Обложка
ищется

Обложка
ищется

Второй серіи V-го семестра № 7—8.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

Элементарной Математики.

№ 655—656.

О моделяхъ ко второй книгѣ „Началъ" Евклида.

Проф. Д. Мордухай-Болтовского.

§ 1. Изъ шести планиметрическихъ книгъ „Началъ" Евклида самую скромную исторію имѣютъ вторая и четвертая.

Въ первой находится знаменитая 11 аксіома: „Если двѣ прямыя линіи встрѣчаются третьей такъ, что сумма внутреннихъ угловъ, лежащихъ по одну сторону третьей, меньше двухъ прямыхъ угловъ, то двѣ прямыя по достаточномъ продолженіи встрѣчаются по ту сторону третьей прямой, на которой сумма внутреннихъ угловъ меньше двухъ прямыхъ" и теорія параллельныхъ, основанная начиная съ 29-ой теоремы на этой аксіомѣ. Надъ первой книгой больше всего размышляли составители геометрическихъ руководствъ конца XVIII вѣка и начала XIX вѣка. Эти размышленія въ конечномъ итогѣ привели къ не-евклидовымъ геометріямъ и къ геометрической аксіоматикѣ.

Если мы уйдемъ дальше въ глубь временъ, перенесемся въ XVII вѣкъ, то увидимъ, что не 1-ая, а 5-ая книга явится сосредоточіемъ интереса математиковъ. Если возьмемъ „Начала" Евклида съ коментаріями Арце (Arzet), Такэ (Taquet), Милье (Milliet), Озанама (Ozanam) и др., то усмотримъ, что именно эта книга снабжена тамъ наиболѣе богато коментаріями и подвергается наибольшимъ измѣненіямъ, какъ съ методической точки зрѣнія доступности учащемуся, такъ съ точки зрѣнія научной, т. е. съ точки зрѣнія раціоналистической логики.

Если 1-ая книга дала аксіоматику, то изъ размышленій объ Евклидовой теоріи пропорцій родилось современное представленіе о числѣ, по которому каждой геометрической величинѣ отвѣчаетъ число и каждому числу — геометрическая величина, дала такъ называемую ариѳметизацію математики, приводившую всякое математическое знаніе къ изученію чиселъ. Владычицей же еще болѣе отдаленнаго періода XVI вѣка является 3-ья книга.

Для зубовъ математиковъ XVI вѣка такимъ же твердымъ орѣхомъ, какъ для позднѣйшихъ поколѣній 5-ое опредѣленіе 5-ой книги и 11-ая аксіома 1-ой книги была 16-ая теорема 3-ей книги: „Перпендикуляръ AE, возстановленный изъ конца A діаметра AB круга ABC, находится внѣ круга и нельзя провести ни одной прямой черезъ точку A, между прямой AE и окружностью, которая не пересѣкала бы окружности".

Евклидъ и всѣ геометры до начала исчисленія безконечно-малыхъ говорятъ не только объ углахъ, образованныхъ двумя прямыми, но и объ углахъ между прямой и кривой (смѣшанныхъ углахъ), въ частномъ случаѣ объ углѣ между кругомъ и касательной къ кругу, не сводя этотъ второй типъ угловъ къ первому. Но вотъ этотъ уголъ, къ которому относится предложеніе 16-ое есть по истинѣ чудесный уголъ. Этотъ уголъ меньше всякаго прямолинейнаго угла. Казалось бы, что его слѣдуетъ признать нулемъ, но съ другой стороны, приводя къ одной прямой въ одной точкѣ нѣсколько касательныхъ круговъ, мы увидимъ, что этого рода нули мы можемъ складывать и вычитать. Не трудно видѣть что съ теченіемъ времени эти нули должны были обратиться въ безконечно-малыя и размышленія надъ 3-ей книгой должны были вести къ идеямъ исчисленія безконечно-малыхъ.

Про четвертую книгу можно даже сказать, что она не имѣла исторіи, оставалась безъ измѣненія и у Лежандра (Legedre) и въ томъ же видѣ прошла и въ современные учебники.

Иное дѣло 2-ая книга.

§ 2. У Лежандра, а затѣмъ и вообще въ учебникахъ Лежандровскаго типа, выпадаетъ 5-ая книга, ибо, установивъ между геометрическими величинами и числами, ихъ опредѣляющими, однозначное соотвѣтствіе, какъ основной постулатъ, онѣ относятъ всю теорію пропорцій къ Алгербѣ или Ариѳметикѣ, предваряющимъ Геометрію.

Но въ итальянскихъ учебникахъ, преслѣдующихъ строго-логическое обоснованіе Геометріи и ея эмансипацію отъ Алгебры, 5-ая книга снова отвоевываетъ себѣ почетное мѣсто хотя, правда, въ нѣсколько измѣненномъ видѣ.

Изгоняя 5-ую книгу, Лежандръ долженъ былъ изгнать и 2-ую (кромѣ одной только обобщенной теоремы Пиѳагора). 2-ая книга имѣетъ цѣлью установить такія зависимости между прямоугольниками и квадратами построенными на отрѣзкахъ, которыя легче всего устанавливаются алгебраически, сводясь къ совершенно элементарнымъ алгебраическимъ тожествамъ.

Между тѣмъ Лежандръ оставляетъ у себя одну простѣйшую, но типичную теорему 2-ой книги Евклида и даже болѣе того, пополняя ее еще двумя аналогичными.

Я приведу эту теорему (предл. 8-ое 3-ей книги „Elements de Geometrie“ и предл. 4-ое 2-ой книги „Началъ“) въ формулировкѣ Лежандра и Евклида.

Лежандръ: Если раздѣлить прямую AC на двѣ части AB, BC, квадратъ на цѣлой прямой AC будетъ содержать квадратъ на части AB, еще квадратъ на другой части BC и еще два раза прямоугольникъ, заключенный между AB, BC, что выражается такъ:

$$\overline{AC} \text{ или } (AB+BC)^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+2\overline{AB}\times\overline{BC}.$$

Евклидъ: Если прямую AC раздѣлить въ точкѣ B на какія-нибудь двѣ части AB и BC, то квадратъ построенный на AC равенъ суммѣ квадратовъ построенныхъ на отрѣзкахъ AB и BC съ удвоеннымъ прямоугольникомъ, заключеннымъ между сторонами AB, BC

$$\square AC=\square AC+\square BC+2AC.BC.$$

Эти двѣ формулировки очень типичны.

Евклидъ не складываетъ чиселъ, которыми выражаются эти квадраты и прямоугольники. Лежандръ, ариѳметизирующій Геометрію складываетъ только числа — вмѣсто равенства и плюса — „содержать“ и „еще“.

Доказавъ эту теорему по Евклиду, Лежандръ прибавляетъ: пусть a и b числа, представляющія обѣ линіи AB, BC, то алгебраическое умноженіе даетъ равенство:

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab \tag{1}$$

и предполагая извѣстной мѣру прямоугольника (т. е. формулу площади) съ помощью этого равенства получаемъ второе доказательство этой теоремы.

То же замѣчаніе дѣлаетъ Лежандръ и по поводу геометрическаго доказательства положенія 9-го, выражаемаго формулой:

$$\overline{AC}^2 \text{ или } (AB-BC)^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC,$$

которому отвѣчаетъ алгебраическое тожество

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

и теоремы 10-й, выражаемой формулой;

$$(AB+BC)\times(AB-BC) = \overline{A}B^2 - \overline{B}C^2$$

и отвѣчающей тожеству

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2.$$

Этихъ двухъ послѣднихъ положеній у Евклида нѣтъ, но они аналогичны тѣмъ, которыя имѣются во 2-ой книгѣ „Начала" Евклида.

Теоремы 2-ой книги „Началъ" отвѣчаютъ тожествамъ:

$$\text{(I)}\quad (a+b)\,c = ac + bc,$$

$$\text{(II)}\quad a^2 = ab + (a-b)\,a,$$

$$\text{(III)}\quad (a+b)\,b = ab + b^2,$$

$$\text{(IV)}\quad (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab,$$

$$\text{(V)}\quad b\,(a-b) + \left(\frac{a}{2} - b\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

$$\text{(VI)}\quad (a+b)\,b + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + b\right)^2,$$

$$\text{(VII)}\quad (a+b)^2 + b^2 = a^2 + 2\,(a+b)\,b,$$

$$\text{(VIII)}\quad (a+2b)^2 = a^2 + 4\,(a+b)\,b,$$

$$\text{(IX)}\quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2},$$

$$\text{(X)}\quad (a+b)^2 + b^2 = 2\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} + b\right)^2\right],$$

Только XI, XII, XIII и XIV иного характера. Можно сказать, что 10 теоремъ (изъ 14) 2-ой книги „Началъ" имѣютъ цѣлью установить формальные законы основныхъ операцій, относящихся къ сложенію, вычитанію и умноженію отрѣзковъ (въ смыслѣ построенія на отрѣзкахъ прямоугольниковъ и квадратовъ) тожественныя съ соотвѣтственными нормальными законами Алгебры и Ариѳметики.

§ 3. Если учебники логистическаго направленія [напримѣръ, Саньо и д'Овидіо (Sannio ed D'Ovidio)] должны были вспомнить 5-ую книгу „Началъ", то на 2-ую книгу должны были бы обратить вниманіе интуитивисты.

Это — книга допускающая моделированіе и методисту, который цѣлью математическаго образованія ставитъ не только воспитаніе одного формально логическаго аппарата, есть надъ чѣмъ призадуматься.

Исторія 2-ой книги еще не закончилась. 3-ья книга занимала математика-метафизика, 5-ая — математика par exellence математика-вычислителя, 1-ая — математика-логика, 2-ая — для математика психолога. Рядомъ съ проблеммой о наиболѣе обоснованномъ логически доказательствѣ съ точки зрѣнія послѣдняго выдвигается проблема о наиболѣе убѣдительномъ для учащагося доказательствѣ. При рѣшеніи этой проблемы слѣдуетъ разсматривать всякое школьное доказательство, какъ наложеніе двухъ доказательствъ, съ несовершенствомъ каждаго изъ которыхъ приходится порой мириться — интуитивнаго и логическаго взаимно усиляющихъ убѣдительность другъ друга. Первое состоящее изъ операцій перенесенія, наложенія и т. д. осуществляется подвижной моделью или ей соотвѣтствующимъ процессомъ воображенія, второе развертываетъ силлогизмы, приводящее къ обоснованію этихъ операцій.

То доказательство лучше, гдѣ ясно обозначаются эти два слоя интуитивный и логическій. Если снять послѣдній, то остается еще многое. Вы видите организмъ интуитивной Геометріи, которая развертывалась на ряду съ формально-логической.

Въ настоящемъ очеркѣ я позволяю снять первый слой, оставить только интуитивныя доказательства, заняться только моделями къ теоремамъ 2-ой книги и имъ аналогичнымъ теоремамъ.

Чтобы построить такія модели достаточно запастись:

1) Картономъ (бристоль), 2) трехугольникомъ (съ дѣленіями), 3) ножикомъ, 4) цвѣтной бумагой, 5) гумми-арабикомъ, 6) резиновымъ валикомъ.

Мы оставляемъ открытымъ вопросъ, сколькихъ цвѣтовъ слѣдуетъ пріобрѣсти бумагу. Изъ дальнѣйшаго читатель самъ выведетъ, что достаточно трехъ цвѣтовъ.

Для того, который не намѣренъ внести эти модели въ коллекцію математическаго кабинета, достаточно взять только цвѣтную бумагу и ножикъ и складываніемъ цвѣтной бумаги осуществить то, что можетъ сдѣлать трехугольникъ и циркуль.

Элементами перелагаемыми и налагаемыми здѣсь будутъ только прямоугольники, которые совсѣмъ не трудно вырѣзать.

§ 4. Моделируемъ 4-ое предложеніе, т. е. то, которое перешло къ Лежандру.

Поставьте на чертежѣ 1 вмѣсто

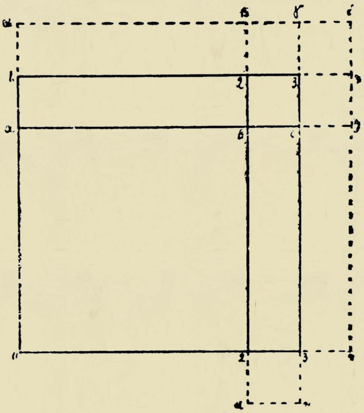
A	B	C	F	I	G	E	H	D
1	2	3	a	b	c	1	2	3

и читайте обозначеніе прямоугольниковъ снизу и слѣва (такъ мы будемъ дѣлать и ниже).

Тогда

$$\begin{array}{ll|l} (1313) \; \ldots\ldots & (a+b)^2, & \left.\begin{array}{l}(ab12) \; \ldots \\ (23bc) \; \ldots\end{array}\right\} ab \\ (12ab) \; \ldots\ldots & a^2, & \\ (bc23) \; \ldots\ldots & b^2, & \end{array}$$

Модель состоитъ изъ:



Черт. 1.

1) квадрата $(\overline{1313})$ синяго цвѣта;

2) квадратовъ $(\overline{bc}23)$, $(\overline{1213})$ синяго цвѣта;

3) двухъ равныхъ прямоугольниковъ $(\overline{ab}12)$, $(\overline{23bc})$ краснаго цвѣта.

Операціи:

Наложеніе сперва $(\overline{ab12})$ на $(ab12)$, такъ чтобы углы $ba1$ совпали, затѣмъ $(\overline{23bc})$ на $(23bc)$ ... въ свободныя части $(\overline{12}13)$ и $(\overline{bc}23)$.

Возможно упрощеніе модели, состоящее въ исключеніи квадратовъ $(\overline{bc}23)$ и $(\overline{1213})$.

Вообразимъ, что раньше чѣмъ мы перешли къ моделированію другихъ теоремъ, съ первой нашей моделью произошелъ несчастный случай. Маленькій сынишка, присутствовавшій при фабрикаціи, разрѣзалъ ножницами элементы нашей модели. Нѣтъ сомнѣнія, что, если мы вмѣстѣ съ тѣмъ не успѣли потерять одинъ изъ кусковъ, то модель будетъ продолжать съ прежнимъ успѣхомъ функціонировать. Только придется переносить не цѣлые элементы треугольники, а элементы, составленные изъ кусковъ.

Замѣтимъ, что при нашихъ операціяхъ квадратъ $(\overline{1313})$ неподвиженъ, другіе же элементы передвигаются. Я предлагаю нѣсколько пощедриться на картонъ и наклеить цвѣтной квадратъ $(\overline{1313})$ на значительно бо́льшій картонный квадратъ. Вокругъ $(\overline{1313})$ тогда будетъ неоклеенная рамка, то, что мы будемъ называть **фономъ**. Мы сейчасъ увидимъ для какой цѣли это измѣненіе въ построеніи модели можетъ оказаться полезнымъ.

По образцу модели для тожества $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ построимъ модель для тожества (черт. 1)

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc. \qquad (2)$$

Здѣсь будемъ имѣть неподвижный (синій) квадратъ $(\overline{14a\delta})$ на фонѣ картона.

Переносные элементы:

квадраты синіе	$(1\overline{2ab})$	. . . . . .	a^2,
" "	$(\overline{bc}23)$	. . . . . .	b^2,
" "	$(34\overline{\gamma}\delta)$	. . . . . .	c^2,
прямоугольники синіе	$(\overline{12}a\beta)$	. . . . .	ac
" "	$(\overline{34cd})$		
" красные	$(\overline{ab}12)$	. . . . .	ab
" "	$(23\overline{bc})$		
" "	$(c\overline{d3}4)$	. . . . .	bc
" "	$(2\overline{3\beta}\gamma)$		

Нѣтъ необходимости при наличности фона строить отдѣльно модели для $(a+b)^2$ и $(a+b+c)^2$. Для доказательства тожества (1) можемъ использовать модель для $(a+b+c)^2$. Для этого слѣдуетъ только <u>обратить</u> въ <u>фонъ</u> $(14a\delta)$ и (3434) покрывъ ихъ перевернутыми $(\overline{18}a\gamma)$, $(\overline{343}4)$ и $(\overline{34}\gamma\delta)$ или, если эти прямоугольники оклеены съ обѣихъ сторонъ новыми неоклеенными прямоугольниками $(13\underline{a\gamma})$, $(\underline{3434})$ и $(\underline{34\gamma\delta})$.

