Обложка
пщется

Обложка
ищется

Второй серіи VI-го семестра №1.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

№ 661.

Рихардъ Дедекиндъ.

Краткій обзоръ научной дѣятельности.

Смерть Дедекинда (Dedekind) не относится къ числу явленій, мимо которыхъ можно пройти, ограничившись мимолетной замѣткой. Дедекиндъ принадлежитъ къ немногочисленному классу глубокихъ и оригинальныхъ математиковъ и долженъ быть поставленъ наряду съ такими математиками, какъ Эрмитъ (Hermite), Кронекеръ (Kronecker) и Смитъ (H. J. S. Smith). По меньшей мѣрѣ, въ четырехъ областяхъ чистой математики приходится отмѣтить его выдающейся важности заслуги. Настоящій краткій отчетъ о его заслугахъ является данью уваженія къ его памяти.

Въ настоящее время считается общепризнаннымъ, что основы всѣхъ математическихъ наукъ должны быть перестроены такимъ образомъ, чтобы математика получила характеръ символической логики, и чтобы она стала — по крайней мѣрѣ, въ теоріи — совершенно независимой отъ всякой интуиціи. Начало этой революціи было положено изслѣдованіями, направленными къ установленію точнаго понятія объ ирраціональномъ числѣ и основныхъ особенностей ариѳметическаго континуума. Дедекинду, наряду съ Гейне (Heine), Кронекеромъ и Канторомъ (Cantor) принадлежитъ заслуга разработки теоріи этого вопроса и приведенія ея къ совершенно законченному виду. Его собственное изложеніе этой теоріи содержится въ двухъ извѣстныхъ статьяхъ его: „Was sind und was sollen die Zahlen?“ и „Über Stetigkeit und irrationale Zahlen“ и является въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ самымъ простымъ и въ философскомъ отношеніи самымъ глубокимъ изъ всѣхъ появившихся изложеній. Въ своемъ изложеніи этой новой теоріи Дедекиндъ вводитъ только одинъ новый символъ. Затѣмъ онъ указываетъ,—и этимъ мы обязаны ему и Кантору,—что, если мы хотимъ принять движеніе точки по отрѣзку AB въ одномъ и томъ же направленіи за точное изображеніе численнаго возрастанія вещественнаго перемѣннаго отъ a до b, то мы должны принять аксіому соотвѣтствующаго рода. Эта аксіома, извѣстная подъ названіемъ аксіомы Кантора-Дедекинда, можетъ быть представлена въ различныхъ эквивалентныхъ формулировкахъ. Въ одной изъ этихъ формулировокъ она гласитъ, что отрѣзокъ прямой линіи является опредѣленнымъ, если опредѣлены двѣ ограничивающія его точки.

Другой крупной областью въ современной математикѣ является теорія эллиптическихъ модульфункцій, а также представляющая собою продолженіе этой послѣдней теорія автоморфныхъ функцій. Въ письмѣ къ Борхардту (Borchardt) („Журналъ Крелле“, т. 83, 1877 г.) Дедекиндъ указываетъ на то значеніе, которое имѣетъ нѣкоторая функція, называемая имъ Valenz. По существу эта функція представляетъ собою не что иное, какъ модульфункцію $j(\omega)$, которая обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что $j(\omega)=j(\omega')$ тогда и только тогда, когда $\omega'=\dfrac{a\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$, гдѣ a, β, γ, δ суть вещественныя цѣлыя числа, удовлетворяющія условію $a\delta-\beta\gamma=1$. Это введеніе функціи j въ качествѣ основной функціи, вмѣсто Эрмитовскихъ функцій φ, ψ, составило эпоху въ теоріи. Слѣдуетъ, однако, замѣтить, что Смитъ фактически получилъ подобные результаты значительно раньше, а именно въ 1865 г. (см. его „Report on the Theory of Numbers“, гл. 125 и слѣд.).

