣ пищевого вещества. Одно время пытались было замѣнить мясо желатиной, но скоро обнаружилось — и теперь намъ вполнѣ ясно почему — что этотъ суррогатъ не можетъ быть достаточенъ для поддержанія жизни. И никогда не будетъ имѣть смысла получать изъ сравнительно небольшихъ запасовъ угля, оставленныхъ намъ въ наслѣдіе прошлыми геологическими эпохами, то, что природа безплатно даетъ намъ въ самыхъ широкихъ размѣрахъ, какъ плодъ солнечной энергіи. Наоборотъ, полной похвалы заслуживала бы попытка заставить растенія производить въ большемъ изобиліи основныя органическія вещества, къ чему и стремится въ широкихъ размѣрахъ современное земледѣліе съ его интенсивными культурами; но что, дѣйствительно, можетъ оказаться выгоднымъ, это — воспользоваться растеніями и для того, чтобы при ихъ помощи зафиксировать солнечную энергію и превратить ее въ энергію механическую.

Чтобы привести примѣръ, относящійся къ другой области, — когда съ огромнымъ развитіемъ во всѣхъ цивилизованныхъ странахъ ежедневной прессы пришлось соотвѣтствующимъ образомъ повысить производство дешевой бумаги, сдѣланной изъ древесной массы, тотчасъ же были найдены подходящія для этого быстро растущія деревья, доставившія необходимое количество клѣтчатки. Для разсматриваемаго вопроса качество растеній до извѣстной степени безразлично: это могутъ быть деревья, кустарники или травы, растущія въ сухихъ или болотистыхъ мѣстахъ или даже въ солончакахъ, это могутъ быть и морскія растенія. Существенно лишь то, чтобы они росли быстро или, лучше сказать, чтобы они допускали катализирующее воздѣйствіе на ихъ ростъ; рѣчь идетъ, такъ сказать о томъ, чтобы осуществить желаніе Фауста:

Und Bäume, die sich täglich neu begrünen!

(„И деревья, которыя каждый день одѣваются новой листвой!“)

Что касается Мефистофеля, то онъ не считалъ этой задачи невыполнимой:

Ein solcher Auftrag schreckt mich nicht,
Mit solchen Schätzen kann ich dienen.

(„Такое требованіе не пугаетъ меня, такими сокровищами я могу служить.“).

Будемъ ли и мы послѣ столькихъ вѣковъ культуры считать ее тоже невыполнимой, конечно, въ гораздо болѣе узкихъ предѣлахъ? Я увѣренъ, что нѣтъ. Приведенный выше разсчетъ ежегоднаго образованія сухого органическаго растительнаго вещества на всей континентальной поверхности земли, который, какъ мы видѣли, даетъ 32 милліарда тоннъ, основанъ на старыхъ данныхъ Либиха (Liebig), который считалъ по 2,5 тонны на гектаръ. Это число и теперь еще можетъ быть принято, какъ среднее для ежегоднаго производства на всей землѣ. Напротивъ, при интенсивныхъ культурахъ, согласно А. Майеру (A. Mayer), можно поднять производство до 10 тоннъ на гектаръ, а въ тропическомъ климатѣ можно достигнуть даже 15 тоннъ. На квадратный километръ это составитъ 1500 тоннъ, что соотвѣтствуетъ 840 тоннамъ угля; а такъ какъ количество солнечной энергіи, получаемой однимъ квадратнымъ километромъ въ теченіе года эквивалентно приблизительно 300 000 тоннъ угля, то, слѣдовательно, часть ея, поглощенная растеніями, составитъ около $^1/_{300}$. Много еще остается сдѣлать въ этомъ направленіи, но если мы вспомнимъ, что со временъ Либиха, пользуясь только предложенными имъ методами, удалось, по крайней мѣрѣ, учетверить производство, то мы можемъ еще многаго ждать отъ будущаго, особенно, если побудительной причиной явится необходимость или хотя бы простая полезность.

Теперь мы можемъ вполнѣ хорошо представить себѣ, что, увеличивая до извѣстнаго предѣла содержаніе углекислоты*) и пользуясь катализаторами, можно значительно повысить производство органическаго растительнаго вещества, примѣняя въ болѣе широкихъ размѣрахъ подходящія минеральныя удобренія и выбирая области съ соотвѣтствующимъ климатомъ и характеромъ почвы. Жатва, высушенная на солнцѣ, должна быть цѣликомъ и наиболѣе совершеннымъ способомъ перегонки превращена въ горючій газъ, при чемъ во время этой операціи долженъ быть зафиксированъ амміакъ (напримѣръ, по способу Монда), чтобы вернуть его затѣмъ землѣ въ качествѣ азотистаго удобренія вмѣстѣ со всѣми минеральными веществами золы. Такимъ образомъ по отношенію къ минеральнымъ удобряющимъ веществамъ мы получили бы замкнутый циклическій процессъ съ небольшими, конечно, потерями, неизбѣжными во всякомъ процессѣ производства. Полученный газъ долженъ быть цѣликомъ сожженъ на мѣстѣ въ какой нибудь тепловой машинѣ, и образовавшаяся механическая энергія должна быть фиксирована для перевозки или вообще использована какимъ бы то ни было способомъ. Какимъ именно, для насъ это не имѣетъ значенія. Продуктъ сгоранія — углекислота, которой обычно даютъ разсѣяться въ воздухѣ, должна быть отведена на воздѣлываемыя поля. Такимъ образомъ, солнечная энергія, фиксированная посредствомъ раціональной культуры, могла бы дать намъ дешевую механическую энергію, и этотъ способъ оказался бы, пожалуй, лучше термо-механическихъ рефлекторовъ, такъ какъ растенія аккумулируютъ полученную ими энергію въ видѣ сохраняющагося запаса.

