Обложка
пщется

Обложка
ищется

Второй серіи V-го семестра № 10.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

№ 658.

Содержаніе: Опытъ теоретическаго изслѣдованія природы доказательствъ, примѣняемыхъ въ математическихъ наукахъ. *С. Зарембы.* — Примѣрныя программы и объяснительныя записки, напечатанныя въ „Матеріалахъ по реформѣ средней школы. Петроградъ, 1915“. *К. М. Щербины.* — Изъ записной книжки преподавателя: „Одинъ изъ «проклятыхъ» вопросовъ въ области педагогики начальной алгебры“. *И. Гибша.* — Задачи №№ 331 — 334 (6 сер.). — Рѣшенія задачъ №№ 276, 283, 284 и 288 (6 сер.). — Объявленія.

Опытъ теоретическаго изслѣдованія природы доказательствъ, примѣняемыхъ въ математическихъ наукахъ.

Проф. С. Зарембы.

Введеніе.

Кажущіеся парадоксы, возникающіе въ математическихъ наукахъ по мѣрѣ того, какъ возрастаетъ общность и абстрактность изучаемыхъ вопросовъ, побуждали математиковъ вносить все большую и большую строгость въ свои доказательства и сдѣлать предметомъ спеціальнаго изученія вопросъ о той научной формѣ, которую принимаетъ въ ихъ наукѣ дедуктивный методъ Но до настоящаго времени математики занимались скорѣе изслѣдованіемъ простѣйшихъ элементовъ, на которые можетъ быть разложено данное математическое сужденіе, классификаціей этихъ элементовъ и созданіемъ системъ символовъ, способныхъ съ наибольшей краткостью и точностью изображать эти элементы, чѣмъ изученіемъ доказательства, какъ цѣлаго. Этимъ духомъ проникнуты, напримѣръ, фундаментальные труды Пеано (Peano) и его учениковъ. Но, какъ мнѣ кажется, для правильнаго пониманія и критической оцѣнки наиболѣе тонкихъ и наиболѣе абстрактныхъ вѣтвей современной математики — таковы, напримѣръ, изслѣдованіе основаній геометріи или ариѳметики или же теорія множествъ — необходимо знать, въ ихъ существенныхъ чертахъ, строеніе и особенности математическаго доказательства, равно какъ и умѣть примѣнять эти знанія къ тонкому вопросу о совмѣстности или независимости системы данныхъ предложеній.

Именно этимъ вопросамъ я посвящаю настоящую статью.

Я не буду пользоваться никакой особенной системой символовъ, но я смѣю надѣяться, что это ни малѣйшимъ образомъ не отразится на ясности и точности изложенія.

Будучи далекъ отъ мысли исчерпать предметъ своего изслѣдованія, я старался ограничить себя разсмотрѣніемъ лишь тѣхъ вопросовъ, на которые я, какъ мнѣ кажется, могу отвѣтить съ полной опредѣленностью.

Хотя предметъ моего изученія принадлежитъ почти цѣликомъ къ области общей логики, я намѣренно привожу только такіе примѣры, которые относятся къ элементамъ математики. Эти примѣры, можетъ быть, не такъ просты, какъ другіе, которые легко было бы придумать, но, въ виду той точности, которая свойственна всему, принадлежащему къ области математики, я считаю ихъ особенно пригодными для цѣли, которую я имѣлъ въ виду.

Въ работѣ, подобной настоящей, немыслимо точно указать тѣ различныя вліянія, подъ которыми слагалось развитіе излагаемыхъ идей, но я долженъ сказать, что многимъ я обязанъ моему уважаемому коллегѣ Ивану Владиславовичу Слешинскому, который не рѣшился еще опубликовать своихъ многолѣтнихъ и глубокихъ изысканій въ области логики, но который доставляетъ себѣ удовольствіе дѣлиться ими со своими друзьями въ частныхъ бесѣдахъ.

Прибавлю, что въ этой статьѣ я воспроизвожу, въ нѣсколько улучшенномъ видѣ тотъ краткій обзоръ, который я помѣстилъ въ началѣ перваго тома своего „Введенія въ анализъ", напечатаннаго на польскомъ языкѣ въ Варшавѣ.

I. Постулаты, опредѣленія, теоремы.

§ 1. Предложенія, совокупность которыхъ выражаетъ все, что утверждается въ какой-нибудь дедуктивной теоріи и, слѣдовательно, во всякой математической теоріи, раздѣляются на двѣ категоріи, а именно:

1) на предложенія, которыя разсматриваются, какъ истинныя, безъ

всякаго доказательства и которыя я, за отсутствіемъ классическаго термина, назову посылками;

2) и на теоремы, или предложенія, опирающіяся на доказательство.

§ 2. Существуетъ особая категорія посылокъ, называемыхъ опредѣленіями. Подъ „опредѣленіемъ" понимается всякое предложеніе, выражающее, что въ силу соглашенія смыслъ какого-нибудь выраженія (которое можетъ быть словомъ, предложеніемъ или какимъ-нибудь другимъ символомъ) долженъ считаться тождественнымъ со смысломъ нѣкотораго другого выраженія, болѣе или менѣе сложнаго, но составленнаго исключительно изъ такихъ терминовъ, которые считаются ясными сами по себѣ или опредѣлены предварительно. Приводимъ для примѣра обычное опредѣленіе параллельныхъ прямыхъ: „утвержденіе, что двѣ безконечныя прямыя параллельны, выражаетъ, что эти прямыя лежатъ въ одной плоскости и не имѣютъ ни одной общей точки".

Въ силу вышесказаннаго можно, ничуть не измѣняя содержанія какой-нибудь теоріи, отбросить въ ней любую посылку, являющуюся опредѣленіемъ, съ тѣмъ, чтобы замѣнить всюду выраженіе, смыслъ котораго устанавливается даннымъ опредѣленіемъ, тѣмъ предложеніемъ, которое, въ силу опредѣленія, имѣетъ смыслъ, тождественный со смысломъ разсматриваемаго выраженія. Послѣ этого замѣчанія становится понятнымъ, что, если какая-нибудь посылка представляетъ собою, какъ и опредѣленіе, предложеніе, истинное только въ силу того, что нѣкоторый терминъ условились толковать такимъ образомъ, чтобы это предложеніе оказалось истиннымъ, — то нѣтъ еще достаточныхъ основаній, чтобы назвать разсматриваемую посылку опредѣленіемъ въ томъ именно смыслѣ, который мы дали этому слову. Такъ, напримѣръ, если бы кто-нибудь, перечисляя посылки геометріи, сказалъ, что надо слову „прямая" придавать такой смыслъ, при которомъ предложеніе „двѣ прямыя, имѣющія двѣ общія точки, совпадаютъ" было бы истиннымъ, то это была бы посылка, которую нельзя было бы разсматривать, какъ опредѣленіе, даже въ томъ случаѣ, если бы въ ней содержалось все, что въ геометріи утверждается относительно прямыхъ безъ доказательства. Дѣйствительно, разсматриваемая посылка не позволила бы намъ, какъ это должно быть возможно при дѣйствительномъ опредѣленіи, опустить въ геометріи слово „прямая" и замѣстить его соотвѣтствующимъ описаніемъ.

Всякая посылка, которая не является опредѣленіемъ, называется постулатомъ.

§ 3. Полезно остановиться немного на понятіи опредѣленія. Раньше всего, очевидно, что было бы полнымъ абсурдомъ искать доказательства опредѣленія. Однако, изъ этого не слѣдуетъ дѣлать вывода, что можно устанавливать опредѣленія совершенно произвольнымъ образомъ. Опредѣленіе можетъ оказаться непріемлемымъ не только по причинѣ своей безплодности, но еще и потому, что оно можетъ оказаться абсурднымъ и, слѣдовательно, совершенно непригоднымъ. Дѣйствительно, можетъ случиться, что оказывается невозможнымъ придавать какому-нибудь выраженію тотъ смыслъ, котораго требуетъ соотвѣтственное опредѣленіе, такъ какъ не существуетъ той вещи, которую это выраженіе должно было бы обозначать. Прибавлю, что это именно и является фактически обычной причиной, по которой опредѣленія оказываются иногда неправильными и непригодными. Въ виду этого существованіе того объекта, который какое-нибудь выраженіе должно, въ силу своего опредѣленія, обозначать, необходимо предварительно установить либо надлежаще доказанной теоремой либо постулатомъ.

Если же опредѣленіе не даетъ мѣста для вышеуказанныхъ возраженій и если, сверхъ того, выраженіе, которое оно опредѣляетъ, еще не употреблялось раньше, то это опредѣленіе — независимо отъ того, въ какой мѣрѣ удачно оно выбрано, — всегда можно принять безъ риска впасть въ противорѣчіе съ законами логики.