Теперь перейдемъ къ заслугамъ Дедекинда въ области теоріи чиселъ. Гауссъ (Gauss) расширилъ эту теорію введеніемъ комплексныхъ цѣлыхъ чиселъ вида $m+ni$ и доказалъ, что всѣ вообще законы—въ частности, законъ объ однозначности разложенія всякаго цѣлаго числа на простыхъ сомножителей—остаются при этомъ въ силѣ. Куммеръ (Kummer) разсматривалъ алгебраическія цѣлыя числа, получающіяся путемъ извлеченія корня той или иной степени изъ единицы, и наткнулся на одно досадное обстоятельство: теорема о простыхъ сомножителяхъ оказалась здѣсь совершенно несправедливой. Другими словами, оказалось, что можетъ имѣть мѣсто равенство $a\beta=\gamma\delta$, гдѣ a, β, γ, δ суть цѣлыя числа, каждое изъ которыхъ неразложимо въ разсматриваемой области (и является въ этомъ смыслѣ слова числомъ простымъ), и, однако, γ представляетъ собою число, существенно отличное отъ чиселъ a и β, такъ какъ его норма отлична отъ нормъ этихъ чиселъ. Куммеръ изобрѣлъ тогда идеальныя простыя числа и преодолѣлъ указанную трудность, поскольку дѣло шло объ упомянутыхъ цѣлыхъ числахъ, получающихся путемъ извлеченія корней изъ единицы. Сдѣланныя имъ открытія выдвигали, естественно, общій вопросъ объ установленіи понятія о цѣломъ алгебраическомъ числѣ, равно какъ и вопросъ о нахожденіи его простыхъ сомножителей. Дедекиндъ первый далъ полное рѣшеніе этого вопроса въ 11-мъ приложеніи къ третьему изданію (1879 г.) сочиненія Дирихле (Dirichlet) „Zahlentheorie“. Это приложеніе, безъ сомнѣнія, принадлежитъ къ числу самыхъ изящныхъ математическихъ сочиненій изъ всѣхъ, какія только были написаны, и, хотя въ четвертомъ изданіи (1894 г.) методы изложенія упрощены, но все же слѣдуетъ и теперь читать первоначальное изложеніе, которое въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ является, можно смѣло сказать, непревзойденнымъ. Достаточно сказать, что въ этомъ приложеніи Дедекиндъ устанавливаетъ понятія о корпусѣ (или области), объ идеалахъ и ихъ базахъ, о дискриминантахъ, включая и понятіе о дискриминантѣ разсматриваемой области. Онъ устанавливаетъ общіе законы дѣлимости въ каждой области и, въ частности, показываетъ, какъ найти вещественныхъ цѣлыхъ простыхъ сомножителей дискриминанта корпуса, что являлось одной изъ главныхъ трудностей въ этой теоріи. Кромѣ того, онъ разсматриваетъ вопросъ о системѣ единицъ, объ умноженіи и эквивалентности идеаловъ, о связи ихъ съ теоріей формъ, а также задачу объ опредѣленіи числа не-эквивалентныхъ классовъ въ данной области. Все это результаты очень большой общности и выдающейся важности, и всякій математикъ, желающій съ успѣхомъ работать въ указанныхъ областяхъ, долженъ быть съ ними близко знакомъ.

Совмѣстно съ Веберомъ (H. Weber) Дедекиндъ опубликовалъ въ журналѣ Крелле (т. 92, 1882 г.) обширный и важный мемуаръ объ алгебраическихъ функціяхъ отъ одной перемѣнной. Здѣсь разсматривается, главнымъ образомъ, вопросъ объ „алгебраическихъ дѣлителяхъ“, которые играютъ здѣсь ту же самую роль, что и идеалы въ числовыхъ областяхъ. Они даютъ намъ возможность составить себѣ точное понятіе о „мѣстѣ“ на Римановской поверхности и приводятъ насъ весьма простымъ и замѣчательнымъ образомъ къ доказательству инваріантности рода (genre, Geschlecht, deficiency) поверхности, къ теоремѣ Римана-Роша (Riemann-Roch) и т. д. Разсужденія, касающіяся расширенія этой теоріи путемъ введенія перемѣннаго t, сведены до минимума, хотя (какъ было указано Вейерштрассомъ) совершенно обойтись безъ нихъ нельзя. Методы этого мемуара были развиты Гензелемъ (Hensel), и Ландсбергомъ (Landsberg) въ ихъ книгѣ объ алгебраическихъ функціяхъ. Какъ намъ кажется, эти методы представляютъ собою счастливую середину между чисто эвристическими методами и строгой системой изложенія Вейерштрассовой школы.