Обращая въ фонъ $(14\gamma\delta)$, мы получаемъ модель тожества:

$$(a+b)(a+b+c) = a^2+b^2+2ab+ac+bc.$$

§ 5. Постараемся теперь по тому же образцу построить модель тожества (предл. 7-ое):

$$(a+b)^2+b^2 = a^2+2(a+b)b. \qquad (3)$$

Неподвижная часть:

Два квадрата:

синій (1313) . . . $(a+b)^2$,

красный $(u\nu 23)$ . . . b^2 на картонѣ.

Подвижные: квадратъ $(12ab)$ . . . a^2 красный.

Прямоугольники:

синій	$(\overline{ac}13)$	$(a+b)b.$
зеленый	$(\overline{u\nu b}c)$	

Подвижныя части моделей § 4 мы могли бы получить слѣдующимъ образомъ: вырѣзать единовременно изъ синей бумаги и бристоля два квадрата, употребивъ первый, какъ неподвижную часть модели. Картонный же квадратъ для полученія подвижныхъ частей должны были бы разрѣзать отъ одного края до другого перпендикулярно къ сторонамъ.

Но элементы указанной выше модели тожества (3) не получаются такимъ образомъ. Операціи эти (т. е. разрѣзаніе картона отъ одного борта до другого), въ настоящемъ случаѣ квадратъ (1313) по $2b2$ и abc) не цѣльныя $(ac13)$ и $(u\nu bc)$, а ихъ куски. Но, какъ было выше отмѣчено, этимъ не разстраивается наша модель и съ этими кусками мы можемъ провести все наше интуитивное доказательство. При этомъ мы получаемъ слѣдующіе преимущества: съ этими кусками (отбрасывая одинъ) мы можемъ провести и доказательство тожества (1). Затѣмъ — вмѣсто цвѣтной бумаги трехъ сортовъ мы можемъ ограничиться двумя сортами бумаги, оклеивая прямоугольные куски $(a\bar{c}13)$, $(u\nu bc)$ синей, а квадратныя красной бумагой.

Всѣ наши операціи можемъ переложить на алгебраическій языкъ: 1) Дѣленіе борта или откладываніе по борту отрѣзковъ прямой . . . сторона прямоугольника представляется суммой:

$$a+a+a+\cdots+b+b+\cdots=\lambda_1 a+\mu_1 b+\cdots,$$

гдѣ λ_1, $\mu_1\ldots$ цѣлыя положительныя числа.

2) Дѣленіе другого борта . . . другая сторона:

$$a+a+\cdots+b+b+b+\cdots=\lambda_2 a+\mu_2 b+\cdots,$$

гдѣ λ_2, μ_2 цѣлыя положительныя числа.

3) Разрѣзываніе параллельно бортамъ черезъ точки дѣленія . . . представленіе произведенія:

$$(\lambda_1 a+\mu_1 b+\cdots)(\lambda_2 a+\mu_2 b+\cdots),$$

суммой $\lambda_1\lambda_2$ членовъ равныхъ a^2,

$$\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1 \text{ равныхъ } ab \text{ и т. д.}$$

или въ случаѣ нѣсколькихъ прямоугольниковъ:

$$\sum_j\left(\lambda_1^{(j)}a+\mu_1^{(j)}b+\cdots\right)\left(\lambda_2^{(j)}a+\mu_2^{(j)}b+\cdots\right)$$

суммой $\sum\lambda_1^{(j)}\lambda_2^{(j)}$ членовъ равныхъ a^2

$$\sum_j\left(\lambda_1^{(j)}\mu_2^{(j)}+\lambda_2^{(j)}\mu_1^{(j)}\right) \text{ равныхъ } ab \text{ и т. д.}$$

4) Замѣщеніе этими вырѣзками соотвѣтственныхъ частей другихъ прямоугольниковъ . . . сокращеніе подобныхъ членовъ въ обѣихъ частяхъ тожества:

$$\sum_j \left(\lambda_1^{(j)}a + \mu_1^{(j)}b + \cdots\right)\left(\lambda_2^{(j)}a + \mu_2^{(j)}b + \cdots\right) =$$

$$= \sum_j \left(l_1^{(j)}a + m_1^{(j)}b + \cdots\right)\left(l_2^{(j)}a + m_2^{(j)}b + \cdots\right), \qquad (4)$$

гдѣ $\lambda_k^{(j)}$, $\mu_k^{(j)}, \ldots,$ $l_k^{(j)}$, $m_k^{(j)} \ldots$ цѣлые положительные числа или нули.

Въ случаѣ тожества (1) имѣемъ:

$$l_1^{(1)} = \lambda_2^{(1)} = 1, \quad \mu_1^{(1)} = \mu_2^{(1)} = 1,$$

$$l_1^{(1)} = 1, \quad l_2^{(1)} = 1, \quad m_1^{(1)} = 0, \quad m_2^{(1)} = 0,$$

$$l_1^{(2)} = 0, \quad l_2^{(2)} = 0, \quad m_1^{(2)} = 1, \quad m_2^{(2)} = 1,$$

$$l_1^{(3)} = 1, \quad l_4^{(3)} = 0, \quad m_1^{(3)} = 0, \quad m_4^{(3)} = 1.$$

$$l_1^{(4)} = 1, \quad l_4^{(4)} = 0, \quad m_1^{(4)} = 0, \quad m_4^{(4)} = 1,$$

Для (4):

$$\lambda_1^{(1)} = \lambda_2^{(1)} = 1, \quad \mu_1^{(1)} = \mu_2^{(1)} = 1,$$

$$\lambda_1^{(2)} = \lambda_2^{(2)} = 0, \quad \mu_1^{(1)} = \mu_2^{(1)} = 1,$$

$$l_1^{(1)} = 1, \quad l_2^{(1)} = 0, \quad m_1^{(1)} = 0, \quad m_2^{(1)} = 0,$$

$$l_1^{(2)} = 1, \quad l_2^{(2)} = 0, \quad m_2^{(2)} = 1, \quad m_2^{(2)} = 1,$$

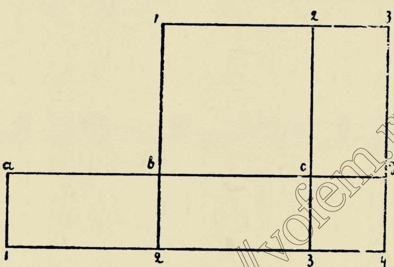
$$l_1^{(3)} = 1, \quad l_2^{(3)} = 0, \quad m_1^{(3)} = 1, \quad m_2^{(3)} = 1.$$

Подъ этотъ типъ подходитъ тожество (черт. 2):

$$(a+b)^2 = a^2 + (2a+b)\,b. \qquad (5)$$

Неподвижная часть: синій квадратъ (2413).

Подвижныя части: синій квадратъ $(\overline{bc}12)$ . . . a^2, красный прямоугольникъ $(1\overline{4ad})$ . . . $(2a+b)\,b$ разрѣзанный на два куска по $2b$.



Черт. 2.

При доказательствѣ $(1\overline{2ab})$ изъ $(12ab)$ переносится въ $(cd23)$.

Если произвести еще разрѣзъ по $3c$, то получимъ всѣ составныя части модели тожества (1).

Вмѣстѣ съ тожествомъ (5) доказывается тогда и тожество (1). Модель доказательства тожества*) (8-ое положенiе)

$$(a+2b)^2 = a^2 + 4\,(a+b)\,b \qquad (6)$$

состоитъ изъ неподвижнаго квадрата синяго $(\overline{1414})$ . . . $(a+2b)^2$.

Подвижныхъ частей:

синяго квадрата $(\overline{a\beta 12})$ . . . . . . a^2,

синихъ прямоугольниковъ $(\overline{13ac})$, $(\overline{cd34})$ . . . . . . $(a+b)\,b$,

красного прямоугольника $(\overline{aca\gamma})$ } $(a+b)\,b$,

зеленаго „ $(\overline{\beta\gamma u\nu})$ }

разрѣзаннаго по 23.

При доказательствѣ $(\overline{23u\nu})$ накладывается на $(34cd)$.

§ 6. Предложенiе 7-е высказывается Евклидомъ такимъ образомъ: Если прямую BE раздѣлить въ точкѣ C на двѣ какiя-нибудь части BC и CE, то квадратъ, построенный на BE, вмѣстѣ съ квадратомъ, построеннымъ на одной изъ частей, напримѣръ CE, равенъ удвоенному прямоугольнику, заключенному между цѣлой прямой BE и взятой частью CE, вмѣстѣ съ квадратомъ, построеннымъ на другой части BC.

Переводя на алгебраическiй языкъ мы получаемъ тожество (3). Отъ тожества (3) переходимъ къ тожеству:

$$(a+b)^2 + b^2 = [(a+b) - b]^2 + 2\,(a+b)\,b,$$

или при другомъ обозначенiи къ тожеству:

$$a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab, \qquad (6)$$

если использовать свойство отрѣзковъ прямой, отвѣчающее тожеству:

$$a = (a+b) - b,$$

т. е. если отложить a, затѣмъ b и затѣмъ въ обратную сторону b, то получимъ отрѣзокъ a.

Можно сказать, что модель § 5 даетъ также интуитивное доказательство тожества (6).

Можно сказать, что у Евклида имѣется тожество (6), но не имѣется тожества:

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab, \qquad (7)$$

*) Чертежъ предоставляю вычертить читателю.

ибо у него не имѣется операціи, соотвѣтствующей переносу члена изъ одной части тожества въ другую съ измѣненнымъ знакомъ.

Лежандръ же даетъ доказательство именно тожества (7).

Мы дадимъ соотвѣтствующую модель, въ операціяхъ которой мы увидимъ новый актъ, чуждый вышеупомянутымъ моделямъ.

На неподвижный синій квадратъ (1313) . . . a^2 вмѣстѣ съ краснымъ ($uv23$) . . . b^2 накладываются перевернутые вверхъ неокленной стороной прямоугольники ($ac13$), ($uvbc$). Мы тотчасъ видимъ, какое примѣненіе находитъ себѣ фонъ, о которомъ говорили въ § 4.

Совершенно такимъ же образомъ моделируется тожество:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

Неподвижный квадратъ (синій) на фонѣ (черт. 1) (1313) . . . a^2.

Подвижные элементы:

цвѣтной съ одной стороны квадратъ ($\overline{bc23}$) . . . b^2,
прямоугольникъ красный ($\overline{14ad}$) . . . $(a-b)(a+b)$,
разрѣзанный по $3c$ на два куска ($13ac$) и ($34cd$),
($\overline{34cd}$) переносится въ ($ab12$),
($\overline{bc23}$) кладется перевернутый въ ($bc23$),
($\overline{13ac}$) „ неперевернутый въ ($13ac$).

Всѣ эти элементы входятъ въ модели тожествъ (1) и (4). Укажемъ модель тожества:

$$(a+c-b)^2=a^2+c^2+b^2+2ac-$$
$$-2ab-2bc \quad (8) \quad (b>c).$$

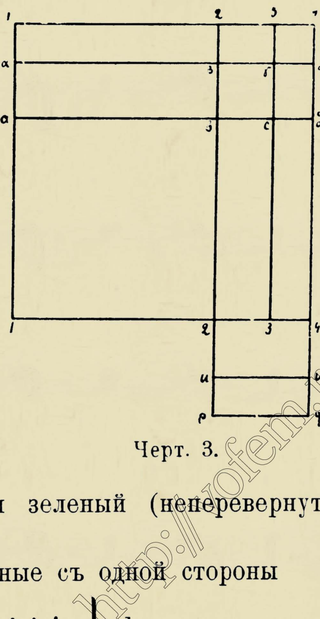
Неподвижная часть на фонѣ (черт. 3).

Квадраты синіе:

($13a\gamma$) . . . . a^2,
($\gamma\delta34$) . . . . c^2,

Красный:

($pq24$) . . . . b^2.



Черт. 3.

Для полученія правой части тожества накладываютъ сперва красный и зеленый (неперевернутые) прямоугольники ($\overline{a\gamma}13$) и ($\overline{34\gamma\delta}$).

Затѣмъ на нихъ перевернутые цвѣтные съ одной стороны

$$\left.\begin{array}{l}(\overline{ac}13)\ .\ .\ .\\(\overline{uvbd})\ .\ .\ .\end{array}\right\}ab,\qquad \left.\begin{array}{l}(\overline{cd}34)\ .\ .\ .\\(\overline{pquv})\ .\ .\ .\end{array}\right\}bc.$$

На остающуюся необращенной въ фонъ части ($12ab$) накладывается синій квадратъ ($\overline{12ab}$) . . . $(a+c-b)^2$. Такимъ же образомъ приготовляются модели тожества (8) при $b<c$ и тожество

$$(a-c-b)^2 = a^2+c^2+b^2-2ac-2ab+2bc. \qquad (9)$$

Оставляемъ читателю построить модель тожества

$$(a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2+(a-b-c)^2 = 4\,(a^2+b^2+c^2).$$

гдѣ a, b, c таковы, что могутъ служить сторонами трехугольника.

Наши интуитивныя доказательства при введеніи операціи обращенія въ фонъ, т. е. переворачиваніи элементовъ, теперь уже распространяются на тожества:

$$\begin{aligned}&\sum_{j} \pm \left(\lambda_1^{(j)}a+\mu_1^{(j)}b+\cdots\right)\left(\lambda_2^{(j)}a+\mu_2^{(j)}b+\cdots\right) = \\ &= \sum_{j} \pm \left(l_1^{(j)}a+m_1^{(j)}b+\cdots\right)\left(l_2^{(j)}a+m_2^{(j)}b+\cdots\right)\end{aligned} \qquad (10)$$

при чемъ $\lambda_1^{(j)}$, $\mu_1^{(j)}, \ldots$, $\lambda_2^{(j)}$, $\mu_2^{(j)}, \ldots$, $l_1^{(j)}$, $m_1^{(j)}, \ldots$, $l_2^{(j)}$, $m_2^{(j)} \ldots$ цѣлыя числа, какъ положительныя, такъ и отрицательныя.

Прямоугольникъ

$$(\lambda_1 a+\mu_1 b+\cdots)(\lambda_2 a+\mu_2 b+\cdots)$$

моделируемъ такъ:

Если черезъ $\overline{\lambda}_k a$, $\overline{\mu}_k b, \ldots$, обозначить положительныя, а черезъ $\underline{\lambda}_k a$, $\underline{\mu}_k b, \ldots$, отрицательныя члены суммы:

$$(\lambda_k a+\mu_k b+\cdots),$$

то беремъ сперва неперевернутый синій прямоугольникъ (1313)

$$(\overline{\lambda}_1 a+\overline{\mu}_1 b+\cdots)(\overline{\lambda}_2 a+\overline{\mu}_2 b+\cdots),$$

на него накладываемъ перевернутый прямоугольникъ (2323):

$$(\underline{\lambda}_1 a+\underline{\mu}_1 b+\cdots)(\overline{\lambda}_2 a+\overline{\mu}_2 b+\cdots)$$

на послѣдній неперевернутый синій ($bc23$):

$$(\underline{\lambda}_1 a+\underline{\mu}_1 b+\cdots)(\underline{\lambda}_2 a+\underline{\mu}_2 b+\cdots)$$

и затѣмъ перевернутый ($ac13$):

$$(\overline{\lambda}_1 a+\overline{\mu}_1 b+\cdots)(\underline{\lambda}_2 a+\underline{\mu}_2 b+\cdots).$$

Подвижные элементы получаются разрѣзываніемъ прямоугольника (1313) съ наложенными на него прямоугольниками параллельно бортамъ.

Сиціе куски — положительные члены, неоклеенные-отрицательные.

Если членъ $(\lambda_1 a + \mu_1 b + \cdots)(\lambda_2 a + \mu_2 b + \cdots)$ въ лѣвой части стоитъ со знакомъ —, то слѣдуетъ каждый изъ элементовъ перевернуть.

Сокращенію членовъ въ лѣвой и правой части тожества отвѣчаетъ наложеніе верхнихъ цвѣтныхъ элементовъ лѣвой части на соотвѣтствующіе верхніе элементы правой части.

§ 7. Теорему шестую 2-ой книги „Началъ„: Если прямую AC въ точкѣ B раздѣлить пополамъ и прибавить къ ней какой-нибудь отрѣзокъ CE, то прямоугольникъ, заключенный между цѣлой прямой AE и прибавленнымъ отрѣзкомъ CE, вмѣстѣ съ квадратомъ, построеннымъ на половинѣ AC, равенъ квадрату, построенному на прямой BE, составленной изъ половины AC и прибавленнаго отрѣзка CE проф. Ващенко-Захарченко на алгебраическій языкъ переводитъ тожествомъ:

$$(a+b)^2 = a^2 + (2a+b)\,b.$$

Но это переводъ слишкомъ вольный.