Но вопросъ объ утилизированіи растеній, какъ конкурента ископаемаго каменнаго угля, имѣетъ еще одну очень интересную сторону. Прежде всего слѣдуетъ вспомнить о тѣхъ отрасляхъ промышленности, въ основѣ которыхъ лежитъ воздѣлываніе растеній: хлопчатобумажная и вообще текстильная промышленность, добываніе крахмала, алкогольное броженіе, добываніе жировыхъ веществъ со всѣми ихъ производными, перегонка дерева, добываніе сахара и дубильныхъ веществъ и многія другія, менѣе важныя отрасли. Всѣ эти вѣтви промышленности доступны улучшенію не только въ обычномъ смыслѣ улучшенія послѣдующихъ процессовъ обработки собранныхъ веществъ, но также и въ смыслѣ большаго производства этихъ послѣднихъ. Вспомнимъ, напримѣръ, объ успѣхахъ, достигнутыхъ добываніемъ сахара изъ свекловицы.

Кромѣ того, растенія являются не только непревзойденными мастерами или лучше чудесными лабораторіями, которыя, принимая за исход-

*) По Крейзлеру (Kreusler), optimum заключается между 1 и 10% углекислоты.

ный продуктъ углекислоту, производятъ при помощи солнечной энергіи фотохимическій синтезъ основныхъ органическихъ веществъ, — онѣ одинаково просто и легко производятъ и такъ называемые второстепенные продукты. Эти послѣдніе, находящіеся въ растеніяхъ всегда лишь въ очень небольшомъ количествѣ, цѣнны уже въ иномъ отношеніи. Алкалоиды, глюкозиды, различныя эссенціи и камфоры, гуттаперча, красящія вещества и многія другія интересовали и интересуютъ органическую промышленность даже больше, чѣмъ основныя вещества, такъ какъ все это — продукты, имѣющіе большую рыночночную стоимость. Въ этой области завязалась горячая борьба между химической промышленностью и природой, — борьбой, которая, дѣйствительно, дѣлаетъ честь человѣческому генію и остроумію. До сихъ поръ каменноугольный деготь*) почти всегда одерживалъ побѣду. Каковы именно эти побѣды, мнѣ незачѣмъ напоминать здѣсь, но съ другой стороны нельзя удержаться отъ мысли, что онѣ могутъ стать въ концѣ концовъ побѣдами Пирра. Еще недавно одно очень авторитетное лицо въ области органической промышленности разсматривало тотъ вполнѣ возможный случай, что цѣна каменноугольнаго дегтя, а слѣдовательно, и всѣхъ первичныхъ веществъ, въ немъ заключающихся, значительно возрастетъ: ясно, что̀ вытекаетъ отсюда для пользующихся ими отраслей промышленности. Всѣ съ удивленіемъ вспоминаютъ о тѣхъ громадныхъ трудностяхъ, которыя пришлось преодолѣть при выборѣ исходнаго вещества для фабричнаго производства индиго: пришлось прибѣгнуть къ нафталину, такъ какъ толуолъ нельзя было получить въ требуемомъ количествѣ. Но задержать развитіе промышленности можетъ не только возрастаніе цѣны на первичные продукты; ту же роль можетъ сыграть и паденіе научнаго интереса къ данной области. Та мысль, что современная промышленность самымъ тѣснымъ образомъ связана съ чистой наукой, пользуется теперь самымъ широкимъ признаніемъ: прогрессъ одной необходимо опредѣляется прогрессомъ другой. Но, очевидно, не химія бензола и его производныхъ является теперь излюбленной темой химиковъ, какъ это было во второй половинѣ истекшаго столѣтія; теперь въ центрѣ научнаго интереса стоятъ вещества и проблемы, относящіяся къ біологіи. Изученіе органической химіи живыхъ организмовъ все болѣе выдвигается на первый планъ, въ этой именно области сосредоточивается современный интересъ. Это новое направленіе не преминетъ отразиться и на техникѣ и сможетъ указать новые пути для промышленности.

Кромѣ того, въ послѣднее время нѣкоторыя вѣтви органической промышленности развились, строго говоря, внѣ бензольнаго кольца каменноугольнаго дегтя. Эссенціи и благовонія, нѣкоторые алкалоиды (напримѣръ, алкалоидъ кока) являются предметомъ процвѣтающей промышленности, которая пользуется веществами, производимыми растеніями въ сравнительно большомъ количествѣ, для того чтобы превращать ихъ въ продукты большей цѣнности. Какъ всѣмъ извѣстно, на-

*) Основной продуктъ для искусственнаго синтеза многихъ изъ вышеупомянутыхъ веществъ; получается въ качествѣ побочнаго продукта при сухой перегонкѣ каменнаго угля.