Другой областью, въ которой Дедекиндъ написалъ нѣсколько значительныхъ замѣтокъ, является теорія группъ; однако, здѣсь не мѣсто давать списокъ всѣхъ его сочиненій. Надо надѣяться, что полное собраніе ихъ будетъ напечатано, тѣмъ болѣе, что нѣкоторыя изъ нихъ отнюдь не являются легкодоступными. Они невелики по объему и, поскольку мы могли съ ними познакомиться, вполнѣ закончены, такъ что нѣтъ никакихъ причинъ откладывать это дѣло.

Поляризованный свѣтъ и его примѣненіе въ техникѣ.

Проф. Е. Кокера.

Однимъ изъ основныхъ вопросовъ, возникающихъ въ большинствѣ техническихъ проблемъ, является вопросъ объ устройствѣ сооруженія или машины, которая выполняла бы хорошо и экономно какую-нибудь опредѣленную работу, и, какого бы характера ни была задача, подлежащая разрѣшенію, она, большей частью, неразрывно связана съ вопросомъ объ устройствѣ опредѣленнаго числа соединенныхъ между собою частей, назначеніе которыхъ — выдерживать производимыя на нихъ воздѣйствія.

Машины и сооруженія, устройствомъ которыхъ занимаются инженеры, представляютъ собою, большей частью, безконечное разнообразіе, при чемъ каждая изъ нихъ выдвигаетъ обыкновенно совершенно новую и трудную задачу, — въ особенности, если рѣчь идетъ о силѣ натяженія, которую можетъ выдержать каждая часть, и о томъ, какъ слѣдуетъ распредѣлить общее натяженіе между различными частями.

Каждому инженеру приходилось при разработкѣ своихъ плановъ сталкиваться съ вопросомъ о предѣлахъ допустимаго натяженія. Большей частью, вопросъ этотъ представляетъ неразрѣшимыя трудности: часто бываетъ такъ, что къ рѣшенію этого вопроса нельзя примѣнить математическихъ методовъ, и въ то же время невозможно подвергнуть его предварительному изслѣдованію физическими методами. Но вопросъ обязательно долженъ быть разрѣшенъ, хотя бы только приблизительно, и въ виду этой настоятельной необходимости получить отвѣтъ оказывается иногда умѣстнымъ, когда рѣчь идетъ о сооруженіи большой важности, произвести предварительно экспериментальныя изысканія.

Приходится, однако, сдѣлать нѣсколько суровый, но отнюдь не несправедливый упрекъ инженерамъ, которые въ своей практикѣ не всегда пользуются всѣми возможными выводами изъ открытій, дѣлаемыхъ въ чистой наукѣ. Замѣчательно отмѣтить въ этомъ отношеніи, какъ рѣдко пользовались открытіемъ Давида Брюстера (David Brewster), сдѣланнымъ еще въ 1816 году и состоящимъ въ томъ, что прозрачныя тѣла становятся подъ вліяніемъ давленія двояко преломляющими, хотя способы использованія этого открытія были ясны уже самому Брюстеру, вполнѣ опредѣленно указавшему, что натяженіе въ сводахъ мостовъ можетъ быть проявлено при помощи стеклянной модели благодаря тому, что лучъ поляризованнаго свѣта получаетъ въ ней двойное лучепреломленіе.

То здѣсь, то тамъ попадаются иногда отчеты о примѣненіяхъ указаннаго свойства свѣта въ техникѣ; эти примѣненія обычно мало достигаютъ цѣли, — главнымъ образомъ, въ виду трудностей, связанныхъ съ устройствомъ стеклянныхъ моделей требуемой формы. Однако, когда эти трудности удается преодолѣть, цѣнность пріобрѣтаемыхъ этимъ путемъ указаній оказывается весьма крупной, какъ, напримѣръ, это имѣло мѣсто въ весьма важныхъ изысканіяхъ по вопросу о распредѣленіи натяженія, производившихся г. Менаже (Mesnager) въ Парижѣ при помощи стеклянной модели цементнаго свода, покоющагося на упорахъ. Г. Менаже воспользовался полученными такимъ путемъ результатами для сооруженія свода, имѣющаго радіусъ около 310 футовъ, при чемъ получилось прекрасное совпаденіе между распредѣленіемъ натяженія въ самомъ сводѣ и въ его модели. Дороговизна и трудности сооруженія стеклянныхъ моделей не позволяютъ имъ войти во всеобщее употребленіе. Между тѣмъ существуютъ теперь другіе прозрачные матеріалы, имѣющіе много преимуществъ: подъ вліяніемъ давленія они пріобрѣтаютъ сильную двояко-преломляемость, при помощи инструментовъ имъ можно безъ труда придавать желаемую форму, они неломки и не быстро портятся и при всемъ этомъ не дорого стоятъ.

