Обложка
пщется

Обложка
ищется

XLVIII Сем. № 4.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 568.

О законахъ излученія тепла.

В. Вина.

(Нобелевская рѣчь, произнесенная въ Стокгольмѣ 11 декабря 1911 г.).

Высокочтимое Собраніе!

Послѣ того благосклоннаго признанія, которымъ почтила мои работы о тепловомъ лучеиспусканіи ваша славная Академія, я съ особой радостью собираюсь говорить вамъ объ этомъ отдѣлѣ физики, который, благодаря трудности своихъ задачъ, въ послѣднее время опять привлекаетъ къ себѣ вниманіе всѣхъ физиковъ. Изслѣдователь, выходящій въ этихъ вопросахъ за надежныя границы чисто термодинамическихъ методовъ изысканія, тотчасъ же попадаетъ въ непроходимую область, усѣянную такими трудностями, что даже у самаго остроумнаго руки готовы безпомощно опуститься.

Если начать, согласно обычаю, съ своихъ собственныхъ работъ, то я долженъ сказать, что имѣлъ счастье застать не всю еще жатву собранной на широкомъ полѣ общей термодинамической теоріи лучеиспусканія. Мнѣ удалось, пользуясь уже установленными физическими законами, вывести общій законъ теоріи лучеиспусканія, который подъ именемъ закона смѣщенія (Verschiebungsgesetz) былъ признанъ моими товарищами спеціалистами. Въ примѣненіяхъ термодинамики къ лучеиспусканія пользуются и столь плодотворнымъ въ другихъ отдѣлахъ физики представленіемъ объ „идеальныхъ процессахъ“. Это — воображаемые эксперименты, выполненіе которыхъ часто невозможно по чисто техническимъ причинамъ и которые всетаки ведутъ къ надежнымъ результатамъ. Но такія разсужденія могутъ быть выполнены лишь въ томъ случаѣ, если вполнѣ извѣстенъ закономѣрный ходъ всѣхъ процессовъ, положенныхъ въ основу воображаемаго эксперимента, такъ что вліянія всякаго измѣненія могутъ быть точно и вполнѣ опредѣлены. Затѣмъ нужно идеализировать, нужно отвлечься отъ всѣхъ несущественныхъ сопроводительныхъ явленій и считаться лишь со всѣмъ тѣмъ, что неразрывно соединено съ разсматриваемыми процессами. Въ приложеніяхъ механической теоріи тепла этотъ методъ оказался чрезвычайно плодотворнымъ. Гельмгольцъ пользовался имъ въ теоріи концентраціонныхъ токовъ, Вантъ-Гоффъ — въ примѣненіи термодинамики къ теоріи растворовъ. Ему пришлось при этомъ предположить существованіе такъ называемыхъ полупроницаемыхъ перепонокъ, пропускающихъ растворитель, но не пропускающихъ растворенннаго вещества. Хотя и нельзя устроить такихъ перепонокъ, которыя вполнѣ строго удовлетворяли бы этому требованію, но при идеальныхъ процессахъ ихъ можно все таки принять, какъ возможныя, ибо законы природы не устанавливаютъ никакой границы для приближенія къ полупроницаемости. Во всякомъ случаѣ, слѣдствія, выведенныя изъ этихъ предположеній, всегда оказывались въ соотвѣтствіи съ опытомъ. Въ теоріи лучеиспусканія можно построить вполнѣ аналогичныя разсужденія, если для идеальныхъ процессовъ допустить вполнѣ отражающія тѣла. Кирхгофъ пользовался ими для доказательства своего знаменитаго закона о постоянствѣ отношенія между лучеиспускательной и лучепоглощательной способностью. Законъ этотъ сталъ однимъ изъ наиболѣе общихъ законовъ теоріи лучеиспусканія; онъ утверждаетъ, — что при излученіи существуетъ опредѣленное температурное равновѣсіе. По этому закону въ пустомъ пространствѣ, ограниченномъ со всѣхъ сторонъ тѣлами одинаковой температуры, должна существовать лучистая энергія, не зависящая отъ природы тѣлъ. Если въ стѣнкахъ этого пространства продѣлать небольшое отверстіе, черезъ которое будетъ происходить лучеиспусканіе, то мы получимъ излученіе, независящее отъ природы излучающихъ тѣлъ и обусловленное лишь температурой. Совершенно такое же лучеиспусканіе давало бы тѣло, не отражающее никакихъ лучей, которое поэтому называютъ „совершенно черным“, а излученіе это называютъ излученіемъ чернаго тѣла или короче, хотя и не совсѣмъ удачно, чернымъ излученіемъ.

Законъ Кирхгофа не ограничивается излученіями, вызванными тепловыми процессами. Повидимому, онъ вѣренъ и для большинства, если не для всѣхъ, свѣтовыхъ процессовъ. Что понятіе о температурѣ примѣнимо ко всѣмъ свѣтовымъ процессамъ, это стоитъ внѣ всякаго сомнѣнія: разъ мы можемъ получить любой родъ свѣта отъ нагрѣтыхъ тѣлъ, то мы можемъ и излученію, находящемуся въ тепловомъ равновѣсіи съ этими тѣлами, приписать температуру этихъ тѣлъ, а потому и всякое излученіе, исходящее отъ фосфоресцирующаго тѣла имѣетъ для каждаго цвѣта опредѣленную температуру. Но эта температура не имѣетъ никакого отношенія къ температурѣ тѣла, и заранѣе нельзя указать, какимъ образомъ, напримѣръ, устанавливается равновѣсіе фосфоресцирующаго тѣла съ его излученіемъ. Именно у этихъ тѣлъ, перерабатывающихъ поглощенное излученіе и лучеиспускающихъ лишь спустя продолжительное время, отношенія должны быть очень сложными.

Съ помощью идеальныхъ же процессовъ, принимая тогда только что установленное на основаніи электромагнитной теоріи свѣта свѣтовое давленіе, Больцманъ вывелъ изъ термодинамики уже раньше эмпирически установленный Стефаномъ законъ, что лучеиспусканіе чернаго тѣла пропорціонально четвертой степени абсолютной температуры.

Но этимъ еще не были исчерпаны всѣ выводы, которые можно было сдѣлать изъ термодинамики. Нужно было еще установить, какія измѣненія испытываютъ отдѣльные заключающіеся въ излученіи цвѣта при измѣненіи температуры. Вычисленіе этого измѣненія покоится опять на идеальномъ процессѣ. Для этого нужно представить себѣ возможными вполнѣ отражающія тѣла, но такія, которыя всѣ падающіе на нихъ лучи разсѣиваютъ и потому могутъ быть обозначены, какъ „совершенно бѣлыя". Представимъ себѣ, что излученіе какого нибудь чернаго тѣла падаетъ въ пространство, ограниченное такими тѣлами; въ концѣ концовъ оно распространится такъ, какъ если бы стѣнки этого пространства сами производили излученіе и имѣли ту же температуру, что и черное тѣло. Если мы удалимъ теперь черное тѣло изъ нашего бѣлаго пространства, то мы получимъ на практикѣ никогда неосуществимый случай излученія, постоянно движущагося впередъ и назадъ между бѣлыми стѣнками. Но въ воображеніи мы можемъ экспериментировать и дальше. Мы представляемъ себѣ, что объемъ нашего пространства уменьшается благодаря движенію стѣнокъ, такъ что все излученіе сжато теперь въ меньшемъ пространствѣ. Такъ какъ излученіе, падая на стѣнки, производитъ на нихъ опредѣленное давленіе, а именно свѣтовое давленіе, то для осуществленія этого уменьшенія мы должны произвести извѣстную работу совершенно такъ, какъ если бы мы сжимали какой нибудь газъ. Благодаря незначительности свѣтового давленія эта работа очень мала, но ее можно всетаки вполнѣ точно вычислить, а это только въ данномъ случаѣ и требуется. Эта работа, согласно принципу сохраненія энергіи, не можетъ исчезнуть; она превращается въ излученіе, такъ что плотность излученія еще больше увеличивается. Это измѣненіе плотности излученія, благодаря движенію бѣлыхъ стѣнокъ — не единственное измѣненіе, которому излученіе подвергается. Если лучъ свѣта отражается отъ движущагося зеркала, то измѣняется его цвѣтъ, опредѣляемый числомъ колебаній. Это измѣненіе, происходящее согласно такъ называемому принципу Допплера, играетъ большую роль въ астрофизикѣ. Спектральная линія, которую посылаетъ намъ приближающееся небесное тѣло, кажется смѣщенной въ сторону болѣе короткихъ волнъ на величину, зависящую отъ отношенія скорости тѣла къ скорости свѣта. То же самое происходитъ, если лучъ отражается отъ движущагося зеркала, только въ этомъ случаѣ измѣненіе вдвое больше. Мы можемъ, слѣдовательно, вполнѣ вычислить то измѣненіе, которое испытываетъ излученіе, благодаря движенію стѣнокъ. Существенно важное для этихъ разсужденій свѣтовое давленіе было экспериментально доказано лишь гораздо позже, а именно впервые Лебедевымъ. Арреніусъ воспользовался имъ для объясненія возникновенія кометныхъ хвостовъ. До того оно было лишь слѣдствіемъ электромагнитной теоріи Максуэлла. Мы вычислимъ теперь съ одной стороны, измѣненіе плотности излученія вслѣдствіе движенія, съ другой стороны, измѣненіе длины волнъ. Изъ этого воображаемаго опыта мы можемъ вывести важное заключеніе. Изъ второго принципа механической теоріи тепла, мы можемъ сдѣлать выводъ, что спектральный составъ излученія, который мы измѣнили посредствомъ уменьшенія пространства съ отражающими стѣнками, будетъ совершенно такой же, какъ если бы мы произвели увеличеніе плотности излученія посредствомъ повышенія температуры, ибо въ противномъ случаѣ мы могли бы посредствомъ цвѣтовыхъ фильтровъ получить въ обоихъ пространствахъ различную плотность излученія и превратить тепло въ работу безъ соотвѣтствующей компенсаціи. А такъ какъ мы можемъ вычислить измѣненіе отдѣльныхъ длинъ волнъ при сжатіи, то мы можемъ также вывести, какъ измѣняется спектральный составъ излученія чернаго тѣла съ измѣненіемъ температуры. Не входя ближе въ эти вычисленія, я приведу лишь окончательный результатъ: лучистая энергія опредѣленной длины волны измѣняется съ температурой такъ, что произведеніе температуры и длины волны остается постояннымъ.