примѣръ, изъ цитрала, составляющаго главную часть лимоннаго масла, приготовляется фіалковая эссенція. Въ этомъ направленіи слѣдуетъ и продолжать работу, такъ какъ въ немъ лежитъ залогъ вѣрнаго успѣха. Можно надѣяться, что скоро удастся аналогичнымъ способомъ получать и гуттаперчу.

Но вопросъ этотъ имѣетъ еще одну сторону, которая, по моему мнѣнію, заслуживаетъ самаго серьезнаго вниманія; я имѣю въ виду нѣкоторые опыты, произведенные недавно мною совмѣстно съ проф. Равенна (Ravenna) въ Болоньѣ. Не потому, чтобы я приписывалъ имъ какое нибудь практическое значеніе, но они показываютъ, какъ можно непосредственно вмѣшаться въ жизнь растенія и измѣнить въ извѣстномъ направленіи совершающіеся въ немъ химическіе процессы. Въ рядѣ опытовъ, поставленныхъ съ цѣлью опредѣлить физіологическую роль глюкозидовъ, намъ удалось вызвать появленіе ихъ въ такихъ растеніяхъ, которыя нормально ихъ не содержатъ. Такъ, напримѣръ, при помощи соотвѣтствующихъ прививокъ намъ удалось заставить маисъ производить синтезъ салицина*). Недавно, занимаясь изслѣдованіемъ роли алкалоидовъ въ растеніяхъ, мы нашли способъ вліять на образованіе никотина въ табакѣ, либо значительно увеличивая, либо уменьшая содержаніе этого алколоида табака. Это только начало; но вполнѣ возможно, что работая дальше въ томъ же направленіи и примѣняя соотвѣтствующія культуры и воздѣйствія, мы сможемъ со временемъ заставить растенія производить въ большемъ количествѣ, чѣмъ они это дѣлаютъ теперь, тѣ вещества, которыя нужны для современной жизни и которыя мы теперь при помощи сложныхъ и искусственныхъ способовъ извлекаемъ изъ скромныхъ продуктовъ обработки каменноугольнаго дегтя. Незачѣмъ опасаться, что культура пищевыхъ растеній можетъ пострадать отъ развитія культуры техническихъ растеній. Даже приблизительный разсчетъ показываетъ, что на землѣ достаточно мѣста для всѣхъ и для всего, особенно, если культуры будутъ должнымъ образомъ усовершенствованы въ смыслѣ интенсивности и разумно приспособлены къ условіямъ климата и почвы.

Въ этомъ и состоитъ задача будущаго.

II.

Промышленное производство органическихъ веществъ можетъ въ будущемъ ожидать еще многаго отъ фотохиміи въ томъ смыслѣ, который былъ разъясненъ выше, и конкуренція между нею и химіей каменноугольнаго дегтя можетъ стать еще стимуломъ новаго прогресса. Но, съ другой стороны, человѣческому уму всегда будетъ улыбаться возможность подвигаться впередъ собственными силами, и я не сомнѣваюсь, что широкое развитіе технологіи каменноугольнаго дегтя обязано, хотя бы отчасти, своимъ возникновеніемъ этому гордому духу независимости. Возникаетъ, слѣдовательно вопросъ, нѣтъ ли еще другого способа производства, который могъ бы соперничать съ фотохимическими процессами въ растеніяхъ. Отвѣтъ на это лежитъ въ будущемъ промышленной фотохиміи. По этому вопросу я и хочу еще сдѣлать

*) Находится обычно въ различныхъ видахъ ивы (Salix).

нѣсколько замѣчаній. До настоящаго времени фотохимическіе процессы не получили еще никакого практически важнаго примѣненія, если не считать фотографіи. Фотографія съ момента своего появленія вызвала къ себѣ величайшій интересъ: техника ею завладѣла и, какъ это всегда бываетъ, повела ее по пути быстраго и блестящаго прогресса. Но, несмотря на свое широкое примѣненіе, фотографическіе методы охватываютъ лишь небольшую часть всей фотохиміи. Послѣдняя до сихъ поръ вообще мало разрабатывалась, быть можетъ, потому, что химики были отвлечены другими проблемами, болѣе настоятельно требовавшими рѣшенія. Такъ что, въ то время какъ, напримѣръ, термохимія и электрохимія имѣютъ за собой уже періоды блестящаго расцвѣта, фотохимія стоитъ лишь въ началѣ своего пути. Но и въ ней замѣчается уже извѣстное пробужденіе благодаря ряду работъ, относящихся, какъ къ общимъ проблемамъ, такъ и къ отдѣльнымъ процессамъ, главнымъ образомъ, въ области органической химіи; въ этихъ изслѣдованіяхъ мой другъ докторъ Паоло Зильберъ (Paolo Silber) и я приняли живое участіе; объ этомъ же прогрессѣ свидѣтельствуютъ двѣ новыхъ работы, принадлежащихъ одна — Плотникову, другая — Бенрату (Benrath). Но многое остается еще сдѣлать, какъ въ теоретической и общей, такъ и въ спеціальной фотохиміи.

