Обложка
пщется

Обложка
ищется

Второй серіи V-го семестра №1.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

№ 649.

Отъ редакціи.

Настоящій номеръ, начинающій собою 5-й семестръ второй серіи, появляется въ свѣтъ съ значительнымъ опозданіемъ. Это объясняется, главнымъ образомъ, затрудненіями, съ которыми было сопряжено пріобрѣтеніе для предстоящаго семестра бумаги. Цѣна на бумагу въ Одессѣ возросла по сравненіи съ нормальной въ 6 разъ. Какъ извѣстно, издатели почти всѣхъ журналовъ въ связи съ этимъ повысили цѣну изданія. Редакція и издатель „Вѣстника" не могли на это рѣшиться. Читателямъ придется поэтому мириться съ нѣсколько меньшимъ форматомъ, узкими полями, густымъ шрифтомъ. Не легко было рѣшиться редакціи измѣнить форматъ, установившійся въ теченіе 27 лѣтъ. Но получить бумагу подходящаго формата по сколько-нибудь доступной цѣнѣ оказалось въ Одессѣ невозможнымъ. „Вѣстникъ" сохранитъ, такимъ образомъ, на себѣ печать этой тяжелой годины.

Не легко въ эту пору, когда всѣ наши мысли и чувства отвлечены великой борьбой и вызываемой его страдой, руководить научнымъ журналомъ. Но какъ и съ самаго начала войны редакція будетъ стараться, чтобы идеи, приносимыя „Вѣстникомъ", давали читателямъ минуты отвлеченія и душевнаго отдыха.

О тѣхъ вопросахъ элементарной геометріи, которые обыкновенно рѣшаются помощью предѣловъ.

А. Киселева.

Въ предлагаемой статьѣ я сначала излагаю, какъ, по моему мнѣнію, слѣдовало бы въ элементарной геометріи трактовать вопросы о длинѣ окружности, о площади круга, о боковыхъ поверхностяхъ круглыхъ тѣлъ и пр., если задаться цѣлью *не прибѣгать къ понятію предѣла*, а основываться только на аксіомѣ непрерывности *); затѣмъ я вкратцѣ показываю, какъ тѣ же вопросы рѣшаются посредствомъ метода предѣловъ (проще чѣмъ это сдѣлано въ моей „Элементарной геометріи“) и, наконецъ, заключаю, какому изъ этихъ двухъ способовъ изложенія надо отдать предпочтеніе.

Замѣчу, что всѣ ссылки на параграфы, дѣлаемыя мною ниже, относятся къ моей „Элементарной геометріи“.

Длина дуги окружности.

Прежде всего надо напомнить учащимся содержаніе §§ 55 и 56 (о сравнительной длинѣ объемлемыхъ и объемлющихъ ломанныхъ линій) и, основываясь на этомъ содержаніи, установить, что периметръ ломаной линіи **), вписанной въ дугу, меньше периметра ломаной, описанной около той же дуги, и что периметръ многоугольника, вписаннаго въ окружность, меньше периметра многоугольника, описаннаго около нея. Далѣе надо переставить сюда §§ 329 и 331 (изъ главы о площадяхъ), при чемъ лучше изложить ихъ въ видѣ слѣдующихъ двухъ леммъ.

Лемма 1. *При неограниченномъ увеличеніи числа сторонъ правильной ломаной линіи, вписанной въ дугу: 1^0, сторона этой ломаной стремится къ нулю; 2^0, разность между радіусомъ и апоѳемою стремится къ нулю.*

*) Въ примѣненіи къ длинѣ и площади круга этотъ путь указанъ въ „Энциклопедіи элементарной математики“ Вебера и Вельштейна (переводъ подъ ред. прив.-доц. В. Ф. Кагана, изд. „Mathesis“. Одесса, 1914. Томъ II, книга 1-ая, стр. 300 и слѣд.), а также покойнымъ I. Таннеру (Jules Tannery) напримѣръ, въ его „Leçons d' algèbre et d'analyse“, стр. 52 и сл.

**) Ломаныя линіи и многоугольники вездѣ здѣсь разумѣются *выпуклые*; подъ словомъ „дуга“ вездѣ разумѣется „дуга окружности“.

Доказательства: 1°. Пусть p есть перемѣнный периметръ ломаной, n — число ея сторонъ, P_1 — периметръ какой-нибудь описанной ломаной, остающейся неизмѣнной, и a — любой данный отрѣзокъ прямой. Какъ бы малъ этотъ отрѣзокъ ни былъ, число n при безграничномъ возрастанiи достигнетъ такого большого значенiя n_1, при которомъ (и при всѣхъ бо́льшихъ значенiяхъ) будетъ удовлетворено неравенство: $P_1 < n_1 a$. Пусть при $n = n_1$ перемѣнный периметръ p получитъ значенiе p_1. Такъ какъ $p_1 < P_1$, то $p_1 < n_1 a$; откуда $p_1/n_1 < a$, т. е. длина одной стороны вписанной правильной ломанной линiи дѣлается и остается меньше любого даннаго отрѣзка прямой, какъ бы малъ онъ ни былъ; а это другими словами, значитъ, что сторона эта стремится къ нулю.

2°. Такъ какъ разность между радiусомъ и апоѳемой меньше половины стороны вписанной ломаной, то эта разность, и подавно, стремится къ нулю.

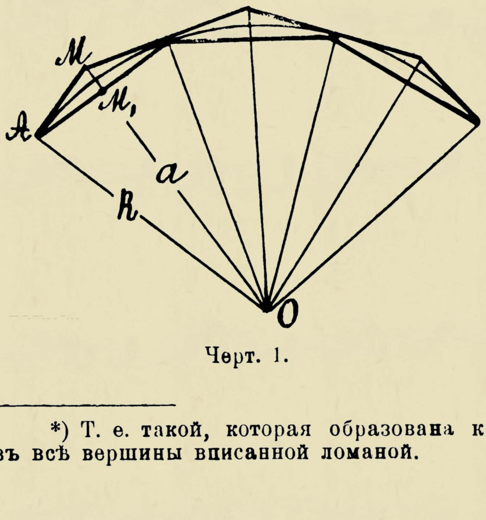
Лемма 2. Разность между периметромъ правильной ломаной линiи, вписанной въ данную дугу, и периметромъ соотвѣтственной*) описанной стремится къ нулю, когда число сторонъ ломаныхъ неограниченно возрастаетъ.

Доказательство. Изъ подобiя треугольниковъ OAM и OAM_1 находимъ:

$$\frac{AM}{AM_1} = \frac{R}{a}.$$

Откуда (обозначая число сторонъ вписанной ломаной буквою n):

$$\frac{AM \cdot 2n}{AM_1 \cdot 2n} = \frac{R}{a}, \text{ т. е. } \frac{P}{p} = \frac{R}{a},$$



Черт. 1.

если P и p периметры описанной и вписанной ломанныхъ линiй. Составимъ производную пропорцiю:

$$\frac{P - p}{P} = \frac{R - a}{R}.$$

Такъ какъ, по доказанному, разность $R - a$ стремится къ нулю, а R остается постояннымъ, то правая часть послѣдняго равенства стремится къ нулю; слѣдовательно, стремится

*) Т. е. такой, которая образована касательными, проведенными черезъ всѣ вершины вписанной ломаной.

къ нулю и лѣвая часть равенства, для чего необходимо, чтобы разность $P-p$ стремилась къ нулю (такъ какъ P не увеличивается).

Къ этимъ двумъ леммамъ надо добавить еще слѣдующую третью.

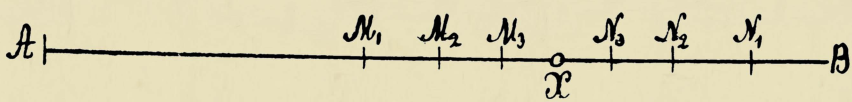
Лемма 3. Изъ вписанныхъ ломаныхъ линій (правильныхъ и неправильныхъ) не существуетъ такой, которой периметръ былъ бы наибольшимъ изъ всѣхъ, а изъ описанныхъ ломаныхъ не существуетъ такой, которой периметръ былъ бы наименьшимъ изъ всѣхъ.