§ **4.** Важно замѣтить что въ доказательствахъ роль, которую играютъ опредѣленія, ничѣмъ не отличается отъ роли постулатовъ. Такъ, напримѣръ, при доказательствѣ какой-нибудь теоремы о параллельныхъ прямыхъ, совершенно не за чѣмъ считаться съ тѣмъ обстоятельствомъ, что эквивалентность слѣдующихъ двухъ предложеній: „двѣ прямыя параллельны" и „двѣ прямыя лежатъ въ одной плоскости и не имѣютъ ни одной общей точки" основана на соглашеніи. Сама эта эквивалентность — вотъ что единственно имѣетъ значеніе.

§ **5.** Легко понять, почему въ дедуктивныхъ, относительно совершенныхъ, теоріяхъ такъ много опредѣленій. Дѣйствительно, точность предложенія является необходимымъ (хотя и недостаточнымъ) условіемъ его истинности, такъ какъ, очевидно, можно прилагать къ предложенію эпитетъ истиннаго или ложнаго лишь въ томъ случаѣ, когда хорошо знаешь, что этимъ предложеніемъ утверждается. Слѣдовательно, надлежитъ избѣгать, по мѣрѣ возможности, употребленія такихъ выраженій (или другихъ символовъ), точный смыслъ которыхъ не былъ установленъ путемъ опредѣленій. Однако, невозможно обойтись безъ терминовъ, не имѣющихъ опредѣленія, т. е. такихъ, которые считаются ясными и точными сами по себѣ. Дѣйствительно, во всякой теоріи должно существовать нѣкоторое опредѣленіе, которое предшествуетъ всѣмъ другимъ и въ которомъ опредѣляемый терминъ опредѣляется при помощи терминовъ не опредѣленныхъ.

§ **6.** Чтобы закончить эти краткія разсужденія о роли посылокъ въ какой-нибудь теоріи, мы выяснимъ еще относительность понятій опредѣленія, постулата и теоремы. Если какая-нибудь теорія (T) слѣдуетъ за другими теоріями (T'), то можно, по желанію, разсматривать теорію (T), какъ изолированное цѣлое или какъ часть болѣе обширной теоріи, содержащей въ себѣ теорію (T) и теоріи (T'). Въ первомъ случаѣ въ число постулатовъ теоріи (T) войдутъ всѣ теоремы изъ теорій (T'), но во второмъ случаѣ, напротивъ, ни одна теорема изъ теорій (T') не войдетъ въ число постулатовъ той теоріи, которая составилась изъ соединенія теорій (T) и (T').

Можетъ также случиться, что, имѣя передъ собою данную теорію (T), мы на одинъ моментъ изолируемъ часть этой теоріи (T_0) и изучаемъ ее, какъ самостоятельное цѣлое. Въ этомъ случаѣ придется разсматривать тѣ теоремы, которыя въ теоріи (T) предшествуютъ части (T_0) этой послѣдней, какъ входящія въ число постулатовъ теоріи (T_0). Такъ, напримѣръ, когда мы хотимъ глубоко изучить доказательство какой-нибудь теоремы изъ нѣкоторой теоріи, мы разсматриваемъ эту теорему и ея доказательство, какъ образующія самостоятельную теорію, и тогда всякая теорема, доказанная раньше и участвующая въ доказательствѣ данной теоремы, пріобрѣтаетъ характеръ постулата.

Относительность понятія постулата можно обнаружить также еще и съ совершенно другой точки зрѣнія. Приступая къ изложенію какой-нибудь теоріи, мы можемъ, не внося никакихъ измѣненій въ выводы этой теоріи и не впадая ни въ какія противорѣчія съ правилами самой строгой логики, выбрать по желанію ту или другую изъ различныхъ системъ постулатовъ, и, въ зависимости отъ того, какая именно система постулатовъ выбрана, одно и то же предложеніе можетъ пріобрѣсти характеръ постулата или теоремы.

Конечно, изъ этого не слѣдуетъ, что при построеніи какой-нибудь математической теоріи можно съ полной опредѣленностью предпочесть какую-либо одну изъ логически возможныхъ системъ постулатовъ. Въ дѣйствительности приходится считаться съ цѣлымъ рядомъ обстоятельствъ, какъ, напримѣръ, со степенью очевидности постулатовъ, съ большей или меньшей простотой доказательствъ въ зависимости отъ принятой системы постулатовъ и т. д. Но при разборѣ всѣхъ этихъ соображеній никогда нельзя вполнѣ отрѣшиться отъ вліянія личныхъ наклонностей; кромѣ того, развитіе науки учитъ насъ, что часто бываетъ полезно пересмотрѣть теоріи, созданныя раньше, и замѣнить въ той или другой изъ нихъ постулаты, принятые тамъ первоначально, другой системой постулатовъ. Само собою разумѣется, что пересмотръ теоріи можетъ коснуться не только постулатовъ, но также опредѣленій, и тогда нѣкоторое предложеніе, которое при одной системѣ изложенія считается истиннымъ въ силу опредѣленія, можетъ при другой системѣ изложенія пріобрѣсти характеръ постулата или теоремы.

Ниже, въ § 18, мы будемъ имѣть случай обнаружить относительность понятій постулата и опредѣленія еще и съ другой точки зрѣнія.

II. Условныя. предложенія. Условныя предложенія съ неопредѣленными символами. Иллюзорныя условныя предложенія.

§ 7. Мы будемъ называть условнымъ предложеніемъ всякое предложеніе, выражающее какое-нибудь соотношеніе слѣдующей формы: если нѣкоторое предложеніе (H) является истиннымъ, то и нѣкоторое другое предложеніе (C) также является истиннымъ. Предложеніе (H) называется условіемъ а предложеніе (C) — заключеніемъ условнаго предложенія. Всякое предложеніе, не относящееся къ условнымъ, называется категорическимъ предложеніемъ.

Указанное раздѣленіе предложеній на двѣ категоріи относится лишь къ формѣ предложеній, но никакъ не къ смыслу ихъ, такъ какъ смыслъ какого-нибудь катогорическаго предложенія можетъ всегда быть выраженъ при помощи условнаго предложенія. Такъ, напримѣръ, предложеніе „число 7 есть простое число“ является категорическимъ, но оно выражаетъ, въ сущности, не что иное, какъ слѣдующее условное предложеніе: „если символъ a изображаетъ число 7, то онъ изображаетъ простое число“.

Хотя предложенія условныя и предложенія категорическія отличаются одно отъ другого только по формѣ, но умѣніе различать эти два рода предложеній — въ виду формальнаго характера дедуктивныхъ доказательствъ вообще и математическихъ въ частности — имѣетъ для насъ основное значеніе.

§ 8. Условное предложеніе можетъ содержать нѣкоторое число символовъ, которые мы будемъ называть неопредѣленными символами (терминами), или, попросту неопредѣленнымиу словнаго предложенія и которые характеризуются тѣмъ, что смыслъ предложенія не измѣнится, если мы замѣнимъ эти символы какими угодно новыми символами, лишь бы только эти новые символы были отличны между собой и отличны отъ всѣхъ другихъ символовъ, входящихъ въ составъ даннаго предложенія. Вотъ примѣръ условнаго предложенія, содержащаго неопредѣленныя:

„Если a и b представляютъ собою два вещественныхъ или комплексныхъ числа, то равенство

$$a^2 - b^2 = (a + b) . (a - b)$$

имѣетъ мѣсто“.

Очевидно, что, по смыслу вышесказаннаго, приведенное предложеніе содержитъ два неопредѣленныхъ, а именно: a и b. Часто бываетъ, что, высказывая какое-нибудь условное предложеніе, содержащее неопредѣленныея, мы для краткости не указываемъ явно на существованіе этихъ послѣднихъ. Такъ, напримѣръ, когда мы говоримъ, что „двѣ прямыя, изъ которыхъ каждая параллельна третьей, параллельны между собой“, то мы высказываемъ условное предложеніе, содержащее три подразумѣвающихся неопредѣленныхъ, представляющихъ собою, согласно условію разсматриваемаго условнаго предложенія, три прямыхъ, изъ которыхъ двѣ параллельны третьей. Въ дальнѣйшемъ мы допустимъ, что неопредѣленныя каждаго условнаго предложенія, содержащаго таковыя, явно выражены.

Въ слѣдующихъ главахъ мы увидимъ, какую важную роль играютъ условныя предложенія въ математическихъ доказательствахъ.