Фотохимическія реакціи подчиняются основнымъ законамъ сродства, но въ то же время отличаются и нѣкоторыми особенностями. Онѣ замѣчательны, главнымъ образомъ, своими небольшими температурными коэффиціентами, и потому ихъ можно сравнивать — что имѣетъ и извѣстное техническое значеніе — съ реакціями, происходящими при очень высокихъ температурахъ. Плотниковъ высказалъ замѣчательную мысль, что свѣтовое излученіе вызываетъ іонизацію, отличную отъ электролитической; отдѣленіе одного іона, требуетъ количества свѣта, которое опредѣляется теоріей Планка (Plank) и Эйнштейна (Einstein); такимъ образомъ этотъ вопросъ оказывается связаннымъ съ самыми новыми и утонченными изслѣдованіями въ области математической физики.

Съ нашей технической точки зрѣнія основная проблема состоитъ въ томъ, чтобы при помощи подходящихъ фотохимическихъ реакцій зафиксировать солнечную энергію. Для этого было бы достаточно сумѣть подражать процессу ассимиляціи въ растеніяхъ. Какъ всѣмъ извѣстно, эти послѣднія расщепляютъ атмосферную углекислоту и превращаютъ ее въ сахаристыя вещества (крахмалъ) съ выдѣленіемъ кислорода. Другими словами онѣ обращаютъ обыкновенный процессъ горѣнія. Давно уже казалось вѣроятнымъ, что первымъ продуктомъ ассимиляціи является муравьиный альдегидъ; недавно Курціусъ (Curtius) окончательно доказалъ его присутствіе въ листьяхъ бука. Бертло (Berthelot) удалось искусственно воспроизвести подобный процессъ при помощи ультрафіолетовыхъ лучей; не удастся ли, введя еще соотвѣтствующія улучшенія, использовать его уже теперь на тропическихъ плоскогоріяхъ? Дѣйствительное рѣшеніе вопроса заключается въ томъ, чтобы найти способъ воспользоваться тѣми излученіями, которыя въ наибольшемъ количествѣ доходятъ черезъ всю атмосферу до поверхности земли. Что эта проблема разрѣшима, это доказываютъ растенія. При помощи соотвѣтствующихъ сенсибилизаторовъ и катализаторовъ можетъ оказаться возможнымъ превратить смѣсь водяныхъ паровъ и углекислоты въ кислородъ и метанъ или произвести какой-нибудь аналогичный эндоэнергетическій процессъ. Пустынныя тропическія области, гдѣ особыя условія почвы и климата дѣлаютъ невозможной всякую обыкновенную культуру, станутъ тогда воспріимчивы къ оплодотворенію солнечной энергіей, которую онѣ получаютъ въ теченіе цѣлаго года въ количествѣ, соотвѣтствующемъ милліардамъ тоннъ угля.

Кромѣ этого процесса, который придалъ бы цѣнность безполезно теряемыхъ теперь продуктамъ горѣнія, извѣстны еще многіе другіе, которые вызываются ультрафіолетовыми лучами и которые подъ дѣйствіемъ соотвѣтствующихъ сенсибилизаторовъ могли бы стать доступными и для обыкновенныхъ лучей. Синтезы озона, сѣрнаго ангидрида, амміака, окисловъ азота и многихъ другихъ могли бы стать предметомъ фотохимической промышленности.

Можно представить себѣ также различные фотогальваническіе элементы, а также элементы, основанные на фотохимическихъ процессахъ *).

Переходя въ область органической химіи, мы находимъ, что здѣсь реакціи, вызываемыя свѣтомъ, столь многочисленны, что просто немыслимо, чтобы среди нихъ не нашлось такихъ, которыя можно было бы использовать для практическихъ цѣлей. Свѣтъ особенно благопріятствуетъ процессамъ взаимнаго окисленія и возстановленія, заключающимъ въ себѣ явленія уплотненія или связаннымъ съ ними. А такъ какъ уплотненіе очень часто происходитъ по алдольному типу, то въ этомъ направленіи можно многаго ожидать отъ будущаго, такъ какъ алдольное уплотненіе есть основная реакція органическаго синтеза. Для примѣра я приведу одну изъ болѣе простыхъ реакцій, выполненныхъ моимъ другомъ З и л ь б е р о м ъ и мною. При дѣйствіи свѣта на смѣсь ацетона и метиловаго спирта получается изобутиленовый гликолъ.

$$\begin{array}{ccccc} CH_3 & & & CH_3 & \\ | & & & | & \\ CO & + CH_3OH = & & COH & - CH_2OH \\ | & & & | & \\ CH_3 & & & CH_3 & \end{array}$$

Аналогичныя реакціи имѣются и въ ароматическомъ ряду.

Чтобы получить представленіе о разнообразіи фотохимическихъ реакцій, достаточно было бы ограничиться систематическимъ изученіемъ кетоновъ и спиртовъ. Въ обыкновенной органической химіи реакціи часто повторяются вполнѣ схематично и единообразно, между тѣмъ какъ фотохимическія реакціи, напротивъ, принимаютъ часто разнообразный характеръ. Особенно интересны случаи фотохимическаго образованія дикетоновъ, такъ какъ эти послѣдніе могутъ подвергаться са-

*) Какъ, напримѣръ, въ опытахъ Х. В и н т е р а (Ch. Winter).