Дѣйствительно, какую бы вписанную ломаную мы ни взяли, мы всегда можемъ построить другую вписанную ломаную съ бо́льшимъ периметромъ, (напримѣръ, удвоивъ число сторонъ первой) и какую бы описанную ломаную мы ни взяли, мы всегда можемъ построить другую описанную съ меньшимъ периметромъ (напримѣръ, срѣзавъ углы первой новыми касательными).

Само собой разумѣется, что доказанныя леммы примѣнимы и къ цѣлой окружности.

Опредѣленіе. За длину дуги принимаютъ длину такого отрѣзка прямой, который больше периметра любой вписанной въ эту дугу ломаной, но меньше периметра любой описанной ломаной линіи.

Чтобы опредѣленіе это имѣло смыслъ, необходимо доказать, что такой отрѣзокъ существуетъ для всякой данной дуги и при томъ только одинъ. Докажемъ это. Вообразимъ, что въ данную дугу мы вписали всевозможныя ломаныя линіи (правильныя и неправильныя). Положимъ далѣе, что для каждой ломаной мы нашли ея периметръ и полученные периметры отложимъ на какой-нибудь прямой AB (черт. 2) отъ одной и той же начальной на ней точки A въ одномъ и томъ же направленіи, напримѣръ, слѣва направо. Пусть одинъ



Черт. 2.

периметръ будетъ отрѣзокъ AM_1, другой — отрѣзокъ AM_2, третій — AM_3 и т. д., такъ что точки M_1, M_2, $M_3 \ldots$ (и вообще точки M) будутъ концы этихъ периметровъ. Подобно этому вообразимъ, что около данной дуги мы описали всевозможныя ломаныя линіи (конечно, имѣющія тѣ же концы, что и дуга), для каждой ломаной отыскали ея периметръ и полученные периметры отложили на той же прямой AB отъ той же начальной точки A и въ томъ же направленіи — слѣва направо. Пусть отрѣзки AN_1, AN_2, $AN_3 \ldots$ будутъ эти периметры, такъ что точки N_1, N_2, $N_3 \ldots$ (и вообще точки N) будутъ концы ихъ. Полученныя такимъ образомъ точки M и N (число тѣхъ и другихъ надо представлять себѣ безконечно большимъ) должны обладать слѣдующими тремя свойствами:

1) Каждая точка M лежитъ налѣво отъ каждой точки N, такъ какъ периметръ любой вписанной ломаной меньше периметра любой описанной ломаной.

2) Всегда можно найти такія двѣ точки, одну изъ точекъ M, другую изъ точекъ N, что разстояніе между ними будетъ меньше любого даннаго отрѣзка прямой, какъ бы малъ этотъ отрѣзокъ ни былъ.

Это сдѣлается вполнѣ яснымъ, если обратимъ вниманіе на то, что въ числѣ всевозможныхъ ломаныхъ линій, которыя мы предполагали вписанными и описанными, должны находиться также и правильныя ломаныя, а для такихъ ломаныхъ было доказано (въ леммѣ 2-ой), что разность между периметромъ описанной и периметромъ вписанной ломаной линіи, при неограниченномъ возрастаніи числа сторонъ ихъ, стремится къ нулю.

3) Никакая точка M не можетъ оказаться крайней правой и никакая точка N не можетъ оказаться крайней лѣвой, такъ какъ нѣтъ вписанной ломанной съ наибольшимъ периметромъ и нѣтъ описанной ломаной съ наименьшимъ периметромъ.

Принявъ во вниманіе эти три свойства точекъ M и N, мы можемъ утверждать, что на прямой AB существуетъ нѣкоторая точка X и только одна, которая отдѣляетъ область точекъ M отъ области точекъ N. Чтобы сдѣлать нагляднымъ существованіе такой точки и ея единственность, прибѣгнемъ къ извѣстной иллюстраціи I. Таннери (Jules Tannery) (см., напримѣръ, его „Leçons d'algèbre et d'analyse“, стр. 14), которой я воспользовался въ моей „Элементарной алгебрѣ“ (§ 204) при установленіи ирраціональнаго значенія $\sqrt[m]{A}$. Вообразимъ, что всѣ точки M и вся та часть прямой AB, которая расположена налѣво отъ любой точки M, окрашена въ одинъ цвѣтъ, напримѣръ, въ зеленый, а всѣ точки N и вся та часть прямой AB, которая расположена направо отъ любой точки N, окрашена въ другой цвѣтъ, напримѣръ, въ красный. Тогда окажется, что окрашенныя части прямой не могутъ налегать одна на другую, такъ какъ изъ точекъ M нѣтъ ни одной, которая лежала бы правѣе какой-нибудь изъ точекъ N. Окрашенныя части прямой не могутъ и соприкасаться другъ съ другомъ вплотную, такъ какъ если бы это было, то изъ точекъ M была бы крайняя направо, а изъ точекъ N была бы крайняя налѣво, что противорѣчитъ указанному выше свойству 3-му точекъ M и N. Слѣдовательно, должна существовать какая-нибудь неокрашенная граница, отдѣляющая зеленую часть прямой отъ красной. Эта граница не можетъ быть отрѣзкомъ прямой, какъ бы малъ онъ ни былъ, такъ какъ, если бы такой отрѣзокъ существовалъ, то тогда разстояніе между любою точкою M и любою точкою N не могло бы сдѣлаться меньшимъ этого отрѣзка, что противорѣчитъ свойству 2-му точекъ M и N. Эта граница не можетъ быть и пустымъ пространствомъ, такъ какъ прямую линію мы представляемъ себѣ непрерывною, безъ какихъ бы то ни было разрывовъ*). Остается одно возможное допущеніе: границею между зеленою и красною частями прямой служитъ нѣкоторая неокрашенная точка, (напримѣръ, на чертежѣ 2 точка X) и только одна. Такъ какъ эта точка лежитъ направо отъ всѣхъ точекъ M и налѣво отъ всѣхъ точекъ N, то отрѣзокъ AX больше периметра любой вписанной ломаной линіи и меньше периметра любой описанной ломаной. Этотъ отрѣзокъ и принимается, по опредѣленію, за длину дуги.

Все, сказанное о дугѣ, конечно, можетъ быть отнесено и къ цѣлой окружности; такъ что за длину окружности принимаютъ, по опредѣленію, длину такого отрѣзка прямой, который больше периметра любого вписаннаго многоугольника (конечно, выпуклаго), но меньше периметра любого описаннаго многоугольника.

Послѣ этого легко установить слѣдующія два предложенія (ихъ можно помѣстить въ мелкомъ шрифтѣ, какъ это сдѣлано и теперь въ моей „Элементарной геометріи"): 1) Равныя дуги имѣютъ и равныя длины. 2) Длина суммы дугъ равна суммѣ длинъ этихъ дугъ.

Сравнивая изложенное здѣсь о длинѣ дуги съ общеизвѣстнымъ изложеніемъ (§ 286), основаннымъ на понятіи предѣла, можно указать слѣдующія два достоинства новаго изложенія:

1) Оно съ самаго начала простыми, но вмѣстѣ съ тѣмъ вполнѣ научными соображеніями устанавливаетъ точное понятіе о длинѣ дуги, тогда какъ изложеніе помощью предѣловъ допускаетъ (по крайней мѣрѣ, въ началѣ) безъ доказательства, что предѣлъ периметровъ ломанныхъ вписанныхъ линій существуетъ и не зависитъ отъ рода вписыванія; доказательство этого предложенія по сложности своей мало доступно пониманію учениковъ среднихъ классовъ (почему обыкновенно и излагается мелкимъ шрифтомъ, §§ 297, 298), а въ старшихъ классахъ оно едва ли проходится по недостатку времени.

2) При этомъ изложеніи совершенно устраняется надобность въ особомъ доказательствѣ теоремы (§ 288), что длина дуги больше стягивающей ее хорды, но меньше всякой ломаной, описанной около этой дуги и имѣющей съ нею одни и тѣ же концы, и въ особомъ разъясненіи слѣдствія изъ этой теоремы (§ 290), что длина окружности больше периметра вписаннаго выпуклаго многоугольника, но меньше и т. д.