§ 9. Условныя предложенія, встрѣчающіяся въ математическихъ теоріяхъ, обыкновенно содержатъ неопредѣленныя, и при этомъ дѣло обстоитъ такимъ образомъ, что этимъ неопредѣленнымъ можно по желанію приписать либо такой смыслъ, чтобы условіе стало истиннымъ предложеніемъ, либо такой, чтобы оно стало предложеніемъ ложнымъ. Такъ, напримѣръ, въ первомъ изъ разсмотрѣнныхъ въ предыдущемъ параграфѣ примѣровъ условіе состоитъ изъ слѣдующаго предложенія: „символы u и v изображаютъ два вещественныхъ или комплексныхъ числа“; это предложеніе можетъ оказаться истиннымъ или ложнымъ, смотря по тому, какое частное значеніе мы дадимъ неопредѣленнымъ. Но можетъ случиться, что условіе условнаго предложенія окажется во всѣхъ случаяхъ невѣрнымъ, либо потому, что невозможно приписать неопредѣленнымъ, если они имѣются, такое значеніе, чтобы условіе стало истиннымъ предложеніемъ, либо потому, что условіе даннаго условнаго предложенія не содержитъ неопредѣленныхъ и въ то же время содержитъ невѣрное утвержденіе.

Мы будемъ говорить, что условное предложеніе, условіе котораго невѣрно, есть и л л ю з о р н о е предложеніе.

Какъ только установлено, что какое-нибудь условное предложеніе есть иллюзорное предложеніе, оно, очевидно, теряетъ всякій интересъ. Но совершенно иначе обстоитъ дѣло, если это обстоятельство еще не обнаружено, и поэтому мы въ дѣйствительности часто разсматриваемъ такія условныя предложенія, которыя бываютъ намъ на одинъ моментъ полезны и которыя мы затѣмъ признаемъ предложеніями иллюзорными. Такъ, напримѣръ, въ теоріи параллельныхъ прямыхъ, какъ она излагается въ очень многихъ трактатахъ, мы встрѣчаемся въ одномъ изъ доказательствъ со слѣдующимъ иллюзорнымъ предложеніемъ:

„Если бы двѣ прямыя, лежащія въ одной и той же плоскости и перпендикулярныя къ третьей прямой, лежащей въ этой плоскости, не были параллельны, то существовала бы точка, черезъ которую проходили бы два перпендикуляра къ третьей прямой“.

Легко видѣть, что иллюзорное условное предложеніе въ дѣйствительности никогда не можетъ быть ни истиннымъ ни ложнымъ. Въ самомъ дѣлѣ, условное предложеніе не содержитъ никакого сужденія, которое утверждало бы или отрицало бы условіе. Сужденіе, выражаемое условнымъ предложеніемъ, относится исключительно къ тому случаю, когда условіе осуществлено. Но въ случаѣ иллюорнаго предложенія это не можетъ имѣть мѣста. Слѣдовательно, иллюзорное предложеніе не выражаетъ въ дѣйствительности, несмотря на противорѣчащее этому представленіе, никакого сужденія и, значитъ, не можетъ быть ни истиннымъ ни ложнымъ.

Тѣмъ не менѣе, если мы, не спрашивая себя о томъ, иллюзорно ли данное условное предложеніе, попытаемся доказать его по обычнымъ правиламъ, то мы можемъ осуществить это даже въ томъ случаѣ, когда разсматриваемое предложеніе въ дѣйствительности иллюзорное. Въ виду этого мы условимся, какъ это дѣлается — по крайней мѣрѣ, неявно — во всѣхъ математическихъ трактатахъ, разсматривать совокупность иллюзорныхъ предложеній, какъ особый классъ истинныхъ предложеній. Это соглашеніе не приведетъ насъ ни къ какимъ противорѣчіямъ, такъ какъ между иллюзорнымъ предложеніемъ, не содержащимъ въ дѣйствительности никакого сужденія, и какимъ-нибудь другимъ предложеніемъ можетъ имѣть мѣсто только кажущееся противорѣчіе, но никакъ не дѣйствительное. Если, напримѣръ, случается, что, не учитывая того, что какое-нибудь предложеніе можетъ быть иллюзорнымъ, мы доказали два условныхъ предложенія, имѣющихъ одно и то же условіе, но такихъ, что между ихъ заключеніями имѣютъ мѣсто противорѣчія, то это отнюдь не значитъ, что мы доказали два противорѣчащихъ одно другому условныхъ предложенія; въ дѣйствительности мы только установили иллюзорность каждаго изъ двухъ разсматриваемыхъ предложеній, — другими словами, мы доказали невѣрность общаго обоимъ условнымъ предложеніямъ условія.

(Окончаніе слѣдуетъ).

Примѣрныя программы и объяснительныя записки, напечатанныя въ „Матеріалахъ по реформѣ средней школы. Петроградъ, 1915".

(Прил. къ Ж. М. Н. Пр. за 1915 г., кн. XII, стр. 246—283).

Критическій обзоръ К. М. Щербины.

Программы по математикѣ, выработанныя въ 1915 году учрежденной при Министерствѣ Народнаго Просвѣщенія Комиссіей, въ настоящее время еще не введены въ дѣйствіе. Имѣя въ виду, что эти программы и объяснительныя записки къ нимъ должны исчерпывающимъ образомъ освѣтить сущность предпринимаемой реформы и служить для преподавателя въ его дѣятельности путеводной нитью, — редакція считаетъ весьма цѣлесообразнымъ открыть страницы „Вѣстника“ для всесторонняго разсмотрѣнія ихъ и приглашаетъ преподавателей принять участіе въ спокойномъ обсужденіи вопроса съ научной и педагогической стороны.

Редакція.

Согласно проекту совѣщанія при Министерствѣ Народнаго Просвѣщенія средняя школа должна быть 1) семилѣтней и 2) состоящей изъ двухъ ступеней: первой съ трехлѣтнимъ и второй съ четырехлѣтнимъ курсомъ обученія. Вторая ступень школы развѣтвляется на три отдѣленія: 1) новогуманитарное, 2) гуманитарно-классическое и 3) реальное, которое, въ свою очередь, имѣетъ двѣ вѣтви — физико-математическую и естественно-историческую. Программы первой ступени средней школы должны быть согласованы съ программами высшихъ начальныхъ училищъ.

Мы не будемъ останавливаться на томъ, насколько цѣлесообразнымъ является у насъ въ Россіи, особенно въ настоящее время, семилѣтній курсъ средней школы, равно какъ не будемъ касаться и того дѣленія на отдѣлы и вѣтви, которое намѣчено совѣщаніемъ. Разсмотрѣніе этого вопроса отвлекло бы насъ далеко въ сторону отъ нашей прямой задачи. Въ своемъ обзорѣ программъ математики мы будемъ стоять на той точкѣ зрѣнія, что семилѣтняя продолжительность курса средней школы, равно какъ и развѣтвленіе школы на второй ея ступени являются фиксированными.

Приступая къ обзору учебныхъ плановъ и программъ, которыми намѣчено замѣнить нынѣ дѣйствующія программы средней школы, намъ придется неоднократно обращаться къ этимъ послѣднимъ. Программы гимназій (1890 г.) и реальныхъ училищъ (1906 г.) съ объяснительными къ нимъ записками хорошо извѣстны всѣмъ, интересующимся этимъ вопросомъ. Конечно, нынѣ дѣйствующія программы очень устарѣли и требуютъ коренного измѣненія, но въ нихъ, а въ особенности въ объяснительныхъ запискахъ къ программамъ 1890 г., можно найти много цѣннаго въ методологическомъ и въ методическомъ отношеніи *).

Сравнительное распредѣленіе уроковъ математики по классамъ въ нынѣ существующей общеобразовательной средней школѣ и въ предполагаемой помѣщено въ ниже приведенныхъ таблицахъ (см. стр. 226 и 227).

---

*) Критическій обзоръ этихъ программъ помѣщенъ въ нашемъ трудѣ: „**К. М. Щербина. Математика въ русской средней школѣ. Обзоръ трудовъ и мнѣній по вопросу объ улучшеніи программъ математики въ средней школѣ.** Кіевъ, 1908“. Стр. 5 — 12 и 120 — 123.

Переходя къ разсмотрѣнію всѣхъ программъ съ объяснительными къ нимъ записками, считаемъ необходимымъ остановиться сначала на внѣшней сторонѣ работы, выполненной Комиссіей по составленію программъ: это облегчитъ намъ основную задачу — освѣтить внутреннюю сторону работы, выяснить положительныя и отрицательныя стороны разбираемыхъ программъ.