На основаніи этого закона смѣщенія легко вычислить распредѣленіе интенсивности теплового лучеиспусканія для любой данной температуры, если она извѣстна для какой нибудь одной температуры.

Прямому наблюденію наиболѣе доступно смѣщеніе максимума интенсивности. Такъ какъ длина волнъ, соотвѣтствующая максимуму интенсивности, опредѣляетъ также и главную область наиболѣе интенсивной при данной температурѣ длины волны, то можно, измѣняя температуру, перенести главную область излученія на произвольно малыя или произвольно большія длины волнъ. Изъ другихъ выводовъ закона смѣщенія я упомяну только выводъ Г. А. Лоренца. Если въ электро-магнитныхъ уравненіяхъ Максуелла представить себѣ, что всѣ пространственныя измѣренія смѣщены во времени въ одномъ и томъ же отношеніи, то эти уравненія показываютъ, что электромагнитная энергія должна уменьшиться въ отношеніи четвертой степени смѣщенія. Такъ какъ по закону Стефана-Больцмана энергія возрастаетъ, какъ четвертая степень абсолютной температуры, то линейныя измѣренія измѣняются обратно пропорціонально четвертой степени температуры. Всякая характеристическая длина должна измѣняться въ этомъ отношеніи, откуда и вытекаетъ законъ смѣщенія.

На основаніи закона смѣщенія можно вычислить температуру солнца, если принять, что излученіе солнца можетъ быть сведено на теплоту и если извѣстно положеніе максимума энергіи солнечнаго лучеиспусканія. Положеніе его опредѣляется различными наблюдателями различно; такъ Вери (Very) даетъ 0,532 μ, Аббо (Abbot) и Фауль

(Fowle) — 0,433 μ. Для температуры солнца получается соотвѣтственно 5530° и 6790°. Но какъ ни расходятся въ данномъ случаѣ наблюдатели, несомнѣнно, что максимумъ солнечнаго лучеиспусканія лежитъ въ видимой области длинъ волнъ. Отсюда слѣдуетъ, что самое выгодное использованіе лучистой энергіи чернаго тѣла для освѣщенія будетъ имѣть мѣсто при температурѣ солнца и что въ нашихъ искусственныхъ источникахъ свѣта, въ которыхъ мы пользуемся излученіемъ тепла, мы должны стремиться къ достиженію этой температуры, до чего намъ, впрочемъ, еще очень далеко.

Я укажу еще на одно примѣненіе закона смѣщенія, а именно для вычисленія длины волнъ рентгеновскихъ лучей. Какъ извѣстно, лучи Рентгена возникаютъ при столкновеніи электроновъ съ твердымъ тѣломъ, и длина волны ихъ можетъ зависѣть только отъ скорости электроновъ. По кинетической теоріи газовъ средняя живая сила молекулы служитъ мѣрой абсолютной температуры. Если мы примемъ, какъ это дѣлаютъ въ электронной теоріи, что это примѣнимо и къ живой силѣ электроновъ, то живая сила катодныхъ лучей будетъ служить мѣрой для ихъ температуры. Если вычисленную такимъ образомъ температуру подставить въ формулу, выражающую законъ смѣщенія, то длина волны, соотвѣтствующая максимуму интенсивности, указываетъ намъ область, соотвѣтствующую длинѣ волнъ лучей Рентгена; результатъ хорошо согласуется съ длинами волнъ, вычисленными другими способами. На это можно возразить, что мы не имѣемъ права приписывать электронамъ какую бы то ни было температуру. Но законность этого примѣненія можно доказать разсужденіемъ, обратнымъ только что приведенному. Излученіе въ замкнутомъ пространствѣ необходимо должно освобождать электроны, скорость которыхъ, согласно закону Эйнштейна, пропорціональна числу колебаній. Максимумъ энергіи излученія производятъ, слѣдовательно, электроны, скорость которыхъ настолько велика, что ихъ живая сила очень близко соотвѣтствуетъ температурѣ, отвѣчающей максимуму энергіи.

Закономъ смѣщенія исчерпываются всѣ тѣ выводы, которые можно сдѣлать для теоріи излученія изъ чистой термодинамики. Всѣ они подтверждаются опытомъ. Но при этомъ находящіеся въ излученіи отдѣльные цвѣта совершенно независимы другъ отъ друга. Какъ распредѣляется при опредѣленной температурѣ интенсивность излученія по отдѣльнымъ длинамъ волнъ, этого нельзя вывести изъ термодинамики. Для этого нужны разсужденія, ближе входящія въ механизмъ процесса излученія. То же самое получается въ теоріи газовъ. Термодинамика ничего не можетъ сказать о величинѣ удѣльной теплоемкости газовъ, здѣсь приходится уже входить въ разсмотрѣніе молекулярныхъ движеній. Но основанная на теоріи вѣроятностей кинетическая теорія газовъ сдѣлала гораздо большіе успѣхи, чѣмъ соотвѣтствующая теорія излученія. Статистическая теорія газовъ поставила себѣ задачей дать отчетъ и въ законахъ термодинамики. Я не стану разбирать здѣсь, насколько удалось рѣшеніе этой задачи и можно ли считать сведеніе второго принципа къ вѣроятности вполнѣ удовлетворительной теоріей. Но во всякомъ случаѣ все это было очень плодотворно, особенно съ тѣхъ поръ, какъ удалось дать и теоретическое объясненіе уклоненій отъ термодинамическаго состоянія равновѣсія, такъ называемыхъ колебаній, напримѣръ, въ броуновскомъ движеніи. Напротивъ, ни одна изъ существующихъ теорій излученія не сдѣлала еще и попытки вывести законъ Стефана-Больцмана и законъ смѣщенія. Ихъ все еще приходится вводить въ теорію извнѣ. Но даже помимо этого намъ еще очень далеко до удовлетворительной теоріи распредѣленія лучистой энергіи въ отдѣльныхъ длинахъ волнъ.

Я самъ сдѣлалъ первую попытку въ этомъ направленіи. Я пытался обойти трудность примѣненія теоріи вѣроятностей къ теоріи излученія, представляя себѣ излученіе исходящимъ изъ газовыхъ молекулъ, движущихся по законамъ вѣроятности. Вмѣсто этого можно было бы разсматривать электроны, которые, сталкиваясь съ газовыми молекулами, производятъ излученіе. Затѣмъ существенную роль играетъ еще дальнѣйшее предположеніе, что такая частица всегда испускаетъ лишь излученіе опредѣленной длины волны въ зависимости отъ скорости и что распредѣленіе скорости частицъ слѣдуетъ закону Максуелла. Если привлечь сюда на помощь законы излученія, выведенные изъ термодинамики, то получимъ законъ излученія, который для большой области длинъ волны хорошо согласуется съ опытомъ, а именно для области, въ которой произведеніе температуры на длину волны не слишкомъ велико.

Какъ бы ни была несовершенна эта первая попытка, она все-таки привела къ формулѣ, которая только для большихъ длинъ волны значительно уклоняется отъ истинной. Но такъ какъ наблюденія несомнѣнно установили эти уклоненія, то не оставалось сомнѣнія, что формула должна быть измѣнена.

Лордъ Рэлей (Rayleigh) впервые подошелъ къ этому вопросу съ совершенно иной стороны. Онъ попытался примѣнить къ проблемѣ излученія одинъ общій законъ статистической механики, а именно законъ о равномѣрномъ распредѣленіи энергіи между степенями свободы системы, находящейся въ состояніи статистическаго равновѣсія. Смыслъ этого закона заключается въ слѣдующемъ:

Въ состояніи теплового равновѣсія всѣ движенія молекулъ происходятъ настолько неправильно, что нѣтъ ни одного движенія, которое выдѣлялось бы среди остальныхъ. Положеніе движущихся частицъ можно опредѣлить при помощи геометрическихъ элементовъ, которые не зависятъ другъ отъ друга и по направленію которыхъ совершается движеніе. Ихъ называютъ степенями свободы данной системы. По отношенію къ живой силѣ движенія никакая степень свободы не имѣетъ преимущества передъ другими, такъ что каждая изъ нихъ содержитъ одинаковую долю общей энергіи.

Излученіе, находящееся въ пустомъ пространствѣ, можно тоже представить такъ, что у него будетъ опредѣленное число степеней свободы. А именно, когда волны отражаются отъ стѣнъ туда и обратно, то устанавливаются системы стоячихъ волнъ, помѣщающіяся въ промежуточныхъ пространствахъ между двумя стѣнами. Проще всего это можно видѣть на колеблющейся струнѣ, которая можетъ совершать сколько угодно отдѣльныхъ колебаній, но половина длины волны каждаго колебанія должна быть равна длинѣ струны, дѣленной на цѣлое число.