---

*) Аксіому непрерывности Дедекинда можно, при желаніи, формулировать вполнѣ точно, но можно и ограничиться однимъ интуитивнымъ воспріятіемъ непрерывности.

Преимущества эти настолько цѣнны, что ради нихъ мнѣ кажется, полезно было бы замѣнить изложенiе, основанное на понятiе предѣла, этимъ новымъ изложенiемъ, основаннымъ на аксiомѣ непрерывности.

Прежде, чѣмъ продолжать дальнѣйшее изложенiе намѣченныхъ вопросовъ, сдѣлаемъ слѣдующее отступленiе. Если говорить не только о курсѣ элементарной геометрiи, а о курсѣ элементарной математики вообще, то едва ли представляется возможнымъ и желательнымъ совершенно изгнать изъ этого курса начала теорiи предѣловъ. Вспомнимъ хотя бы о безконечныхъ геометрическихъ прогрессiяхъ, о перiодическихъ дробяхъ, объ общемъ опредѣленiи касательной и пр. (не говоря уже о началахъ анализа безконечно малыхъ). Замѣтимъ по этому поводу, что въ проектируемыхъ новыхъ программахъ математики для среднихъ школъ (см. Журн. Мин. Нар. Просв., декабрь, 1915 г.) начала теорiи предѣловъ значатся (въ курсѣ алгебры), и прохожденiе тѣхъ геометрическихъ вопросовъ, которые требуютъ примѣненiя теорiи предѣловъ, отнесено къ тому учебному времени, когда учащiеся уже ознакомились съ основанiями этой теорiи. Поэтому въ дальнѣйшемъ изложенiи я не буду себѣ ставить цѣлью во что бы то ни стало совершенно избѣгнуть теорiи предѣловъ; если гдѣ либо окажется, что ея примѣненiе упрощаетъ изложенiе, тамъ избѣгать этой теорiи нѣтъ основаній.

Такимъ образомъ, я буду предполагать, что учащимися предварительно пройдена глава „Измѣренiе величинъ" и, слѣдовательно, имъ указана возможность выражать отрѣзки прямыхъ числами, рацiональными или иррацiональными. Пройдены ими также §§ 276—279, въ которыхъ говорится о величинахъ постоянныхъ и перемѣнныхъ, о перемѣнныхъ, стремящихся къ нулю и увеличивающихся безпредѣльно, и о предѣлѣ перемѣнной. Изъ двухъ основныхъ теоремъ о предѣлахъ достаточно пройти только первую (если двѣ перемѣнныя... остаются равными, то равны и ихъ предѣлы). Что касается второй (если двѣ перемѣнныя... сохраняютъ одно и то же отношенiе, то...), то ее лучше формулировать позже, какъ это будетъ сдѣлано въ настоящей статьѣ. Можно совсѣмъ выпустить § 283 („Основное начало способа предѣловъ") и § 284 („Понятiе о способѣ предѣловъ"); при томъ изложенiи предмета, о которомъ говорится въ этой статьѣ, въ нихъ не оказывается никакой надобности, а между тѣмъ по своему отвлеченоому содержанiю и отсутствiю научнаго обоснованiя эти параграфы не могутъ быть хорошо поняты учащимися. Но за то полезно будетъ дополнить главу о предѣлахъ установленiемъ нѣкоторыхъ простѣйшихъ теоремъ о числахъ, стремящихся къ нулю, напримѣръ, слѣдующихъ трехъ:

1) если каждое слагаемое стремится къ нулю, а число слагаемыхъ не безконечно велико, то и сумма стремится къ нулю;

2) Если одинъ изъ сомножителей стремится къ нулю, а другой не увеличивается безпредѣльно, то и произведеніе стремится къ нулю;

3) если произведеніе стремится къ нулю, то по крайней мѣрѣ одинъ изъ сомножителей стремится къ нулю.

Кромѣ того, надо доказать теоремы о предѣлѣ суммы и произведенія.

Вернемся теперь къ продолженію нашего изложенія. Установивъ понятіе о длинѣ окружности, надо затѣмъ доказать теорему, что длины окружностей пропорціональны ихъ радіусамъ. I. Таннери въ своихъ „Leçons d'algèbre et d'analyse“ ничего не говоритъ о доказательствѣ этой теоремы, а въ своихъ „Notions de mathématiques“ даетъ не вполне строгое доказательство (стр. 99-ая). Равнымъ образомъ, и въ энциклопедіи Вебера и Вельштейна теорема эта недостаточно обоснована. С. А. Богомоловъ въ докладѣ своемъ („Аксіома непрерывности, какъ основаніе для опредѣленія длины окружности, площади круга, поверхностей и объемовъ круглыхъ тѣлъ“) прочитанномъ имъ въ собраніи преподавателей математики въ Соляномъ Городкѣ (въ октябрѣ 1915 г.), приводитъ чисто геометрическое доказательство этой теоремы, совершенно независимое отъ теоріи предѣловъ (доказательство это было имъ найдено въ запискахъ, оставшихся послѣ покойнаго К. В. Фохта, читавшаго лекціи по геометріи на Педагогическихъ Женскихъ Курсахъ). Изложимъ его здѣсь.

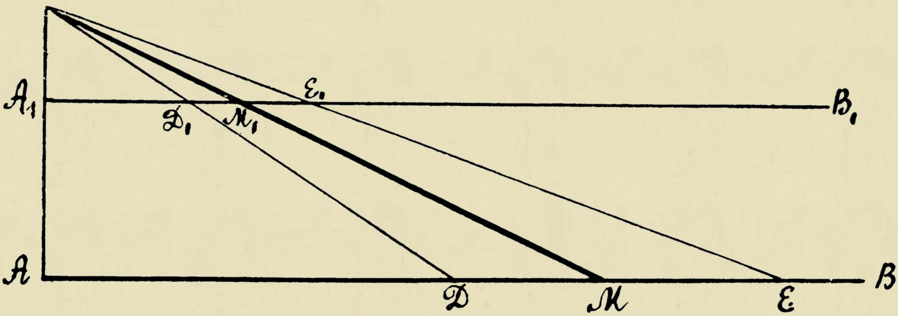
Пусть C будетъ длина окружности радіуса R и C_1 — длина окружности радіуса R_1 (черт. 3). Требуется доказать, что $C_1 : C = R_1 ; R$. Съ этой цѣлью возьмемъ какую-нибудь прямую AB и изъ произвольной ея точки A возставимъ перпендикуляръ, на которомъ отложимъ $AO = R$ $OA_1 = R_1$; затѣмъ черезъ A_1 проведемъ $A_1B_1 \parallel AB$. Пусть AM будетъ отрѣзокъ, равный C (для уменьшенія размѣра чертежа мы сократили масштабъ въ горизонтальномъ направленіи) и M_1 точка пересѣченія прямыхъ OM и A_1B_1. Докажемъ, что при этихъ условіяхъ отрѣзокъ A_1M_1 долженъ равняться C_1. Предположимъ, что въ окружность радіуса R_1 вписанъ какой-нибудь многоугольникъ, а въ окружность радіуса R вписанъ многоугольникъ подобный; пусть периметръ перваго будетъ p_1, второго p. Тогда, какъ извѣстно:

$$p_1 : p = R_1 : R.$$

Отложимъ $A_1D_1 = p$ (при чемъ пока намъ неизвѣстно, расположится ли точка D_1 налѣво отъ M_1, или направо) и проведемъ черезъ O и D_1 прямую, которая пересѣчется съ AB въ точкѣ D. Изъ подобія треугольниковъ находимъ:

$$A_1D_1 : AD = OA_1 : OA, \quad \text{т. е.} \quad p_1 : AD = R_1 : R. \qquad (2)$$

Сравнивая эту пропорцію съ формулой (1), видимъ, что $AD = p$. Но согласно опредѣленію $p < C$; значитъ, точка D должна лежать налѣво отъ M; поэтому и лучъ OD долженъ лежать налѣво отъ луча OM, и, слѣдовательно, точка D_1 должна расположиться налѣво отъ точки M_1. Такимъ образомъ, мы видимъ, что, если периметры



Черт. 3.