Если иной разъ внѣшняя сторона дѣла имѣетъ мало значенія, то нельзя сказать того же въ настоящемъ случаѣ.

Прежде всего поражаетъ насъ отсутствіе какой-либо системы и порядка въ распредѣленіи и изложеніи учебныхъ плановъ, программъ и объяснительныхъ записокъ, какъ по отношенію къ различнымъ отдѣленіямъ одной и той же школы, такъ и по отношенію къ каждому отдѣленію въ частности. Вообще отсутствіе внѣшней системы и строго опредѣленнаго порядка въ программахъ какого-либо учебнаго предмета до чрезвычайности затрудняетъ пользованіе ими; но все это особенно сильно чувствуется, когда имѣемъ дѣло съ такимъ учебнымъ предметомъ, какъ математика, гдѣ логичность, система и порядокъ выступаютъ на первый планъ.

Типы нынѣ существующей общеобразовательной средней школы	Учебные предметы	КЛАССЫ. число уроковъ I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	ВСЕГО
Гимназія	Ариѳметика	4	4	2	—	—	—	—	—	10
	Алгебра	—	—	2	2	2	2	$1\frac{1}{2}$ [1]	—	$9\frac{1}{2}$
	Геометрія	—	—	—	2	3	2	—	—	7
	Тригонометрія . .	—	—	—	—	—	—	$1\frac{1}{2}$ [1]	—	$1\frac{1}{2}$
	Математика	—	—	—	—	—	—	—	3	3
		4	4	4	4	5	4	3	3	31
Реальное училище	Ариѳметика	4	4	2	—	—	—	—	—	10
	Алгебра	—	—	2	3	3	2	—	—	10
	Геометрія	—	—	—	3	3	2	—	—	8
	Тригонометрія . .	—	—	—	—	—	2	—	—	2
	Математика . . .	—	—	—	—	—	—	5		5
		4	4	4	6	6	6	5	—	35
	Черченіе	—	—	2	1	—	—	—	—	3

[1]) Одинъ урокъ въ первомъ полугодіи и два урока во второмъ или наоборотъ.

Отдѣленія и вѣтви проектируемой общеобразовательной средней школы / Учебные предметы		Ступени. Классы. Число уроковъ							ВСЕГО
		Первая ступень			Вторая ступень				
		I	II	III	IV	V	VI	VII	
I. Новогуманитарное отдѣленіе	Ариөм. и нагл. геом.	4	4	2	—	—	—	—	10
	Алгебра	—	—	2	2	2	2	1 *)	9
	Геометрія	—	—	—	2	2	2	$^1/_2$ 1)	$6^1/_2$
	Тригонометрія . .	—	—	—	—	—	—	$1^1/_2$ 2)	$1^1/_2$
		4	4	4	4	4	4	3	27
II. Гуманитарно-классическое отдѣленіе	Ариөм. и нагл. геом.	4	4	2	—	—	—	—	10
	Алгебра	—	—	2	2	} 3	} 3	—	} 12
	Геометрія	—	—	—	2			—	
	Математика . . .	—	—	—	—	—	—	2	2
		4	4	4	4	3	3	2	24
III. 1. Физико-математическая вѣтвь реальнаго отдѣленія	Ариөм. и нагл. геом.	4	4	2	—	—	—	—	10
	Алгебра	—	—	2	2	4	2	—	10
	Геометрія	—	—	—	2	2	2	$^1/_2$ 1)	$6^1/_2$
	Тригонометрія . .	—	—	—	—	—	2	—	2
	Доп. ариөм. и алг., анал. геом. и анализъ	—	—	—	—	—	—	$5^1/_2$ 3)	$5^1/_2$
		4	4	4	4	6	6	6	34
	Черченіе	—	—	—	—	—	2	—	2
III. 2. Естественно-историческая вѣтвь реальнаго отдѣленія	Ариөм. и нагл. геом.	4	4	2	—	—	—	—	10
	Алгебра	—	—	2	2	2	2	1	9
	Геометрія	—	—	—	2	2	2	$^1/_2$ 1)	$6^1/_2$
	Тригонометрія . .	—	—	—	—	—	—	$1^1/_2$ 2)	$1^1/_2$
	Основ. анал. геом. и анализъ	—	—	—	—	—	—	2	2
		4	4	4	4	4	4	5	29
	Черченіе	—	—	—	—	—	2	—	2

*) Этотъ урокъ,— очевидно, по недосмотру — пропущенъ въ распредѣленіи уроковъ, помѣщенномъ на стр. 246 „Матеріаловъ“.

1) 1 урокъ въ первомъ полугодіи.

2) 1 урокъ въ первомъ полугодіи и 2 урока во второмъ.

3) 5 уроковъ въ первомъ полугодіи и 6 уроковъ во второмъ.

Обратимся къ программамъ. Въ распредѣленіи уроковъ математики по классамъ („Матеріалы по реформѣ средней школы", стр. 246) установленъ для отдѣленій съ вѣтвями слѣдующій порядокъ: физико-математическая вѣтвь реальнаго отдѣленія, естественно-историческая вѣтвь реальнаго отдѣленія, новогуманитарное отдѣленіе, гуманитарно-классическое отдѣленіе. Что же касается учебныхъ плановъ и программъ съ объяснительными къ нимъ записками для второй ступени школы, то они начинаются съ учебныхъ плановъ и программъ для новогуманитарнаго отдѣленія, а именно съ „учебнаго плана алгебры для четырехъ старшихъ классовъ новогуманитарнаго отдѣленія средней школы"; далѣе слѣдуетъ „учебный планъ геометріи" (стр. 254) и „программа по геометріи для новогуманитарнаго отдѣленія". Прочитавши заголовокъ, можно подумать, что это учебный планъ геометріи для новогуманитарнаго отдѣленія и только, но въ дѣйствительности это не такъ, потому что въ концѣ плана читаемъ: „VII классъ (1 урокъ въ первомъ полугодіи). *А*. Въ физико-математическомъ отдѣленіи реальной вѣтви (вмѣсто: въ физико-математической вѣтви реальнаго отдѣленія). Повтореніе всего курса и задачи на вычисленіе. *В*. Въ естественно-историческомъ отдѣленіи реальной вѣтви и новогуманитарномъ отдѣленіи" (далѣе слѣдуетъ планъ для этой вѣтви). Послѣ такого плана идетъ, какъ было указано, программа по геометріи только для новогуманитарнаго отдѣленія, а объяснительной записки къ ней вовсе нѣтъ.

На вышеуказанное обстоятельство, конечно, можно было бы не обратить никакого вниманія, если бы оно не являлось началомъ какого-то, можно подумать, умышленно хаотическаго расположенія учебныхъ плановъ, программъ и проч.: программы новогуманитарнаго отдѣленія заканчиваются программой (стр. 256) „тригонометріи по новогуманитарному и реальному отдѣленіямъ". И это, думается, не бѣда: очевидно, имѣется въ виду одна и та же программа тригонометріи для новогуманитарнаго отдѣленія и обѣихъ вѣтвей реальнаго отдѣленія. Но это, оказывается, совсѣмъ не такъ, ибо непосредственно за этой программой слѣдуетъ другая (стр. 257): „программа тригонометріи на физико-математической вѣтви реальнаго отдѣленія". Поневолѣ приходится заниматься расшифровываніемъ подобной работы, — тѣмъ болѣе, что объяснительная записка, слѣдующая за программой, не разрѣшаетъ недоумѣнія, равно какъ не помогаетъ этому и указаніе на классъ, потому что и въ первой и во второй программѣ помѣченъ „VII классъ", тогда какъ по распредѣленію уроковъ, помѣщенному выше (на стр. 246 „Матеріаловъ"), тригонометрія на физико-математической вѣтви реальнаго отдѣленія изучается въ VI классѣ. Остается допустить, что первая программа тригонометріи предназначена, кромѣ новогуманитарнаго отдѣленія, также для одной изъ вѣтвей реальнаго отдѣленія (естественно-исторической), а вторая — для физико-математической вѣтви; „VII кл. (вмѣсто VI кл.) во второй программѣ помѣщенъ по недосмотру.