Отдѣльныя возможныя стоячія волны представляютъ здѣсь опредѣляющіе элементы происходящихъ процессовъ и соотвѣтствуютъ степенямъ свободы. Если каждой степени свободы сообщить приходящуюся ей долю энергіи, то получимъ законъ излученія Рэлея, согласно которому лучеиспусканіе опредѣленной длины волны прямо пропорціонально абсолютной температурѣ и обратно пропорціонально четвертой степени длины волны. Законъ этотъ согласуется съ опытомъ именно тамъ, гдѣ предыдущій теряетъ силу; первоначально его и разсматривали, какъ законъ излученія съ ограниченной областью приложенія. Но если процессъ излученія происходитъ по общимъ законамъ электромагнитной теоріи или электронной теоріи, то, какъ показалъ Лоренцъ, мы необходимо должны притти къ закону Рэлея. Но все таки, если смотрѣть на него, какъ на общій законъ излученія, то онъ прямо противорѣчитъ всякому опыту, такъ какъ, согласно ему, энергія должна была бы все болѣе скопляться въ самыхъ короткихъ длинахъ волнъ. Чтобы избѣжать этого, предполагали, что мы въ дѣйствительности не имѣемъ дѣла съ излученіемъ, находящимся въ полномъ равновѣсіи, но что оно очень медленно приближается къ тому состоянію, въ которомъ вся энергія заключена лишь въ самыхъ короткихъ длинахъ волнъ; однако, это предположеніе тоже опровергается опытомъ. А именно, для видимыхъ лучей, для которыхъ при достижимыхъ въ настоящее время температурахъ формула Рэлея уже невѣрна, по закону Кирхгофа можно легко вычислить, что состояніе равновѣсія должно быть достигнуто въ самое короткое время, но это состояніе остается очень удаленнымъ отъ закона Рэлея. Мы убѣждаемся такимъ образомъ въ чрезвычайныхъ трудностяхъ, съ которыми встрѣчается точное обоснованіе формулы излученія. Ибо признаніе, что современная общая электромагнитная теорія не даетъ результатовъ, что электронная теорія недостаточна для того, чтобы дать отчетъ объ одномъ изъ самыхъ общихъ явленій, объ испусканіи свѣта, — это признаніе носитъ чисто отрицательный характеръ. Мы знаемъ только, какіе пути не ведутъ къ цѣли, но у насъ нѣтъ указаній, какъ найти правильный путь. Во всякомъ случаѣ мы знаемъ достовѣрно, что всѣ модели, дѣйствіе которыхъ покоится на чисто электромагнитномъ основаніи, не могутъ привести къ правильнымъ результатамъ.

Планку принадлежитъ заслуга введенія въ теорію новыхъ гипотезъ, которыя даютъ намъ возможность обойтись безъ закона Рэлея. Для длинныхъ волнъ онъ, несомнѣнно, правиленъ, и правильная формула излученія должна, во всякомъ случаѣ, имѣть такую форму, что для длинныхъ волнъ она переходитъ въ формулу Рэлея, для короткихъ — въ предложенный мною законъ. Планкъ поэтому удерживаетъ въ качествѣ исходнаго пункта распредѣленіе энергіи по степенямъ свободы системы. Но онъ подчиняетъ это распредѣленіе энергіи одному ограниченію, вводя знаменитую гипотезу элементовъ энергіи.

По этой гипотезѣ энергія не обладаетъ неограниченной дѣлимостью, но можетъ распредѣляться лишь въ нѣкоторыхъ, далѣе недѣлимыхъ количествахъ. Эту гипотезу можно было бы принять безъ затрудненій, если бы здѣсь рѣчь шла о неизмѣнныхъ частяхъ, какъ бы атомахъ энергіи; для матеріи и электричества это предположеніе оказалось даже неизбѣжнымъ. Но элементы энергіи Планка — это не атомы энергіи; по закону смѣщенія они должны быть обратно пропорціональны длинѣ волны опредѣленнаго колебанія. Здѣсь заключается большая трудность для пониманія этихъ элементовъ энергіи. Но если мы примемъ эту гипотезу, то мы придемъ къ совершенно другому распредѣленію энергіи по излучающимъ центрамъ, чѣмъ по законамъ теоріи вѣроятностей. Однако, этимъ путемъ мы всетаки не доходимъ еще до закона излученія. Мы знаемъ только, сколько энергіи въ среднемъ заключаютъ въ себѣ излучающія молекулы при опредѣленной температурѣ, но мы не знаемъ еще, сколько онѣ испускаютъ. Чтобы вычислить излученіе данной энергіи, намъ нужна опредѣленная модель, испускающая излученіе. Но ее мы можемъ построить только на основѣ извѣстныхъ электромагнитныхъ законовъ. Здѣсь уже начинаются трудности теоріи. Съ одной стороны, мы отказываемся отъ электромагнитныхъ законовъ, вводя элементы энергіи, съ другой — мы пользуемся этими самыми законами, для того чтобы найти отношеніе между излученіемъ и энергіей. Во всякомъ случаѣ, можно сказать, что электромагнитные законы вѣрны только для среднихъ значеній, взятыхъ за продолжительные промежутки времени, между тѣмъ какъ элементы энергіи относятся къ элементарному процессу излученія. Осцилляторъ, излучающій по электромагнитнымъ законамъ, дѣйствительно имѣлъ бы мало сходства съ настоящими атомами. Но Планкъ справедливо утверждаетъ, что въ данномъ случаѣ это не имѣетъ значенія, и именно потому, что излученіе, находящееся въ состояніи равновѣсія, не зависитъ отъ природы излучающихъ тѣлъ. Но отъ модели, которая должна замѣнять дѣйствительные атомы, мы должны требовать, чтобы она обладала всѣми свойствами, существенными для разсматриваемаго процесса. Всякое тѣло, испускающее тепловые лучи, обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что оно можетъ превращать лучи одной длины волны въ лучи другой длины волны. На этомъ именно и покоится возможность того, что въ излученіи всегда устанавливается опредѣленный спектральный составъ. Осцилляторъ Планка не обладаетъ этой способностью, а потому должно возникнуть сомнѣніе, можно ли имъ пользоваться, для того чтобы установить отношеніе между энергіей и лучеиспусканіемъ. Можно избѣжать этой трудности и вообще обойтись безъ осциллятора, если по Деби (Debye) разложить заключенное въ поломъ кубѣ излученіе на элементы энергіи Планка и согласно законамъ теоріи вѣроятностей распредѣлить эти элементы энергіи по числамъ колебаній образующихся въ кубѣ стоячихъ волнъ. Логариѳмъ этой вѣроятности будетъ пропорціоналенъ энтропіи, и мы получимъ законъ излученія, если найдемъ максимумъ этой энтропіи. Этотъ результатъ доказываетъ чрезвычайную общность разсужденій Планка.

Но есть еше другія трудности. Съ уменьшеніемъ длины волны элементы энергіи становятся все больше, и осцилляторъ, на который падаетъ излученіе, потребуетъ при небольшой интенсивности очень много времени, для того чтобы поглотить полный элементъ энергіи. Что произойдетъ, если излученіе прекратится, прежде чѣмъ весь элементъ энергіи будетъ поглощенъ? Трудности, связанныя съ отвѣтомъ на этотъ вопросъ, заставили недавно Планка существенно переработать свою первоначальную теорію. Поглощеніе должно происходить непрерывно по электромагнитнымъ законамъ, а потому и энергія осциллятора должна имѣть значенія, которыя могутъ измѣняться непрерывно. Такимъ образомъ можно, дѣйствительно, избѣжать трудности, связанной съ продолжительностью времени поглощенія. Съ другой стороны, отъ тѣсной связи между испусканіемъ и поглощеніемъ можно для элементарнаго процесса отказаться, и тогда она будетъ имѣть лишь статистическое значеніе. Всякій атомъ, испускающій только цѣлые элементы энергіи и поглощающій непрерывно, при испусканіи освобождаетъ сразу энергію изъ своего запаса и лишь немного пополняетъ его, если излученіе падаетъ на него короткое время. Приходится прибѣгнуть къ особой гипотезѣ, что для большого числа атомовъ въ цѣломъ при стаціонарномъ состояніи поглощенная энергія всетаки равна излученной. Между тѣмъ какъ въ первоначальной формѣ теоріи Планка для вывода законовъ излученія было достаточно гипотезы элементовъ энергіи, въ новыхъ теоріяхъ остаются неопредѣленности, для устраненія которыхъ нужны еще новыя гипотезы. Но, съ другой стороны, новая основная гипотеза даетъ возможность еще дальнѣйшихъ примѣненій, напримѣръ, къ испусканію электроновъ.

Изъ того немногаго, что я могъ здѣсь изложить, очевидно, какъ велики еще трудности въ теоріи излученія. Но указаніе на эти трудности, являющееся долгомъ научнаго наблюдателя, не должно мѣшать намъ признать тѣ важныя положительныя заслуги, которыя уже обнаружились въ теоріи Планка.

Прежде всего, она дала законъ излученія, который подтверждается всѣми наблюденіями и заключаетъ въ себѣ формулу Рэлея и мою, какъ предѣльные случаи. Но, кромѣ того, она бросила неожиданный свѣтъ въ совершенно другую область, а именно въ ученіе о теплоемкостяхъ.