Вотъ, напримѣръ, грубая модель свода, сдѣланная изъ ксилонита. Мы видимъ, что, когда мы подвергаемъ ее нѣкоторому натяженію, то въ поляристкопѣ она свѣтится цвѣтнымъ свѣтомъ. Мы получаемъ такимъ образомъ изображеніе распредѣленія внутренняго натяженія, интерпретація котораго не представляетъ затрудненій.

Измѣреніе натяженія при помощи наблюденія хроматическихъ явленій.

Въ простыхъ случаяхъ мы можемъ опредѣлять силу натяженія по наблюдаемымъ цвѣтамъ.

Возьмемъ, напримѣръ, полоску изъ прозрачнаго матеріала и наставимъ оптическій аппаратъ такъ, чтобы, когда полоска не подвергнута никакому физическому воздѣйствію, черезъ нее не проходило совершенно свѣта. Подвергая затѣмъ испытуемую полоску умѣренному растяженію, мы увидимъ, что она станетъ свѣтиться сѣровато-бѣлымъ свѣтомъ, который при возрастающемъ растяженіи переходитъ черезъ рядъ незамѣтныхъ для глаза градацій въ лимонно-желтый, затѣмъ въ красно-пурпурный и далѣе, при весьма незначительномъ дальнѣйшемъ возрастаніи растяженія, въ довольно чистый синій цвѣтъ. При дальнѣйшемъ возрастаніи растяженія шкала цвѣтовъ повторяется приблизительно въ томъ же порядкѣ, и такимъ образомъ легко опредѣлить зависимость между цвѣтомъ и степенью растяженія.

Такимъ образомъ, въ простыхъ случаяхъ растяженія и сжатія можно опредѣлять интенсивность натяженія по наблюдаемымъ цвѣтнымъ полосамъ, при чемъ надо имѣть въ виду, что растяженіе и сжатіе производятъ одинаковый эффектъ, если только считать допустимыми измѣненія въ толщинѣ испытуемаго тѣла. Такъ, напримѣръ, если мы возьмемъ прозрачный брусокъ и подвергнемъ его нѣкоторому равномѣрному моменту крученія, то мы получимъ систему цвѣтныхъ полосъ, расположенныхъ въ извѣстномъ порядкѣ, и можемъ путемъ наблюденія установить, какъ распредѣляется натяженіе въ поперечномъ разрѣзѣ бруска.

Опытъ съ брускомъ и рядъ другихъ произведенныхъ опытовъ даютъ намъ примѣръ того, что оптическіе эксперименты могутъ примѣняться не только для механическаго измѣренія натяженія, но также и для созданія теоріи распредѣленія натяженія въ матеріалахъ, и надо прибавить, что, какъ оказывается, результаты непосредственныхъ экспериментальныхъ изслѣдованій прозрачныхъ матеріаловъ очень хорошо согласуются съ данными механическихъ измѣреній натяженія и выводами точной теоріи. Мы имѣемъ поэтому полное основаніе думать, что и въ болѣе сложныхъ случаяхъ распредѣленіе натяженія въ прозрачной модели является подобнымъ распредѣленію натяженія въ металлѣ. Такъ, напримѣръ, если мы возьмемъ брусокъ со сдѣланной на немъ зарубкой, то, какъ и можно было ожидать, мы увидимъ, что вслѣдствіе этой зарубки значительно увеличивается натяженіе матеріала. Распредѣленіе натяженія оказывается теперь болѣе сложнымъ, чѣмъ въ случаѣ простого бруска. Нейтральная ось передвигается по направленію къ зарубкѣ, а наблюдаемыя цвѣтныя явленія показываютъ, что максимальное натяженіе теперь, по крайней мѣрѣ, въ два раза больше, чѣмъ максимальное натяженіе въ брускѣ безъ зарубки.

Законы оптическихъ явленій.