Точный переводъ:

$$(a+b)\,b + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + b\right)^2. \qquad (12)$$

Въ самомъ дѣлѣ—Евклидъ доказываетъ эквивалентность двухъ рядовъ операцій, при чемъ въ одинъ изъ рядовъ совершенно опредѣленно входитъ операція дѣленія отрѣзка пополамъ (согласно предложенію X 1-ой книги „Началъ").

Переходъ отъ тожества (4), выше нами моделированному, къ тожеству (12), предполагаетъ примѣненіе тожества

$$2 \,.\, \frac{a}{2} = a$$

(если раздѣлить отрѣзокъ AB на двѣ равные части согласно правилу Евклида и затѣмъ къ одной части AC прибавить отрѣзокъ CD, равный AC, то получимъ первоначальный отрѣзокъ AG).

Можно сказать, что 2-ая книга „Началъ" даетъ доказательства и соотвѣтствующія имъ модели тожества (10) не только при цѣлыхъ λ, μ, l, m но и при дробныхъ типа $\frac{N}{2^k}$, но отнюдь не при всякихъ дробныхъ λ, μ, l, m... такъ какъ дѣленіе на 3, 5... частей совершается на основаніи теорій пропорцій, изложенной только въ 5-ой книгѣ „Началъ".

Представляемъ читателю (согласно чертежу 2) моделировать 5-е положеніе выражаемое тожествомъ:

$$b(a-b)+\left(\frac{a}{2}-b\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2. \tag{13}$$

§ 8. Положенія 4, 5, 6, 7, 8 моделируются подвижными моделями. Модели же 1, 2, 3 могутъ быть неподвижны.

Дѣло идетъ о тѣхъ геометрическихъ фактахъ, которые на алгебраическій языкъ переводятся тожествами:

$$(a+b)c=ac+bc \quad \text{(полож. 1)},$$

$$(a+b)b=ab+b^2 \quad \text{(полож. 3)},$$

$$a^2=ab+(a-b)a \quad \text{(полож. 2)}.$$

Представляется, что для всѣхъ этихъ тожествъ одна модель — прямоугольникъ раздѣленной прямой параллельной одному борту на двѣ части, оклеенные различнаго цвѣта бумагой.

Впрочемъ, можно для наглядности пользоваться и подвижной моделью, взявъ, за $(a+b)c$ синій прямоугольникъ и накладывая на его части красный ab и синій bc прямоугольники.

Почему Евклидъ выдѣляетъ въ особое тожество, требующее особаго разсмотрѣнія частный случай

$$(a+b)c=ac+bc$$

при $c=b$?

Потому что у Евклида геометрическій объектъ опредѣляется генетически — его построеніемъ. Если для насъ право на существованіе получается отсутствіемъ противорѣчій въ признакахъ, опредѣляющихъ математическій объектъ, то у Евклида это право давалось построеніемъ. По Евклиду доказательство, основанное на существованіи прямыхъ, дѣлящихъ уголъ на три равные части, было бы несостоятельнымъ. Съ точки зрѣнія формы квадратъ только частный случай прямоугольника.

Иное дѣло съ точки зрѣнія построенія.

Квадратъ на AB получается геометрическими операціями надъ однимъ объектомъ AB, но вовсе не надъ двумя равными (см. т. 42 I книги).

Прямоугольникъ же между AB и CD получается операціями надъ двумя различными объектами AB и CD.

Моделировщикъ, конечно, долженъ встать на точку зрѣнія, именно, Евклида.

Операціи заготовки модели ab и модели a^2 должны быть различны.

Чтобы приготовить ab, приходится по одному борту откладывать a, по перпендикулярамъ въ конечныхъ точкахъ b и проводя четвертую сторону вырѣзывать прямоугольникъ.

Законъ коммутативный

$$ab = ba$$

выражается тѣмъ фактомъ, что прямоугольникъ получается тотъ же, будемъ ли по борту откладывать a, а по перпендикулярамъ b или же по борту b, а по перпендикулярамъ a.

При вырѣзываніи квадрата, согласно Евклиду, по перпендикулярамъ приходится откладывать отложенный по борту отрѣзокъ. При оперированіи съ цвѣтной бумагой это достигается складываніемъ ея.

Положеніе

$$ab = a^2 \quad \text{при} \quad b = a$$

не такъ очевидно, какъ

$$ab = ac \quad \text{при} \quad b = c$$

и уже не выводится какъ простое слѣдствіе изъ перваго.

$a^2 = b^2$ не должно разсматриваться, какъ слѣдствіе $ac = bd$ при $c = a$, $d = b$

такимъ же образомъ:

$$a^2 = a^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; ac = ac \quad \text{при} \quad c = a.$$

Установкѣ тожественности одночленовъ ac отвѣчаетъ констатированіе совпаденія двухъ налагаемыхъ другъ на друга прямоугольниковъ въ одномъ опредѣленномъ положеніи (бортъ a на бортъ a, c на c) и еще въ другомъ при поворотѣ на 180°.

Установкѣ же тожественности одночленовъ a^2 отвѣчаетъ совпаденіе при наложеніи одного квадрата на другой въ двухъ положеніяхъ въ одномъ и въ другомъ, получаемомъ поворачиваніемъ на 90°, на 180° и на 270°.

§ 9. Вотъ психологическая задача, которой мы не можемъ найти рѣшенія.

Почему IX теорему, отвѣчающую тожеству:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2} \qquad (14)$$

Евклидъ устанавливаетъ совершенно иначе, чѣмъ первые 8? Если мы пожелаемъ моделировать ее согласно Евклиду, то получимъ вмѣсто подвижныхъ элементовъ-прямоугольниковъ элементы-трехугольники, при чемъ модель получается очень сложная.

Читателю, представляя тожество (14) въ видѣ:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=2\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2\right], \tag{15}$$

къ которому приводится (14) примѣненіемъ тожества $2\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}$, извѣстнаго Евклиду, не трудно построить и для этого тожества модель разсмотрѣннаго выше типа.

Тоже самое слѣдуетъ сказать и о теоремѣ X-й. Но иное дѣло — теоремѣ XII (обобщенная теорема Пиѳагора).

„Во всякомъ тупоугольномъ треугольникѣ CBA квадратъ, построенный на сторонѣ BC, противолежащей тупому углу CAB, больше суммы квадратовъ, построенныхъ на другихъ сторонахъ AB и AC, на удвоенный прямоугольникъ, заключеннный между одною изъ сторонъ, заключающихъ тупой уголъ, напримѣръ AC, и продолженіемъ AD той же стороны AC до встрѣчи съ перпендикуляромъ BD, опущеннымъ изъ точки B на сторону AC“.

Евклидъ для доказательства этой теоремы долженъ былъ избрать другой путь, ибо для этой теоремы, какъ для теоремы Пиѳагора (предл. 47 I книги „Началъ“) доказательства изслѣдованнаго выше типа невозможны (для общаго случая), модель изъ прямоугольныхъ кусковъ возможна только для частныхъ случаевъ.

Докажемъ это для теоремы Пиѳагора.

На основаніи изложеннаго выше существованіе такой модели предполагаетъ при нѣкоторыхъ цѣлыхъ числахъ $\lambda_1^{(1)}$, $\mu_1^{(1)}, \ldots$, $\lambda_1^{(2)}$, $\mu_1^{(2)}, \ldots$, λ, $\mu \ldots$ тожество

$$(\lambda_1^{(1)}a+\mu_1^{(1)}b+\cdots)(\lambda_2^{(1)}a+\mu_2^{(1)}b+\cdots)+(\lambda_1^{(2)}a+\mu_1^{(2)}b+\cdots)(\lambda_2^{(2)}a+\mu_2^{(2)}b+\cdots)=$$
$$=(\lambda_1 a+\mu_1 b+\cdots)(\lambda_2 a+\mu_2 b+\cdots), \tag{16}$$

гдѣ

$$\left.\begin{matrix}\lambda_1^{(1)}a+\mu_1^{(1)}b+\cdots\\ \lambda_2^{(1)}a+\mu_2^{(1)}b+\cdots\end{matrix}\right\}$$ представляютъ одинъ катетъ,

$$\left.\begin{matrix}\lambda_1^{(2)}a+\mu_1^{(2)}b+\cdots\\ \lambda_2^{(2)}a+\mu_2^{(2)}b+\cdots\end{matrix}\right\}$$ „ другой катетъ,

$$\left.\begin{matrix}\lambda_1 a_1+\mu_1 b+\cdots\\ \lambda_2 a_2+\mu_2 b+\cdots\end{matrix}\right\}$$ „ гипотенузу.

Возьмемъ простѣйшій случай положительныхъ $\lambda_1^{(1)}$, $\mu_1^{(1)}, \ldots$, λ_1, $\mu_1 \ldots$

Возьмемъ квадратъ, построенный на одномъ изъ катетовъ уже разрѣзанной на куски согласно представленію его произведеніемъ:

$$(\lambda_1^{(1)} a + \mu_1^{(1)} b + \cdots)(\lambda_2^{(1)} a + \mu_2^{(1)} b + \cdots). \qquad (17)$$

Возьмемъ другой такой же съ вычерченной на немъ сѣтью дающей эти куски. Повернувъ послѣдній на 90°, положимъ на первый и проведемъ ножницами по этой сѣти. Тогда первый квадратъ разрѣжется на куски соотвѣтственно представленію его произведеніемъ:

$$(l^{(1)}\alpha + \mu^{(1)}\beta + \cdots)(l^{(1)}\alpha + m^{(1)}\beta + \cdots) = (l^{(1)}\alpha + m^{(1)}\beta + \cdots)^2$$

при чемъ модель остается годной.

Дѣлая тоже съ другими двумя квадратами тожество (16) замѣняемъ слѣдующимъ:

$$(l^{(1)}\alpha + m^{(1)}\beta + \cdots)^2 + (l^{(2)}\alpha + m^{(2)}\beta + \cdots)^2 = (l\alpha + m\beta + \cdots)^2. \qquad (18)$$

Въ случаѣ отрицательныхъ $\lambda_1^{(1)}, \mu^{(1)}, \ldots, \lambda_1, \mu, \ldots$ операціи для установки этого тожества много сложнѣй.

Тогда произведенію (17) будетъ отвѣчать (черт. 3) прямоугольникъ (1313) съ наложенными на него перевернутыми прямоугольниками (2323), ($ac12$) и цвѣтнымъ прямоугольникомъ ($bc23$) между ними.

Предположимъ его уже разрѣзаннымъ на куски.

Возьмемъ второй такой же тоже разрѣзанный и положимъ, повернувъ на 90° на первый, такъ, чтобы они образовали фигуру ($14\gamma\delta13$) и проведемъ ножницами по разрѣзамъ, разрѣзая нижніе прямоугольники на меньшіе куски. Возьмемъ цвѣтной квадратъ (1414) съ наложенными на него обернутыми прямоугольниками ($ad14$) и (2424) и цвѣтнымъ квадратомъ между ними ($bd24$). Накладываемъ на него упомянутую выше первую фигуру изъ двухъ наложенныхъ прямоугольниковъ.

Проведемъ ножницами по разрѣзамъ, раздѣляющимъ на нихъ куски, полученные указаннымъ выше способомъ. Тогда квадратъ (1414) съ наложенными на него перевернутыми прямоугольниками отдѣляющими цвѣтной квадратъ, построенный на катетѣ ($12ab$), разрѣжется на куски соотвѣтственно представленію его формулой:

$$(l^{(1)}\alpha + m^{(1)}\beta + \cdots)^2.$$

Изъ тожества (18) вытекаетъ, что

$$l^{(1)^2} + l^{(2)^2} = l^2,$$

$$m^{(1)^2} + m^{(1)^2} = m^2,$$

$$l^{(1)}m^{(1)} + l^{(2)}m^{(2)} = l_m,$$

откуда

$$(l^{(1)}m^{(1)}+l^{(2)}m^{(2)})^2-(l^{(1)^2}+l^{(2)^2})(m^{(1)^2}+m^{(2)^2})=0,$$

или

$$(l^{(1)}m^{(2)}-m^{(1)}l^{(2)})^2=0,$$

откуда

$$\frac{l^{(1)}}{l^{(2)}}=\frac{m^{(1)}}{m^{(2)}}=\frac{n^{(1)}}{n^{(2)}}\cdots, \qquad \frac{l}{m}=\frac{\sqrt{l^{(1)^2}+l^{(2)^2}}}{\sqrt{m^{(1)^2}+m^{(2)^2}}}=\frac{l^{(1)}}{m^{(1)}}=\frac{l^{(2)}}{m^{(2)}}\cdots,$$

$$\frac{l}{l^{(1)}}=\frac{m}{m^{(1)}}=\cdots=p^{(1)}, \qquad \frac{l}{l^{(2)}}=\frac{m}{m^{(2)}}=\cdots=p^{(2)},$$

гдѣ $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$ раціональныя числа.

Такимъ образомъ только въ томъ частномъ случаѣ, когда гипотенуза и катеты соизмѣримы и выражаются, слѣдовательно, черезъ

$$\varrho\omega, \quad \sigma\omega, \quad \tau\omega,$$

гдѣ ϱ, σ, τ цѣлыя числа, при чемъ

$$\varrho^2=\sigma^2+\tau^2$$

возможно моделированіе теоремы Пиѳагора элементами-прямоугольниками.

Но въ общемъ случаѣ это невозможно.

Непосредственное вліяніе эксцентрицитета земной орбиты на климатъ.

М. Давидсона.

Форма орбиты, описываемой землей вокругъ солнца, на протяженіи вѣковъ, безъ сомнѣнія, подвергалась различнымъ измѣненіямъ. Можно предположить, что въ извѣстную эпоху эта орбита имѣла форму, приближающуюся къ окружности; очень медленно орбита принимала форму эллипса, который постепенно снова начиналъ принимать форму очень близкую къ окружности. Всѣ эти измѣненія являются результатомъ возмущеній, производимыхъ на землю другими планетами, въ особенности Венерой и Юпитеромъ.

При всѣхъ этихъ медленныхъ измѣненіяхъ большая ось эллипса, описываемаго землей, сохраняла одну и ту же величину. Подъ большой осью подразумѣваютъ линію, проходящую въ эллипсѣ черезъ двѣ точки, изъ которыхъ одна представляетъ собою мѣстонахожденіе земли при ея наибольшемъ, а другая — при ея наименьшемъ разстояніи отъ солнца. Эта линія носитъ также названіе линіи апсидъ. Если раздѣлить разность между величинами наибольшаго и наименьшаго разстоянія земли отъ солнца на длину линіи апсидъ, то мы получимъ число, выражающее собою эксцентрицитетъ земной орбиты; въ настоящее время число это равно приблизительно 0,01678. Этимъ терминомъ мы будемъ часто пользоваться, описывая различныя измѣненія, которымъ подвергалась земная орбита.

Если предположить, что эксцентрицитетъ очень малъ или даже равенъ нулю, то въ этомъ случаѣ орбита приметъ форму окружности круга, центръ котораго — солнце. Если же, напротивъ, эксцентрицитетъ будетъ увеличиваться, то, согласно вышесказанному, разница между наибольшимъ и наименьшимъ разстояніемъ земли отъ солнца также будетъ увеличиваться. При этомъ солнце будетъ находиться ближе къ одной крайней точкѣ эллипса, чѣмъ къ другой, и, чѣмъ эксцентрицитетъ будетъ больше, тѣмъ оно будетъ ближе къ одной и дальше отъ другой.

Въ настоящее время разстояніе земли отъ солнца въ срединѣ лѣта превосходитъ таковое въ срединѣ зимы приблизительно на 4828000 *км.* (3 милліона миль) Если бы эксцентрицитетъ былъ вдвое больше, то разница равнялась бы 9656000 *км.* (6 милліоновъ миль). Вообще, разница эта прямо пропорціональна эксцентрицитету.

Прежде чѣмъ приступить къ изученію прямого вліянія измѣненія эксцентрицитета на климатъ, условимся называть л ѣ т о м ъ періодъ отъ весенняго до осенняго равноденствіе, а з и м о ю періодъ отъ равноденствія осенняго до весенняго. Другими словами, л ѣ т о будетъ собою обнимать общепринятыя весну и лѣто, а з и м а — осень и зиму нашего полушарія.