Давно уже было извѣстно, что удѣльныя теплоты не слѣдуютъ точно закону Дюлонга и Пти и уменьшаются при низкихъ температурахъ. Алмазъ уже при обыкновенной температурѣ не слѣдуетъ закону Дюлонга и Пти. Законъ этотъ можетъ быть выведенъ изъ положенія о распредѣленіи кинетической энергіи по степенямъ свободы и состоитъ въ томъ, что въ твердыхъ тѣлахъ каждый атомъ, соотвѣтственно своимъ тремъ степенямъ свободы, содержитъ утроенное количество энергіи одной степени свободы, а благодаря потенціальной энергіи—въ общемъ ушестеренное количество. Но, если примѣнить по Планку распредѣленіе энергіи по ея элементамъ, то мы получимъ для удѣльныхъ теплотъ формулу Эйнштейна, которая дѣйствительно даетъ уменьшеніе теплоемкости съ температурой. Этотъ результатъ очень характеренъ для теоріи Планка. Эта теорія удѣльныхъ теплотъ выведена не изъ формулы излученія, а изъ формулы для средней энергіи осциллятора, которая основана непосредственно на гипотезѣ элементовъ энергіи. Къ сожалѣнію, и здѣсь уже обнаруживаются затрудненія. Точныя измѣренія удѣльныхъ теплотъ при низкихъ температурахъ, произведенныя въ лабораторіи Нернста, показали, что формула Эйнштейна не согласуется съ опытомъ. Формула, согласующаяся съ результатами опытовъ, содержитъ, кромѣ цѣлыхъ элементовъ энергіи, еще половины, для которыхъ еще нѣтъ удовлетворительнаго объясненія. Но несмотря на это, остается внѣ всякаго сомнѣнія, что первый шагъ къ теоріи теплоемкостей былъ сдѣланъ благодаря теоріи излученія Планка.

Что эта теорія во многихъ отношеніяхъ еще несовершенна иноситъ лишь провизорный характеръ, лежитъ въ самой природѣ вопроса, быть можетъ, самаго труднаго, какой когда-либо былъ поставленъ въ теоретической физикѣ. Вѣдь здѣсь приходится покинуть до сихъ поръ исключительно примѣнявшіеся, подтвержденные прямымъ наблюденіемъ законы теоретической физики и пуститься въ такія области, которыя прямому наблюденію уже недоступны.

Трудности, съ которыми приходится бороться теоріи излученія, выступаютъ еще, если подойти къ ней съ совершенно иной точки зрѣнія. Эйнштейнъ изслѣдовалъ тѣ колебанія, которыя непрерывно должно испытывать излученіе въ состояніи равновѣсія, благодаря неравномѣрности тепловыхъ процессовъ. Если мы представимъ себѣ въ пространствѣ, заполненномъ излученіемъ, небольшую пластинку, то излученіе будетъ производить на нее давленіе, которое въ среднемъ будетъ одинаково по обѣ стороны пластинки. Но такъ какъ въ излученіи должны быть неправильности, то давленіе будетъ постоянно увеличиваться то съ одной, то съ другой стороны, такъ что пластинка будетъ производить небольшія неправильныя движенія, подобныя броуновскому движенію пылинки, повѣшенной въ жидкости. Эти колебанія можно вывести изъ теоріи вѣроятностей. По теоремѣ Больцмана между энтропіей и вѣроятностью существуетъ очень простая зависимость. Но изъ закона излученія извѣстна энтропія излученія, а слѣдовательно, извѣстна и вѣроятность состоянія. Изъ послѣдней уже можно вычислить колебанія. Замѣчательно, что математическое выраженіе для этихъ колебаній состоитъ изъ двухъ членовъ. Первый изъ нихъ вполнѣ понятенъ. Онъ обусловленъ неправильностями, появляющимися благодаря интерференціи многочисленныхъ, независимыхъ другъ отъ друга пучковъ лучей, сходящихся въ одной точкѣ. Этотъ членъ при большой плотности энергіи излученія получаетъ преобладающее значеніе и соотвѣтствуетъ той области излученія, которая подчиняется закону Рэлея.

Другой же членъ, котораго нельзя прямо объяснить при помощи колебательной теоріи, преобладаетъ при небольшой плотности энергіи излученія, т. е. тамъ, гдѣ излученіе слѣдуетъ закону, установленному мною. Его можно было бы понять, предположивши, что излученіе состоитъ изъ элементовъ энергіи Планка, локализированныхъ и въ пустомъ пространствѣ. Но это представленіе не поддается дальнѣйшему развитію. Нельзя отбросить волнообразную теорію свѣта, одну изъ самыхъ прочныхъ теорій всей физики. Но, кромѣ того, этотъ членъ, для объясненія котораго привлекаются локализированные элементы энергіи, въ формулѣ не одинъ, и, во всякомъ случаѣ, заранѣе исключается возможность ввести въ оптику дуалистическое воззрѣніе, признать, напримѣръ, одновременно, волнообразную теорію Гюйгенса и теорію истеченія Ньютона. Поэтому остается только либо отказаться отъ предложеннаго Больцманомъ примѣненія теоріи вѣроятностей къ колебаніямъ этого рода, либо принять, что при процессѣ отраженія въ излученіе привходитъ новая неправильность.

При наличности такихъ трудностей вполнѣ естественно, что мнѣнія о томъ, какой путь слѣдуетъ избрать, расходятся, одни полагаютъ, что должны быть измѣнены основы электродинамики. Но существующая теорія охватываетъ такую широкую область фактовъ, она даетъ отчетъ о процессахъ, происходящихъ даже при самыхъ быстрыхъ движеніяхъ β-лучей, она подтверждается самыми тонкими оптическими измѣреніями. Мнѣ кажется, все говоритъ за то, что отклоненія отъ нея обусловлены процессами внутри атомовъ. Всѣ процессы, въ которыхъ принимаетъ участіе внутренняя структура атома, не поддаются объясненію существующей теоріей.

Попытка въ этомъ направленіи сдѣлана Зомерфельдомъ, который попытался приписать входящей въ законъ излученія постоянной величинѣ h, которая вмѣстѣ съ числомъ колебаній опредѣляетъ величину элемента энергіи, очень простое значеніе, относящееся къ внутренней структурѣ атома. А именно, время, въ теченіе котораго проникающій въ атомъ электронъ приходитъ въ состояніе покоя, можетъ быть опредѣлено при помощи этой постоянной въ зависимости отъ его скорости. По такому воззрѣнію постоянная h должна выражать нѣкоторое общее свойство атомовъ. Эта теорія позволяетъ вычислить длины волнъ лучей Рентгена и связываетъ двѣ мои прежнія, независимыя другъ отъ друга попытки, произвести это вычисленіе. Первый методъ покоится на теоріи элементовъ энергіи Планка и предполагаетъ, что энергія освобожденныхъ рентгеновскими лучами, такъ называемыхъ вторичныхъ электроновъ опредѣляется элементомъ энергіи. Второй методъ основанъ на электронной теоріи и, пользуясь ею, пытается вычислить энергію, излучаемую въ видѣ рентгеновскихъ лучей внезапно остановленнымъ, заторможеннымъ электрономъ. Опредѣливши энергію катодныхъ и рентгеновскихъ лучей, можно затѣмъ вычислить путь, еще пробѣгаемый задержаннымъ электрономъ, а тѣмъ самымъ и длину волны рентгеновскихъ лучей. Теорія Зоммерфельда связываетъ обѣ эти теоріи. Ея большое преимущество состоитъ въ томъ, что она объясняетъ возникновеніе рентгеновскихъ лучей при помощи электромагнитной теоріи. Затѣмъ изъ нея можно сдѣлать еще цѣлый рядъ выводовъ, которые всѣ находятся въ согласіи съ опытомъ, такъ напримѣръ, поляризація рентгеновскихъ лучей, различіе лучеиспусканія и твердости въ различныхъ направленіяхъ.

Большое преимущество теоріи Зоммерфельда состоитъ въ томъ, что она устанавливаетъ физическій смыслъ универсальной постоянной h

теорiи излученiя Планка. Ея недостатокъ заключается въ томъ, что она пока примѣнима лишь къ испусканiямъ и поглощенiямъ электроновъ, но не въ состоянiи еще рѣшить проблему излученiя тепла.

Мы должны признать, что современная теорiя излученiя не дала еще для теоретической физики очень благопрiятныхъ результатовъ. Мы видѣли, что до сихъ поръ удовлетворительными оказались лишь термодинамическiя теорiи. Электронная теорiя не справилась съ проблемой излученiя, теорiя Планка до сихъ поръ еще не приняла окончательной формы. Совершенно необычайныя трудности становятся на пути изслѣдованiя, и нельзя предвидѣть, когда и какъ ихъ удастся преодолѣть. Часто въ наукѣ спасительная мысль является съ совершенно другой стороны, часто изслѣдованiя въ совершенно другой области бросаютъ неожиданный свѣтъ на темныя стороны нерѣшенныхъ проблемъ. Такъ и здѣсь намъ приходится возложить надежду на будущееe и ожидать, что современная, столь плодотворная для физики эпоха не закончится, не давъ полнаго разрѣшенiя проблемы излученiя тепла. Тутъ понадобятся новыя и глубокозахватывающiя мысли, но и трiумфъ будетъ великъ, такъ какъ мы тогда глубоко проникнемъ во внутреннiй мiръ атома и въ разыгрывающiеся тамъ элементарные процессы.

По поводу замѣтки В. Кагана къ моей статьѣ „Интуицiя въ работѣ Д. Гильберта“ *).

Въ № 563—564 „Вѣстника“ напечатана моя статья „Интуицiя въ работѣ Д. Гильберта“, причемъ эта статья сопровождается замѣткою редактора „Вѣстника“ В. Ф. Кагана, въ которой г. Каганъ высказываетъ полное убѣжденiе, что интуицiи въ системѣ Гильберта дѣйствительно нѣтъ, причемъ указываетъ, что единственнымъ средствомъ убѣдить въ этомъ является построенiе системы геометрiи, исходя изъ Гильбертовскихъ аксiомъ. Но возникаетъ вопросъ, достаточное-ли это средство. Вотъ что говоритъ по этому поводу недавно скончавшiй геометръ-философъ Анри Пуанкаре **): „Я не ставлю въ вину Гильберту этого формальнаго характера его геометрiи. Онъ долженъ былъ придти къ ней, разрѣшая ту проблему, которую онъ себѣ ставилъ. Онъ хотѣлъ довести до минимума число основныхъ аксiомъ геометрiи и перечислить ихъ всѣ безъ остатка. Но въ тѣхъ сужденiяхъ, въ которыхъ нашъ умъ обнаруживаетъ активность, въ которыхъ интуицiя еще играетъ роль, трудно отдѣлаться отъ постулата или аксiомы, которые незамѣтно входятъ въ сужденiе. Лишь въ случаѣ,

*) Отвѣтъ на эту замѣтку будетъ помѣщенъ въ слѣдующемъ номерѣ.