мымъ разнообразнымъ превращеніямъ: изъ нихъ можно получить производныя бензола, пиррола и многихъ другихъ. Если мы не побоимся высказать довольно смѣлую мысль, то мы можемъ вспомнить объ отношеніяхъ, существующихъ между нѣкоторыми производными пиррола и хлорофилломъ, и увидѣть въ этихъ реакціяхъ возможность искусственнаго фотохимическаго синтеза этого важнаго вещества. Образованіе его въ растеніяхъ основано на фотохимическомъ процессѣ, аналогичномъ его функціонированію. Мы не знаемъ, впрочемъ, участвуетъ ли и въ какой мѣрѣ участвуетъ свѣтъ во всѣхъ синтетическихъ процессахъ въ растеніяхъ, дающихъ начало столькимъ веществамъ, встрѣчающимся въ нихъ. Дальнѣйшія изслѣдованія, должны идти одновременно въ обоихъ направленіяхъ: фитохимія (химія растеній) и фотохимія должны оказать другъ другу взаимную поддержку. Такая совмѣстная работа можетъ повести къ результатамъ, важнымъ и для промышленности будущаго. Сырые продукты, образованные растеніями, могутъ подвергнуться усовершенствованію при помощи искусственныхъ фотохимическихъ процессовъ.

Въ самое послѣднее время мы занялись изученіемъ тѣхъ превращеній, которыя претерпѣваютъ при дѣйствіи свѣта нѣкоторыя вещества, принадлежащія къ группѣ терпеновъ и камфоры, въ особенности путемъ гидролитическихъ процессовъ. Оказалось, напримѣръ, что иногда свѣтъ можетъ изъ веществъ, для насъ болѣе цѣнныхъ, производить менѣе цѣнныя. Но въ то же время въ фотохиміи одно дѣйствіе не исключаетъ другого: реакціи могутъ быть обращены, какъ это показываютъ нѣкоторые недавніе опыты съ ультрафіолетовымъ свѣтомъ, который въ извѣстныхъ случаяхъ обращаетъ реакціи, вызываемыя менѣе преломляемыми лучами. Нужно только примѣнить соотвѣтствующіе сенсибилизаторы и катализаторы. Свѣтъ, какъ возбудитель химическихъ реакцій, можетъ оказаться нашимъ врагомъ, но тѣмъ болѣе намъ нужно хорошо знать оружіе противника, если мы хотимъ подчинить его себѣ и использовать его силы для своихъ цѣлей.

Я не думаю, что техникѣ придется еще долго ожидать, пока она сможетъ извлекать пользу изъ химическихъ дѣйствій свѣта. Процессы полимеризаціи, изомерныхъ превращеній, гидролиза органическаго и неорганическаго возстановленія и окисленія, наконецъ, процессы самоокисленія, которые такъ легко вызываются свѣтомъ, должны найти выгодныя промышленныя примѣненія, если соотвѣтствующія изслѣдованія будутъ направлены надлежащимъ образомъ. Выполненное нами и получившее извѣстность превращеніе ортонитробензойнаго альдегида въ нитрозобензойную кислоту напоминаетъ не менѣе извѣстное полученіе индиго по способу Энглера (Engler) и Дорана (Dorant) и позволяетъ предвидѣть новое фотохимическое направленіе въ производствѣ искусственныхъ красящихъ веществъ. Цѣль будущихъ работъ въ этой области не должна ограничиться предохраненіемъ красящихъ веществъ отъ поблѣднѣнія и выцвѣтанія и вообще отъ измѣненій, вызываемыхъ въ нихъ свѣтомъ. Фотохимія красящихъ веществъ должна стать источникомъ новыхъ методовъ приготовленія и окраски. Вспомнимъ, напримѣръ, самоокисленіе нѣкоторыхъ бѣлыхъ красящихъ веществъ при дѣйствіи свѣта, которое давно уже примѣняется на практикѣ и которымъ пользовались еще древніе для приготовленія пурпура: механизмъ этого процесса разъясненъ теперь извѣстными изслѣдованіями Фридлендера (Friedländer), но очевидно, что въ этой области еще многое остается сдѣлать.

Фототропныя вещества, которыя при освѣщеніи принимаютъ гораздо болѣе интенсивную окраску, а въ темнотѣ возвращаются къ своему первоначальному цвѣту, могли бы найти очень эффектныя примѣненія. Въ гораздо большей мѣрѣ, чѣмъ флуоресцирующія вещества, придающія тканямъ мѣняющійся цвѣтъ, могли бы привлечь къ себѣ вниманіе моды матеріи, пропитанныя фототропными веществами. Дамскій нарядъ, приготовленный такимъ образомъ, мѣнялъ бы свой цвѣтъ сообразно съ интенсивностью освѣщенія. При переходѣ изъ тѣни на солнце на такомъ платьѣ зажигались бы новые цвѣта, и оно автоматически всегда гармонировало бы съ окружающими тонами: „послѣдній крикъ моды будущаго“.