Вообразимъ себѣ теперь такъ называемую линію равноденствій, проходящую черезъ солнце и пересѣкающую эллипсъ, описываемый землей, въ двухъ противоположныхъ точкахъ, находящихся по обѣ стороны линіи апсидъ. Эта линія, почти перпендикулярная къ линіи апсидъ, очевидно, раздѣлитъ эллипсъ на двѣ неравныя части. Предположимъ, что бóльшая часть эллипса представляетъ собою траэкторію земли во время зимы, а меньшая — во время лѣта одного и того же полушарія, скажемъ, сѣвернаго. Время, необходимое для первой траэкторіи, будетъ больше, чѣмъ время, необходимое для второй, по двумъ причинамъ: 1) длина первой траэкторіи больше; 2) земля будетъ двигаться медленнѣе по первой траэкторіи на основаніи закона К е п л е р а, который гласитъ, что радіусы вектора, соединяющіе планету съ солнцемъ, въ равные промежутки времени описываютъ равныя площади. Ясно, что согласно этому закону движенiе на большемъ сегментѣ должно быть болѣе медленнымъ. Легко видѣть на томъ же основанiи, что бóльшiй эксцентрицитетъ, дающiй раздѣленiе эллипса на части, отличающiяся одна отъ другой, долженъ увеличивать разницу между лѣтомъ и зимой при всякомъ положенiи линiи равноденствiй.

Сэръ Робертъ Боллъ (Boll) въ своемъ изслѣдованiи о причинѣ ледниковаго перiода показалъ, что отношенiе между количествами тепла, получаемыми какимъ-либо полушарiемъ во время лѣта и зимы, не зависитъ отъ величины эксцентрицитета, а измѣняется исключительно подъ влiянiемъ наклона плоскости эклиптики. Онъ указалъ также на то, что $63^0/_0$ годового тепла получается каждымъ полушарiемъ въ теченiе лѣта, а $37^0/_0$ въ теченiе зимы, принимая эти перiоды въ вышеуказанномъ смыслѣ.

На первый взглядъ изъ только что сказаннаго, естественно, можно сдѣлать выводъ, что измѣненiя въ эксцентрицитетѣ не могутъ вызвать большихъ измѣненiй въ климатѣ, потому что, каковъ бы ни былъ эксцентрицитетъ, количество тепла, получаемаго лѣтомъ и зимой, будетъ одинаковымъ. Мало того, по Боллу, общее количество тепла, доставляемаго нашему полушарiю въ теченiе года, можно считать практически независимымъ отъ эксцентрицитета, по крайней мѣрѣ въ тѣхъ предѣлахъ, которые насъ интересуютъ.

Въ такомъ случаѣ, какова же причина предполагаемаго измѣненiя климата въ зависимости отъ эксцентрицитета земной орбиты? Мы видѣли, что большiй эксцентрицитетъ долженъ вызвать и большую разницу между лѣтомъ и зимой. Дѣйствительно, 850000 лѣтъ тому назадъ эксцентрицитетъ равнялся приблизительно 0,0747; зима тогда продолжалась дольше лѣта на 35 дней, т. е., зима въ то время должна была длиться 200 дней, а лѣто 165 дней. Въ теченiе столь долгой зимы, когда притомъ еще солнце было гораздо болѣе удалено отъ земли, чѣмъ теперь, указанныя 37 частей тепла должны были распредѣляться между 200 днями вмѣсто нынѣшнихъ 179 дней. Понятно, что количество тепла, получавшагося въ теченiе одного дня, было весьма незначительнымъ въ зимнее время. Подобное же разсужденiе приводитъ къ тому выводу, что количество тепла, получавшагося ежедневно поверхностью земного шара въ теченiе короткаго лѣта въ 165 дней, было больше, чѣмъ теперь, когда лѣто продолжается почти 186 дней съ половиной.

Боллъ считалъ, что только что указанныя условiя должны были дать въ результатѣ холодный климатъ. По его мнѣнiю, въ теченiе долгой и холодной зимы, длившейся 200 дней, накоплялся ледъ и снѣгъ, которые не могли исчезнуть подъ влiянiемъ тепла короткаго лѣта. Отсюда медленное образованiе ледниковъ, которые накоплялись изъ года въ годъ и въ концѣ концовъ покрыли собою все полушарiе. Въ теченiе того же перiода другое полушарiе, имѣвшее продолжительное лѣто и короткую зиму, должно было пользоваться благодатнымъ климатомъ.

Явленіе, которое мы изучаемъ, — а именно измѣненіе эксцентрицитета земной орбиты, — не существуетъ изолированно; мы должны также поговорить о явленіи предвареніи равноденствій. Извѣстно, что линія равноденствій, соединяющая точки нахожденія нашей планеты во время весенняго и осенняго равноденствій, совершаетъ оборотъ въ плоскости земной орбиты. Время такого полнаго оборота равно приблизительно 26000 лѣтъ. Линія апсидъ совершаетъ также движеніе но въ направленіи противоположномъ. И вотъ оказывается, что линія равноденствій и линія апсидъ приходятъ въ одно и то же положеніе одна относительно другой черезъ каждые 21000 лѣтъ. Если мы возьмемъ какой-либо моментъ въ качествѣ отправного, то черезъ 10500 лѣтъ въ каждомъ полушаріи получаются условія распредѣленія лѣта и зимы, противоположнымъ первоначальнымъ, т. е., лѣто будетъ длиться столько, сколько зима въ отправной точкѣ, и наоборотъ. Въ наше время лѣто сѣвернаго полушарія продолжительнѣе зимы на 7 дней; но черезъ 10500 лѣтъ такое же распредѣленіе зимы и лѣта будетъ имѣть мѣсто въ южномъ полушаріи, въ то время какъ въ сѣверномъ полушаріи зима будетъ длиннѣе лѣта на то же количество дней.

Легко видѣть, что по мѣрѣ того, какъ линія равноденствій совершаетъ свое вращеніе, удаляясь отъ положенія перпендикулярности къ линіи апсидъ, разница между двумя частями траекторіи (отъ осенняго равноденствія до весенняго или отъ весенняго равноденствія до осенняго) становится все меньше и меньше. При совпаденіи указанныхъ двухъ линій, лѣто и зима будутъ равны между собою по продолжительности на обоихъ полушаріяхъ. При дальнѣйшемъ вращеніи линіи равноденствій получается сначала незначительная разница между частями траекторіи, въ дальнѣйшемъ разница эта увеличивается, а когда линіи становятся перпендикулярными, разница между временами года опять достигаетъ максимума. Но полушаріе, въ которомъ раньше царила продолжительная зима, теперь будетъ имѣть продолжительное лѣто. Въ дальнѣйшемъ обѣ линіи опять сольются, и опять лѣто и зима будутъ одинаковы по продолжительности. А затѣмъ, 5250 лѣтъ спустя, линіи эти станутъ опять перпендикулярными и система придетъ къ исходному положенію съ максимальной разницей въ продолжительности временъ года.

Въ теченіе періода съ большимъ эксцентрицитетомъ должны были имѣть мѣсто нѣсколько подобныхъ вращеній. Времена года въ каждомъ полушаріи медленно измѣняли свою продолжительность; холодное полушаріе постепенно пріобрѣтало благопріятную температуру и наоборотъ. Въ теченіе періода, обнимающаго промежутокъ времени между 870000 и 850000 годами до 1800 года нашей эры, эксцентрицитетъ не падалъ ниже 0,06. Нужно нѣсколько милліоновъ лѣтъ для того, чтобы опять появились тѣ же условія эксцентрицитета и соотвѣтствующія измѣненія въ климатѣ нашей планеты.

Такова интересная теорія, развиваемая подробно Болломъ. Теорія эта утверждаетъ, не имѣя въ пользу такого своего утвержденія вполнѣ доказательныхъ данныхъ, что большій эксцентрицитетъ земной орбиты можетъ собою обусловливать значительныя измѣненія въ климатѣ.

Мнѣ кажется, что мало можно положиться на такую теорію, которую небольшое число твердо установленныхъ фактовъ можетъ въ большой мѣрѣ модифицировать, если не совсѣмъ разрушить. Прежде всего эта теорія не объясняетъ достаточно убѣдительнымъ образомъ, почему въ эпоху, характеризовавшуюся короткимъ лѣтомъ, солнечная теплота въ теченіе лѣта не была въ состояніи растопить скопленій снѣга и льда. Утверждаютъ, что сила солнечной теплоты не была достаточной, чтобы совершить эту работу на протяженіи 165 дней. Но съ этимъ утвержденіемъ совдршенно не согласуются очевидные и твердо установленные въ наше время факты. Въ окрестностяхъ Якутска средняя температура зимы ниже —36°; термометръ временами показываетъ температуру даже —40°. Эта область не находится вблизи моря, которое могло бы умѣрять зимній холодъ, и равнины ея подвержены вліянію жестокихъ ледяныхъ вѣтровъ. А между тѣмъ, какъ только въ іюнѣ начинаетъ дуть теплый южный вѣтеръ, оледенѣлая и голая поверхность почвы начинаетъ тотчасъ же мѣнять свой внѣшній видъ, и за короткое время исчезаетъ всякая черта, напоминающая о прежнемъ состояніи. Несмотря на суровую зиму во всей Сибири подъ вліяніемъ лѣтняго солнца равнины быстро пріобрѣтаютъ мягкую температуру и вездѣ начинаютъ распускаться цвѣты. Въ тундрахъ сѣверной Сибири въ теченіе зимы скопляется пластъ снѣга значительной толщины, и все таки въ теченіе лѣта эти обширныя пространства совершенно свободны отъ снѣга. Д-ръ А. Р. Уоллэсъ (Wallace) въ своей „Жизни Исландіи“ говоритъ о тундрахъ Сибири, которыя подобно пустынямъ крайняго сѣвера Америки въ лѣтнее время сплошь покрыты растительностью. Норденшильдъ (Nordenskjöld) въ своемъ „Путешествіи на Вегѣ“ разсказываетъ, что, прибывши на берегъ Енисея въ августѣ 1875 года, онъ только въ одномъ мѣстѣ увидѣлъ снѣгъ. А. Ф. Брэмъ (Brehm) въ своемъ сочиненіи „Отъ сѣвернаго полюса къ экватору“ даетъ живое описаніе растительности, быстро застилающей степи холодныхъ странъ, какъ только пройдетъ зимнее время.

Было бы излишнимъ приводить еще примѣры. Мы привели ихъ въ достаточномъ числѣ, чтобы доказать, что, если въ наши дни лучи солнца могутъ въ нѣсколько недѣль растопить холодный покровъ зимы извѣстныхъ областей земного шара, то тѣмъ болѣе было для этого достаточно не нѣсколькихъ недѣль, а нѣсколько мѣсяцевъ теплаго лѣта того періода, когда эксцентрицитетъ земной орбиты былъ великъ.

Укажемъ еще на то, что нѣкоторыя теоретическія соображенія даютъ намъ основаніе считать, что накопленіе снѣга и льда въ ледниковый періодъ не могло происходить такъ, какъ это утверждаетъ Боллъ. Водяныя испаренія, подымающіяся съ моря въ теплыхъ областяхъ, приносятся воздушными теченіями къ отдаленнымъ отъ экватора широтамъ и конденсируются тамъ въ снѣгъ, когда температура ниже точки замерзанія. Эти явленія испаренія и сгущенія должны, между прочимъ имѣть мѣсто почти въ одно и то же время, такъ какъ нельзя себѣ представить, чтобы испаренія, получающіяся въ теченіе лѣта, оставались въ атмосферѣ до зимы, и только тогда конденсировались бы. Предполагая даже, что въ періодъ, о которомъ идетъ рѣчь, теплое непродолжительное лѣто способствовало болѣе значительному испаренію, все таки нельзя думать, что количество снѣга, выпадавшаго въ земнее время отъ этого увеличивалось; дѣло въ томъ, что большая часть испареній еще до наступленія зимы должна была упасть на землю въ видѣ дождя. Излишекъ испареній могъ, конечно, конденсироваться въ снѣгъ; но нѣтъ основаній, говорящихъ въ пользу такого излишка для той эпохи предпочтительно предъ нашей. Прибавимъ, что, если въ отдаленныхъ отъ экватора областяхъ въ теченіе зимы, продолжавщейся 200 дней, температура была холоднѣе, чѣмъ въ наше время, то подобный же эффектъ долженъ былъ давать о себѣ знать въ областяхъ, близкихъ къ экватору. Такимъ образомъ, съ одной стороны, сгущеніе паровъ было болѣе значительнымъ; но, съ другой стороны, и процессъ испаренія былъ меньше. Одно явленіе должно было компенсировать другое.

Разсмотримъ теперь, какъ опредѣлить количество теплоты, доставляемой солнцемъ каждому полушарію. Будетъ раціонально разсмотрѣть распредѣленіе теплоты по широтамъ; тогда легко будетъ видѣть, что методъ, употребляющійся для вычисленія теплоты, получаемой цѣлымъ полушаріемъ страдаетъ недостатками. Сравненіе распредѣленія солнечной теплоты въ разныхъ широтахъ, произведенное мною, приводится въ третьей главѣ моей работы „Теоріи ледниковаго періода“; оттуда заимствована и таблица, приведенная ниже (см. стр. 169). Если взять широту въ 50° и въ 45°, то можно видѣть, что среднее дневное количество теплоты въ теченіе 200-дневной зимы, вычисленное для 45° широты, было выше, чѣмъ то же среднее количество, вычисленное для 50° широты, принимая условія нашей зимы.

Четвертая колонна показываетъ, что средняя суточной теплоты на 50° широты въ теченіе 200-дневной зимы была такой же, какъ въ наше время на $52^1/_2$° широты. Выходитъ, значитъ, что то же количество тепла, которое теперь получается въ Берлинѣ, должно было, согласно теоріи Болла, при ледниковомъ періодѣ на широтѣ Майнца способствовать скопленію льда и снѣга! Вотъ до какого вывода мы можемъ дойти на основаніи разбираемой теоріи. Это, очевидно, случай reductionis ad absurdum.

Замѣтимъ, что не меньше основательныхъ доводовъ чѣмъ для этой теоріи, имѣетъ за собою утвержденіе, что полушаріе съ болѣе продолжительнымъ лѣтомъ и болѣе кратковременной зимой, чѣмъ въ наше время, должно было имѣть и болѣе холодный климатъ. Послѣдняя теорія поддерживается Дж. Дж. Мерфи (J. J. Murphy) въ „Quarterly Journal of

Широта	Общее количество теплоты для зимы.	Среднее колич. суточной теплоты въ наше время	Среднее колич. суточной теплоты въ теченіе 200-дневной зимы.
0°	100,0	0,56	0,50
5°	96,0	0,54	0,48
10°	91,6	0,51	0,46
15°	86,2	0,48	0,43
20°	80,3	0,45	0,40
25°	73,9	0,41	0,37
30°	67,0	0,37	0,33
35°	59,0	0,33	0,30
40°	52,3	0,29	0,26
45°	44,5	0,25	0,22
50°	36,4	0,20	0,18
55°	28,5	0,16	0,14
60°	20,6	0,11	0,10

Geological Society, томъ XXV, стр. 350. Этотъ ученый прежде всего доказываетъ, что большое скопленіе снѣга и льда является обыкновенно результатомъ не одного только зимняго холода, а что холодное лѣто имѣетъ гораздо большее вліяніе въ этомъ отношеніи. Принимая разницу въ температурѣ для 305 *т.* высоты въ теченіе самаго теплаго мѣсяца равной 3° *F*, онъ заключаетъ, что это пониженіе температуры въ теченіе 200-дневнаго холоднаго лѣта должно было понизить снѣговую линію на 305 *т.* Онъ считаетъ, что это обстоятельство должно было имѣть громадное значеніе для отдаленныхъ отъ экватора широтъ, гдѣ ледники, достигающія моря, даютъ начало айсбергамъ. Между прочимъ, разница въ климатѣ тогдашняго періода, сравнительно съ нашимъ временемъ, можетъ въ достаточной мѣрѣ быть объяснена пониженіемъ лѣтней температуры вслѣдствіе большаго разстоянія земли отъ солнца въ теченіе этого продолжительнаго въ ту эпоху времени года.