**) Г. Пуанкаре. Наука и методъ. Переводъ съ французскаго Е. К. Брусиловскаго подъ редакцiей приватъ-доцента В. Ф. Кагана. Стр. 188—189.

если бы всѣ геометрическія сужденія приняли чисто механическую форму, Гильбертъ могъ бы быть увѣреннымъ въ томъ, что онъ исполнилъ свое намѣреніе и успѣшно закончилъ свою задачу". А во введеніи къ той же книгѣ „Наука и методъ" А. Пуанкаре говоритъ: „Съ другой стороны многіе геометры полагаютъ, что математику можно свести къ правиламъ формальной логики... Я полагаю, что мнѣ удалось показать всякому непредубѣжденному читателю, что это лишь обманчивая иллюзія". Вообще слѣдуетъ обратить вниманіе на вышеуказанную книгу. Особенно поучительно написаны главы III—V второй книги (стр. 182—257), посвященныя критикѣ воззрѣній математиковъ-логистовъ.

Здѣсь еще возникаетъ сомнѣніе: что значитъ написать, какъ это рекомендуетъ г. Каганъ, геометрію? Значитъ-ли это выводить по правиламъ аналитической логики какія угодно слѣдствія (по возможности всѣ—а ихъ безконечно много) изъ поставленныхъ аксіомъ и присоединенныхъ къ нимъ опредѣленій, не противорѣчащихъ аксіомамъ? Или это значитъ выводить какія-то избранныя слѣдствія (опредѣленія вводить также не по произволу, а только избранныя)? а если такъ, то что, кромѣ интуиціи, можетъ указать путь для этого избранія? *).

Въ книгѣ „Fragen der Elementargeometrie" Fr. Enriques (Deutsche Ausgabe von H. Thieme) я нашелъ доказательства существованія перпендикуляра, середины отрѣзка и биссектора угла. Но и эти доказательства вызываютъ сомнѣнія, нѣтъ-ли и въ нихъ малозамѣтной доли интуиціи. Напр., доказательство существованія середины отрѣзка ведется такъ: изъ концовъ отрѣзка возставляемъ къ нему перпендикуляры, расположенные по разныя стороны отрѣзка, на перпендикулярахъ откладываемъ конгруэнтные отрѣзки и концы ихъ соединяемъ прямою; точка пересѣченія этой прямой съ отрѣзкомъ и есть середина послѣдняго. А какъ доказать, что послѣдняя прямая пересѣчетъ ту прямую, которой принадлежитъ отрѣзокъ, въ точкѣ, лежащей внутри отрѣзка? Кромѣ того, во всѣхъ этихъ доказательствахъ термины „возставимъ перпендикуляръ", „отложимъ" и т. п. зароняютъ сомнѣнія, а не вводимъ-ли мы вмѣстѣ съ этими терминами малѣйшіе элементы интуиціи въ само доказательство?

Но пусть даже будетъ признано, что доказательства существованія перпендикуляра, середины отрѣзка, биссектора угла свободны отъ интуиціи. Все-же я не жалѣю, что затронулъ эти вопросы на страницахъ „Вѣстника". Не жалѣю потому, что въ педагогической новой литературѣ къ этимъ вопросамъ замѣчается какое-то странное отношеніе.

Въ курсѣ G. Lazzeri und A. Bassani. „Elemente der Geometrie (Deutsch von P. Treutlein) находимъ на стр. 50-й доказательства того, что всякій уголъ можно раздѣлить только однозначно

*) Можно-ли, спрашиваетъ А. Пуанкаре въ той-же книгѣ на стр. 188, замѣнить геометра логическою машиною, въ одинъ конецъ которой были бы введены аксіомы, а въ другомъ концѣ получились бы теоремы?

на двѣ равныхъ части. Это доказательство основано на умѣніи дѣлить отрѣзокъ пополамъ, а это послѣднее основано на построеніи параллелей (дѣленіе на сколько-угодно равныхъ частей). Здѣсь же какъ побочный результатъ получается предложеніе, что для выпрямленнаго угла (а всѣ выпрямленные углы конгруэнтны) существуетъ лучъ, дѣлящій его пополамъ. Однако, несмотря на то, что доказательство этого существованія перпендикуляра дано на стр. 50-й, задача на построеніе перпендикуляра къ прямой черезъ данную точку на этой прямой рѣшена лишь на стр. 141-й, послѣ того какъ установлено, что двѣ окружности равныхъ радіусовъ, разстояніе между центрами которыхъ меньше діаметра каждаго изъ круговъ, пересѣкаются въ двухъ (и не болѣе) точкахъ. Нормально-ли такое положеніе? Эта ненормальность подчеркивается какъ бы самими авторами: на стр. 51 доказывается теорема: „Всегда можно и только однимъ способомъ раздѣлить двугранный уголъ на двѣ равныя части", при доказательствѣ которой авторы говорятъ, что выбираемъ на ребрѣ двуграннаго угла точку и черезъ нее проводимъ въ граняхъ двуграннаго угла лучи, которые составляютъ съ ребромъ двуграннаго угла углы, каждый изъ котораго равенъ половинѣ выпрямленнаго. Если бы еще авторы говорили только, что такіе лучи существуютъ! Нѣтъ, они говорятъ проводимъ („man legt").

Подобное же положеніе имѣетъ мѣсто и въ русскомъ только что вышедшемъ учебникѣ геометріи П. А. Долгушина. „Систематическій курсъ геометріи для среднихъ учебныхъ заведеній": Авторъ заимствовалъ изъ курса G. Lazzeri e A. Bassani доказательство существованія биссектора угла и перпендикуляра (т. е. биссектора выпрямленнаго угла) и также отнесъ значительно дальше построеніе перпендикуляровъ и биссектора (существованіе на стр. 15, а построеніе на стр. 29—31); но не желая вводить статью о параллельности раньше изученія свойствъ треугольниковъ, ввелъ новую аксіому *) „На всякомъ прямолинейномъ отрѣзкѣ существуетъ единственная точка, равноотстоящая отъ концовъ его—середина отрѣзка" (стр. 5). Благодаря этому къ тѣмъ сомнѣніямъ, которыя имѣли мѣсто для курса G. Lazzari e A. Bassani, присоединяется еще одно: нужно-ли, какъ это дѣлаетъ авторъ на стр. 12—13, доказывать, что у всякаго угла существуетъ биссекторъ? Не одинаковою-ли степенью очевидности обладаютъ эти два предложенія о существованіи середины отрѣзка и о существованіи биссектора угла? Врядъ-ли такое измѣненіе системы G. Lazzeri e A. Bassani является ея улучшеніемъ.

Н. Извольскій.

---

*) Кстати сказать, введеніе этой аксіомы противорѣчитъ заявленію автора въ предисловіи, что такое раннее введеніе статьи о параллельности въ планиметріи совершенно искажаетъ понятіе о введеніи XI аксіомы Евклида. Не даетъ-ли еще большаго искаженія смысла XI аксіомы Евклида новая аксіома г. Долгушина?

Памяти Роберто Бонола*)

А. Кулишера.

Друзья и почитатели покойнаго итальянскаго геометра выпустили отдѣльной брошюрой краткую его біографію, а также надгробную рѣчь, произнесенную профессоромъ Федериго Энрикесомъ, который видѣлъ въ своемъ безвременно погибшемъ ученикѣ восходящую звѣзду итальянской науки, и списокъ научныхъ работъ Боноло, позволяющій прослѣдить всю работу, выполненную ученымъ, сошедшимъ въ могилу 36 лѣтъ отъ роду (родился въ Болоньѣ 14 ноября 1874 г., умеръ 16 мая 1911 г.). Слабое здоровье, необезпеченность семьи заставили его въ ранней юности прекратить школьныя занятія, но кипучая работа тонкаго ума, съ раннихъ лѣтъ поражавшаго способностью къ вычисленіямъ, не прекращалась: выдержавъ экстерномъ соотвѣтственный экзаменъ, Бонола поступаетъ въ Болонскій университетъ и по блестящемъ его окончаніи (въ 1898 г.) занимаетъ, по приглашенію своего учителя (впослѣдствіи близкаго друга) Федериго Энрикеса, мѣсто ассистента по кафедрѣ проективной и начертательной геометріи. Одновременно съ этимъ развивается его педагогическая дѣятельность, гдѣ широко развернулись природныя преподавательскіе дарованія молодого ученаго. Въ послѣдующіе годы мы застаемъ его въ Павіи, преподающимъ въ женской нормальной школѣ и работающимъ въ то же время въ качествѣ ассистента профессоровъ Виванти и Паскаля по кафедрѣ исчисленія безконечно-малыхъ. Павія съ ея превосходной математической библіотекой и университетомъ, въ которомъ были живы традиціи ряда славныхъ профессоровъ математики (Бельтрами, Сомиліано) способствовала появленію новыхъ работъ Бонола.