* *
*

Солнечная энергія не распредѣляется на землѣ равномѣрно: есть въ этомъ отношеніи привиллегированныя мѣста и другія, менѣе благопріятныя по своей широтѣ и климатическимъ условіямъ. Первымъ будетъ принадлежать будущее, когда промышленность сумѣетъ использовать тѣмъ способомъ, основы котораго я пытался набросать въ этой статьѣ, энергію, изливаемую на нихъ солнцемъ. Теплыя и тропическія страны были бы такимъ образомъ завоеваны для цивилизаціи, которая вернулась бы къ мѣсту своего зарожденія: наиболѣе передовыя націи, какъ бы предчувствуя безсознательно эту необходимость, уже теперь соперничаютъ между собой въ завоеваніи этихъ озаренныхъ солнцемъ странъ.

Тамъ, гдѣ растительность обильна и фотохимическіе процессы могутъ быть поручены растеніямъ, можно будетъ, какъ я уже указывалъ, заставить солнечные лучи работать на пользу промышленности при помощи раціональныхъ культуръ растеній. Напротивъ, въ пустынныхъ мѣстахъ, гдѣ климатъ и почва исключаютъ возможность всякой культуры, тамъ пріобрѣтетъ особую цѣнность искусственная фотохимія. На безплодной почвѣ возникнутъ промышленныя колоніи безъ дыма и безъ фабричныхъ трубъ: лѣса стеклянныхъ трубъ и камеръ всевозможныхъ размѣровъ будутъ подыматься къ солнцу, и въ этихъ прозрачныхъ аппаратахъ будутъ совершаться тѣ фотохимическіе процессы, которые до сихъ поръ составляли секретъ и привиллегію растеній и которые человѣческая промышленность сумѣетъ похитить у нихъ; она сумѣетъ сдѣлать эти процессы болѣе производительными, ибо природа не спѣшитъ, человѣчество же не хочетъ ждать. И если въ отдаленномъ будущемъ настанетъ моментъ, когда ископаемый каменный уголь окончательно истощится, это еще не будетъ означать конца цивилизаціи: жизнь и цивилизація будутъ продолжаться до тѣхъ поръ, пока сіяетъ солнце! И если за „каменноугольной“ цивилизаціей нашей эпохи, покрытой копотью, нервной и изнурительно-торопливой, наступитъ другая, быть можетъ, болѣе спокойная „эпоха солнечной энергіи“, въ этомъ не будетъ ущерба для прогресса и счастья человѣчества.

Но на фотохимію не слѣдуетъ смотрѣть, какъ на дѣло лишь отдаленнаго будущаго: я думаю, что промышленность поступитъ вполнѣ разумно, если теперь уже постарается использовать всѣ тѣ виды энергіи, которые даетъ въ ея распоряженіе природа. До сихъ поръ современная цивилизація шла впередъ, пользуясь почти исключительно ископаемой солнечной энергіей; не слѣдуетъ ли постараться лучше использовать и ту энергію, которую мы теперь получаемъ непосредственно отъ солнца?

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Дельта-лучи. Какъ извѣстно, радіоактивныя вещества испускаютъ трояката рода лучи: α - лучи, обладающіе большою массою и положительнымъ зарядомъ, β - лучи, состоящіе изъ электроновъ, и наконецъ, γ - лучи, во многихъ отношеніяхъ схожіе съ лучами Рёнтгена. Нѣсколько лѣтъ тому назадъ Дж. Дж. Томсономъ было открыто, что радіоактивныя вещества испускаютъ еще четвертый видъ лучей — δ - лучи, представляющіе собою такъ же, какъ и β-лучи, потокъ электроновъ, но гораздо болѣе медленный. Лучи эти, какъ оказалось, всегда сопутствуютъ α-лучамъ, и благодаря своему отрицательному заряду часто мѣшаютъ опредѣлить зарядъ α-лучей. Природа этихъ лучей до послѣдняго времени оставалась мало изученною, и лишь недавно появилось весьма обстоятельное изслѣдованіе Н. Кэмбелла (N. Campbell) по этому вопросу. Кэмбеллъ помѣщалъ въ пустоту два параллельныхъ электрода, которымъ сообщались различные потенціалы. Въ одномъ изъ электродовъ было сдѣлано отверстіе, закрытое тонкою алюминіевою пластинкою, черезъ которую свободно проходили α-лучи, испускаемые полоніемъ, расположеннымъ по близости отъ электрода съ отверстіемъ. Если оба электрода находятся на одномъ и томъ же потенціалѣ, то все же между электродами идетъ токъ, во-первыхъ потому, что сами α лучи переносятъ съ собою нѣкоторое количество электричества, во-вторыхъ потому, что оба электрода, какъ оказывается, подъ вліяніемъ α-лучей испускаютъ δ-лучи; если электроды обладаютъ одинаковымъ потенціаломъ, то эти δ-лучи свободно доходятъ до противоположнаго электрода, но если электродамъ сообщить нѣкоторую разность потенціаловъ, то лучи, идущіе въ одномъ направленіи (по направленію электрическаго поля) достигнутъ противоположнаго электрода, лучи же, идущіе въ противоположномъ направленіи (противъ поля), не смогутъ дойти до второго электрода и будутъ задержаны. Такимъ образомъ, сила тока должна измѣниться на величину, зависящую отъ заряда и скорости δ-лучей. Пользуясь этимъ и другими методами, Кэмбеллъ установилъ, что ни количество, ни скорость δ-лучей не зависитъ отъ рода испускающаго ихъ вещества, и что они всегда распространяются равномѣрно во всѣ стороны. Эти работы въ связи съ предшествующими работами Дж. Дж. Томсона позволяютъ составить себѣ такую картину возникновенія δ-лучей. По представленіямъ Томсона, атомъ всякаго вещества состоитъ изъ нѣкотораго ядра, окруженнаго электронами, при чемъ вся эта система обладаетъ извѣстнымъ равновѣсіемъ. Когда α-частица ударяетъ атомъ, то благодаря своей большой массѣ и скорости, она разбиваетъ его, т. е. равновѣсіе внутри атома нарушается и электроны разлетаются въ разныя стороны, образуя, такимъ образомъ, δ-лучи.