Мы имѣемъ еще доводы, почти столь же вѣскіе, говорящіе въ пользу только что изложенной теоріи. Можно доказать, что непродолжительность и относительная теплота зимы не могли приносить большой пользы полярнымъ странамъ, гдѣ солнце показывается только на извѣстные короткіе промежутки соотвѣтственно широтѣ мѣста, и что въ теченіе продолжительнаго и холоднаго лѣта эти области страдали отъ большаго отдаленія отъ солнца. При этихъ условіяхъ въ отдаленныхъ отъ экватора широтахъ снѣгъ и ледъ могли образовать скопленія, которыя медленно уносились океаномъ къ югу; солнце же въ теченіе короткой, но вмѣстѣ съ тѣмъ и теплой зимы не могло растопить этихъ скопленій вслѣдствіе непродолжительности тѣхъ промежутковъ, когда оно показывается надъ горизонтомъ, въ странахъ, расположенныхъ за полярнымъ кругомъ. „Но развѣ“, возразятъ намъ, „солнце въ теченіе лѣта не могло растопить этихъ массъ?“ — „Нѣтъ“, отвѣтимъ мы на это. „Солнечная теплота въ этихъ мѣстностяхъ въ это время года было особенно незначительной вслѣдствіе большого отдаленія земли отъ солнца. Впрочемъ, если мы примемъ, что солнечные лучи въ теченіе лѣта были въ состояніи совершивь эту работу, и приведемъ это въ пользу теоріи Болла, то почему же не принять того же вліянія лѣтняго солнца для того періода, когда солнце находилось въ наибольшемъ отдаленіи отъ земли въ теченіе зимы, а не лѣта“?

Для рѣшенія проблемы слѣдуетъ принять во вниманіе числовыя величины, выведенныя на основаніи изслѣдованія комбинированнаго дѣйствія различныхъ элементовъ, а затѣмъ имѣть въ виду, какъ въ точности примѣнить полученные итоги къ дѣлу. Это большая и трудная работа. Метеорологія полна обманчивыхъ фактовъ, и для того, чтобы не запутаться въ ея дебряхъ, слѣдуетъ запастись самой элементарной осторожностью.

Достаточно ясно послѣ всего сказаннаго, что утвержденіе о непосредственномъ серьезномъ вліяніи увеличенія эксцентрицитета земной орбиты на климатъ далеко не твердо обосновано. Можно сказать, что во всякомъ случаѣ вліяніе это мало и не имѣетъ того важнаго значенія, которое ему приписывается нѣкоторыми астрономами даже въ наше время.

Остается изучить еще одинъ гораздо болѣе трудный вопросъ, а именно — о косвенномъ вліяніи, которое можетъ имѣть на климатъ увеличеніе эксцентрицитета. Эта проблема чрезвычайно интересна и открываетъ большое поле для научнаго обсужденія. Мы имѣемъ въ виду въ одной изъ ближайшихъ статей изложить, что мы въ настоящее время знаемъ на этотъ счетъ.

Объ одномъ обобщеніи теоремы Пиѳагора.

А. Турчанинова.

Извѣстное предложеніе, носящее названіе теоремы Пиѳагора, выражаетъ зависимость между сторонами прямоугольнаго треугольника и состоитъ въ томъ, что квадратъ гипотенузы равенъ суммѣ квадратовъ катетовъ. Возникаетъ вопросъ, существуетъ ли аналогичное предложеніе въ стереометріи? Такое предложеніе дѣйствительно существуетъ*) и выражаетъ зависимость между гранями прямоугольнаго тетраэдра, совершенно аналогичную зависимости между сторонами прямоугольнаго треугольника.

Предложеніе это состоитъ въ слѣдующемъ: квадратъ грани, расположенной противъ прямого трехграннаго угла прямоугольнаго тетраэдра, равенъ суммѣ квадратовъ трехъ остальныхъ граней.

Эта теорема о соотношеніи между гранями прямоугольнаго тетраэдра можетъ разсматриваться, какъ извѣстное соотношеніе между площадью треугольника и тремя проекціями этой площади на три попарно перпендикулярныя плоскости и такимъ образомъ всецѣло относится къ теоріи проекцій. Возможно и дальнѣйшее развитіе теоремы Пиѳагора въ извѣстномъ смыслѣ, именно: существуетъ зависимость между объемами пяти тетраэдровъ, совершенно аналогичная какъ теоремѣ Пиѳагора, такъ и вышеуказанной, стереометрической теоремѣ, — если эти пять тетраэдровъ удовлетворяютъ нѣкоторымъ условіямъ. Это предложеніе, подобно стереометрическому предложенію теоремы Пиѳагора, можно разсматривать, какъ проективную теорему изъ геометріи четырехъ измѣреній. Замѣчательно то обстоятельство, что эта теорема, по существу относящаяся къ геометріи численнаго многообразія 4-ой ступени, выражаетъ зависимость между протяженіями наглядныхъ пространственныхъ образовъ**). Такъ какъ это предложеніе къ тому же доказывается весьма просто и элементарно, то мы и позволяемъ себѣ представить эту теорему въ ея послѣдовательномъ развитіи. Замѣтимъ кстати, что подобныя стереометрическія теоремы, такъ сказать, выхваченныя изъ геометріи высшей ступени, какъ мы замѣтили, чрезвычайно интересуютъ учащихся, при условіи, конечно, если ихъ доказательства удается облечь въ вполнѣ элементарную форму, и если онѣ, въ виду этого, могутъ найти себѣ мѣсто въ элементарномъ курсѣ стереометріи.

---

*) Указаніе на стереометрическое обобщеніе теоремы Пиѳагора есть, напримѣръ, въ книгѣ Лаццери: Теорема Пиѳагора и ея исторія.

**) Дальнѣйшее развитіе Пиѳагоровой теоремы въ указываемомъ смыслѣ, по отношенію къ n-мѣрному пространству, приводитъ къ соотношенію между квадратами нѣкоторыхъ детерминантовъ.

1. Возьмемъ прямоугольный тетраэдръ $SABC$, вершина котораго S служитъ вершиной прямого трехграннаго угла. Противъ этого угла лежитъ грань ABC; проведя $SK \perp AB$ и соединивъ C съ K, получимъ наклонную CK и проекцію ея SK.

Согласно извѣстной теоремѣ о трехъ перпендикулярахъ, $SK \perp CS$. Замѣтивъ это, обратимся къ прямоугольному треугольнику CSK. Согласно теоремѣ Пиѳагора:

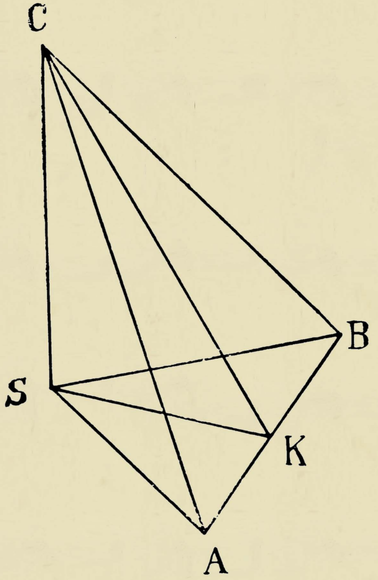
$$\overline{CK}^2 = \overline{CS}^2 + \overline{SK}^2. \tag{1}$$

Умножимъ обѣ части этого равенства на $\overline{AB}^2$:

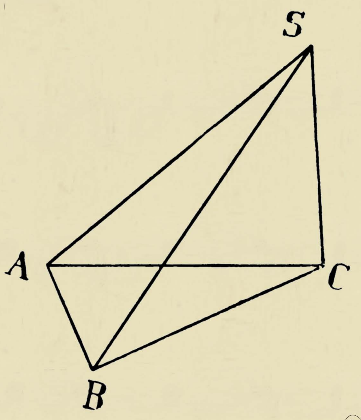
$$\overline{CK}^2 \, . \, \overline{AB}^2 = \overline{CS}^2 \, . \, \overline{AB}^2 + \overline{SK}^2 \, . \, \overline{AB}^2. \tag{2}$$

Но изъ прямоугольнаго треугольника SAB вытекаетъ:

$$\overline{AB}^2 = \overline{SA}^2 + \overline{SB}^2. \tag{3}$$



Черт. 1.



Черт. 2.

Значитъ,

$$\overline{CK}^2 \, . \, \overline{AB}^2 = \overline{CS}^2 \, . \, (\overline{SA}^2 + \overline{SB}^2) + \overline{SK}^2 \, . \, \overline{AB}^2; \tag{4}$$

$$\overline{CK}^2 \, . \, \overline{AB}^2 = \overline{CS}^2 \, . \, \overline{SA}^2 + \overline{CS}^2 \, . \, \overline{SB}^2 + \overline{SK}^2 \, . \, \overline{AB}^2 \tag{5}$$

$$(2 \, . \text{ пл. } ABC)^2 = (2 \, . \text{ пл. } SAC)^2 + (2 \text{ пл. } SBC)^2 + (2 \text{ пл. } SAB)^2; \tag{6}$$

$$(\text{пл. } ABC)^2 = (\text{пл. } SAC)^2 + (\text{пл. } SBC)^2 + (\text{пл. } SAB)^2. \tag{7}$$

Это соотношеніе и представляетъ стереометрическую теорему, аналогичную теоремѣ Пиѳагора; именно:

Квадратъ грани прямоугольнаго тетраэдра, расположенной противъ прямого трехграннаго угла, равенъ суммѣ квадратовъ трехъ остальныхъ граней.

Это доказательство отличается полной элементарностью.

Далѣе мы приведемъ еще одно доказательство этой теоремы, теперь же остановимся на проективномъ ея значеніи.

2. Возьмемъ какой-нибудь тетраэдръ $SABC$. Обозначимъ площади граней, лежащихъ противъ вершинъ S, A, B, C, соотвѣтственно черезъ X, Y. Z, U, а двугранные углы, образуемые соотвѣтственными гранями, черезъ (XY), (XZ), (XU) и т. д. Тогда, согласно извѣстной теоремѣ о проекціяхъ, будутъ имѣть мѣсто соотношенія:

$$\left.\begin{aligned} X &= Y\cos(XY) + Z\cos(XZ) + U\cos(XU),\\ Y &= X\cos(YX) + Z\cos(YZ) + U\cos(YU),\\ Z &= X\cos(ZX) + Y\cos(ZY) + U\cos(ZU),\\ U &= X\cos(UX) + Y\cos(UY) + Z\cos(UZ). \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Опредѣляя изъ трехъ послѣднихъ соотношеній $\cos(YX)$, $\cos(ZX)$, $\cos(UX)$, находимъ:

$$\left.\begin{aligned} \cos(YX) &= \frac{Y - Z\cos(YZ) - U\cos(YU)}{X},\\ \cos(ZX) &= \frac{Z - Y\cos(ZY) - U\cos(ZU)}{X},\\ \cos(UX) &= \frac{U - Y\cos(UY) - Z\cos(UZ)}{X}. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Подставляя найденныя значенія косинусовъ въ первое изъ равенствъ (8), получаемъ послѣдовательно:

$$\begin{aligned} X = Y\cdot\frac{Y - Z\cos(YZ) - U\cos(YU)}{X} + Z\cdot\frac{Z - Y\cos(ZY) - U\cos(ZU)}{X} + \\ + U\cdot\frac{U - Y\cos(UY) - Z\cos(UZ)}{X}, \end{aligned} \qquad (10)$$

$$\begin{aligned} X^2 = Y^2 - YZ\cos(YZ) - YU\cos(YU) + Z^2 - ZY\cos(ZY) - \\ - ZU\cos(ZU) + U^2 - UY\cos(UY) - UZ\cos(UZ), \end{aligned} \qquad (11)$$

$$X^2 = Y^2 + Z^2 + U^2 - 2YZ\cos(YZ) - 2YU\cos(YU) - \\ - 2ZU\cos(ZU). \quad (12)$$

Это соотношеніе представляетъ стереометрическую теорему, аналогичную теоремѣ о квадратѣ стороны какого-нибудь треугольника, именно:

Квадратъ одной изъ граней какого-либо тетраэдра равенъ суммѣ квадратовъ трехъ остальныхъ граней безъ суммы удвоенныхъ произведеній этихъ граней, взятыхъ попарно и умноженныхъ соотвѣтственно на косинусы двугранныхъ угловъ между ними.

Если тетраэдръ прямоугольный, то, напримѣръ, $(YZ) = (YU) = (ZU) = \frac{\pi}{2}$, такъ что косинусы этихъ угловъ равны нулю, въ виду чего мы получаемъ:

$$X^2 = Y^2 + Z^2 + U^2, \quad (13)$$

т. е. мы пришли къ теоремѣ, доказанной раньше другимъ путемъ.

3. Теорема, доказанная въ § 1, можетъ быть разсматриваема, какъ теорема плоской геометріи. Представимъ себѣ систему изъ трехъ прямоугольныхъ треугольниковъ, каждая пара которыхъ имѣетъ по равному катету, и треугольника, составленнаго изъ ихъ гипотенузъ. Такую систему треугольниковъ мы получимъ, расклеивъ, такъ сказать, какой-либо прямоугольный тетраэдръ, т. е. размѣстивъ грани его на плоскости и разсматривая ихъ, какъ указанную систему треугольниковъ, независимо отъ стереометрическаго чертежа. Ставъ на такую точку зрѣнія, мы можемъ формулировать нашу теорему слѣдующимъ образомъ:

Имѣются на плоскости три прямоугольные треугольника, каждая пара которыхъ имѣетъ по равному катету. Въ такомъ случаѣ квадратъ площади треугольника, составленнаго изъ ихъ гипотенузъ, равенъ суммѣ квадратовъ площадей данныхъ треугольниковъ (черт. 3).

Вотъ доказательство той же теоремы, исходящее изъ этой новой точки зрѣнія.

Сумма квадратовъ площадей прямоугольныхъ треугольниковъ будетъ:

$$1/4\,(a^2b^2 + a^2d^2 + b^2d^2).$$

Квадратъ площади 4-го треугольника, составленнаго изъ ихъ гипотенузъ c, e, f, выражается, какъ извѣстно, въ зависимости отъ ихъ квадратовъ c^2, e^2, f^2, слѣдующимъ образомъ:

$$s^2 = {}^1/_4\, c^2 \left[f^2 - \left(\frac{c^2+f^2-e^2}{2c}\right)^2\right] = {}^1/_{16}\,[4c^2f^2 - (c^2+f^2-e^2)^2]. \qquad (14)$$

Но

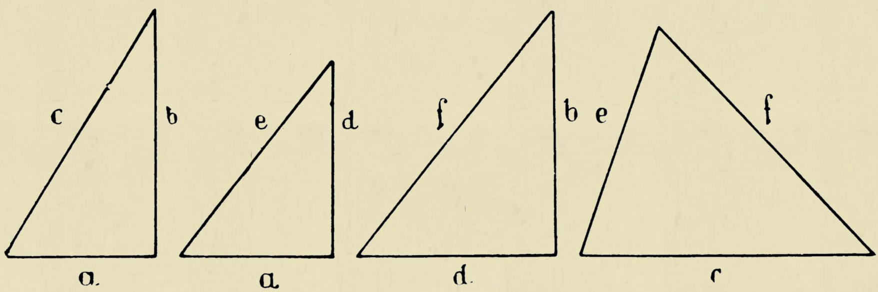
$$c^2 = a^2 + b^2, \quad e^2 = a^2 + d^2, \quad f^2 = b^2 + d^2. \qquad (15)$$

Слѣдовательно,

$$s^2 = {}^1/_{16}\,[4(a^2+b^2)(b^2+d^2) - (a^2+2b^2+d^2-a^2-d^2)^2] =$$

$$= {}^1/_{16}\,[4(a^2+b^2)(b^2+d^2) - 4b^4] = \qquad (16)$$

$$= {}^1/_{16}\,[4a^2b^2 + 4a^2d^2 + 4b^2d^2 + 4b^4 - 4b^4] = {}^1/_4\,(a^2b^2 + a^2d^2 + b^2d^2).$$



Черт. 3.

Итакъ, квадратъ площади 4-го треугольника s^2 равенъ суммѣ квадратовъ площадей первыхъ трехъ прямоугольныхъ треугольниковъ, что и требовалось доказать.

Вмѣстѣ съ тѣмъ равенство (14) позволяетъ попутно высказать слѣдующее предложеніе: квадратъ площади какого-либо треугольника выражается въ зависимости отъ квадратовъ его сторонъ цѣлой однородной функціей второго измѣренія.