Въ Павіи же вскорѣ послѣ переѣзда онъ женился, встрѣтивъ въ своей супругѣ дѣятельную помощницу во всѣхъ своихъ начинаніяхъ. Въ 1904—1907 году онъ читаетъ курсъ математики для химиковъ, а также (въ качествѣ приватъ-доцента) курсъ проективной геометріи на отдѣленіи чистой математики и весьма оригинальный курсъ по основаніямъ геометріи, въ который онъ вложилъ и свои разностороннія познанія и тонкое педагогическое чутье. Въ 1911 году онъ былъ приглашенъ по конкурсу профессоромъ въ высшую женскую школу Magistero въ Римѣ, но болѣзнь (саркома), вслѣдствіе которой онъ неоднократно подвергался мучительнымъ операціямъ, на этотъ разъ пресѣкла его жизнь. Онъ скончался въ родномъ городѣ Болоньѣ по пути въ Римъ.

Одна часть его работъ посвящена неевклидовой геометріи; сюда относилась также его докторская диссертація, критико-историческую часть которой онъ углубилъ въ своемъ главномъ сочиненіи, въ «Неевклидовой геометріи», переведенной на нѣмецкій, англійскій, русскій языки; конструктивныя же соображенія развиты отчасти въ вышедшемъ подъ редакціей профессора Ф. Энрикеса сочиненіи («Вопросы элементарной геометріи»). Въ другой части своихъ трудовъ онъ занимается общими вопросами проективной геометріи и помѣщаетъ нѣсколько замѣтокъ о гомографическихъ линейныхъ систе-

*) In Memoriam di Roberto Bonola. Болонья.

махъ на плоскости и въ пространствѣ, указывая тутъ весьма изящныя построенія. Ему принадлежитъ также наиболѣе полный списокъ сочиненій по неевклидовой геометріи (Johannis Bolyai in memoriam——Index operum ad geometriam absolutam spectantium. Clandispoli. 1902) и библіографія по основаніямъ геометріи въ связи съ неевклидовой геометріей. Нельзя обойти молчаніемъ также его напряженную дѣятельность по изданію «Энциклопедіи элементарной математики», въ которой, сверхъ того, его перу принадлежитъ не мало страницъ. Привлекательная личность этого математика, историка и философа, вся жизнь котораго была, несмотря на лишенія и страданія, воплощеніемъ свѣта, «ума, силы и любви» обрисована его профессоромъ Федериго Энрикесомъ и друзьями Альберто Конти и Родольфо Вити. Къ брошюрѣ приложенъ хорошо исполненный портретъ.

Списокъ работъ Роберто Бонола (помѣщенный также въ Bolletino di Matematica № 1—2—3—4, 1911) представляетъ большую цѣнность для занимающихся въ названныхъ выше областяхъ

ПИСЬМО ВЪ РЕДАКЦІЮ.

Милостивый государь, г. редакторъ!

Въ № 554 «Вѣстника» г-номъ И. А. изъ Москвы помѣщена рецензія о моей геометріи. По поводу этой рецензіи имѣю сказать слѣдующее:

Не дѣло автора указывать рецензенту то новое, что въ учебникѣ есть, если рецензентъ этого новаго не видитъ, и я намѣренъ только объяснить, почему моя геометрія въ основныхъ чертахъ имѣетъ ту же физіономію, что и геометріи Давидова и Киселева. Это потому, что я лично (и въ этомъ я не одинокъ) считаю эти учебники, въ особенности послѣдній, хорошими и не вижу надобности отступать отъ классическаго изложенія.

Какъ видно изъ предисловія къ моей книгѣ, я поставилъ себѣ цѣлью, отнюдь не поступаясь строгостью доказательствъ, сдѣлать геометрію болѣе доступной, болѣе легкой для изучающихъ ее. И можно находить поставленную мною себѣ цѣль нужною или излишнею, достигнутою или недостигнутою, но нельзя навязывать автору чуждыхъ ему задачъ.

Обращаясь къ конкретнымъ указаніямъ рецензента на допущенные мною промахи и ошибки, я долженъ сказать, что взглядовъ рецензента не раздѣляю и въ цитируемыхъ имъ строкахъ ошибокъ не вижу. Въ частности, по поводу опредѣленія понятія «выпуклый многоугольникъ», рецензентъ утверждаетъ, будто въ моей геометріи стороной (стр. 24) называется «прямая, образующая многоугольникъ». Я внимательно просмотрѣлъ стр. 24 и ничего подобнаго не нашелъ. Рецензентъ, повидимому, цитировалъ по памяти или «отъ себя»: и то и другое въ научныхъ рецензіяхъ едва ли допустимо.

Неправъ рецензентъ и тогда, когда говоритъ, что «къ рѣшенію задачъ №№ 147 и 148 сдѣланы указанія, не упрощающія дѣла». Вписать квадратъ въ данный треугольникъ и вписать квадратъ въ треугольникъ, подобный данному,—не суть задачи равносильныя.

Окт. Вржесневскій.

БИБЛІОГРАФІЯ.

III. Новости иностранной литературы.

A new Algebra (Новая Алгебра). I — IV. Barnard and Child. London 1909 *).

«J'ai horreur de tout enseignement qui n'est pas toujours sincère: le respect de la vérité est la première leçon morale, sinon la seule, qu'on puisse tirer de l'étude des sciences» **) — эти слова Таппеrу равно какъ и самое заглавіе заставляютъ ожидать очень многаго. — И ожиданія оправдываются въ высокой степени: мы имѣемъ здѣсь трудъ, чрезвычайно продуманный, съ конструкціей логически прозрачной и стройной и, вмѣстѣ съ тѣмъ, глубоко соотвѣтствующей психологіи ученика. Книга содержитъ въ себѣ курсъ алгебры (приблизительно) нашихъ реальныхъ училищъ, до логариѳмовъ. Курсъ распадается на 4 отдѣла соотвѣтственно раздѣленію алгебраическихъ количествъ на 1) цѣлыя положительныя, 2) цѣлыя отрицательныя (и ноль), 3) дроби и 4) ирраціональныя. Уравненія проходятъ по всему курсу, отъ самаго почти начала до конца, представляя матеріалъ, съ одной стороны, для развитія теоріи уравненій, а съ другой — для упражненія надъ соотвѣтствующими данному отдѣлу количествами. Аналогичнымъ образомъ трактуется графика — каждый отдѣлъ завершается графикой, постепенно усложняющейся отъ простого нанесенія точки $M(x, y)$ до построенія и изслѣдованія кривыхъ 2-го порядка.

I отдѣлъ. Цѣлыя положительныя количества. Онъ представляетъ собою цѣльный — правда, довольно краткій курсъ алгебры — при томъ ограничительномъ условіи, что числовыя значенія буквъ всѣ данныя и результаты (промежуточные и конечные) суть цѣлыя и положительныя числа. Сравнительная величина числа опредѣляется его мѣстомъ въ натуральномъ рядѣ. $a = b$, это значитъ, что a и b стоятъ вмѣсто одного и того же члена натуральнаго ряда. Прибавить a къ b значитъ: найти число, занимающее въ натуральномъ рядѣ b-е мѣсто послѣ a. Устанавливается однозначность результата каждаго изъ 4 первыхъ алгебраическихъ дѣйствій и схема основныхъ равенствъ и неравенствъ:

$$\text{при } a=b \text{ и } x=y \quad \left| \begin{array}{l} a \pm x = b \pm x, \\ a \,.\, x = b \,.\, x, \\ a : x = b : x, \\ a \pm x = b \pm y, \\ \ldots\ldots\ldots \end{array} \right. \qquad \begin{array}{r} \text{при } a = b \\ \text{и } b = c \end{array} \left| \; a = c. \right.$$

и соотвѣтствующія неравенства.

---

*) Объ этомъ руководствѣ въ „Вѣстникѣ" (№ 532) уже былъ данъ отзывъ; но такъ какъ настоящая статья освѣщаетъ эту интересную книгу съ нѣсколько другой точки зрѣнія, то мы даемъ ей мѣсто. *Ред.*

**) „Всякое обученіе, не до конца откровенное, внушаетъ мнѣ ужасъ: уваженіе къ истинѣ, — вотъ первая, если не единственная, заповѣдь, которую намъ могутъ дать занятія науками.

Доказывается это непосредственнымъ обращенiемъ къ натуральному ряду. Формулы не группируются въ болѣе общiя и частныя, словесныхъ выраженiй имъ не дается; онѣ напечатаны жирнымъ шрифтомъ, колонками — и достигается отчетливое зрительное, притомъ вполнѣ осмыслонное впечатлѣнiе. Даже доказываются свойства перемѣстительности, распредѣлительности и сочетательности элементовъ 4 дѣйствiй, и на основанiи этого устанавливаются сложенiе, вычитанiе и умноженiе одночленовъ и многочленовъ, а также дѣленiе многочленовъ на одночлены, причемъ каждое дѣленiе записывается въ видѣ дроби (дѣленiе точное). Такъ доказано, что $(a - b) : c = a : c - b : c$ и записано еще иначе:

$$\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}.$$

Замѣчу, что тутъ же доказывается, что $\frac{c}{a + b}$ не $= \frac{c}{a} + \frac{c}{b}$, и такого рода предупрежденiя естественныхъ со стороны ученика ошибокъ довольно часты, особенно, при рѣшенiи уравненiй. Далѣе доказывается въ видѣ теоремъ, относящихся къ случаямъ точнаго дѣленiя: I) $\frac{a}{b} = \frac{ax}{bx}$; II) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; III) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$; IV) $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$; V) $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$; VI) $\frac{a}{b} \pm \frac{x}{y} = \frac{ay \pm bx}{by}$; за этимъ слѣдуетъ рядъ упражненiй въ дѣйствiяхъ надъ «дробями» (по формѣ) — правда, не очень сложныхъ. Затѣмъ доказывается, что, если $ay \gtreqless bx$, то $\frac{a}{b} \gtreqless \frac{x}{y}$ и обратная теорема. (Это разсужденiе, по существу необходимое по аналогiи съ дѣйствительными дробями, врядъ ли покажется здѣсь ученику цѣлесообразнымъ, тѣмъ болѣе, что иллюстрирующiе его прямѣры скорѣе показываютъ, что можно и безъ него обойтись). Въ краткой замѣткѣ вводится терминъ «дробь», и въ дальнѣйшемъ уже встрѣчаются дробные коэффицiенты; выясняется, что $\frac{2}{5}(x + 2) = (x + 2) : 5 \times 2$, но при непремѣнномъ условiи что x принимаетъ только такiя значенiя, при которыхъ дѣленiе возможно. Предыдущее закрѣпляется упражненiями на тройное правило и на составленiе и рѣшенiе уравненiй. Затѣмъ вводится понятiе о корнѣ второй и n-ой степени (данныя и результаты — цѣлыя положительныя числа) и доказываются теоремы: 1) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$; 2) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$. Этимъ заканчивается I отдѣлъ. Въ немъ 31 табличка упражненiй, въ каждой изъ которыхъ въ среднемъ отъ 30-40 примѣровъ; въ главѣ графики упражненiй около 50.