Въ большинствѣ возникающихъ при инженерныхъ работахъ случаевъ распредѣленіе натяженія является еще болѣе сложнымъ; однако, извѣстно, что всякое натяженіе, лежащее въ какой-нибудь плоскости, всегда можетъ быть разложено на два главныхъ взаимно-перпендикулярныхъ натяженія. Когда величина и направленіе этихъ натяженій опредѣлены для всѣхъ точекъ, вопросъ о расиредѣленіи натяженія можно считать рѣшеннымъ.

Для того, чтобы получить экспериментальное рѣшеніе этого вопроса, надо опредѣлить зависимость между оптическимъ явленіемъ и величиной главныхъ натяженій въ данной точкѣ, и это легко сдѣлать при помощи простыхъ опытовъ. Такъ, напримѣръ, если мы возьмемъ двѣ пластинки и доведемъ ихъ равномѣрнымъ растяженіемъ до одной и той же интенсивности натяженія, то при испытаніи этихъ пластинокъ обѣ онѣ дадутъ одни и тѣ же цвѣтныя явленія. Если же мы наложимъ ихъ одну на другую, то получится такое же цвѣтное явленіе, какъ въ одной пластинкѣ, но при двойномъ натяженіи. Если, напротивъ, мы положимъ двѣ одинаково растянутыя, одинаковой толщины, пластинки на-крестъ, то общая площадь ихъ дастъ темное поле, показывающее, что дѣйствіе натяженія первой пластинки нейтрализуется дѣйствіемъ натяженія второй. То же темное поле получится, если сжать пластинку до степени натяженія, равной степени натяженія растянутой пластинки, и наложить ихъ одну на другую такъ, чтобы направленіе натяженія въ сжатой пластинкѣ было параллельно направленію натяженія въ растянутой пластинкѣ. Этимъ путемъ мы легко устанавливаемъ тотъ фактъ, что дѣйствія натяженій сжатія и растяженія, направленія которыхъ совпадаютъ, складываются, дѣйствія же натяженій, направленныхъ подъ прямымъ угломъ другъ къ другу, вычитаются.

Послѣдній результатъ оказывается весьма важнымъ, такъ какъ натяженіе въ любой точкѣ листа всегда можетъ быть представлено при помощи двухъ взаимно-перпендикулярныхъ натяженій p и q, и, слѣдовательно, вызываемый ими оптическій эффектъ пропорціоналенъ разности $p-q$. Такимъ образомъ, можно легко опредѣлить величину этой разности натяженій путемъ сравненія оптическаго эффекта, получающагося въ данной точкѣ, съ эффектомъ, получающимся въ пластинкѣ, подвергнутой простому растяженію или сжатію. Впрочемъ, глазъ является не очень надежнымъ инструментомъ, въ особенности потому, что, будучи подвергнутъ дѣйствію сильнаго свѣта, онъ очень быстро, уже черезъ нѣсколько минутъ, устаетъ. Поэтому лучше приводить оптическій эффектъ къ нулю, для чего нужно взять пластинку, подвергаемую простому натяженію или сжатію, помѣстить ее такъ, чтобы направленіе натяженія въ ней совпадало съ направленіемъ одного изъ главныхъ натяженій, и растягивать или сжимать ее до тѣхъ поръ, пока не получится темнаго поля.

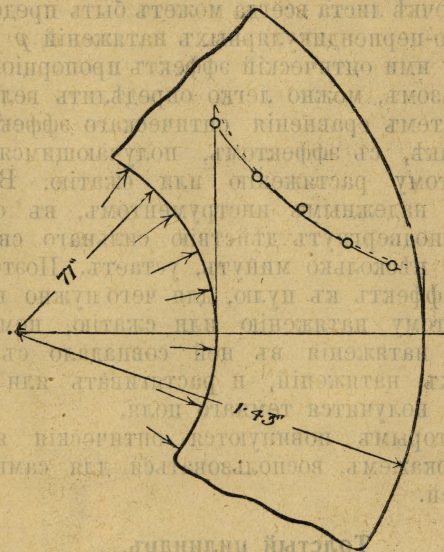
Законами, которымъ повинуются оптическія явленія, можно, какъ мы сейчасъ покажемъ, воспользоваться для самыхъ различныхъ практическихъ цѣлей.

Толстый цилиндръ.