многоугольниковъ, вписанныхъ въ кругъ радіуса R_1, мы будемъ откладывать на A_1B_1 отъ точки A_1 вправо, то концы этихъ периметровъ должны оказаться лежащими налѣво отъ точки M_1. Совершенно такъ же убѣдимся, что если на прямой A_1B_1 будемъ откладывать отъ A_1 вправо периметры многоугольниковъ, описанныхъ около круга радіуса R_1, то ихъ концы расположатся направо отъ M_1. Теперь мы видимъ, что отрѣзокъ A_1M_1 больше периметра любого многоугольника, вписаннаго въ кругъ радіуса R_1, но меньше периметра любого многоугольника, описаннаго около этого круга; значитъ, отрѣзокъ A_1M_1 и есть тотъ, который принимается за длину окружности радіуса R_1, $A_1M_1 = C_1$. Изъ подобія треугольниковъ выводимъ: $A_1M_1 : AM = R_1 : R$, т. е. $C_1 : C = R_1 : R$, что и требовалось доказать.

Съ научной точки зрѣнія противъ этого доказательства ничего нельзя возразить. Съ педагогической же точки зрѣнія оно представляется нѣсколько сложнымъ и во всякомъ случаѣ требуетъ особаго чертежа. Мнѣ кажется, что если не стремиться совершенно изгнать теорію предѣловъ изъ курса элементарной геометріи, то обыкновенное доказательство проще изложеннаго. Если предпочесть это обыкновенное доказательство, то тогда придется предварительно установить, что длина окружности (опредѣленная такъ, какъ было изложено выше) есть общій предѣлъ правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ, что можно сдѣлать чрезвычайно просто. Въ самомъ дѣлѣ, если p и P периметры правильныхъ одноименныхъ многоугольниковъ, вписаннаго и описаннаго, и C длина окружности, то, по опредѣленію, величина C заключается всегда между

p и P; поэтому каждая изъ разностей: $P-C$ и $C-p$ меньше разности $P-p$, и такъ какъ эта послѣдняя разность, при неограниченномъ увеличенiи числа сторонъ многоугольниковъ, стремится къ нулю (согласно леммѣ 1-й), то то же, и подавно, можно сказать о разностяхъ $P-C$ и $C-p$, а это значитъ, что C есть общiй предѣлъ p и P. Тогда доказательство теоремы объ отношенiи длинъ окружностей можно вести такъ. Положивъ $p=C-a$ и $p_1=C_1-a_1$, мы пропорцiю $p:p_1=R:R_1$ можемъ написать такъ: $(C-a):(C_1-a_1)=R:R_1$. Если всѣ величины, входящiя въ эту пропорцiю, выражены числами, то она дѣлается числовою, и мы изъ нея находимъ:

$$(C-a)\,R_1=(C_1-a_1)\,R, \quad \text{т. е.} \quad CR_1-aR_1=C_1R-a_1R,$$

или

$$CR_1-C_1R=aR_1-a_1R.$$

Пусть число сторонъ вписанныхъ многоугольниковъ неограниченно возрастаетъ. Тогда перемѣнные периметры p и p_1 будутъ стремиться къ своимъ предѣламъ C и C_1, и потому числа a и a_1 будутъ перемѣнными, стремящимися къ нулю; при этихъ условiяхъ послѣднее равенство, выведенное нами, возможно лишь при условiи: $aR_1=a_1R$ (и, слѣдовательно, $CR_1=C_1R$), такъ какъ иначе получилась бы нелѣпость, что постоянное число равно перемѣнному. Если же $CR_1=C_1R$, то $C:C_1=R:R_1$.

Обобщая затѣмъ это доказательство, можно формулировать общую истину о предѣлахъ: если двѣ перемѣнныя... сохраняютъ одно и то же отношенiе, то въ томъ же отношенiи находятся и ихъ предѣлы.

Перейдемъ теперь къ вопросамъ о площади круга и о поверхностяхъ и объемахъ круглыхъ тѣлъ. Мы изложимъ эти вопросы сначала съ точки зрѣнiя опредѣленiй, аналогичныхъ изложенному выше опредѣленiю длины окружности, а потомъ — опредѣленiй, основанныхъ на понятiи предѣла, и, наконецъ, сравнимъ то и другое изложенiе.

Площадь круга.

Лемма. Разность между площадью правильнаго многоугольника, описаннаго около круга, и площадью одноименнаго правильнаго многоугольника, вписаннаго въ тотъ же кругъ, при неограниченномъ возрастанiи числа сторонъ этихъ многоугольниковъ стремится къ нулю.

Доказательство. Пусть Q будетъ площадь описаннаго правильнаго многоугольника, q — площадь одноименнаго вписаннаго, P — периметръ перваго, p — периметръ второго, R — радіусъ и a — апоѳема вписаннаго многоугольника, при чемъ мы предполагаемъ, что эти буквы означаютъ численныя значенія указанныхъ геометрическихъ объектовъ. Тогда:

$$Q-q = {}^1/_2\, PR - {}^1/_2\, pa = {}^1/_2\, (PR - pa).$$

При неограниченномъ возрастаніи числа сторонъ многоугольниковъ, разчость $PR - pa$ стремится къ нулю. Дѣйствительно, эту разность можно представить такъ:

$$PR - pa = PR - Pa + Pa - pa = P(R-a) + a(P-p).$$

По доказанному прежде, каждая изъ разностей: $R-a$ и $P-p$ стремится къ нулю; значитъ, правая часть послѣдняго равенства (слѣдовательно, и его лѣвая часть) стремится къ нулю (конечно, здѣсь придется сослаться на тѣ теоремы о числахъ, стремящихся къ нулю, о которыхъ мы говорили ранѣе).

Опредѣленіе. За численную величину площади круга принимаютъ такое число, которое больше всѣхъ чиселъ, измѣряющихъ площади вписанныхъ въ этотъ кругъ многоугольниковъ, но меньше всѣхъ чиселъ, измѣряющихъ площади описанныхъ около него многоугольниковъ.

Такое число существуетъ, именно число ${}^1/_2\, CR$. Дѣйствительно, это число меньше всякаго числа, измѣряющаго площадь описаннаго многоугольника, т. е. меньше всякаго числа вида ${}^1/_2\, PR$, такъ какъ, по опредѣленію, C меньше всякаго P. Остается, значитъ, показать, что ${}^1/_2\, CR$ больше всякаго числа, измѣряющаго площадь вписаннаго многоугольника. Пусть стороны какого-нибудь вписаннаго многоугольника будутъ $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$, а перпендикуляры, опущенные на эти стороны изъ центра круга, пусть будутъ соотвѣтственно: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$; тогда площадь q многоугольника выразится:

$$q = {}^1/_2\, (b_1a_1 + b_2a_2 + \cdots + b_na_n).$$

Пусть a_k есть наибольшій (не меньшій ни одного изъ остальныхъ) изъ всѣхъ перпендикуляровъ; тогда:

$$q \leqslant {}^1/_2\, (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n)\, a_k, \quad \text{т. е.} \quad q \leqslant pa_k.$$

Но $C > p$ и $R > a_k$; значитъ, ${}^1/_2\, CR > {}^1/_2\, pa_k$ и потому ${}^1/_2\, CR > q$.

Конечно, послѣднее разсужденіе упростилось бы, если бы мы сузили смыслъ опредѣленія, разумѣя въ немъ только правильные многоугольники.

Число, удовлетворяющее требованію теоремы, можетъ быть только одно, такъ какъ если бы были два числа, то разность между площадью описаннаго и площадью вписаннаго многоугольниковъ никогда (даже и для правильныхъ многоугольниковъ) не могла бы сдѣлаться меньшею разности этихъ чиселъ, что противорѣчитъ доказанной выше леммѣ.

Легко затѣмъ показать, что площадь круга есть общій предѣлъ, къ которому стремятся площади правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ, когда число сторонъ ихъ неограниченно увеличивается, что разъясняется совершенно такъ же, какъ аналогичное предложеніе для длины окружности.