Нѣкоторое затрудненiе для учащихся могутъ вызвать доказательства свойствъ перемѣстительности, распредѣлительности и сочетательности, но если ученикъ пойметъ, что въ данномъ случаѣ доказать формулу значитъ: провѣрить ее отсчетомъ по натуральному ряду, то онъ справится съ этимъ несравненно легче, чѣмъ съ тѣми разрозненными «доказательствами» и «правилами», которыя обыкновенно приходятся на долю ученика II, III класса въ ариѳметикѣ и алгебрѣ.

Теоретическiя разсужденiя въ этомъ отдѣлѣ устанавливаютъ, что такiя-то измѣненiя въ порядкѣ (указанныхъ) дѣйствiй возможны, безъ искаженiя результата, а упражненiя выясняютъ, что эти измѣненiя полезны.

II отдѣлъ. Ноль и отрицательныя количества. Для того, чтобы уравненіе $x+b=a$ всегда имѣло корень, вводятъ символы 0, -1 и т. д. и натуральный рядъ дѣлается безконечнымъ въ обѣ стороны. Планъ II отдѣла тождественъ съ планомъ I отдѣла. Простѣйшія формулы, доказанныя для положительныхъ цѣлыхъ чиселъ, распространяются на отрицательныя и на 0 на основаніи соглашенія. Такъ, полагаемъ, что $a+b=b+a$ при всякомъ цѣломъ a и b; отсюда: $2+(-3)=-3+2$, $2+0=2-0$ и пр., и затѣмъ уже сложеніе и вычитаніе опредѣляются равенствами:

$$\begin{array}{c|c} a+0=a & a+(-x)=a-x \\ a-0=a & a-(-x)=a+x. \end{array}$$

Такимъ образомъ, получается въ разсужденіяхъ нѣкоторый кругъ и опредѣленія какъ бы откуда то выводятся. Аналогичнымъ образомъ, трактуется умноженіе и дѣленіе (но дѣленіе на 0 не имѣетъ смысла). Едва ли съ такимъ пріемомъ можно согласиться. Вообще, этотъ отдѣлъ можетъ вызвать наиболѣе серьезныя возраженія. (Такъ, напримѣръ, 0 опредѣляется равенствомъ $a-a=0$, между тѣмъ, въ дальнѣйшемъ, нигдѣ къ этому равенству, какъ исходному, не возвращаются; затѣмъ неясно, почему, при $x=-a$, должно быть $-x=a$, и какъ вообще надо это понимать). Устанавливаются тѣ же основныя свойства четырехъ дѣйствій и равенства и неравенства, что въ I отдѣлѣ, а затѣмъ идетъ чрезвычайно существенное обобщеніе: всякая формула (преобразованіе) доказывается посредствомъ ссылокъ на основныя равенства (неравенства) и основныя свойства элементовъ дѣйствій; такъ какъ эти равенства и свойства одинаковы въ I и II отдѣлѣ, то, слѣдовательно, всѣ формулы, выведенныя въ I отдѣлѣ для положительныхъ количествъ, справедливы и для отрицательныхъ и для 0 (исключая: дѣлитель $=0$). (Permanence of algebraic form.). На этомъ основаніи далѣе уже предлагаются упражненія въ дѣйствіяхъ надъ многочленами (числовое значеніе можетъ быть $\gtreqless 0$, но цѣлымъ числомъ), причемъ самый матеріалъ болѣе сложный, чѣмъ въ I главѣ, и разработка его болѣе детальная (включеніе слагаемыхъ въ скобки съ перемѣной и безъ перемѣны знаковъ, отысканіе общаго наивысшаго кратнаго, общій случай дѣленія цѣлаго многочлена на цѣлый многочленъ и пр.).

III отдѣлъ. Дроби. Чтобы равенство $\frac{a}{b}=x$ было всегда возможно, вводимъ новый символъ — дробь. Величина дроби, т. е. мѣсто ея въ рядѣ $-1, 0, 1, 2$ опредѣляется на основаніи допущенія: если $ay \gtreqless bx$, то $\frac{a}{b} \gtreqless \frac{x}{y}$. За опредѣленія дѣйствій надъ дробями принимаемъ соотвѣтственно равенства 1) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$; 2) $\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y} = \frac{ax}{by}$; 3) $\frac{a}{b} : \frac{x}{y} = \frac{ay}{bx}$; устанавливаютъ 3 свойства элементовъ дѣйствій (доказательства предоставлены ученикамъ).

Такимъ образомъ, и здѣсь приходимъ къ permanence of algebraic form. И далѣе идетъ детальная разработка дѣйствій надъ дробями (около 250 упражненій). Кромѣ того, дается рядъ интересныхъ упражненій на теоремы: если $\frac{a}{x} \gtreqless \frac{b}{y}$, то $\frac{a}{x} \gtreqless \frac{la+mb}{lx+my} \gtreqless \frac{b}{y}$ и ихъ слѣдствія. Наконецъ устанавливается тождественность дроби, какъ частнаго, съ дробью, какъ результатомъ измѣренія — путемъ соотвѣтственныхъ опредѣленій и допущеній. Конецъ отдѣла посвященъ рѣшенію (раціональные корни) уравненій съ неизвѣстнымъ въ знаменателяхъ, системъ уравненій, и квадратныхъ уравненій (разложеніемъ трехчлена на множители безъ вывода общей формулы рѣшенія квадратнаго уравненія).

IV отдѣлъ начинается рѣшеніемъ частныхъ случаевъ системъ уравненій второй и высшихъ степеней (корни раціональные); затѣмъ приступаютъ къ приближеннымъ вычисленіямъ суммъ и произведеній, причемъ, главнымъ образомъ, останавливаются на опредѣленіи границъ ошибокъ результата. Освоившись съ сущностью приближенныхъ вычисленій переходимъ къ ирраціональнымъ количествамъ: для того, чтобы равенство $\sqrt[n]{a} = x$ было всегда возможнымъ, вводятся новыя числа. Ирраціональное число считается заданнымъ, если указано между какими раціональными числами оно заключено (2 ряда). Теорія ирраціональнаго количества откладывается до болѣе старшаго возраста (приблизительно, соотвѣтственно нашему VII классу реальныхъ училищъ); здѣсь же ограничиваются только матеріаломъ, необходимымъ для практическихъ цѣлей. Принимается, что на практикѣ всякое ирраціональное число можно замѣнить раціональнымъ, сколь угодно близкимъ къ нему. Поэтому теоремы о произведеніи корней и пр., доказанныя въ I отдѣлѣ для чиселъ раціональныхъ, примѣняются и къ количествамъ ирраціональнымъ. Слѣдуетъ около 300 упражненій на дѣйствія съ радикалами — уже почти безъ ограничительныхъ условій для числовыхъ значеній (вещественность). Наконецъ, еще разъ возвращаемся къ квадратному уравненію, съ общей формулой рѣшенія и изслѣдованіемъ (понятіе о мнимомъ количествѣ); въ связи съ этимъ, даются уравненія, приводящіяся къ квадратнымъ, и ирраціональныя. Заканчивается книга теоріей пропорцій, геометрической и гармонической прогрессіей, ученіемъ о функціи отъ одной независимой перемѣнной и изслѣдованіемъ цѣлыхъ функцій первой, второй и, въ частныхъ случаяхъ, третьей степени, и опредѣленіемъ *maximum'a* и *minimum'a* функціи въ связи съ графикой.

Чтобы не увеличивать еще болѣе размѣра реферата, приходится ограничиваться указаніемъ только на то, что существенно необходимо для выясненія плана и метода руководства, и отказываться отъ обсужденія весьма многихъ вопросовъ (графика, пропорціи, характеръ упражненій ...). Несомнѣнно, что нѣкоторые пункты этой чрезвычайно содержательной книги встрѣтятъ возраженія. Такъ, иногда авторъ безъ нужды отказывается отъ строгаго доказательства, оставаясь на почвѣ интуиціи; напримѣръ, онъ не доказываетъ, что уравненіе 1-й степени съ 2 неизвѣстными есть уравненіе прямой, — и провѣряетъ это положеніе въ отдѣльныхъ случаяхъ линейкой. Но общій планъ и методъ этой книги таковы, что, слѣдуя ей, дѣйствительно, можно приблизиться къ этой двоякой цѣли, достиженіемъ которой едва ли многіе преподаватели могутъ похвалиться: во-первыхъ сознательное усвоеніе ученикомъ, такъ сказать, логическаго скелета алгебраическихъ дѣйствій, и, во-вторыхъ, математическая грамотность ученика, при которой была бы немыслима та масса якобы случайныхъ, а на самомъ дѣлѣ — систематическихъ ошибокъ, которыми вообще говоря, полны тетради нашихъ учениковъ*). Здѣсь къ

*) На постоянство ошибокъ и на способы борьбы съ ними обращалъ вниманія г. Левитусъ въ докладѣ на I-мъ Всероссійскомъ Съѣздѣ Преподавателей Математики въ 1911 г.