За программой тригонометріи слѣдуетъ учебный планъ и программа алгебры (съ объяснительной запиской) на физико-математической вѣтви реальнаго отдѣленія для IV, V и VI классовъ (стр. 259), программа геометріи (для физико-математической вѣтви) съ объяснительной запиской для IV, V, VI и VII классовъ (стр. 264), а послѣ этого помѣщены „программы и объяснительныя записки по курсу математики въ VII классѣ физико-математической вѣтви реальнаго отдѣленія“ (стр. 267), — слѣдовательно, и программа по курсу геометріи: она, дѣйствительно, и повторяется ниже безъ всякихъ оговорокъ; кромѣ того, въ этой общей программѣ отведено мѣсто дополненіямъ къ ариѳметикѣ и алгебрѣ, основаніямъ аналитической геометріи и анализу. За программой слѣдуетъ заголовокъ „объяснительная записка къ программѣ математики въ VII-мъ классѣ физико-математической вѣтви реальнаго отдѣленія“, а далѣе (тѣмъ же шрифтомъ) другой — „объяснительная записка къ программѣ по аналитической геометріи“. Въ концѣ послѣдней (стр. 275) помѣщены, между прочимъ, „примѣчанія, касающіяся учебнаго плана и программъ на естественно-исторической вѣтви реальнаго отдѣленія“ съ программой для этой вѣтви по основаніямъ аналитической геометріи.

Нѣсколько больше стройности и системы съ внѣшней стороны въ „программѣ по математикѣ для второй ступени по гуманитарно-классическому отдѣленію“ (стр. 276), которая слѣдуетъ за примѣчаніями. Этимъ и заканчиваются программы математики, выработанныя Комиссіей 1915 г.

Слѣдуетъ отмѣтить также, что въ одномъ случаѣ объяснительныя записки помѣщены раньше учебныхъ плановъ и программъ (объяснительная записка къ программѣ математики въ первыхъ трехъ классахъ средней школы), въ другомъ случаѣ на первомъ мѣстѣ стоятъ учебные планы, а затѣмъ идутъ программы и объяснительныя записки (напримѣръ, программа алгебры для новогуманитарнаго отдѣленія); въ нѣкоторыхъ случаяхъ отсутствуютъ планы (напримѣръ, въ программѣ тригонометріи) или объяснительныя записки (напримѣръ, къ программѣ геометріи для новогуманитарнаго отдѣленія). Наконецъ, въ однихъ случаяхъ въ программѣ отмѣчается число уроковъ въ классѣ, а въ другихъ этого нѣтъ.

Если въ программахъ нѣтъ внѣшней согласованности, нѣтъ внѣшняго единства*), если въ редакціонномъ отношеніи не замѣчается твер-

*) На 8 стр. „Матеріаловъ по реформѣ средней школы“ сказано: „Согласованіе программъ по развѣтвленіямъ (гдѣ оно не сдѣлано) будетъ выполнено послѣ окончательной ихъ выработки“. Само собою разумѣется, что это замѣчаніе не касается недочетовъ, подобныхъ тѣмъ, какіе указаны нами.

дой руки, то мы, по крайней мѣрѣ, въ правѣ ожидать извѣстной тщательности въ корректурномъ отношеніи: вѣдь „Матеріалы“ печатаются въ солидномъ офиціальномъ органѣ, не говоря уже о томъ, что на эти матеріалы преподаватели должны смотрѣть, какъ на нѣчто назидательное. И вдругъ читаемъ: на стр. 268 — „середины прямоугольнаго отрѣзка“ (вмѣсто: прямолинейнаго отрѣзка); на стр. 256 — „выраженіе тригонометрическихъ функцій угловъ: $\frac{\pi}{2} \pm d$, $\pi \pm d$ и т. д. черезъ тригонометрическія функціи угла a“ (вмѣсто $\frac{\pi}{2} \pm a$, $\pi \pm a$; та же ошибка повторяется и на стр. 258); на стр. 255 — „правильныхъ π-угольника и 2π-угольника (вмѣсто n-угольника и $2n$-угольника); на стр. 273 уравненія эллипса и гиперболы напечатаны въ такомъ видѣ: $H\frac{x'}{a'} \pm \frac{y^1}{b} = 1$ и параболы — $y2 = 2px$. Мы не приводимъ другихъ корректурныхъ ошибокъ общаго, а не спеціально математическаго характера, которыхъ не чужды „Матеріалы“ въ достаточной степени.

Всякія программы со стороны языка должны быть, по возможности, безукоризненными, — вѣдь онѣ являются примѣрными, образцовыми для тѣхъ, кто будетъ пользоваться ими *).

Чтобы охарактеризовать съ этой стороны программы, „выработанныя Комиссіей 1915 г., достаточно привести нѣсколько мѣстъ изъ этихъ программъ: на стр. 247 — „нахожденіе части отъ даннаго цѣлаго“ (довольно принятый, но устарѣлый способъ выраженія, не допустимый въ „новой“ программѣ); на той же 247 и на 248 стр. — „найти проценты отъ даннаго числа“, „найти число по даннымъ его процентамъ“ (такое выраженіе недопустимо даже въ обыденной рѣчи); въ программахъ для физико-математической вѣтви реальнаго отдѣленія вездѣ читаемъ: „разложеніе на множители“, а во всѣхъ остальныхъ — „разложеніе на множителей“ (спрашивается, какъ же правильно); на стр. 262 — „извлеченіе точнаго квадрата изъ цѣлыхъ чиселъ и дробей“ (что это означаетъ?); на стр. 267 — „опредѣлить точность результата, если дана точность...“, „опредѣлить точность, съ которою должны быть взяты...“ (ненаучный языкъ); на стр. 271 — „наиболѣе важное въ этомъ отдѣлѣ (т. е. въ приложеніи алгебры къ геометріи) — истолкованіе отрицательныхъ рѣшеній — естественными обрывами отходитъ въ начала аналитической геометріи“; на стр. 273 — „...можетъ быть вычитано изъ его уравненія“, „теоремы... будутъ передоказаны аналитически“, „...уравненіе можетъ быть для круга получено какъ геометрически, такъ и исходя изъ общаго опредѣленія касательной“ (стиль!); на стр. 277 — „квадрат-

*) Въ этомъ отношеніи программы гимназіи 1890 г. почти внѣ упрековъ.

ныя уравненія съ двумя неизвѣстными“ (терминологія не общепринятая и едва ли допустимая).

Приведенныхъ выписокъ, намъ кажется, совершено достаточно для нашихъ цѣлей.

(Окончаніе слѣдуетъ).

Изъ записной книжки преподавателя.

Одинъ изъ „проклятыхъ“ вопросовъ въ области педагогики начальной алгебры.

§ 1. Всякій преподаватель математики знаетъ, съ какими трудностями сопряжено изложеніе — въ курсѣ третьяго класса — вопроса объ относительныхъ числахъ. Эти трудности возникаютъ, главнымъ образомъ, при установленіи понятій о суммѣ и произведеніи относительныхъ чиселъ. Мнѣ кажется, я не ошибусь, если буду утверждать, что это есть именно тотъ пунктъ, изъ-за котораго г. Киселевъ кореннымъ образомъ переработалъ главу объ относительныхъ числахъ въ послѣднихъ изданіяхъ своего учебника. Тотъ же пунктъ составляетъ, такъ сказать, центръ тяжести въ „Курсѣ алгебры для среднихъ учебныхъ заведеній“, выпущенномъ въ 1914 году прив.-доц. Новороссійскаго университета А. Д. Агура, руководителемъ математической секціи на педагогическихъ курсахъ одесскаго учебнаго округа для подготовленія учителей и учительницъ среднихъ учебныхъ заведеній. Я выдѣляю этотъ курсъ изъ числа другихъ книгъ того же содержанія, съ одной стороны, въ виду того, что въ книгѣ г. Агура все изложеніе теоріи относительныхъ чиселъ проведено на символахъ вида $_{\text{п}}5$ и $_{\text{о}}5$, гдѣ $_{\text{п}}$ и $_{\text{о}}$ суть начальныя буквы словъ „положительный“ и „отрицательный“, замѣняющія собою на первыхъ порахъ знаки $+$ и $-$. Этотъ методъ „буквенныхъ знаковъ“ весьма удобенъ, цѣлесообразенъ и позволяетъ легко и незамѣтно вводить учащихся въ кругъ новыхъ понятій. Съ другой стороны, книга г. Агура весьма выгодно отличается отъ другихъ книгъ того же содержанія тѣмъ порядкомъ идей, которому слѣдуетъ авторъ при установленіи понятія о суммѣ и произведеніи относительныхъ чиселъ. Замѣчательно, что тотъ же самый методъ изложенія извѣстенъ и г. Киселеву: онъ примѣняетъ его при установленіи понятія о произведеніи; но для установленія понятія о суммѣ относительныхъ чиселъ г. Киселевъ счелъ почему-то неизбѣжнымъ прибѣгнуть къ геометріи; при этомъ онъ вводитъ въ курсъ алгебры геометрическія представленія не какъ иллюстрацію установленныхъ уже алгебраическихъ понятій, но какъ матеріалъ для установленія этихъ послѣднихъ. При этихъ условіяхъ мнѣ оставалось бы только отослать читателя къ книгѣ г. Агура, если бы то изложеніе этого вопроса, которое выбралъ послѣдній, не страдало, на мой взглядъ, однимъ существеннымъ недочетомъ; мы поговоримъ объ этомъ недочетѣ ниже, когда можно будетъ указать и способъ его исправленія.