Замѣчаніе. Все сказанное о площади круга, конечно, можно съ незначительными измѣненіями повторить о площади кругового сектора.

Боковыя поверхности цилиндра и конуса.

Лемма. Разность между боковыми поверхностями двухъ правильныхъ одноименныхъ призмъ (пирамидъ) одной, описанной около цилиндра (конуса) и другой, вписанной въ него, стремится къ нулю, когда число ихъ граней неограниченно увеличивается.

Доказательство. Для цилиндра эта разность есть $PH-pH=$ $=H(P-p)$, и такъ какъ множитель $P-p$, по доказанному раньше, стремится къ нулю, а H есть число постоянное, то и произведеніе $H(P-p)$ стремится къ нулю.

Для конуса мы будемъ имѣть:

$$1/2\,PL-1/2\,pl=1/2\,(PL-Pl+Pl-pl)=1/2\,[P(L-l)+l(P-p)]$$

и, слѣдовательно, приходимъ къ тому же выводу.

Опредѣленіе. За численную величину боковой поверхности цилиндра (конуса) принимаютъ такое число, которое больше всѣхъ чиселъ, измѣряющихъ боковыя поверхности призмъ (пирамидъ), вписанныхъ въ этотъ цилиндръ (конусъ), и меньше всѣхъ чиселъ, измѣряющихъ боковыя поверхности призмъ (пирамидъ), описанныхъ около него.

Такое число существуетъ, именно CH для призмы и $1/2\,CL$ для конуса, что видно изъ неравенствъ:

$$PH>CH>pH,\quad 1/2\,PL>1/2\,CL>1/2\,pl_k,$$

гдѣ l_k есть наибольшій (не меньшій ни одного изъ остальныхъ) изъ перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ вершины конуса на стороны основанія вписанной пирамиды.

Такое число есть только одно, такъ какъ если бы было два такихъ числа, то разность между боковою поверхностью описанной призмы (пирамиды) и боковой поверхностью вписанной никогда не могла бы сдѣлаться меньшею разности этихъ чиселъ, что противорѣчитъ доказанной выше леммѣ.

Такимъ же путемъ можно опредѣлить и найти также боковую поверхность усѣченнаго конуса.

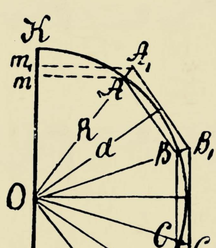
Объемъ цилиндра и конуса.

Совершенно такъ же опредѣляется и находится численная величина объема цилиндра и конуса.

Объемъ усѣченнаго конуса всего проще найти, какъ разность объемовъ полныхъ конусовъ (§ 476).

Поверхность и объемъ шара.

При опредѣленіи поверхности и объема шарового пояса встрѣчается затрудненіе особаго рода: если ломанныя линіи ($ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ черт. 4), вписанную и описанную около дуги (AD), производящей своимъ вращеніемъ вокругъ діаметра (KL) шаровой поясъ, предположимъ неправильными, то затруднительно будетъ составить удобныя формулы для поверхностей и объемовъ тѣлъ, производимыхъ вращеніемъ этихъ ломанныхъ. Приходится въ самомъ опредѣленіи говорить о правильныхъ ломанныхъ линіяхъ, при чемъ объ описанной линіи надо еще оговорить, что ея стороны параллельны сторонамъ вписанной (и, слѣдовательно, концы ея не совпадаютъ съ концами дуги).



Черт. 4.

Опредѣленіе. За численную величину поверхности шарового пояса принимаютъ такое число, которое больше всѣхъ чиселъ, измѣряющихъ поверхности, производимыя вращеніемъ правильныхъ ломанныхъ линій, вписанныхъ въ дугу, производящую шаровой поясъ, и меньше всѣхъ чиселъ, измѣряющихъ поверхности, производимыя вращеніемъ правильныхъ ломанныхъ, описанныхъ около той же дуги.

Такое число существуетъ, именно число $2\pi R \,.\, H$ (если H есть высота mn шарового пояса), что видно изъ двойного неравенства:

$$2\pi R \,.\, m_1 n_1 > 2\pi R H > 2\pi a H.$$

Такое число только одно, такъ какъ разность между крайними членами этого неравенства стремится къ нулю (что легко обнаружить).

Такъ же опредѣляется и находится объемъ шарового сектора.

Объемъ треугольной пирамиды.

Быть можетъ, не лишнимъ будетъ замѣтить здѣсь, что описанный пріемъ можно примѣнить и къ объему треугольной пирамиды, если только предварительно установить формулу для суммы квадратовъ натуральныхъ чиселъ:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.\,^{*)}$$

Положимъ, что въ пирамидѣ мы построили рядъ призмъ, выходящихъ нѣкоторыми своими частями изъ предѣловъ пирамиды, и другой рядъ призмъ, входящихъ внутрь пирамиды, т. е. мы сдѣлали тотъ чертежъ, который ученики иногда называютъ „чертовой лѣстницей“. Составимъ двѣ формулы, выражающія, съ одной стороны, сумму объемовъ всѣхъ призмъ выходящихъ, съ другой стороны, сумму объемовъ всѣхъ призмъ входящихъ. Пусть H есть высота пирамиды, h — высота каждой призмы, n — число сѣченій (вмѣстѣ съ основаніемъ), s — площадь верхняго сѣченія и B площадь основанія. Тогда площади сѣченій, начиная отъ вершины, будутъ:

$$s,\ s \,.\, 2^2,\ s \,.\, 3^2, \ldots,\ s \,.\, n^2 = B$$

и, слѣдовательно, сумма объемовъ выходящихъ призмъ выразится такъ:

$$sh + 2^2 sh + 3^2 sh + \cdots + n^2 sh = sh(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) =$$

$$= sh \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{shn(2n^2+3n+1)}{6} = \frac{hn \,.\, sn^2\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{6} =$$

$$= HB\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) = \frac{1}{3}BH + \frac{1}{2n}BH + \frac{1}{6n^2}BH. \qquad (a)$$

---

*) Въ §§ 335 и 336 моей „Элементарной алгебры“, какъ примѣненіе бинома Ньютона, дается выводъ формулъ для суммы одинаковыхъ степеней чиселъ натуральнаго ряда; въ частности, для суммы квадратовъ, этотъ выводъ значительно упрощается, основываясь только на знаніи формулы для куба суммы.

Сумма объемовъ призмъ входящихъ должна быть меньше найденной суммы на объемъ одной нижней призмы, т. е. на $B \,.\, 1/n\, H$; поэтому сумма эта будетъ:

$$\frac{1}{3}BH - \frac{1}{2n}BH + \frac{1}{6n^2}BH = \frac{1}{3}BH + BH\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}\right). \qquad (\beta)$$

Изъ разсмотрѣнія найденныхъ двухъ формулъ видно, что число $^1/_3\, BH$ больше всѣхъ тѣхъ чиселъ, которыя измѣряютъ сумму объемовъ призмъ входящихъ, и меньше всѣхъ тѣхъ, которыя измѣряютъ сумму объемовъ призмъ выходящихъ. Другого такого числа быть не можетъ, такъ какъ разность между двумя этими суммами есть число, стремящееся къ нулю при безграничномъ возрастаніи числа сѣченій. Значитъ, если за численную величину объема треугольной пирамиды условиться брать такое число, которое больше (β) и вмѣстѣ съ тѣмъ меньше (α), то эта величина и есть $^1/_3\, BH$.

Тѣ же вопросы, рѣшаемые помощью предѣловъ.