каждому существенному вопросу возвращаются много разъ, въ различные моменты, при постоянномъ усложненіи матеріала, и постепенномъ расширеніи ограничительныхъ условій. Въ книгѣ словесныхъ опредѣленій весьма мало: ученикъ исходитъ изъ формулы, многократно возвращается къ ней, такъ или иначе видоизмѣненной или расширенной, значитъ, по необходимости вглядывается въ нее — и такимъ образомъ постепенно и поэтому прочно ею овладѣваетъ. Надо замѣтить, что и на развитіе рѣчи авторомъ обращается очень большое вниманіе — какъ при доказательствахъ, такъ и при выполненіи упражненій (очень интересныхъ и разностороннихъ). — Нѣтъ нанизыванія общихъ, а потому часто лишенныхъ въ умѣ ученика содержанія словъ; постоянно требуется свободное формулированіе отчетливой мысли о каждомъ комплексѣ данныхъ.

Такимъ образомъ, книга даетъ, мнѣ кажется, систему обученія, вообще говоря, удовлетворяющую современнымъ запросамъ.

Н. Плеханова.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей приватъ-доцента **Е. Л. Буницкаго.**

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 46 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^4 - 8x + 63 = 0.$$

Хотимскій (Александровскъ).

№ 47 (6 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$x^3 - y^3 = (x + y)\, z.$$

Н. С. (Одесса).

№ 48 (5 сер.). Пусть n равныхъ круговъ касаются между собой и даннаго круга радіуса R внѣшнимъ образомъ; пусть другой рядъ равныхъ n круговъ касаются между собой и того же круга внутреннимъ образомъ. Называя радіусы круговъ перваго и второго ряда соотвѣтственно черезъ r_n и ϱ_n, доказать, что

$$r_n\, \varrho_n = \left(R \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}\right)^2.$$

(Заимств.).

№ 49 (6 сер.). Доказать, что число

$$3^{2n+2} - 8n - 9$$

при n цѣломъ и не отрицательномъ кратно 64.

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 7 (6 сер.). *Доказать тожество*

$$\frac{ar_a}{(a-b)(a-c)} + \frac{br_b}{(b-c)(b-a)} + \frac{cr_c}{(c-a)(c-b)} =$$

$$= \frac{(b+c)\,r_a}{(a-b)(a-c)} + \frac{(c+a)\,r_b}{(b-c)(b-a)} + \frac{(a+b)\,r_c}{(c-a)(c-b)} = \frac{p}{r},$$

гдѣ a, b, c, p, r_a, r_b, r_c, r *суть стороны, полупериметръ и радіусы круговъ внѣвписанныхъ и вписаннаго нѣкотораго треугольника.*

Разсмотримъ выраженіе:

$$rr_a(b-c) + rr_b(c-a) + rr_c(a-b). \tag{1}$$

Называя черезъ s площадь треугольника, имѣемъ:

$$rr_a = \frac{s}{p}\cdot\frac{s}{p-a} = \frac{s^2}{p(p-a)} = (p-b)(p-c), \quad rr_b = (p-c)(p-a),$$

$$rr_c = (p-a)(p-b)$$

или же, — если ввести обозначенія:

$$p-a=x, \quad p-b=y, \quad p-c=z; \tag{2}$$

$$rr_a = yz, \quad rr_b = zx, \quad rr_c = xy. \tag{3}$$

Съ другой стороны [см. (2)]:

$$b-c=z-y, \quad c-a=x-z, \quad a-b=y-x. \tag{4}$$

Поэтому выраженіе (1) можно представить при помощи формулъ (3), (4) въ видѣ:

$$rr_a(b-c) + rr_b(c-a) + rr_c(a-b) = yz(z-y) + zx(x-z) + xy(y-x). \tag{5}$$

Но

$$zx(x-z) + xy(y-x) = zx^2 - xz^2 + xy^2 - x^2y = x^2(z-y) - x(z^2-y^2) =$$

$$= (z-y)[x^2 - x(y+z)],$$

откуда

$$yz(z-y) + zx(x-z) + xy(y-x) = (z-y)[x^2 - x(y+z) + yz] =$$

$$= (z-y)(y-x)(z-x).$$

Слѣдовательно [см. (5), (4)]:

$$rr_a(b-c)+rr_b(c-a)+rr_c(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a),$$

или

$$r_a(b-c)+r_b(c-a)+r_c(a-b)=-\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{r}. \qquad (6)$$

Теперь введемъ обозначенія:

$$ar_a(b-c)+br_b(c-a)+cr_c(a-b)=M, \qquad (7)$$

$$(b+c)r_a(b-c)+(c+a)r_b(c-a)+(a+b)r_c(a-b)=N. \qquad (8)$$

Складывая уравненія (8) и (7), получимъ [см. (6)]:

$$N+M=2p[r_a(b-c)+r_b(c-a)+r_c(a-b)]=-\frac{2p(a-b)(b-c)(c-a)}{r}, \qquad (9)$$

а вычитывая изъ равенства (8) равенство (7) и замѣчая, что

$$(b+c-a)r_a=\frac{2(p-a)s}{p-a}=2s=(c+a-b)r_b=(a+b-c)r_c,$$

находимъ:

$$N-M=2s[(b-c)+(c-a)+(a-b)]=0,$$

т. е $N=M$. Значитъ [см. (9)]:

$$N=M=-\frac{p(a-b)(b-c)(c-a)}{r}$$

или

$$ar_a(b-c)+br_b(c-a)+cr_c(a-b)=$$
$$=(b+c)r_a(b-c)+(c+a)r_b(c-a)+(a+b)r_c(a-b)=$$
$$=-\frac{p(a-b)(b-c)(c-a)}{r}.$$

Итакъ, мы пришли къ тѣмъ тожествамъ, которыя получаются изъ предложенныхъ для доказательства тожествъ путемъ освобожденія отъ знаменателей первой части; такая форма ихъ удобнѣе, такъ какъ тожества, данныя въ условіи задачи, теряютъ непосредственный смыслъ для равнобедреннаго треугольника.

А. Ильинъ (Астрахань); *М. Черняевъ* (Москва); *Н. Рубачевъ* (Шуя).

№ 9 (6 сер.). *Доказать тожество*

$$\frac{a^2r_a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2r_b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2r_c}{(c-a)(c-b)}=\frac{p^2}{r},$$

гдѣ a, b, c, p, r_a, r_b, r_c, r *суть стороны, полупериметръ и радіусы внѣвписанныхъ и вписаннаго круговъ нѣкотораго треугольника.*

Введемъ обозначенія

$$r_a a^2(b-c)+r_b b^2(c-a)+r_c c^2(a-b)=P, \qquad (1)$$

$$r_a a(b+c)(b-c)+r_b b(c+a)(c-a)+r_c c(a+b)(a-b)=Q. \qquad (2)$$

Тогда, такъ какъ $r_a(b+c-a)=r_b(a+c-b)=r_c(a+b-c)=2s$,

$$Q-P=2s\,[a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)]=0,$$

т. е. $Q=P$. Помножая же тожество

$$ar_a(b-c)+br_b(c-a)+cr_c(a-b)=\frac{-p(a-b)(b-c)(c-a)}{r}$$

предыдущей задачи на $a+b+c$, получимъ [см. (1), (2)]:

$$P+Q=-\frac{2p^2(a-b)(b-c)(c-a)}{r},$$

откуда, такъ какъ $P=Q$, выводимъ, что

$$P=-\frac{p^2(a-b)(b-c)(c-a)}{r},$$

т. е.

$$a^2r_a(b-c)+b^2r_b(c-a)+c^2r_c(a-b)=-\frac{p^2(a-b)(b-c)(c-a)}{r}.$$

Мы пришли къ тожеству получаемому, изъ предложеннаго для доказательства равенства освобожденіемъ его отъ знаменателей первой части; такая его форма предпочтительнѣе, такъ какъ тожество, данное въ условіи задачи, теряетъ смыслъ для равнобедреннаго треугольника.

А. Ильинъ (Астрахань); *Л. Марголисъ* (Петербургъ); *Н. Рубачевъ* (Шуя).

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника", подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

Р. Пёшль, профессоръ. *Введеніе въ коллоидную химію.* Очеркъ коллоидной химіи для учителей, врачей и студентовъ. Перевелъ съ 3-го нѣмецкаго изданія магистрантъ химіи А. С. Комаровскій. Съ предисловіемъ профессора П. Г. Меликова. Изданіе „Mathesis". Одесса, 1912. Стр. VII+86. Ц. 75 к.

Трёльсъ-Лундъ, профессоръ. *Небо и міровоззрѣніе въ круговоротѣ временъ.* Перев. съ нѣм. Изданіе „Mathesis". Одесса, 1912. Стр. IV+223 8°. Ц. 1 р. 50 к.

О. Дзіобекъ, проф. *Курсъ аналитической геометріи.* Часть 2-ая. „Аналитическая геометрія въ пространствѣ. Перев. съ нѣм. подъ редакціей проф. СПБ. Высш. Женск. Курсовъ В. I. Шиффъ. Съ 36 чертеж. Изданіе „Mathesis". Одесса, 1912. Стр. VIII+356 8°. Ц. 2 р 50 к.

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Обложка
пщется

Обложка
ищется