А. Т.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей приватъ-доцента **Е. Л. Буницкаго.**

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 62 (6 сер.). Даны три точки. Провести черезъ одну изъ нихъ прямую такъ, чтобы разность произведеній квадратовъ разстояній ея отъ двухъ другихъ точекъ на положительныя числа p и q, равнялась квадрату даннаго отрѣзка k; числа p и q заданы по условію, какъ отношенія данныхъ отрѣзковъ.

И. Александровъ (Москва).

№ 63 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\frac{x-4\sqrt{x-1}}{x-1}+\frac{4}{x}=0.$$

В. Тюнинъ (Самара).

№ 64 (6 сер.). Доказать, что число

$$2^{n+5}\,3^{4n}+5^{3n+1}$$

при n цѣломъ и неотрицательномъ кратно 37.

Л. Закутинскій (Черкассы).

№ 65 (6 сер.). Найти предѣлъ выраженія

$$\frac{a^x-x^a}{a-x}$$

(a— данное положительное число) при неограниченномъ приближеніи x къ a.

Н. Грабовскій (Одесса).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 32 (6 сер.). *Опредѣлить λ такимъ образомъ, чтобы многочленъ*

$$x^2+y^2-1+\lambda(x^2+2axy-y^2),$$

въ которомъ a есть данное число, разлагался на два многочлена первой степени относительно x *и* y.

(Заимств. изъ „*Journal des Mathématiques élémentaires*").

Представивъ данный многочленъ въ видѣ:

$$y^2(1-\lambda)+2a\lambda xy+(1+\lambda)x^2-1, \tag{1}$$

т. е. въ видѣ трехчлена второй степени относительно y, мы можемъ разложить его на множители по общей формулѣ; тогда получимъ:

$$y^2(1-\lambda)+2a\lambda xy+(1+\lambda)x^2-1=(1-\lambda)(y-y_1)(y-y_2), \tag{2}$$

гдѣ y_1 и y_2 суть корни трехчлена (1), т. е. корни уравненія

$$y^2(1-\lambda)+2a\lambda xy+(1+\lambda)x^2-1=0. \tag{3}$$

Рѣшая это уравненіе (въ томъ предположеніи, что $1-\lambda\neq 0$), находимъ:

$$y_{1,2}=\frac{-a\lambda x\pm\sqrt{a^2\lambda^2x^2-[(1+\lambda)x^2-1](1-\lambda)}}{1-\lambda}=\frac{-a\lambda x\pm\sqrt{[a^2\lambda^2-(1-\lambda^2)]x^2+(1-\lambda}}{1-\lambda} \tag{4}$$

откуда вытекаетъ, что данный многочленъ разлагается по формулѣ (2) на два многочлена первой степени относительно x и y, если многочленъ

$$[a^2\lambda^2-(1-\lambda^2)]x^2+(1-\lambda) \tag{5}$$

есть точный квадратъ, т. е. квадратъ многочлена первой степени относительно x. Но это условіе обращенія многочлена (5) въ точный квадратъ не только достаточно для разложенія многочлена (1) на два многочлена первой степени относительно x, но и необходимо. Дѣйствительно, если указанное разложеніе возможно, то многочленъ (1) представляется тожественно въ видѣ: $(Ax+By+C)(A'x+B'y+C')$, гдѣ A, B, C, A', B', C' суть данныя числа, а потому корни многочлена (1) относительно y находятся изъ уравненій:

$$Ax+By+C=0,\quad A'x+B'y+C'=0,$$

такъ что, называя выраженіе (5) для краткости черезъ $f(x)$, мы должны имѣть [см. (4)], одно изъ тожествъ:

$$\frac{-Ax+C}{B}=\frac{-a\lambda x\pm\sqrt{f(x)}}{1-\lambda},\quad \frac{-A'x+C'}{B'}=\frac{-a\lambda x\pm\sqrt{f(x)}}{1-\lambda},$$

откуда вытекаютъ тожества:

$$f(x)=\left(\frac{a\lambda x}{1-\lambda}+\frac{Ax+C}{B}\right)^2,\quad f(x)=\left(\frac{a\lambda x}{1-\lambda}+\frac{A'x+C'}{B'}\right)^2,$$

т. е. $f(x)$ есть квадратъ двучлена первой степени относительно x. Итакъ, для разложенія многочлена (1) на два многочлена первой степени относительно x

необходимо и достаточно, чтобы многочленъ (5) былъ точнымъ квадратомъ относительно x; а это, въ виду отсутствія въ двучленѣ (5) первой степени x, тогда и только тогда, если коэффиціентъ при x^2 обращается въ нуль. Итакъ, искомыя значенія a опредѣляются уравненіемъ $a^2\lambda^2-(1-\lambda)=0$, или $(a^2+1)\lambda^2-1=0$, откуда*)

$$\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{1}{1+a^2}}. \qquad (6)$$

При каждомъ изъ этихъ значеній λ разложеніе даннаго многочлена [см. (2), (4)] имѣетъ видъ:

$$(1-\lambda)\left(y+\frac{a\lambda x}{1-\lambda}+\sqrt{1+\lambda}\right)\left(y+\frac{a\lambda x}{1-\lambda}-\sqrt{1+\lambda}\right).$$

[въ которую, конечно, надо подставить одно изъ значеній λ изъ формулъ (6)].