Замѣтимъ, что въ нижеслѣдующихъ опредѣленіяхъ мы могли бы вездѣ говорить о б ъ о б щ е м ъ п р е д ѣ л ѣ вписанныхъ и описанныхъ ломанныхъ линій (призмъ, пирамидъ). Только для упрощенія изложенія мы говоримъ въ нихъ о предѣлѣ лишь в п и с а н н ы х ъ ломанныхъ линій (призмъ, пирамидъ), какъ это принято во многихъ французскихъ учебникахъ геометріи. Кромѣ того, съ тою же цѣлью, мы говоримъ не о какихъ-либо ломанныхъ линіяхъ, а только о п р а в и л ь н ы х ъ, такъ какъ предполагается, что ранѣе, въ главѣ объ опредѣленіи длины окружности, было лишь установлено, что эта длина есть предѣлъ периметровъ п р а в и л ь н ы х ъ, а не какихъ-либо ломанныхъ линій. Мелкимъ шрифтомъ, для дополненія курса, можно обобщить опредѣленія на ломанныя линіи какія угодно.

Площадь круга. З а ч и с л е н н у ю в е л и ч и н у п л о щ а д и к р у г а п р и н и м а ю т ъ (по опредѣленію) п р е д ѣ л ъ, к ъ к о т о р о м у с т р е м и т с я ч и с л е н н а я в е л и ч и н а п л о щ а д и в п и с а н н а г о п р а в и л ь н а г о м н о г о у г о л ь н и к а, к о г д а ч и с л о с т о р о н ъ е г о н е о г р а н и ч е н н о в о з р а с т а е т ъ.

Предѣлъ этотъ существуетъ и равенъ $^1/_2\, CR$. Дѣйствительно, площадь q правильнаго вписаннаго многоугольника равна $^1/_2\, pa$ и потому:

$$\text{пред. } q = \text{пред. } (^1/_2\, pa) = {}^1/_2\, (\text{пред. } p)\ (\text{пред. } a) = {}^1/_2\, CR.$$

Цилиндръ и конусъ. З а ч и с л е н н у ю в е л и ч и н у б о к о в о й п о в е р х н о с т и ц и л и н д р а (конуса) п р и н и м а ю т ъ (по опредѣленію) п р е д ѣ л ъ, к ъ к о т о р о м у с т р е м и т с я ч и с л е н н а я в еличина боковой поверхности правильной вписанной призмы (пирамиды), когда число боковыхъ граней ея неограниченно возрастаетъ.

Такой предѣлъ существуетъ и равенъ CH для цилиндра и $\frac{1}{2}CL$ для конуса. Дѣйствительно, такъ какъ боковая поверхность правильной вписанной призмы равна pH, а пирамиды $\frac{1}{2}pl$, то предѣлы, о которыхъ говорится въ опредѣленіи, будутъ:

$$\text{пред. } (pH) = (\text{пред. } p)\, H = CH$$

и

$$\text{пред. } (\tfrac{1}{2}pl) = \tfrac{1}{2}(\text{пред. } p)\,(\text{пред. } l) = \tfrac{1}{2}\,CL.$$

Подобнымъ же образомъ опредѣляются и объемы цилиндра и конуса.

Боковую поверхность и объемъ усѣченнаго конуса всего проще найти, какъ разность боковыхъ поверхностей и объемовъ двухъ полныхъ конусовъ. Правда, боковую поверхность легко также найти, какъ предѣлъ боковыхъ поверхностей правильныхъ вписанныхъ усѣченныхъ пирамидъ, т. е. какъ предѣлъ выраженія $\frac{1}{2}(p_1+p_2)\,l$; но для нахожденія объема усѣченнаго конуса, опредѣленнаго, какъ предѣлъ объемовъ вписанныхъ правильныхъ усѣченныхъ пирамидъ, пришлось бы отыскивать предѣлъ выраженія $\frac{1}{3}H(B+b+\sqrt{Bb})$, а для этого понадобилось бы предварительно установить теорему о предѣлѣ конуса.

Шаръ. За численную величину поверхности шароваго пояса принимаютъ (по опредѣленію) предѣлъ, къ которому стремится численная величина поверхности, образуемой вращеніемъ правильной ломаной линіи, вписанной въ дугу, производящую шаровой поясъ, когда число сторонъ этой ломаной неограниченно возрастаетъ.

Такой предѣлъ существуетъ и равенъ $2\pi RH$, такъ какъ

$$\text{пред. } (2\pi aH) = 2\pi\,(\text{пред. } a)\, H = 2\pi RH.$$

Подобнымъ же образомъ опредѣляется и объемъ шарового сектора.

Сопоставляя изложеніе, приведенное нами раньше, съ изложеніемъ, основаннымъ на понятіи предѣла, не трудно видѣть, что послѣднее и короче и проще. Не только потому, что въ этихъ опредѣленіяхъ мы говоримъ о правильныхъ ломанныхъ линіяхъ, тогда какъ въ первыхъ рѣчь идетъ о ломанныхъ какихъ угодно (мы могли бы въ этомъ отношеніи уравнять оба изложенія), но потому, во первыхъ, что въ изложеніи, основанномъ на понятіи предѣла, нѣтъ надобности передъ каждымъ опредѣленіемъ предварительно устанавливать тѣ леммы, которыя были намъ нужны при первомъ изложеніи для доказательства единственности опредѣляемаго числа; во вторыхъ, и самыя опредѣленіе короче (и даже, такъ сказать, содержательнѣе), такъ какъ они не заключаютъ въ себѣ двойственности значенія опредѣляемаго числа (вмѣсто: „оно больше того-то и меньше того-то", утверждается прямо: „оно есть то-то). Даже и при отысканіи объема треугольной пирамиды тѣмъ способомъ (выходящихъ и входящихъ призмъ), о которомъ было говорено выше, способъ предѣловъ быстрѣе даетъ нужный результатъ, такъ какъ изъ формулы для суммы объемовъ призмъ прямо видно, что предѣлъ ея равенъ $^1/_3\,BH$.

Поэтому мнѣ думается, что въ курсѣ элементарной геометріи среднихъ школъ изложеніе, основанное на аксіомѣ непрерывности, полезно примѣнить только для опредѣленія длины окружности; въ остальныхъ же разсмотрѣнныхъ нами вопросахъ предпочтительнѣе методъ предѣловъ сведенный къ наибольшей своей простотѣ.

Рѣшеніе въ цѣлыхъ числахъ уравненія $a^x - b^y = 1$.

(*a* и *b* — простыя числа).

В. Колодій.

Разсмотримъ сперва случай, когда $a = 2$. Въ этомъ предположеніи наше уравненіе:

$$a^x - b^y = 1 \tag{1}$$

можно послѣдовательно записать въ видѣ:

$$2\,(2^{x-1} - 1) = b^y - 1 = (b-1)\,(b^{y-1} + b^{y-2} + \cdots + b + 1),$$

$$2^{x-1} - 1 = \frac{b-1}{2}\,(b^{y-1} + b^{y-2} + \cdots + b + 1).$$

Изъ уравненія:

$$2\,(2^{x-1} - 1) = b^y - 1$$

видно, что b нечетное число, а потому $\frac{b-1}{2}$ — цѣлое число.

Если такъ, то множитель

$$b^{y-1} + b^{y-2} + \cdots + b + 1 \tag{2}$$

не можетъ быть четнымъ числомъ, ибо вышло бы, что четное число

$$\frac{b-1}{2}(b^{y-1}+b^{y-2}+\cdots+b+1)$$

равнялось бы нечетному: $2^{x-1}-1$.

Итакъ, сумма (2) представляетъ нечетное число, что, очевидно, возможно въ томъ случаѣ, когда y — нечетное число. Отсюда слѣдуетъ, что b^y+1 дѣлится на $(b+1)$. Но

$$b^y+1=2^x. \tag{3}$$

Слѣдовательно, 2^x дѣлится на $b+1$, такъ что $(b+1)$ — нѣкоторая положительная степень 2, т. е. $b=2^n-1$ (n — цѣлое положительное число).

Дѣля обѣ части уравненія (3) на $(b+1)$, будемъ имѣть:

$$b^{y-1}-b^{y-2}+b^{y-3}-\cdots+b^2-b+1=2^{x-n}.$$

Такъ какъ

$$b^{y-1}-b^{y-2}+\cdots+b^3-b+1$$

нечетное число, то должно быть

$$2^{x-n}=1 \quad \text{или} \quad x=n.$$

Въ такомъ случаѣ

$$y=1.$$

Итакъ, уравненіе

$$2^x-b^y=1$$

не имѣетъ цѣлыхъ рѣшеній, если простого числа b нельзя представить въ формѣ: 2^n-1; въ противномъ случаѣ допускаетъ единственное рѣшеніе въ цѣлыхъ числахъ, именно:

$$x=n, \quad y=1.$$

Будемъ теперь разсматривать тотъ случай, когда простое число a нечетное.