Исходя изъ всѣхъ этихъ соображеній, въ нижеслѣдующей замѣткѣ я предлагаю вниманію товарищей по профессіи такое изложеніе указаннаго вопроса, которое основано на сочетаніи метода „буквенныхъ знаковъ“ съ порядкомъ изложенія, примѣняемымъ г. Киселевымъ при установленіи понятія о произведеніи относительныхъ чиселъ.

§ 2. Я предполагаю, что дѣти еще не имѣютъ представленія объ относительныхъ числахъ, и что преподаватель только приступаетъ къ введенію ихъ въ курсъ алгебры. При этихъ условіяхъ преподаватель долженъ слѣдовать нижеуказанному порядку изложенія:

I. Давъ дѣтямъ понятіе о сложной задачѣ, какъ о задачѣ, распадающейся на простыя, и о простой задачѣ, какъ о задачѣ, требующей для своего рѣшенія примѣненія лишь одного ариѳметическаго дѣйствія, преподаватель ограничивается разсмотрѣніемъ простой задачи. Послѣдняя состоитъ въ томъ, чтобы путемъ производства подходящаго дѣйствія надъ двумя данными числами, извѣстными изъ условія задачи, найти нѣкоторое третье число, неизвѣстное намъ и потому называемое искомымъ; это третье число, будучи найдено, даетъ намъ полный и исчерпывающій отвѣтъ на вопросъ задачи. Преподаватель приводитъ для примѣра одну-двѣ обычныя ариѳметическія задачи, въ которыхъ данными служатъ значенія какихъ-либо скалярныхъ величинъ. При этомъ онъ каждый разъ записываетъ данныя и искомое числа съ ихъ наименованіями въ табличку такого вида: $\dfrac{a \text{ руб.}, b \text{ арш.}}{? \text{ руб.}}$, а затѣмъ, произведя необходимое дѣйствіе, записываетъ отвѣтъ на мѣстѣ вопросительнаго знака въ видѣ c руб. и указываетъ, что найденное число даетъ исчерпывающій отвѣтъ на вопросъ задачи. Послѣ этого преподаватель предлагаетъ учащимся нѣсколько разнообразныхъ задачъ, въ которыхъ данными служатъ значенія какихъ-либо направленныхъ величинъ. Пользуясь той же табличкой и рѣшая предложенныя задачи обыкновеннымъ ариѳметическимъ путемъ, или, какъ говорятъ, на основаніи здраваго смысла, преподаватель записываетъ полученный отвѣтъ въ табличкѣ подъ чертой. Разсмотрѣвъ нѣсколько задачъ, преподаватель обращаетъ вниманіе дѣтей на то, что въ задачахъ съ направленными величинами найденное число не даетъ исчерпывающаго отвѣта на задачу (не хватаетъ указанія на направленіе величины), и потому для исправленія указаннаго дефекта наука ввела въ разсмотрѣніе новые символы, новыя числа — числа со знаками, или такъ называемыя алгебраическія числа. Таковы числа

$_{к}5$ руб. и $_{д}7$ руб. (5 руб. капиталу и 7 руб. долгу) и $_{п}8$ саж. и $_{л}12$ саж. (8 саж. въ правомъ направленіи и 12 саж. въ лѣвомъ направленіи) и т. д. Пользуясь этими новыми символами, преподаватель переписываетъ составленныя имъ раньше таблички алгебраическихъ задачъ, при чемъ какъ данными, такъ и искомыми числами будутъ уже служить алгебраическія числа. Дѣти тотчасъ же убѣдятся въ томъ, что при новыхъ обозначеніяхъ числа, стоящія подъ чертой, даютъ исчерпывающій отвѣтъ на вопросъ задачи.

II. Выбравъ одну изъ задачъ съ направленными величинами, преподаватель даетъ двумъ входящимъ въ нее величинамъ слѣдующія 5 паръ значеній:

$$_{п}a,\ _{п}b;\quad _{о}a,\ _{о}b;\quad _{п}a,\ _{о}b\ (a > b);\quad _{п}a,\ _{о}b\ (a < b);\quad _{п}a,\ _{о}a$$

и рѣшаетъ ее для каждаго изъ 5 случаевъ отдѣльно, составляя всякій разъ указанную выше табличку и записывая въ ней подъ чертой полученныя рѣшенія въ видѣ алгебраическихъ чиселъ. Указавъ на то, что при нахожденіи искомыхъ чиселъ мы производили въ первыхъ двухъ случаяхъ сложеніе, а въ остальныхъ трехъ вычитаніе, преподаватель обращаетъ вниманіе учащихся на то, что дѣйствія эти были произведены не надъ самими данными числами, но лишь надъ ихъ абсолютными величинами (т. е. надъ входящими въ составъ данныхъ чиселъ ариѳметическими числами), и что съ помощью этихъ дѣйствій мы опредѣлили лишь абсолютныя величины искомыхъ чиселъ. Что же касается ихъ знаковъ, то въ первыхъ двухъ случаяхъ искомое число имѣетъ тотъ же знакъ, что и данныя числа, въ третьемъ и четвертомъ случаѣ искомое число имѣетъ знакъ, стоящій передъ бо́льшей абсолютной величиной, а въ пятомъ случаѣ искомое число равно нулю, а потому знакъ его совершенно безразличенъ, ибо вполнѣ очевидно, что $_{п}0 = {}_{о}0$ (въ виду этого мы разъ навсегда условимся писать число 0 безъ знака). Итакъ, правило, по которому составляется искомое число изъ данныхъ чиселъ въ задачахъ разсматриваемаго типа, нами вполнѣ установлено для всѣхъ пяти единственновозможныхъ здѣсь случаевъ. Но всякій разъ какъ мы по двумъ даннымъ числамъ находимъ согласно опредѣленному правилу третье число, мы выполняемъ нѣкоторое дѣйствіе. Спрашивается, какъ назвать тѣ алгебраическія дѣйствія, съ помощью которыхъ мы рѣшили свою задачу.

Въ первыхъ двухъ случаяхъ мы выполняемъ, въ сущности, ариѳметическое сложеніе надъ двумя значеніями *одной и той же величины*, съ той только разницей, что мы указываемъ на это послѣднее обстоятельство приписываніемъ впереди числа знаковъ $_{п}$ и $_{о}$. Въ виду этого вполнѣ естественно назвать дѣйствіе, съ помощью котораго мы по даннымъ числамъ $_{п}a$ и $_{п}b$ отыскиваемъ число $_{п}(a+b)$, *сложеніемъ* двухъ однозначныхъ алгебраическихъ чиселъ.

Что же касается дѣйствія, съ помощью котораго мы по двумъ даннымъ числамъ $_n a$ и $_o b$ находимъ третье число $_n(a-b)$ или $_o(b-a)$ или 0, то для него мы вольны выбрать любое названіе (хотя бы „разложеніе“ или „уничтоженіе“ и т. п.); но мы условимся и это дѣйствіе называть *сложеніемъ* двухъ алгебраическихъ чиселъ; принявъ такое условіе, мы пріобрѣтаемъ слѣдующія выгоды:

1) каковы бы ни были значенія данныхъ чиселъ, входящихъ въ разсматриваемый типъ задачъ, мы всегда будемъ рѣшать эти задачи съ помощью *одного и того же* дѣйствія — именно сложенія; въ противномъ случаѣ вышло бы, что одна и та же задача рѣшается съ помощью того или другого дѣйствія въ зависимости отъ значеній данныхъ величинъ, что противорѣчило бы всей предыдущей практикѣ (здѣсь преподавателю слѣдуетъ указать на аналогичное положеніе дѣлъ при введеніи понятія объ умноженіи на дробь);

2) всякому реальному акту, состоящему въ *присоединеніи* къ нѣкоторому значенію одной величины нѣкотораго значенія *той же или противоположной* величины и выражающемуся словами „и“, „да еще“, „а затѣмъ“, „кромѣ того“ и т. п., всегда будетъ отвѣчать одно и то же дѣйствіе — сложеніе, что опять-таки вполнѣ согласуется съ установившейся практикой.