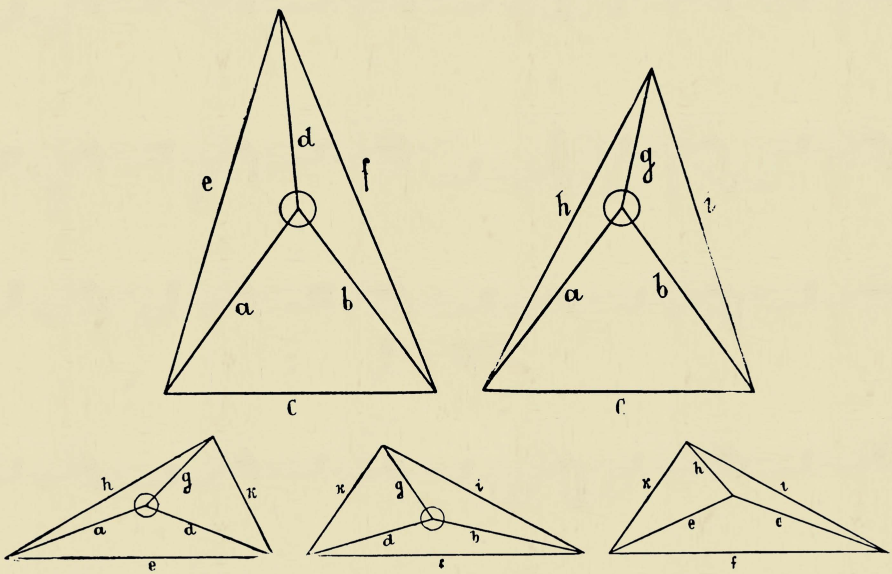
Такъ какъ квадратъ площади какого-либо треугольника, объ элементахъ котораго не сдѣлано никакихъ особыхъ оговорокъ, не можетъ измѣниться отъ взаимной замѣны въ его выраженіи квадратовъ двухъ его сторонъ, то можно прибавить, что указанная функція должна быть вдобавокъ еще симметрической.

4. Сдѣланныя замѣчанія послужатъ намъ основаніемъ для дальнѣйшаго развитія теоремы Пиѳагора.

Представимъ себѣ систему четырехъ прямоугольныхъ тетраэдровъ каждая пара которыхъ имѣетъ по равной грани (черт. 4).

Присоединимъ къ ней 5-й тетраэтръ, составивъ его изъ четырехъ граней, лежащихъ противъ прямыхъ трехгранныхъ угловъ нашихъ прямоугольныхъ тетраэдровъ.

Возможность построенія всей указываемой системы тетраэдровъ обнаруживается изъ разсмотрѣнія прилагаемаго чертежа. Эта система тетраэдровъ аналогична плоской системѣ треугольниковъ, разсмотрѣнной въ предыдущемъ параграфѣ, и по отношенію къ ней оказывается справедливымъ слѣдующее предложеніе:



(Прямые трехгранные углы отмѣчены кружками).

Черт. 4.

Имѣются четыре прямоугольные тетраэдра, каждая пара которыхъ имѣетъ по равной грани, прилежащей къ прямому трехгранному углу. Въ такомъ случаѣ квадратъ объема тетраэдра, составленнаго изъ тѣхъ граней вышеуказанныхъ четырехъ тетраэдровъ, которыя лежатъ противъ прямыхъ трехгранныхъ угловъ, равенъ суммѣ квадратовъ объемовъ четырехъ прямоугольныхъ тетраэдровъ.

Перейдемъ къ доказательству этой теоремы. Объемъ v_1 перваго тетраэдра равенъ $^1/_3$ произведенія площади основанія $^1/_2\,ab$ на высоту d, т. е. равенъ $^1/_6\,abd$. Подобнымъ же образомъ объемы v_2, v_3, v_4

остальныхъ прямоугольныхъ тетраэдровъ будутъ соотвѣтственно: $^1/_6\, abg$, $^1/_6\, adg$ и $^1/_6\, bdg$. Значитъ:

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 = {}^1/_{36}\,(a^2b^2d^2 + a^2b^2g^2 + a^2d^2g^2 + b^2d^2g^2). \qquad (17)$$

Обратимся теперь къ 5-му тетраэдру. Предварительно замѣтимъ слѣдующее. Возьмемъ какой-либо тетраэдръ (черт. 5). Проведя $AD \perp BC$ и $SK \perp AD$, получимъ высоту $\overline{AD} = h$ основанія ABC и высоту $\overline{SK} = H$ тетраэдра. Проведя, кромѣ того, $\overline{SD} = h'$, получимъ высоту грани SBC. Объемъ V тетраэдра равенъ $^1/_3\, sH$, гдѣ s есть площадь основанія ABC. Слѣдовательно: $V^2 = {}^1/_9\, s^2H^2 = {}^1/_9\, s^2\frac{4\sigma^2}{h^2}$, гдѣ σ есть площадь треугольника SAD. Обозначимъ ребра $\overline{BC}$ и $\overline{SA}$ соотвѣтственно черезъ a и b. Тогда $V^2 = {}^1/_9\,\frac{a^2h^2}{4}\cdot\frac{4\sigma^2}{h^2} = {}^1/_9\, a^2\sigma^2$. Согласно же сдѣланному въ предыдущемъ параграфѣ замѣчанію, $\sigma^2 = f(b^2, h^2, h'^2)$, гдѣ f есть цѣлая однородная симметрическая функція второй степени. Слѣдовательно: $\sigma^2 = f\left(\frac{a^2b^2}{a^2}, \frac{a^2h^2}{a^2}, \frac{a^2h'^2}{a^2}\right) = \frac{1}{a^4} f(a^2b^2, 4s^2, 4s'^2)$, гдѣ s' есть площадь треугольника SBC. Значитъ, $V^2 = {}^1/_9\,\frac{1}{a^2} f(a^2b^2, 4s^2, 4s'^2) =$ $= {}^1/_9 \cdot \frac{1}{a^2}\varphi(a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2)$, гдѣ φ есть цѣлая функція четвертой степени отъ квадратовъ шести реберъ тетраэдра, обозначенныхъ: BC черезъ a, SA черезъ b, остальные въ какомъ-нибудь порядкѣ черезъ c, d, e, f.

Но V^2 не должно измѣняться при замѣнѣ, напримѣръ, a^2 на b^2, если относительно какихъ-либо элементовъ тетраэдра не сдѣлано никакихъ особыхъ оговорокъ, т. е. V^2 можетъ представлять собой лишь симметрическую функцію отъ квадратовъ реберъ. Слѣдовательно, V^2 есть цѣлая симметрическая функція отъ квадратовъ реберъ; кромѣ того, она необходимо должна быть однородной функціей третьяго измѣренія. Итакъ, квадратъ объема какого-либо тетраэдра есть цѣлая однородная симметрическая функція третьяго измѣренія отъ квадратовъ его реберъ*). Такую функцію и представляетъ собою объемъ 5-го тетраэдра нашей системы въ зависимости отъ квадратовъ его реберъ

*) Къ этому выводу мы придемъ непосредственно, если воспользуемся выраженіемъ для V^2 въ видѣ детерминанта:

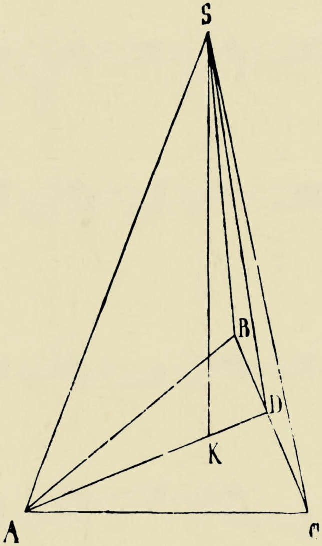
$$V^2 = {}^1/_{288}\begin{vmatrix} 0 & c^2 & e^2 & f^2 & 1 \\ c^2 & 0 & h^2 & i^2 & 1 \\ e^2 & h^2 & 0 & k^2 & 1 \\ f^2 & i^2 & k^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

c^2, e^2, f^2, h^2, i^2, k^2. Принимая же во вниманіе соотношенія:

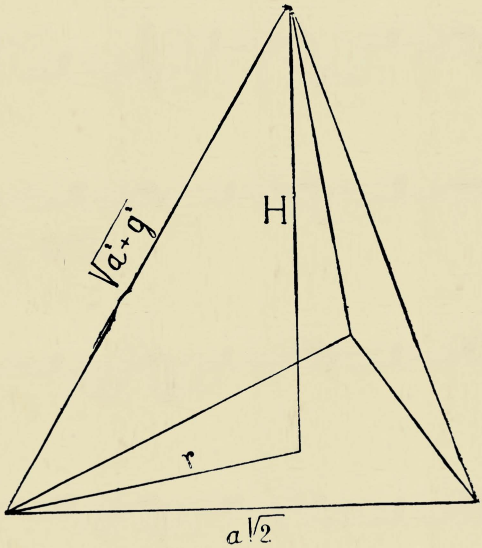
$$c^2 = a^2 + b^2; \quad e^2 = a^2 + d^2; \quad f^2 = d^2 + b^2; \quad h^2 = a^2 + g^2;$$
$$i^2 = b^2 + g^2; \quad k^2 = d^2 + g^2, \tag{18}$$

заключаемъ, что квадратъ объема V^2 5-го тетраэдра представляетъ цѣлую однородную смметрическую функцію третьяго измѣренія относительно a^2, b^2, d^2, g^2, т. е.

$$V^2 = A(a^6 + b^6 + d^6 + g^6) + B(a^4b^2 + a^4d^2 + \cdots + g^4d^2) +$$
$$+ C(a^2b^2d^2 + a^2b^2g^2 + a^2d^2g^2 + b^2d^2g^2). \tag{19}$$



Черт. 5.



Черт. 6.

Коэффиціенты A, B и C представляютъ собою опредѣленныя, но пока неизвѣстныя намъ числа, которыя мы вычислимъ слѣдующимъ образомъ.

Допустимъ, что изъ четырехъ независимыхъ реберъ a, b, d, g три первыя равны, т. е. $a = b = d$. Тогда V^2 будетъ квадратъ объема тетраэдра съ ребрами: $c = a\sqrt{2}$; $e = a\sqrt{2}$; $f = a\sqrt{2}$; $h = \sqrt{a^2+g^2}$; $i = \sqrt{a^2+g^2}$ и $k = \sqrt{a^2+g^2}$, какъ это вытекаетъ изъ равенствъ (18). Такимъ образомъ, у насъ имѣется тетраэдръ, у котораго въ основаніи лежитъ равносторонній треугольникъ со стороною $a\sqrt{2}$, а остальныя три ребра, сходящіяся при вершинѣ, равны между собою, при чемъ каждое изъ нихъ равно $\sqrt{a^2+g^2}$ (черт. 6).

Высота H этого тетраэдра проходитъ черезъ центръ основанія, въ чемъ легко убѣдиться, представивъ себѣ конусъ, описанный около нашего тетраэдра. Площадь основанія $S = {}^1/_2\, a\sqrt{2} \cdot \sqrt{2a^2 - \frac{2a^2}{4}} = {}^1/_2\, a^2\sqrt{3}$. Радіусъ основанія $r = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, высота $H = \sqrt{a^2 + g^2 - r^2} = \sqrt{a^2 + g^2 - {}^2/_3\, a^2} = \sqrt{{}^1/_3\, a^2 + g^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2 + 3g^2}$. Итакъ, объемъ разсматриваемаго тетраэдра равенъ ${}^1/_3 \,.\, {}^1/_2\, a^2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2 + 3g^2}$; квадратъ же этого объема будетъ ${}^1/_{36}\,(a^6 + 3a^4g^2)$.

Съ другой стороны, равенство (19) при сдѣланномъ предположеніи даетъ:

$$V^2 = (3A + 6B + C)\, a^6 + Ag^6 + 3\,(B + C)\, a^4g^2 + 3Ba^2g^4. \qquad (20)$$

Сравнивая коэфиціенты равенства (20) съ коэфиціентами выраженія ${}^1/_{36}\,(a^6 + 3a^4g^2)$, заключаемъ, что

$$3A + 6B + C = {}^1/_{36}; \quad A = 0; \quad 3\,(B + C) = {}^3/_{36} = {}^1/_{12}; \quad 3B = 0. \qquad (21)$$

Отсюда:

$$A = 0; \quad B = 0; \quad C = {}^1/_{36}.$$

Вставляя найденныя значенія постоянныхъ A, B, C въ выраженіе V^2, находимъ:

$$V^2 = {}^1/_{36}\,(a^2b^2d^2 + a^2b^2g^2 + a^2d^2g^2 + b^2d^2g^2). \qquad \mathbf{(23)}$$

Сопоставляя этотъ результатъ съ равенствомъ (17), убѣждаемся, что

$$V^2 = {v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2 + {v_4}^2. \qquad (24)$$

Теорема доказана.

Вмѣстѣ съ тѣмъ обратимъ вниманіе на слѣдующее обстоятельство. Каждый треугольникъ можетъ служить гранью тетраэдра, лежащей противъ прямого трехграннаго угла. Но не всякій тетраэдръ можетъ разсматриваться, какъ 5-ый тетраэдръ нашей системы пяти тетраэдровъ. Дѣйствительно, соотношенія (18) показываютъ, что четыре независимыхъ ребра a, b, d, g, опредѣляющихъ систему, должны удовлетворять при произвольныхъ c, e, f, h, i, k шести условіямъ (18), а потому ребра c, e, f, h, i, k тетраэдра, удовлетворяющаго поставленному требованію, необходимо должны воспроизводиться квадратными корнями изъ суммъ квадратовъ всевозможныхъ паръ, какія только можно составить изъ четырехъ произвольныхъ чиселъ. Легко понять, что не всякій тетраэдръ удовлетворяетъ этому требованію.

Въ заключеніе отмѣтимъ, что доказанная теорема представляетъ собою развитіе теоремы П и ѳ а г о р а по отношенію къ геометріи четырехъ измѣреній, но разсматриваемое съ точки зрѣнія геометріи трехъ измѣреній, подобно тому какъ стереометрическое развитіе этой теоремы разсматривалось съ точки зрѣнія плоской геометріи.

Краткій очеркъ прямолинейной тригонометріи, основанной на теоремѣ сложенія.

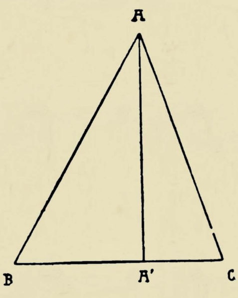
Б. Славскаго.

§ 1. Назовемъ отношеніе катета къ гипотенузѣ косинусомъ угла между ними. Условимся дополнительно въ равенствахъ:

$$\left.\begin{aligned} \cos\ 0^\circ &= 1, \\ \cos 90^\circ &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Пусть ABC остроугольный треугольникъ съ элементами: a, b, c, A, B, C. Проведемъ высоту $AA' \perp BC$. Тогда:

$$BC = BA' + A'C \quad \text{или} \quad a = c\cos B + b\cos C.$$



Круговой перестановкой получимъ еще двѣ подобныхъ же формулъ. Итакъ, для остроугольнаго (и прямоугольнаго) треугольника имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} -a + b\cos C + c\cos B &= 0, \\ a\cos C - b \qquad + c\cos A &= 0, \\ a\cos B + b\cos A - c \qquad &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

§ 2. Исключимъ a, b, c изъ системы (2):

$$-1 + 2\cos A\cos B\cos C + \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 0. \qquad (3)$$

Рѣшаемъ относительно $\cos C$:

$$\cos C = -\cos A\cos B + \sqrt{(1-\cos^2 A)(1-\cos^2 B)}, \qquad (4)$$

передъ радикаломъ удержанъ только плюсъ, ибо, согласно опредѣленію, косинусъ — правильная положительная дробь.

§ 3. Введемъ новую функцію синусъ, опредѣляя ее равенствомъ:

$$\sin\varphi = +\sqrt{1-\cos^2\varphi}, \tag{5}$$

гдѣ

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 90^\circ.$$

Формула (3) обращается въ:

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B. \tag{6}$$

Вычислимъ еще

$$\sin C = +\sqrt{1-\cos^2 C},$$

$$\sin C = +\sqrt{(\cos^2 A+\sin^2 A)(\cos^2 B+\sin^2 B)-(-\cos A\cos B+\sin A\sin B)^2},$$

или

$$\sin C = \sin A \cos B + \cos A \sin B. \tag{7}$$

Обѣ формулы (6) и (7) суть тождества, если A, B, C порознь острые углы (одинъ изъ нихъ можетъ быть и прямымъ) и $A+B+C=180^\circ$.

§ 4. Положимъ въ формулахъ (6) и (7):

$$B=0,\ A<90^\circ.\quad \text{Тогда}\quad C=180^\circ-A>90^\circ,$$

и

$$\left.\begin{aligned} \cos(180^\circ-A) &= -\cos A, \\ \sin(180^\circ-A) &= \sin A. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Конечно, только правыя части этихъ равенствъ имѣютъ смыслъ. Согласимся придавать лѣвымъ частямъ тотъ же самый смыслъ. Это соглашеніе опредѣляетъ косинусъ и синусъ для интервала $90^\circ - 180^\circ$.