Уравненіе (1) можно переписать такъ:

$$a^x-1=b^y. \tag{4}$$

Но a^x-1 — четное число: слѣдовательно,

$$b=2.$$

Съ другой стороны, b^y дѣлится на $(a-1)$; стало быть, $(a-1)$ цѣлая положительная степень 2, т. е. простое число a должно быть вида:

$$2^n+1.$$

и уравненіе (4) принимаетъ слѣдующій видъ:

$$(2^n+1)^x-2^y=1$$

или

$$(2^n+1)^x-1=2^y. \qquad (5)$$

Этому уравненію мы удовлетворимъ, положивъ:

$$x=1, \quad y=n.$$

Будемъ искать другія цѣлыя рѣшенія уравненія (5), въ которыхъ $x>1$. Очевидно, что соотвѣтствующія значенія $y>n$.

Дѣля обѣ части равенства (5) на $(2^n+1)-1$, получимъ:

$$(2^n+1)^{x-1}+(2^n+1)^{x-2}+\cdots+(2^n+1)+1=\frac{2^y}{2^n}=2^{y-n}.$$

Ясно, что

$$(2^n+1)^{x-1}+(2^n+1)^{x-2}+\cdots+(2^n+1)+1$$

должно быть четнымъ числомъ, для этого необходимо, чтобы x было четнымъ числомъ; но тогда $(2^n+1)^x-1$ дѣлится также и на $2(2^{n-1}+1)$ и мы получаемъ, что 2^y должно дѣлиться на $2^{n-1}+1$; это возможно лишь въ томъ случаѣ, когда $n=1$.

Подставивъ въ уравненіе (5) вмѣсто n число 1, будемъ имѣть:

$$3^x-1=2^y \qquad (6)$$

или

$$2^y+1=3^x.$$

Отсюда видно, что y должно быть нечетнымъ.

Дѣля обѣ части уравненія (6) на 3, получимъ:

$$2^{y-1}-2^{y-2}+\cdots-2+1=3^{x-1}$$

откуда

$$(2^{y-1}-1)-(2^{y-2}+1)+(2^{y-3}-1)-\cdots+(2^2-1)-(2+1)+y=3^{x-1}.$$

Разности $(2^{y-1}-1)$, $(2^{y-2}+1)$, $(2^{y-3}-1)\cdots(2+1)$ кратны 3, а потому и y также кратно 3 и такъ какъ x четное, можемъ положить:

$$y=3\eta, \quad x=2\xi$$

и уравненіе (6) записать въ такомъ видѣ:

$$9^{\xi} - 1 = 8^{\eta}. \tag{7}$$

Это уравненіе не имѣетъ другихъ рѣшеній, кромѣ

$$\xi = 1, \quad \eta = 1.$$

Дѣйствительно, ξ не можетъ быть четнымъ числомъ, такъ какъ 8^{η} не дѣлится на $9+1=10$. Съ другой стороны, ξ не можетъ быть нечетнымъ числомъ превосходящимъ единицу, ибо, если бы это имѣло мѣсто, то, раздѣливъ обѣ части (7) на $9-1$, получили бы такое равенство:

$$9^{\xi-1} + 9^{\xi-2} + \cdots + 9 + 1 = 8^{\eta-1},$$

что невозможно, такъ какъ лѣвая часть его нечетное число, правая же часть четное. ($\eta - 1$ въ нуль обратиться не можетъ, такъ какъ при $\xi > 1$ η также больше единицы).

Итакъ, приходимъ къ слѣдующему заключенію: когда простое число a болѣе **2**, для рѣшенія уравненія:

$$a^x - b^y = 1$$

въ цѣлыхъ числахъ необходимо, чтобы $b = 2$ и, кромѣ того, a должно быть вида: $2^n + 1$. Когда эти условія соблюдены, уравненіе (1) допускаетъ рѣшеніе

$$x = 1, \quad y = n$$

и другихъ не имѣетъ, если n отлично отъ единицы; если же $n = 1$, т. е. два рѣшенія

$$x = 1, \ y = 1; \quad x = 2, \ y = 3.$$

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Свѣтящійся разрядъ въ газѣ при малыхъ разностяхъ потенціаловъ. При полученіи свѣтящагося разряда въ газѣ разность потенціаловъ на электродахъ трубки обыкновенно имѣетъ весьма значительную величину. Гитторфъ (Hittorf) первый обнаружилъ, что свѣтящійся разрядъ можно получить при значительно меньшей разности потенціаловъ, если катодъ трубки нагрѣвать до краснаго каленія. Позже Венельтъ (Wehnelt) построилъ свои извѣстныя трубки, въ которыхъ покрытый опредѣленными солями платиновый катодъ накаливается токомъ. Въ Венельтовскихъ трубкахъ свѣтящійся разрядъ получается при разности потенціаловъ въ 30 — 50 вольтъ.

Боровикъ и Павловъ для еще большаго уменьшенія разности потенціаловъ, необходимой для полученія свѣтящагося разряда, воспользовались трубкой съ обоими нагрѣваемыми элекгродами, которые состояли изъ платины. покрытой солями. При этомъ имъ удалось наблюдать появленіе свѣтящагося разряда въ водородѣ при разности потенціаловъ въ 28 вольтъ, а исчезновеніе его при разности потенціаловъ въ 18 вольтъ. Теоретически предѣльной величиной разности потенціаловъ для свѣченія водорода можно считать 11 вольтъ. Въ дальнѣйшихъ опытахъ Боровикъ и Павловъ намѣрены приблизиться къ этой величинѣ.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей профессора Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 307 (6 сер.). Въ выпукломъ четырехугольникѣ $ABCD$ даны отношенія $AD:DC$ и $AD:EF$, гдѣ EF — отрѣзокъ, дѣлящій стороны AB и CD въ данномъ отношеніи $m:n$ Доказать, что эгими условіями опредѣляется уголъ между прямыми AD и BC.

И. Александровъ (Москва).

№ 308 (6 сер.). Дано, что медіаны m_a и m_c треугольника ABC образуютъ съ сгороной AC углы, равные $31°15'42''$ и $28°44'18''$, и что площадь прямоугольника, построеннаго на этихъ медіанахъ, равна $\sqrt{3}$. Вычислить безъ помощи тригонометріи площадь треугольника ABC.

Г. Боевъ (Саратовъ).

№ 309 (6 сер.). Доказать, что сумма

$$2+2^2+2^3+\cdots+2^{(p-1)(q-1)\ldots(s-1)},$$

гдѣ p, q, ..., s — нечетныя простыя числа, дѣлится на произведеніе $pq\ldots s$.

М. Огородовъ (Самара).

№ 310 (6 сер.). Доказать, что произведенiе

$$xy(3x+2)(5y+2)$$

есть разность квадратовъ двухъ цѣлыхъ многочленовъ съ цѣлыми коэффицiентами.

(Заимств.),

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

Отдѣлъ I.

№ 256 (6 сер.). *Найти цѣлыя положительныя значенiя* x, *при которыхъ выраженiе*

$$x^{x+1}+(x+1)^{x}$$

дѣлится на 3.