§ 3. Вотъ та схема, которой долженъ слѣдовать преподаватель при установленіи понятій объ относительномъ числѣ и о суммѣ такого рода чиселъ, если онъ хочетъ, во-первыхъ, оставаться вѣрнымъ научности вопроса и, во-вторыхъ, избѣжать необходимости убѣждать учащихся въ томъ, будто для опредѣленія капитала лица, имѣющаго $_к7$ р. и $_д5$ р., данныя числа надо *непремѣнно сложить*. Въ томъ-то и вся несостоятельность такого порядка изложенія, что убѣдить дѣтей въ *необходимости* произвести именно сложеніе для рѣшенія только-что указанной задачи — совершенно невозможно. И въ самомъ дѣлѣ, учащіеся привыкли примѣнять сложеніе для нахожденія числа, отвѣчающаго тому значенію величины, которое является результатомъ реальнаго сложенія — соединенія двухъ значеній одной и той же величины въ третье; сложенію же чиселъ $_к7$ и $_д5$ отвѣчаетъ реальное *приложеніе* одного изъ соотвѣтствующихъ имъ значеній величины къ другому *съ соблюденіемъ направленія ихъ*. Этотъ послѣдній процессъ, если угодно, можно назвать сложеніемъ въ обобщенномъ смыслѣ, но сами дѣти не могутъ дойти до такого обобщенія и легко согласиться съ тѣмъ, что для рѣшенія разсматриваемой нами задачи надо найти сумму $_к7 + _д5$ *).

---

*) Именно эти соображенія и побудили, повидимому, г. **Киселева** предпослать алгебраической теоріи относительныхъ чиселъ нѣкоторыя свѣдѣнія о сложеніи направленныхъ отрѣзковъ, дающія возможность установить понятіе о реальномъ сложеніи направленныхъ величинъ.

Далѣе, допустимъ даже, что дѣти, загипнотизированные словами „и“, „да еще“ и т. п., согласны будутъ произвести въ указанномъ случаѣ сложеніе и, постулируя сочетательность суммы, придутъ къ выводу, что $_{к}7 + _{д}5 = (_{к}2 + _{к}5) + _{д}5 = _{к}2 + (_{к}5 + _{д}5) = _{к}2$. Хотя съ научной точки зрѣнія такой выводъ, въ силу принципа перманентности, также правиленъ, но неужели преподаватель замолчитъ здѣсь примѣненіе сочетательнаго закона, а потомъ вновь будетъ доказывать его?

Наконецъ, въ пользу вышеизложеннаго метода весьма громко говоритъ и тотъ доводъ, что путемъ совершенно аналогичныхъ разсужденій можно установить понятіе о произведеніи двухъ алгебраическихъ чиселъ, между тѣмъ какъ обычно употребляемый формальный методъ представляетъ, конечно, несравненно бóльшія затрудненія.

§ 4. Теперь умѣстно будетъ разсмотрѣть тотъ дефектъ, которымъ, на мой взглядъ, страдаетъ изложеніе вопроса о суммѣ и произведеніи алгебраическихъ чиселъ въ книгѣ г. Агура. Дефектъ этотъ состоитъ въ слѣдующемъ.

Предлагая вниманію читателей задачу:

„Товарный поѣздъ отправляется со станціи A желѣзной дороги и проходитъ въ первый часъ a верстъ, во второй часъ b верстъ. Гдѣ будетъ находиться поѣздъ черезъ **2** часа послѣ отправленія?“,

— авторъ разъясняетъ, что подъ a и b слѣдуетъ разумѣть алгебраическія числа, и заявляетъ: „условимся отвѣтъ, получаемый на вопросъ задачи, называть суммой данныхъ чиселъ“ (разрядка автора). Рѣшая затѣмъ четыре частныхъ задачи, получающіяся изъ этой общей задачи путемъ приписыванія буквамъ a и b частныхъ значеній, авторъ послѣ нахожденія отвѣта „при помощи здраваго разсудка“ говоритъ: „такъ какъ мы условились получаемый отвѣтъ на предложенный вопросъ общей задачи называть суммой данныхъ чиселъ, то

$_{n}11 + _{n}7 = _{n}18$ (въ 1-ой частной задачѣ),

$_{o}11 + _{o}7 = _{o}18$ (во 2-ой „ „),

$_{n}11 + _{o}7 = _{n}4$ (въ 3-ей „ „),

$_{o}11 + _{n}7 = _{o}4$ (въ 4-ой „ „)“.

Сопоставляя полученные результаты, авторъ выясняетъ механизмъ составленія суммы для взятыхъ имъ частныхъ значеній буквъ a и b.

Затѣмъ авторъ предлагаетъ читателямъ еще одну задачу, которая отличается отъ первой только тѣмъ, что въ ней данными служатъ значенія другой направленной величины — температуры, и повторяетъ на ней буквально всѣ тѣ разсужденія, которыя онъ велъ по поводу первой задачи.

Наконецъ, авторъ даетъ общее опредѣленіе суммы двухъ алгебраическихъ чиселъ, какъ числа, составленнаго изъ данныхъ чиселъ по опредѣленному правилу.

Мнѣ кажется, что при томъ порядкѣ изложенія, которому слѣдуетъ г. Агура, каждый читатель вмѣстѣ со мною придетъ къ выводу, что суммой двухъ алгебраическихъ чиселъ называется a) число, получаемое въ отвѣтъ на вопросъ задачи о товарномъ поѣздѣ, b) число, получаемое въ отвѣтъ на вопросъ задачи о температурѣ, и c) число, получаемое путемъ примѣненія правила, указаннаго въ общемъ опредѣленіи суммы. Этотъ выводъ является непосредственнымъ слѣдствіемъ того обстоятельства, что авторъ при рѣшеніи каждой изъ двухъ указанныхъ задачъ заключаетъ условіе, выражающееся словами: „условимся отвѣтъ, получаемый на вопросъ задачи, называть суммой данныхъ чиселъ“. Между тѣмъ эти условія совершенно не вызываются необходимостью и, кромѣ того, вслѣдствіе своей необоснованности, безъ сомнѣнія, производятъ на учащихся впечатлѣніе полной неожиданности. Въ самомъ дѣлѣ, для выясненія того правила, по которому изъ данныхъ въ первой или второй задачѣ алгебраическихъ чиселъ составляется искомое алгебраическое число, вовсе не требуется знать, что это искомое число называется суммой; съ другой стороны, до тѣхъ поръ, пока не будетъ выяснена цѣлесообразность такого названія, каждый учащійся будетъ недоумѣвать, почему выбрано именно это названіе, а не какое-либо другое.

Указанный дефектъ можетъ быть легко устраненъ хотя бы по вышеописанному мною способу табличекъ; все же остальное изложеніе разсматриваемаго вопроса въ книгѣ г. Агура почти совпадаетъ съ тѣмъ, которое предложено мною въ настоящей статьѣ.

Я былъ бы весьма счастливъ, если бы г. редакторъ удѣлилъ немного мѣста въ своемъ журналѣ обмѣну мыслей по затронутому выше вопросу между читателями; быть можетъ, намъ удастся хоть на сей разъ разрѣшить одинъ изъ „проклятыхъ“ вопросовъ въ области педагогики начальной алгебры.

И. Гибшъ.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей профессора Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 331 (6 сер.). Найти вещественные корни уравненія

$$\sqrt{(x+y-3)(x-y+1)}-\sqrt{(3x+1)^2+2\sqrt{xyzv}}-$$

$$-\sqrt{(2x+1)^2+(yz^2-y^2z+1)^2}=1,$$

въ которомъ всѣ радикалы имѣютъ, по условію, ариѳметическія значенія.

X. (Петроградъ).

№ 332 (6 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ уравненіе

$$x\sqrt{12y}-2\sqrt{6xy}+2\sqrt{3}=\sqrt{xy}.$$

Н. Михальскій (с. Попов:-Гребля).

№ 333 (6 сер.). Пятая степень суммы цифръ двузначнаго числа въ 9 разъ болѣе 8 ой степени половины уменьшенной на единицу разности его цифръ. Найти это число.

Г. Боевъ (Саратовъ).

№ 334 (6 сер.) Построить треугольникъ *ABC* по сторонѣ *AB*, по разности сторонъ *AC* и *BC* и по разности соотвѣтствующихъ высотъ *AD* и *BE*.