Задачу можно рѣшить и методомъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, приравнивая данный многочленъ тожественно произведенію

$$(Ax+By+C)(A'x+B'y+C').$$

П. Тикуновъ (Козловъ); *В. Кованько* (Струнино).

№ 36 (6 сер). *Рѣшить уравненіе*

$$x^3\sqrt{2}-x^2-2x\sqrt{18}-6=0.$$

Полагая

$$x=y\sqrt{2}, \qquad (1)$$

приводимъ данное уравненіе къ виду $4y^3-2y^2-12y-6=0$, или

$$2y^3-y^2-6y-3=0. \qquad (2)$$

Послѣднее уравненіе, послѣ разложенія лѣвой части на множители, можно записать такъ:

$$(y+1)(2y^2-3y-3)=0.$$

Слѣдовательно, уравненіе (2) распадается на уравненія

$$y+1=0,\quad 2y^2-3y-3=0,$$

рѣшая которыя находимъ $y_1=-1$, $y_2=\frac{3\pm\sqrt{33}}{4}$, откуда [см. (1)]

$$x_1=-\sqrt{2},\quad x_{2,3}=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{66}}{4}.$$

Н. Нейцъ (Самара); *Н. С.* (Одесса); *Л. Марголинъ* (Петербургъ).

---

*) Чтобы устранить необходимость разсмотрѣнія случая $\lambda=1$, достаточно начать рѣшеніе съ отысканія корней уравненія (1) относительно x, что приводитъ къ тѣмъ же значеніямъ λ.

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника", подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

А. Щукаревъ, профессоръ Императорскаго Харьковскаго Университета. *Проблемы теоріи познанія въ ихъ приложеніяхъ къ вопросамъ естествознанія и въ разработкѣ его методами.* Изданіе „Mathesis". Одесса, 1913. Стр. IV+137 Ц. 1 р,

Библіотека элементарной математики подъ общей редакціей привать-доцента С. О. Шатуновскаго. II. **Е. Фурре.** *Очеркъ исторіи элементарной геометріи.* Переводъ съ франц. А. И. Бакова Стр. 48; съ 5 рис. Ц. 30 к.—III. **Его же.** *Геометрическіе головоломки и паралогизмы.* Переводъ съ франц. К. И. Баковой. Изданіе „Mathesis". Одесса, 1912. Стр. 52; съ 82 рис. Ц. 30 к.

Эрнесто Чезаро, профессоръ Университета въ Неаполѣ. *Элементарный учебникъ алгебраическаго анализа и исчисленія безконечно малыхъ.* Съ многочисленными примѣрами для упражненія. Часть первая. Переводъ съ нѣмецкаго съ примѣчаніями и дополненіями профессора К. А. Поссе. съ (8 черт.) изданіе „Mathesis" Одесса 1913. Стр. XV + 632. Ц. 5 руб.

Новыя идеи въ физикѣ. Непе
ріодическое изданіе, выходящее подъ редакціей заслуж. профессора С.-Петербургскаго Университета И. И. Боргмана. Сборникъ № 2 „Эѳиръ и матерія". Второе дополненное изданіе Стр. 151 Ц. 80 к. Сборникъ № 4. „Дѣйствіе свѣта" Стр. 138. Ц. 80 коп. изданіе книгоизд. „Образованіе".

Новая идея въ математикѣ. Непеpіодическое изданіе, выходящее подъ редакціей заслуженнаго профессора А. В. Васильева. Сборникъ № 1. „Математика". Методъ проблемы и значеніе ея. Изданіе книгоизд. „Образованіе". Стр. IV + 149. Ц. 80 коп.

ПОПРАВКИ:

Въ № 572—573 „Вѣстника" въ статьѣ прив.-доц. В. Ф. Кагана „О преобразованіи многогранниковъ" слѣдуетъ исправить нижеслѣдующія опечатки:

Страница:	Строка:	Напечатано:	Должно быть:
224	11 и 12 сверху:	слова „на передней призмѣ" надо выбросить.	
226	10 снизу	на грани	на ребрѣ
228	1 „	$\frac{1 \pm i2\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1 \pm i2\sqrt{3}}{3}$
229	6 сверху	корень m-ой степени	корень $2m$-ой степени
230	2 „	призмы	пирамиды
„	9	призма	пирамида
„	11 снизу	равенство (3)	равенство (9)
„	7 „	призма	пирамида
„	5 „	$\triangle_3$	∇_3

Редакторъ приватъ-доцентъ В. Ф. Каганъ. **Издатель В. А. Гернетъ.**

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Обложка
ищется

Обложка
ищется