Всякое цѣлое положительное число x можно представить въ одномъ изъ видовъ $3y$, $3y-1$, $3y+1$, гдѣ y въ первомъ и во второмъ случаѣ цѣлое положительное, а въ третьемъ — цѣлое неотрицательное число. Если $x=3y$ или $x=3y-1$, то данное выраженiе принимаетъ соотвѣтственно видъ $(3y)^{x+1}+(3y+1)^{x}$ или же $(3y-1)^{x+1}+(3y)^{x}$, а потому въ обоихъ случаяхъ разсматриваемое выраженiе не дѣлится на 3, такъ какъ оно приводится въ каждомъ изъ этихъ случаевъ къ суммѣ двухъ чиселъ, изъ которыхъ одно дѣлится, а другое не дѣлится на 3. Если же $x=3y+1$, то

$$(1)\quad x^{x+1}+(x+1)^{x}=\left[(3y+1)^{3y+2}-1^{3y+2}\right]+\left[(3y+2)^{3y+1}-2^{3y+1}\right]+(2^{3y+1}+1).$$

Выраженiя $(3y+1)^{3y+2}-1^{3y+2}$ и $(3y+2)^{3y+1}-2^{3y+1}$ въ правой части равенства (1) кратны соотвѣтственно разностей $(3y+1)-1$ и $(3y+2)-2$, т. е. кратны числа $3y$, и поэтому оба эти выраженiя дѣлятся на 3, а потому при $x=3y+1$ разсматриваемое выраженiе дѣлится или не дѣлится на 3, смотря по тому, дѣлится ли на 3 или не дѣлится сумма $2^{3y+1}+1$. Пусть y нечетное число. Изъ тожества

$$(2)\quad 2^{3y+1}+1=2(2^{3y}+1^{3y})-1$$

вытекаетъ въ этомъ случаѣ, что $2^{3y+1}+1$ не дѣлится на 3. Дѣйствительно, при y нечетномъ $3y$ также нечетное число, а потому сумма $2^{3y}+1^{3y}$ нечетныхъ степеней дѣлится на сумму $2+1$, т. е. на 3, откуда вытекаетъ, что [см. (2)] $2^{3y+1}+1$ не дѣлится на 3. Если же y четное число, то $3y+1$ нечетное число. Въ этомъ случаѣ, представивъ сумму $2^{3y+1}+1$ въ видѣ $2^{3y+1}+1^{3y+1}$, приходимъ къ заключенiю, что эта сумма нечетныхъ степеней дѣлится на сумму $2+1$, т. е. на 3 Итакъ, при $x=3y+1$ и $y=2t$, гдѣ t — любое цѣлое неотрицательное число, т. е. при $x=6t+1$, гдѣ t — любое цѣлое неотрицательное число, и только при этихъ значенiяхъ x выраженiе $x^{x+1}+(x+1)^{x}$ дѣлится на 3.

В. Поповъ (Валки, Харьковск. губ.); *М. Бабинъ* (ст. Дитковка); *Н. Михальскiй* (с. Попова Грабля); *А. Каменскiй* (ст. Озерки, Финл. ж. д.).

№ 260 (6 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$\frac{4x}{4x^2-8x+7}+\frac{3x}{4x^2-10x+7}=1.$$

При $x=0$ лѣвая часть уравненія обращается въ нуль, а потому навѣрно каждое изъ искомыхъ значеній x отлично отъ нуля. Поэтому числитель и знаменатель каждаго изъ дробныхъ членовъ лѣвой части можно раздѣлить на x, записавъ данное уравненіе въ видѣ

$$(1)\quad \frac{4}{4x-8+\frac{7}{x}}+\frac{3}{4x-10+\frac{7}{x}}=1.$$

Полагая (2) $4x+\frac{7}{x}=y$, приводимъ уравненіе (1) къ виду

$$(3)\quad \frac{4}{y-8}+\frac{3}{y-10}=1.$$

Преобразовавъ уравненіе (3) къ нормальному виду, получимъ $y^2-25y+144=0$, откуда $y_1=16$, $y_2=9$. Подставляя найденныя значенія y въ равенство (2), приходимъ къ уравненіямъ $4x+\frac{7}{x}=16$, $4x+\frac{7}{x}=9$, или же

$$4x^2-16x+7=0,\quad 4x^2-9x+7=0.$$

Рѣшивъ эти квадратныя уравненія, находимъ слѣдующія четыре значенія x:

$$x_1=\frac{7}{2},\quad x_2=\frac{1}{2},\quad x_{3,4}=\frac{9\pm i\sqrt{31}}{8},\quad \text{гдѣ } i=\sqrt{-1}.$$

В. Поповъ (Валки, Харьковск. губ.); *М. Х.* (Тифлисъ); *И. Богдановъ* (с. Лутковское); *N. N.* (Тифлисъ).

№ 261 (6 сер.). *Доказать, что во всякомъ параллелепипедѣ сумма квадратовъ діагоналей равна суммѣ квадратовъ всѣхъ его реберъ. Доказать это предложеніе вполнѣ элементарнымъ путемъ, а также съ помощью аналитической геометріи.*

Пусть $ABCDabcd$—нѣкоторый параллелепипедъ, $Ac=\delta_1$, $aC=\delta_2$, $Bd=\delta_3$, $bD=\delta_4$ — его діагонали. Полагая $Aa=\alpha$, $AB=\beta$, $AD=\gamma$, изъ параллелограмма $AacC$ находимъ, что (1) $\delta_1^2+\delta_2^2=2(\overline{AC}^2+\alpha^2)$, и подобнымъ же образомъ получимъ, что (2) $\delta_3^2+\delta_4^2=2(\overline{BD}^2+\alpha^2)$. Сложивъ равенства (1) и (2), получимъ

$$(3)\quad \delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2+\delta_4^2=4\alpha^2+2(\overline{AC}^2+\overline{BD}^2).$$

Но изъ параллелограмма $ABCD$ находимъ, что

$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=2(\beta^2+\gamma^2).$$

Подставляя это значеніе суммы $\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$ въ равенство (3), приходимъ къ равенству

$$\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2+\delta_4^2=4\alpha^2+4\beta^2+4\gamma^2,$$

которое и даётъ предложенное для доказательства свойство параллелепипеда.

Для аналитическаго доказательства того же предложенія примемъ центръ параллелепипеда за начала координатъ и направленія трехъ реберъ параллелепипеда, выходящихъ изъ одной вершины, за направленія осей x, y, z. Называя при такомъ выборѣ осей черезъ a, b, c координаты одной изъ вершинъ параллелепипеда, находимъ, что отрѣзки, соединяющія начало координатъ соотвѣтственно съ точками, координаты которыхъ суть

$$a,\ b,\ c;\quad a,\ -b,\ -c;\quad a,\ -b,\ c;\quad a,\ b,\ -c$$

суть четыре различныхъ полудіагонали параллелепипеда; обозначимъ эти полудіагонали соотвѣтственно черезъ $\frac{\delta_1}{2}$, $\frac{\delta_2}{2}$, $\frac{\delta_3}{2}$, $\frac{\delta_4}{2}$. Тогда

$$\left(\frac{\delta_1}{2}\right)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\nu + 2bc\cos\lambda + 2ca\cos\mu,$$

гдѣ ν, λ, μ — углы между положительными направленіями осей x и y, y и z, z и x, или же

$$(4)\qquad \left(\frac{\delta_1}{2}\right)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + C + A + B,$$

если положить для краткости $2ab\cos\nu = C$, $2bc\cos\lambda = B$, $2ca\cos\mu = A$. Подобнымъ же образомъ получимъ

$$(5)\quad \left(\frac{\delta_1}{2}\right)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - C + A - B, \qquad (6)\quad \left(\frac{\delta_3}{2}\right)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - C - A + B,$$

$$(7)\qquad \left(\frac{\delta_4}{2}\right)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + C - A - B.$$

Сложивъ равенства (4), (5), (6), (7), получимъ, что

$$\left(\frac{\delta_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\delta_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\delta_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\delta_4}{2}\right)^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2,$$

откуда $\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2 = 4\left[(2a)^2 + (2b)^2 + (2c)^2\right]$, или полагая $2a = \alpha$, $2b = \beta$, $2c = \gamma$,

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2 = 4\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

и такимъ образомъ снова приходитъ къ искомому результату, такъ какъ $|2a|$, $|2b|$, $|2c|$ суть длины реберъ параллелепипеда, исходящихъ изъ одной вершины.

В. Поповъ (Валки, Харьк. губ); *А. Каменскій* (Озерки, ст. Финл. ж. д.).

Редакторъ прив.-доц. **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено военной цензурой.

Типографія „Техникъ“ — Одесса, Екатерининская, 58.

Обложка
ищется

Обложка
ищется