Чертежъ непосредственно покажетъ, что группа (2) формулъ послѣ опредѣленій (8) будетъ имѣть мѣсто и для тупоугольнаго треугольника.

§ 5. Если

$$A+B \leqslant 180^\circ,$$

то формулы (6) и (7), вслѣдствіе опредѣленій (8), дадутъ:

$$\left.\begin{aligned} \cos(A+B) &= \cos A\cos B - \sin A\sin B, \\ \sin(A+B) &= \sin A\cos B + \cos A\sin B, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

что и составляетъ теорему сложенія косинуса и синуса.

§ 6. Положимъ $A+B=A'$, тогда, разрѣшая систему:

$$\left.\begin{aligned}\cos A' &= \cos(A'-B)\cos B - \sin(A'-B)\sin B,\\ \sin A' &= \sin(A'-B)\cos B + \cos(A'-B)\sin B,\end{aligned}\right\}$$

находимъ (пропускаемъ значекъ надъ A):

$$\left.\begin{aligned}\cos(A-B) &= \cos A\cos B + \sin A\sin B,\\ \sin(A-B) &= \sin A\cos B - \cos A\sin B,\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

§ 7. Изслѣдуемъ ходъ функцій косинуса и синуса. Возьмемъ аргументъ φ,

$$0 \leqslant \varphi < 180,$$

и приращеніе къ нему h,

$$0 < h < 90^\circ,$$

такъ, чтобы

$$0 < \varphi + h \leqslant 180^\circ.$$

Тогда:

$$\sin\varphi\sin h > 0, \quad \cos h < 1.$$

Поэтому изъ тождества:

$$\cos(\varphi+h) = \cos\varphi \,.\, \cos h - \sin\varphi\sin h,$$

получаемъ неравенство:

$$\cos(\varphi+h) < \cos\varphi,$$

т. е. косинусъ убываетъ при возрастаніи угла. Отсюда таблица:

φ	0° возр. 90° возр. 180°
$\cos\varphi$	1 убыв. 0 убыв. -1
$\cos^2\varphi$	1 убыв. 0 возр. 1
$\sin\varphi = +\sqrt{1-\cos^2\varphi}$	0 возр. 1 убыв. 0

§ 8. Для удобства вычисленій введемъ еще четыре функціи, опредѣляя ихъ равенствами:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}; \ \operatorname{cotg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}; \quad \sec\varphi = \frac{1}{\cos\varphi}; \ \operatorname{cosec}\varphi = \frac{1}{\sin\varphi}\cdot \qquad (11)$$

Формулы (9), (10), (11), въ которыхъ, разумѣется, ни одинъ изъ аргументовъ не долженъ выходить изъ углового поля $0^\circ - 180^\circ$ (достаточнаго для рѣшенія треугольниковъ), позволятъ прослѣдить измѣненія вновь введенныхъ функцій, вывести простѣйшія формулы приведенія ($90^\circ \pm \varphi$, $180 - \varphi$), формулы умноженія и дѣленія на два и т. п. — словомъ, всѣ часто употребляемыя гоніометрическія формулы.

§ 9. **Формулы, связывающія элементы треугольника.** Оставляя въ сторонѣ простѣйшій случай прямоугольнаго треугольника, разсмотримъ косоугольный треугольникъ съ элементами: a, b, c, A, B, C.

Имѣемъ заразъ двѣ группы формулъ:

$$\left.\begin{aligned} -a + b\cos C + c\cos B &= 0, \\ a\cos C - b \qquad + c\cos A &= 0, \\ a\cos B + b\cos A - c \qquad &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

и

$$\left.\begin{aligned} -\sin A + \sin B\cos C + \sin C\cos B &= 0, \\ \sin A\cos C - \sin B \qquad + \sin C\cos A &= 0, \\ \sin A\cos B + \sin B\cos A - \sin C \qquad &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

(Третья изъ формулъ (12) есть формула (7), остальныя — получены изъ нея круговой перестановкой).

Сравненіе группъ (2) и (12) показываетъ, что для вычисленія отношенія двухъ сторонъ къ третьей, хотя бы $\frac{b}{a}$; $\frac{c}{a}$, и соотвѣтствующихъ отношеній синусовъ $\frac{\sin B}{\sin A}$; $\frac{\sin C}{\sin B}$ служитъ одна и та же система уравненій первой степени; а слѣдовательно, такія отношенія равны. Итакъ:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}. \tag{13}$$

Для вывода формулы обобщенной Пиѳагоровой теоремы достаточно исключать по два косинуса изъ соотношеній (2). Напримѣръ, исключивъ $\cos B$ и $\cos C$, найдемъ:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A. \tag{14}$$

Обычнымъ образомъ докончимъ построеніе остальныхъ часто употребляемыхъ при рѣшеніи треугольниковъ формулъ.

§ 10. Обобщенія. Положимъ, что понятіе объ углѣ уже обобщено. Уголъ — величина, мѣняющаяся между $-\infty$ и $+\infty$. Пусть также установлено измѣреніе угловъ въ радіанахъ (радіанъ опредѣлимъ, какъ уголъ, при поворотѣ на который любая точка вращающагося луча пройдетъ путь, равный своему удаленію отъ вершины угла).

Шесть функцій угла были опредѣлены для интервала $0° - 180°$. Будемъ разсматривать тѣ же шесть функцій для любого угла, опредѣляя ихъ всегда такъ, чтобы отождествлялась теорема сложенія (9) и формулы (11).

Такъ, для опредѣленія косинуса и синуса въ интервалѣ $180° - 360°$, полагаемъ въ формулахъ (9) $B = 180°$:

$$\left.\begin{aligned} \cos(180° + A) &= -\cos A, \\ \sin(180° + A) &= -\sin A, \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

для интервала $360° - 720°$ возьмемъ $B = 360°$:

$$\left.\begin{aligned} \cos(360° + A) &= \cos A, \\ \sin(360° + A) &= \sin A \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

и т. д. Обнаружимъ періодичность тригонометрическихъ функцій.

Для построенія функцій синуса и косинуса въ отрицательномъ полѣ положимъ въ теоремѣ сложенія (9) $B = -A$; тогда, разрѣшая систему:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \cos A \cos B - \sin A \sin B, \\ 0 &= \sin A \cos B + \cos A \sin B, \end{aligned}\right\}$$

находимъ:

$$\left.\begin{aligned} \cos B &= \cos(-A) = \cos A, \\ \sin B &= \sin(-A) = -\sin A. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

§ 11. Въ заключеніе, въ качествѣ оправданія нашего способа надстраивать тригонометрическія функціи, опредѣленныя въ началѣ для промежутка $0° - 90°$, внѣ этого поля, пользуясь теоремой сложенія, укажемъ на легко провѣряемое свойство инваріантности правыхъ частей этой теоремы, а именно — на тождества:

$$\left.\begin{aligned} \cos A \cos B - \sin A \sin B &= \cos(A+h)\cos(B-h) - \sin(A+h)\sin(B-h), \\ \sin A \cos B + \cos A \sin B &= \sin(A+h)\cos(B-h) + \cos(A+h)\sin(B-h). \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

ПОЛЕМИКА.

„О нѣкоторыхъ вопросахъ преподаванія ариѳметики“. Отвѣтъ на статью г. И. Александрова, помѣщенной въ отдѣлѣ „Полемика“, въ № 650 „Вѣстника“.

А. К. Арндта.

Г. Александровъ предлагаетъ намъ шараду: „первое мое изъ цѣлаго творится, а цѣлое послѣдняго боится“ и даетъ отвѣтъ „вино-градъ“, прибавляя: „живому, искрящемуся уму загадки и шарады не страшны. Подобнаго рода вопросамъ нѣтъ мѣста только тамъ, гдѣ царствуетъ рутина и гдѣ отрицается живая игра ума“.

Однако, какъ личный, такъ и многократный педагогическій опытъ убѣждаетъ меня въ томъ, что очень многимъ загадки и шарады страшны, а нѣкоторые даже питаютъ отвращеніе къ нимъ. Тотъ ученикъ, который въ младшихъ классахъ шелъ не особенно успѣшно по ариѳметикѣ и показалъ несомнѣнно признаки слабости математической смѣтки, потомъ блестяще окончилъ курсъ математическаго отдѣленія физико-математическаго факультета, преподавалъ элементарную и высшую математику, питая однако и по сіе время отвращеніе къ безполезнымъ шарадамъ-загадкамъ*). Надъ этимъ случаемъ (если бы даже и единичнымъ) слѣдовало позадуматься педагогу! Мои способы именно разсчитаны на среднія и даже слабыя способности, а не на живой и искрящійся умъ; и этимъ слабымъ я желаю въ удобной хотя, быть можетъ, и рутинной формѣ изложить обще-обязательный курсъ ариѳметики.

„Тридцать лѣтъ тому назадъ, не было полной теоріи геометрическихъ построеній... пишетъ въ данной статьѣ г. Александровъ. Да развѣ она теперь существуетъ? Еще въ 1908 г. тотъ же И. Александровъ, несомнѣнно знатокъ этой области, говоритъ въ предисловіи къ извѣстному руководству и сборнику геометрическихъ задачъ („Методы рѣшеній геометрическихъ задачъ на построеніе...“, II-ое стереотипное изданіе) между прочимъ слѣдующее: „...часто ихъ (т. е. геометрическихъ задачъ) рѣшеніе находится помощью произвольныхъ попытокъ, которыя, хотя и могутъ быть извѣстнымъ образомъ направляемы, но иногда довольно долго бываютъ безуспѣшны даже для умовъ наиболѣе проницательныхъ. Даже въ этой наиболѣе (!) развитой отрасли человѣческаго знанія весьма замѣтна недостаточность нашихъ средствъ къ изслѣдованію“. Гдѣ же тутъ полная теорія? Вопросъ здѣсь, вѣроятно, въ томъ, что признать за „полную“ теорію. Во всякомъ случаѣ, я былъ бы очень радъ познакомиться съ этой новой „полной“ теоріей. Пока я образую въ каждомъ

*) Задача предложенная въ кружкѣ проф. С. А. Усова носитъ, по моему мнѣнію, другой геометрическій характеръ. (Ср. ниже вопросъ о теоріи геометрическихъ построеній).

классѣ кружокъ любителей геометрическихъ построеній и эта группа занимается, смотря по мѣрѣ своихъ математическихъ способностей, рѣшеніемъ этихъ необязательныхъ задачъ. Любители и любительницы рѣшаютъ ихъ подъ моимъ руководствомъ то болѣе, то менѣе успѣшно, иногда очень удачно. Но — подчеркиваю — эти занятія необязательны; не то въ обще-обязательномъ курсѣ ариѳметики, тутъ не мѣсто математическимъ догадкамъ, съ тѣхъ поръ какъ извѣстны способы алгебры. Если въ настоящее время существовала бы полная теорія геометрическихъ построеній, то и изъ этой области математическихъ наукъ слѣдовало бы безпощадно изгнать всѣ догадки и загадки, а пока, за отсутствіемъ такой теоріи, здѣсь, поневолѣ, они еще умѣстны и могутъ и должны служить развитію математической находчивости, составляя однако, необязательный отдѣлъ курса средне учебныхъ заведеній.

По вѣрному замѣчанію одного извѣстнаго философа, математика наука объ очевидномъ. Можно ее, однако, при желаніи, очень легко превратить въ шараду. Любители шарадъ-загадокъ *) пусть этимъ и занимаются, но они должны твердо помнить, что это далеко не единственный путь при изученіи данной науки и очевидно не самый удобопонятный.

Г. Александровъ называетъ меня совершенно вѣрно защитникомъ механизаціи мысли. Да разумная механизація математической мысли мой идеалъ, и не только мой, но и другихъ математиковъ. Или стремленія къ открытію общихъ формулъ-законовъ, позволяющихъ механически опредѣлить частные случаи не цѣль многихъ изслѣдованій? Что же касается, между прочимъ, голословнаго заявленія г. Александрова, что онъ не усматриваетъ математической аналогіи между „архаическимъ“ цѣпнымъ правиломъ и моимъ способомъ при рѣшеніи одного случая пропорціональнаго дѣленія, то ему слѣдовало бы внимательнѣе вникнуть въ этотъ вопросъ, такъ какъ такая аналогія несомнѣнно существуетъ. Но что такое въ данномъ случаѣ „внѣшняя“ и „внутренняя“ аналогія? Такія общія нѣсколько туманныя выраженія любимыя мѣста критиковъ.

Далѣе странно почему по терминологіи г. Александрова математическая задача, для рѣшенія которой понадобилось примѣненіе методовъ всѣхъ частей математики (въ томъ числѣ и геометріи) отнесена къ разряду ариѳметическихъ. Задачи въ родѣ, напримѣръ, извѣстной задачи Э Люка не слѣдуетъ считать ариѳметическими. Впрочемъ эта классификація, повидимому, результатъ новѣйшихъ работъ, такъ какъ еще въ 1908 г. тотъ же г. Александровъ (см. „Методы рѣшеній ариѳметическихъ задачъ“) утверждаетъ, что „не существуетъ ариѳметическихъ задачъ, которыя не могутъ быть приведены къ типу I, или къ типу II“. Типъ I: $x = f(a, b, c)$; типъ II: $f(x) = k$, гдѣ „f“ ариѳметическая ($+$, $-$, $\times$, $:$) функція Sapienti sat. — Да и теперь

*) Очень характерно и то, что г. Александровъ въ статьѣ, мальчикъ въ лавкѣ и первоклассникъ не рѣшаютъ мою задачу, а гадаютъ. Отсутствуютъ каждый разъ объясненіе и указаніе способа.

г. Александровъ классифицируетъ ариѳметическія задачи по степенямъ.— Не по степенямъ ли алгебраическаго уравненія (ср. и стр. 29 „Методы рѣшеній...")? Не спрятана ли за сценой и у него въ концѣ то концовъ, за его 12 (2×5 или 6) способами гонимая имъ алгебра.

„Рѣшеніе задачъ по формуламъ необходимо только будущему спеціалисту". Однако, дѣло въ томъ, что такими „спеціалистами" являются наши гимназисты и гимназистки, такъ какъ они потомъ входятъ въ тѣ „лѣса" алгебраическихъ формулъ*). Вотъ другое дѣло — наши солдаты. Имъ и я преподаю „чистую" ариѳметику, безъ малѣйшей примѣси алгебры, безъ x'а и безъ формулъ, такъ какъ они во время выздоравливанія не собираются „спеціализироваться" по математикѣ. (Такой группѣ въ 10 человѣкъ (окончившіе курсъ городскихъ, уѣздныхъ и сельскихъ училищъ) я задавалъ задачу „десятокъ лимонъ и т. д." Спустя 35 минутъ одинъ изъ нихъ, окончившій курсъ уѣзднаго училища, дѣйствительно ее рѣшилъ. Одинъ изъ десяти! Конечно, въ классѣ, если только что пройдены задачи этого типа — условія другія. Но такихъ типовъ много.

Я далекъ отъ всякаго навязыванія дѣтямъ опредѣленнаго вида записей и способа рѣшенія, а лишь только рекомендую имъ тѣ способы, которые по моему мнѣнію лучше другихъ. Мнѣ, однако, хорошо извѣстны случаи навязыванія опредѣленнаго образа мысли; такъ, напримѣръ, ученица провалилась на экзаменѣ потому, что при рѣшеніи ариѳметической задачи пользовалась и средствами знакомой ей алгебры. Характерно и то, что по мнѣнію даннаго экзаменатора задача была довольно трудная, ученица же считала ее легкой и вѣрно ее рѣшила. О бѣдная, гонимая алгебра! Какъ твой духъ обобщенія — механизаціи и твои формулы противны нѣкоторымъ математикамъ нашего времени!

Тѣмъ болѣе пріятно узнать, что „заблужденія" и „ошибки", находящіяся въ моей статьѣ, уже очень сильно распространены, главнымъ образомъ въ „казенной средней школѣ.

*) Не безинтересно было узнать упраздняютъ ли способы г. Александрова вообще всѣ математическіе формулы? (Въ элементарной математикѣ ихъ правда maximum около 150 въ курсѣ срдне-учебнаго заведенія) или г. Александровъ нашелъ въ моей статьѣ лѣса формулъ? И то и другое непонятно. Въ моей статьѣ всего 4 симметричныя формулы, Гдѣ же „тѣ лѣса"?