(Заимств).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 276 (6 сер.). *Доказать, что треугольникъ* ABC, *въ которомъ отрѣзки* CD *и* BE, *отсѣкаемые соотвѣтственно отъ сторонъ* AC *и* AB *биссектрисами* BD *и* CE, *равны, равнобедренный.*

Полагая $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, $BE=x$, замѣчая, что по условію

$CD = BE$, и пользуясь извѣстнымъ свойствомъ биссектрисъ BD и CE, находимъ, что

$$\frac{x}{b-x}=\frac{a}{c},\quad \frac{x}{c-x}=\frac{a}{b},\ \text{откуда}\ x=\frac{ab}{a+c},\quad x=\frac{ac}{a+b},$$

а потому

$$\frac{ab}{a+c}=\frac{ac}{a+b},\quad \text{т. е.}\quad \frac{b}{a+c}=\frac{c}{a+b},\quad \text{или же}\ ab+b^2=ac+c^2.$$

Перенося всѣ члены въ первую часть и разлагая первую часть на множителей, получимъ: $(b-c)(a+b+c)=0$, откуда (такъ какъ $a+b+c \neq 0$) $b-c=0$, т. е. $b=c$. Итакъ, $AC=AB$, т. е. данный треугольникъ — равнобедренный.

N. N. (Тифлисъ); *Н. Михальскій* (Екатеринославъ); *Д. Чижевскій* (Александрія); *Л. Гейлеръ* (Харьковъ); *В. Ревзинъ* (Сумы); *Л. Трофимовъ* (Иркутскъ); *И. Богдановъ* (с. Лутковское).

№ 283 (6 сер.). *Дано, что периметры правильныхъ* n *и* (n + 1)*-угольниковъ равны. Вычислить отношеніе площадей этихъ многоугольниковъ и найти предѣлъ этого отношенія при возрастаніи* n *до безконечности.*

Обозначимъ черезъ a и A, q и Q, k и K соотвѣтственно стороны, площади и апоѳемы правильныхъ n и $(n+1)$-угольниковъ. Тогда

$$(1)\quad q=\frac{nak}{2},\qquad (2)\quad Q=\frac{(n+1)AK}{2},$$

и, по условію,

$$(3)\quad na=(n+1)A.$$

Называя черезъ O центръ разсматриваемаго правильнаго n-угольника, черезъ BC его сторону и черезъ M — ея середину, находимъ, что

$$OM=MC\cot\angle MOC=\frac{BC}{2}\cot\frac{\angle BOC}{2},$$

откуда

$$(4)\quad k=\frac{a}{2}\cot\frac{\pi}{n},$$

такъ какъ $\angle BOC=\dfrac{2\pi}{n}$; точно такъ же получимъ, что

$$(5)\quad K=\frac{A}{2}\cot\frac{\pi}{n+1}.$$

Раздѣливъ равенства (1) и (2) почленно и принявъ во вниманіе равенство (3), получимъ [см. (4), (5)]:

$$\frac{q}{Q}=\frac{k}{K}=\frac{a\cot\dfrac{\pi}{n}}{A\cot\dfrac{\pi}{n+1}},\ \text{т. е.}\quad (6)\quad \frac{q}{Q}=\frac{a}{A}\cdot\frac{\cot\dfrac{\pi}{n}}{\cot\dfrac{\pi}{n+1}}.$$

Но изъ равенства (3) слѣдуетъ, что $\dfrac{a}{A}=\dfrac{n+1}{n}$, а потому [см. (6)] искомое отношеніе площадей выражается формулой

$$\frac{q}{Q}=\frac{(n+1)\cot\dfrac{\pi}{n}}{n\cot\dfrac{\pi}{n+1}}=\frac{(n+1)\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n+1}}{n\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}}.$$

Такъ какъ

$$\frac{(n+1)\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n+1}}{n\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\sin\dfrac{\pi}{n+1}}{\sin\dfrac{\pi}{n}}\cdot\frac{\cos\dfrac{\pi}{n}}{\cos\dfrac{\pi}{n+1}}$$

и такъ какъ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n+1}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{\dfrac{\pi}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\dfrac{\pi}{n+1}}{\dfrac{\pi}{n+1}}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\sin\dfrac{\pi}{n+1}}{\sin\dfrac{\pi}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\dfrac{\pi}{n+1}}{\dfrac{\pi}{n+1}}:\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{\dfrac{\pi}{n}}\right)=1,\quad \lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{n+1}=1,$$

то искомый предѣлъ разсматриваемаго отношенія равенъ единицѣ

Л. Гейлеръ (Харьковъ); *А. Кисловъ* (Москва).

№ 284 (6 сер.). *Доказать тожество*

$$P_{2n}=P_1P_2\cdots P_{2n-1}C_2^1C_4^2C_8^4\cdots C_{2^n}^{2^{n-1}},$$

гдѣ n — *нѣкоторое цѣлое положительное число и гдѣ* P_m *обозначаетъ вообще число перестановокъ изъ* m *элементовъ, а* C_m^k — *число сочетаній изъ* m *элементовъ по* k.

Примѣняя извѣстную формулу $C_m^k=\dfrac{P_m}{P_kP_{m-k}}$ при m четномъ и при $k=\dfrac{m}{2}$, находимъ, что $C_m^{\frac{m}{2}}=\dfrac{P_m}{\left(P_{\frac{m}{2}}\right)^2}$.

Преобразовывая при помощи этой формулы правую часть предложеннаго для доказательства равенства, получимъ, что

$$P_1P_2\cdots P_{2n-1}C_2^1C_4^2C_8^4\cdots C_{2^n}^{2^{n-1}}=$$

$$=P_1P_2P_4\cdots P_{2^{n-1}}\cdot\frac{P_2}{(P_1)^2}\cdot\frac{P_4}{(P_2)^2}\cdots\frac{P_{2^{n-1}}}{\left(P_{2^{n-2}}\right)^2}\cdot\frac{P_{2^n}}{\left(P_{2^{n-1}}\right)^2}=P_{2^n}.$$

Л. Гейлеръ (Харьковъ); *Г. Боевъ* (Саратовъ).

№ 288 (6 сер.). *Доказать, что во всякой конечной геометрической прогрессіи, абсолютныя величины членовъ которой различны по числовой величинѣ, сумма абсолютныхъ величинъ членовъ, равно отстоящихъ отъ крайнихъ членовъ, убываетъ по мѣрѣ удаленія отъ концовъ прогрессіи къ ея серединѣ.*

Обозначимъ черезъ a и q абсолютныя величины перваго члена и знаменателя прогрессіи. Согласно съ условіемъ, число членовъ прогрессіи не менѣе трехъ и, кромѣ того, абсолютныя величины членовъ не равны между собою; поэтому a есть число положительное, а q — положительное число, не равное единицѣ. Обозначимъ число всѣхъ членовъ прогрессіи черезъ $m+1$; тогда послѣдній членъ равенъ aq^m, при чемъ m есть цѣлое положительное число, удовлетворяющее неравенству (1) $m \geqq 2$. Называя сумму абсолютныхъ величинъ крайнихъ членовъ прогрессіи черезъ s, а сумму абсолютныхъ величинъ k-го члена съ начала и k-го члена съ конца черезъ s_k, имѣемъ

$$s - s_2 = a + aq^m - (aq + aq^{m-1}) = a - aq - (aq^{m-1} - aq^m) = a(1-q) - aq^{m-1}(1-q),$$

т. е.

$$(2) \quad s - s_2 = a(1-q)(1-q^{m-1}).$$

Такъ какъ [см. (1)] $m-1$ есть цѣлое положительное число и такъ какъ q есть положительное число, большее или меньшее единицы, то разности $1-q$ и $1-q^{m-1}$ одновременно отрицательны или одновременно положительны, смотря по тому, будетъ ли q больше или меньше единицы. Поэтому $(1-q)(1-q^{m-1})>0$, а такъ какъ и $a>0$, то $a(1-q)(1-q^{m-1})>0$, или же [см. (2)] $s-s_2>0$, т. е. $s>s_2$. Если второй съ начала и съ конца члены прогрессіи не суть сосѣдніе, то, примѣняя къ s_2 то же разсужденіе, которое было примѣнено къ s, получимъ, что $s_2>s_3$, и вообще, продолжая разсуждать указаннымъ образомъ, мы приходимъ къ ряду неравенствъ:

$$s > s_2 > s_3 > \ldots > s_{p-1} > s_p,$$

гдѣ $p=\frac{m}{2}$ или же $p=\frac{m+1}{2}$, смотря по тому, будетъ ли m числомъ четнымъ или нечетнымъ.

Л. Гейлеръ (Харьковъ); *Г. Боевъ* (Саратовъ).

Редакторъ прив.-доц. В. Ф. Каганъ. Издатель В. А. Гернетъ.

Дозволено военной цензурой.

Типографія „Техникъ“ — Одесса, Екатерининская, 58.

Обложка
ищется

Обложка
пщется