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей профессора **Е. Л. Буницкаго**.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 323 (6 сер.). Построить треугольникъ ABC по сторонѣ AC, высотѣ BD и биссектору BE.

И. Александровъ (Москва).

№ 324 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\left(x^3+6\sqrt[3]{x^3-1}-5\right)\sqrt[3]{x^3-1}-4x^3+5=0.$$

В. Тюнинъ (Самара).

№ 325 (6 сер.). Пусть $\varphi(x)$ обозначаетъ число цѣлыхъ положительныхъ чиселъ, не большихъ цѣлаго положительнаго числа x и взаимно простыхъ съ нимъ. Вычислить $\varphi(a_1a_2\ldots a_n)$, если извѣстны величины $\varphi(a_1), \varphi(a_2),\ldots,\varphi(a_n)$ и если даны общіе наибольшіе дѣлители каждой изъ группъ чиселъ, взятой изъ ряда чиселъ $a_1, a_2,\ldots, a_n$ (т. е. даны общіе наибольшіе дѣлители каждыхъ двухъ, каждыхъ трехъ и т. д. изъ этихъ чиселъ), а также даны значенія символа φ для каждаго изъ этихъ общихъ наибольшихъ дѣлителей.

Н. С. (Одесса).

№ 326 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\sum_{1}^{n}(x-n)\,[x-(n+1)]=0.$$

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 271 (6 сер.). *Доказать справедливость формулы*

$$n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2) \geqq (a_1+a_2+\cdots+a_n)^2,$$

гдѣ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — *любыя положительныя числа. Въ какомъ случаѣ въ этой формулѣ возможенъ знакъ равенства?*

Разсмотримъ сумму $\sum\limits_{i,k}(a_i-a_k)^2$, въ которой пары указателей i, k представляють собою всевозможныя сочетанія по два изъ всѣхъ n указателей $1, 2, \ldots, n$. Послѣ раскрытія скобокъ въ этой суммѣ приходимъ къ тожеству

$$(1) \quad \sum_{i,k}(a_i-a_k)^2=(n-1)(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)-2\sum_{i,k}a_ia_k.$$

Дѣйствительно, разсматриваемая сумма содержитъ всевозможныя двойныя произведенія изъ всѣхъ чиселъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ со знакомъ минусъ, а также сумму $\sum\limits_{i,k}(a_i^2+a_k^2)$, въ которой всего $2\dfrac{n(n-1)}{2}$, т. е. $n(n-1)$ членовъ и въ которой такимъ образомъ квадратъ каждой изъ буквъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ встрѣчается $n-1$ разъ. Складывая тожество (1) съ тожествомъ

$$(2) \quad (a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)+2\sum_{i,k}a_ia_k,$$

находимъ, что

$$(3) \quad n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)=(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2+\sum_{i,k}(a_i-a_k)^2.$$

Изъ этого равенства и вытекаетъ предложенная для доказательства формула, при чемъ ясно, что знакъ равенства возможенъ въ ней лишь тогда, если каждая изъ разностей a_i-a_k обращается въ нуль, т. е. если $a_1=a_2=\cdots=a_n$ или же если $n=1$. Ясно также, что полученные результаты вѣрны не только для положительныхъ чиселъ $a_1, a_2, \ldots a_n$, но и для любыхъ n вещественныхъ чиселъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Замѣчаніе. Формула (3) выводится безъ труда изъ извѣстнаго въ теоріи опредѣлителей тожества

$$(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)=(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2+\sum_{i,k}(b_ka_i-b_ia_k)^2,$$

если положить $b_1=b_2=\cdots=b_n=1$.

В. Поповъ (Валки, Харьк. губ.); *Д. Чижевскій* (Александрія); *Л. Гейлеръ* (Харьковъ); *В. Ревзинъ* (Сумы); *Г. Михневичъ* (Одесса); *И. Яковлевъ* (Ахтырка).

№ 272 (6 сер.).*Изъ точки* B *нѣкоторой прямой возставленъ перпендикуляръ* AB, *а затѣмъ на той же прямой отъ точки* B *отложены послѣдовательно отрѣзки* BC, CD *и* DE, *каждый изъ которыхъ равенъ отрѣзку* AB. *Вычислить безъ помощи тригонометріи сумму угловъ* ADB *и* AEB.

Полагая $AB=a$, отложимъ на продолженіи отрѣзка EB отрѣзокъ $BF=$ $=BD=2a$, проведемъ прямую FA и опустимъ на нее перпендикуляръ EN. Уголъ EAF навѣрно тупой, а потому точка N лежитъ на продолженіи прямой FA; въ самомъ дѣлѣ, называя черезъ M середину FB, изъ перпендикулярности отрѣзковъ AB и MB и изъ равенствъ $MB=AB=BC=a$ приходимъ къ заключенію, что уголъ MAC, составляющій часть угла EAF, прямой, такъ какъ $\angle MAB=\angle BAC=\frac{\pi}{4}\cdot$ Изъ равенства треугольниковъ ABD и ABF находимъ, что $\angle ADB+\angle AEB=\angle AFB+\angle AEB$, откуда

$$(1)\quad \angle ADB+\angle AEB=\angle EAN.$$

Полагая $AN=x$, $NE=y$ имѣемъ $x^2+y^2=\overline{AE}^2=\overline{AB}^2+\overline{BE}^2=a^2+(3a)^2$, т. е.

$$(2)\quad x^2+y^2=10a^2.$$

Изъ подобія же прямоугольныхъ треугольниковъ AFB и NFE находимъ, что

$$NE:FE=AB:AF,\quad \text{или}\quad \frac{y}{5a}=\frac{a}{\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{FB}^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+(2a)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}},$$

откуда

$$(3)\quad y=a\sqrt{5}.$$

Подставляя это значеніе y въ равенство (2) и опредѣляя x, получимъ, что $x=a\sqrt{5}$, а потому [см. (3)] ANE есть равнобедренный прямоугольный треугольникъ съ равными катетами AN и NE. Слѣдовательно $\angle EAN=\frac{\pi}{4}$, откуда [см. (1)] $\angle ADB+\angle AEB=\frac{\pi}{4}\cdot$ Тригонометрическое же рѣшеніе сводится къ слѣдующему простому вычисленію. Полагая $\angle ADB=\alpha$, $\angle AEB=\beta$, имѣемъ:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{AB}{DB}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2},\qquad \operatorname{tg}\beta=\frac{AB}{BE}=\frac{a}{3a}=\frac{1}{3},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1,$$

откуда $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$, такъ какъ $\alpha<\angle ACB=\frac{\pi}{2}$ и $\beta<\frac{\pi}{2}$, вслѣдствіе чего $\alpha+\beta<\pi$.

N. N. (Тифлисъ); *В. Поповъ* (Валки, Харьковск. губ.); *Н. Михальскій* (Екатеринославъ); *А. Кисловъ* (Москва).

№ 275 (6 сер.). *Упростить сумму*

$$A_{m-1}^{p}+A_{m-2}^{p-1}\cdot A_{p}^{1}+A_{m-3}^{p-2}\cdot A_{p}^{2}+\cdots+A_{m+i-1}^{p-i}\cdot A_{p}^{i}+\cdots+A_{p}^{p},$$

гдѣ m — *цѣлое положительное число, не меньшее* 2, p — *цѣлое положительное число, не большее* m — 1, *и гдѣ* A_r^s *вообще обозначаетъ число размѣщенiй изъ* r *элементовъ по* s.

Если k — любое цѣлое положительное число, большее единицы и не превосходящее n, то

$$A_{n-1}^{k}=(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)=$$

$$=n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)-k(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)=A_{n}^{k}-kA_{n-1}^{k-1}.$$

Итакъ (1) $A_{n-1}^{k}=A_{n}^{k}-kA_{n-1}^{k-1}$, и это равенство остается вѣрнымъ и при $k=1$, если положить $A_{n-1}^{0}=1$. Полагая въ формулѣ (1) k равнымъ послѣдовательно $p, p-1, p-2, \ldots, 2, 1$, а n соотвѣтственно равнымъ $m, m-1, \ldots, m-p+1$, получимъ рядъ равенствъ

$$A_{m-1}^{p}=A_{m}^{p}-pA_{m-1}^{p-1},$$

$$A_{m-2}^{p-1}=A_{m-1}^{p-1}-(p-1)A_{m-2}^{p-2},$$

$$A_{m-3}^{p-2}=A_{m-2}^{p-2}-(p-2)A_{m-3}^{p-3},$$

. . . .

$$A_{m-i}^{p-i+1}=A_{m-i+1}^{p-i+1}-(p-i+1)A_{m-i}^{p-i},$$

$$A_{m-i-1}^{p-i}=A_{m-i}^{p-i}-(p-i)A_{m-i-1}^{p-i-1},$$

. . . .

$$A_{m-p+1}^{2}=A_{m-p+2}^{2}-2A_{m-p+1}^{1},$$

$$A_{m-p}^{1}=A_{m-p+1}^{1}-1.$$

Помножая эти равенства по порядку соотвѣтственно на $A_p^0, A_p^1, A_p^2, \ldots, A_p^{i+1}, A_p^i, \ldots, A_p^{p-2}, A_p^{p-1}$ [т. е., соотвѣтственно, на $1, p, p(p-1), \ldots, p(p-1)\ldots 3.2$] и складывая результаты, мы получимъ въ первой части предложенную для упрощенiя сумму безъ послѣдняго члена; во второй же части приводятся, взаимно уничтожаясь, всѣ члены, кромѣ A_m^p и $(-A_p^{p-1})$. Такимъ образомъ, замѣчая, что $A_p^{p-1}=A_p^p$, мы приходимъ къ равенству

$$A_{m-1}^{p}+A_{m-2}^{p-1}\cdot A_{p}^{1}+A_{p-3}^{p-2}\cdot A_{p}^{2}+\cdots+A_{m-p}^{1}\cdot A_{p}^{p-1}=A_{m}^{p}-A_{p}^{p},$$

откуда

$$A_{m-1}^{p}+A_{m-2}^{p-1}\cdot A_{p}^{1}+A_{m-3}^{p-2}\cdot A_{p}^{2}+\cdots+A_{m-p}^{1}\cdot A_{p}^{p-1}+A_{p}^{p}=A_{m}^{p}=$$

$$=m(m-1)\ldots(m-p+1).$$

В. Ревзинъ (Сумы); *Н. С.* (Одесса).

№ 277 (6 сер.). *Найти общій видъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ* x' *удовлетворяющихъ равенству*

$$\varphi(2\mathrm{x}) = \varphi(3\mathrm{x}),$$

гдѣ $\varphi(\mathrm{n})$ *обозначаетъ вообще число цѣлыхъ чиселъ, не превосходящихъ даннаго числа* n *и взаимно простыхъ съ* n.

Полагая (1) $x = 2^y 3^z v$, гдѣ y и z — цѣлыя не отрицательныя числа, а v — цѣлое положительное число, не дѣлящееся ни на 2 ни на 3, находимъ, что $2x = 2^{y+1}3^z v$, $3x = 2^y 3^{z+1} v$, и, согласно съ условіемъ,

$$(2) \quad \varphi(2^{y+1}3^z v) = \varphi(2^y 3^{z+1} v).$$

Такъ какъ $2^{y+1}3^z$ и v, а также и $2^y 3^{z+1}$ и v суть числа взаимно простыя, то равенство (2) можно записать въ видѣ $\varphi(2^{y+1}3^z)\,\varphi(v) = \varphi(2^y 3^{z+1})\,\varphi(v)$, или же

$$(3) \quad \varphi(2^{y+1}3^z) = \varphi(2^y 3^{z+1}),$$

откуда слѣдуетъ, что для удовлетворенія равенства $\varphi(2x) = \varphi(3x)$ необходимо и достаточно найти такія цѣлыя неотрицательныя значенія y и z, которыя удовлетворяютъ равенству (3), и затѣмъ подставить ихъ въ равенство (1). Равенство (3) при y и z положительныхъ невозможно. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ

$$\varphi(2^{y+1}3^z) = 2^y \,.\, 3^{z-1} \,.\, 2 = 2^{y+1} \,.\, 3^{z-1}, \quad \varphi(2^y 3^{z+1}) = 2^{y-1} \,.\, 3^z \,.\, 2 = 2^y 3^z,$$

откуда вытекало бы, что $2^y 3^z = 2^{y+1} 3^{z-1}$, или же $3 = 2$, что невѣрно. Точно такъ же равенство (3) невозможно при $y = 0$, такъ какъ въ этомъ случаѣ при z положительномъ мы имѣли бы

$$\varphi(2^{y+1} \,.\, 3^z) = \varphi(2 \,.\, 3^z) = 3^{z-1} \,.\, 2, \quad \varphi(2^y \,.\, 3^{z+1}) = \varphi(3^{z+1}) = 3^z \,.\, 2, \quad 3^{z-1} \,.\, 2 = 3^z \,.\, 2,$$

т. е. $1 = 3$, что невозможно, а при $z = 0$ мы получили бы, что

$$\varphi(2^{y+1}3^z) = \varphi(2) = \varphi(2^y 3^{z+1}) = \varphi(3),$$

т. е. $1 = 2$, что также невѣрно. Остается предположить, что $y > 0$ и $z = 0$. Въ этомъ случаѣ

$$\varphi(2^{y+1}3^z) = \varphi(2^{y+1}) = 2^y, \quad \varphi(2^y 3^{z+1}) = \varphi(2^y \,.\, 3) = 2^{y-1} \,.\, 2 = 2^y,$$

откуда

$$\varphi(2^{y+1}3^z) = \varphi(2^y 3^{z+1}).$$

Итакъ искомое значеніе x опредѣляется равенствомъ $x = 2^y 3^0 v$, или $x = 2^y v$, гдѣ y — любое цѣлое положительное число, а v — цѣлое положительное число, не кратное ни 2 ни 3. Другими словами, x есть любое четное число, не дѣлящееся на 3. Такъ какъ всякое цѣлое число можно представить въ одномъ изъ видовъ $6t$, $6t+1$, $6t+2$, $6t+3$, $6t+4$, $6t+5$, гдѣ t — также нѣкоторое цѣлое число, и такъ какъ числа вида $6t+1$, $6t+3$, $6t+5$ нечетны, а $6t$ кратно 3, то $x = 6t+2$ или $x = 6t+4$, гдѣ t — любое цѣлое неотрицательное число.

Л. Гейлеръ (Харьковъ); *В. Ревзинъ* (Сумы); *Г. Михн—ъ* (Одесса).

№ 278 (6 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$x^{4n} - 4a^2 x^n - a^2(2a - 1) = 0.$$

(Заимств. изъ «*Supplemento al Periodico di Mathematica*»).

Представивъ данное уравненіе въ видѣ

$$x^{4n} + 2ax^{2n} + a^2 - 2ax^{2n} - 4a^2x^n - 2a^3 = 0,$$

или же

$$(x^{2n} + a)^2 - [\sqrt{2a}\,(x^n + a)]^2 = 0, \quad \text{т. е.} \quad x^{2n} + a \pm (x^n + a)\sqrt{2a} = 0,$$

разлагаемъ его на два уравненія

$$x^{2n} + \sqrt{2a}\,x^n + a(1 + \sqrt{2a}) = 0 \quad \text{и} \quad x^{2n} - \sqrt{2a}\,x^n + a(1 - \sqrt{2a}) = 0,$$

квадратныхъ относительно x^n. Рѣшивъ каждое изъ нихъ, находимъ, что

$$x = \alpha \sqrt[n]{\frac{\pm\sqrt{2a} \pm \sqrt{-2a(1 \pm 2\sqrt{2a})}}{2}}$$

гдѣ α есть любое изъ n возможныхъ значеній корня n-ой степени изъ единицы, при чемъ въ полученной формулѣ при радикалахъ $\pm\sqrt{2a}$ и $\pm 2\sqrt{2a}$ надо взять одновременно либо верхній, либо нижній знаки, комбинируя любой изъ этихъ знаковъ произвольно съ любымъ изъ знаковъ радикала $\sqrt{-2a(1 \pm 2\sqrt{2a})}$; такимъ образомъ находимъ всѣ $4n$ корней предложеннаго уравненія.

N. N. (Тифлисъ); *Н. Михальскій* (Екатеринославъ); *Л. Гейлеръ* (Харьковъ); *В. Ревзинъ* (Сумы); *Л. Трофимовъ* (Иркутскъ).

Редакторъ прив.-доц. **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено военной цензурой.

Типографія „Техникъ"—Одесса, Екатерининская, 58.

Обложка
ищется

Обложка
ищется