Одинъ изъ такихъ примѣровъ даетъ намъ вопросъ объ устройствѣ водопроводныхъ трубъ. Дѣйствіе воды или другой жидкости, протекающей черезъ трубу, можетъ быть замѣнено давленіемъ, производимымъ на внутреннюю сторону кольца и равномѣрно по ней распредѣленнымъ, при чемъ распредѣленіе натяженія, вызываемаго въ круговомъ кольцѣ этимъ равномѣрно распредѣленнымъ давленіемъ, оказывается совершено симметричнымъ. Расположеніе цвѣтныхъ полосъ показываетъ, что очень сильное натяженіе наблюдается на внутренней поверхности, что затѣмъ оно убываетъ, сперва быстро, а при приближеніи къ внѣшней поверхности — болѣе постепенно. Въ данномъ случаѣ извѣстно, что мы имѣемъ передъ собой радіальное сжатіе, сопровождающееся направленнымъ по окружности круга растяженіемъ. Получающійся въ какой-нибудь точкѣ оптическій эффектъ пропорціоналенъ алгебраической разности интенсивностей этихъ натяженій, въ данномъ случаѣ — ихъ ариѳметической суммѣ.

Въ толстомъ цилиндрѣ такихъ размѣровъ, какъ находящійся передъ нами, радіальное сжатіе невелико, и интенсивность его можетъ быть опредѣлена непосредственно, но на фиг. 1 представлены результаты измѣренія совмѣстнаго дѣйствія обоихъ натяженій, при чемъ сплошная линія даетъ намъ значенія, полученныя экспериментальнымъ путемъ, а пунктирная линія представляетъ собою результаты вычисленій.

Въ одномъ случаѣ было взято для эксперимента кольцо, внутренній радіусъ котораго $r_1 = 0{,}71$ дюйма, а внѣшній радіусъ $r_2 = 1{,}43$ дюйма; на внутреннюю стѣнку кольца было произведено давленіе въ 900 *ф.* на 1 кв. дюймъ, и затѣмъ значенія, полученныя экспериментально, были сравнены со значеніями, найденными путемъ вычисленій. Получились слѣдующіе результаты:



Фиг. 1.

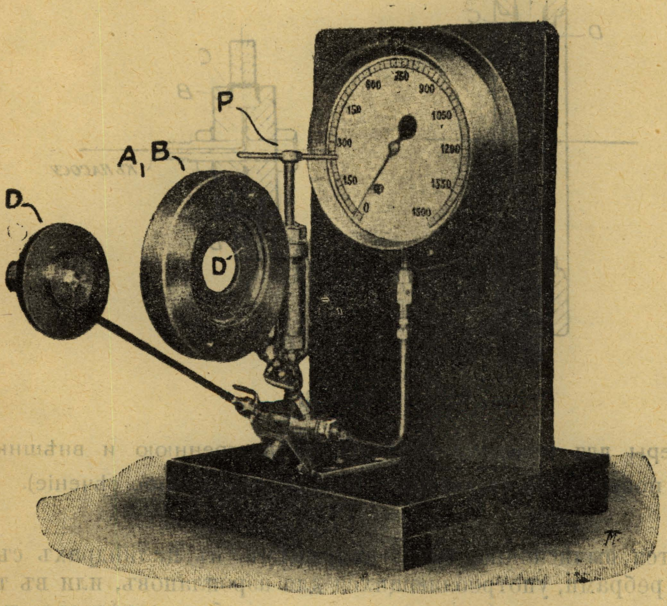
Таблица I.

Радіусъ r въ дюймахъ:	$(p-q)$ въ фунтахъ на 1 кв. дюймъ: Экспериментальное значеніе		Вычисленное значеніе:
	Наблюденное:	Съ поправкой на кожаную прослойку:	
0,71	2100	2185	2400
0,85	1560	1625	1660
1,00	1185	1230	1205
1,15	870	905	910
1,30	670	700	715
1,43	—	—	588

Такимъ образомъ, результаты, добытые экспериментальнымъ путемъ, довольно удовлетворительно совпадаютъ съ теоріей. Въ дѣйствительности это совпаденіе еще больше, чѣмъ обнаруживаютъ приведенныя числа, такъ какъ указаннаго выше давленія не было налицо въ полной мѣрѣ, какъ мы это сейчасъ пояснимъ.

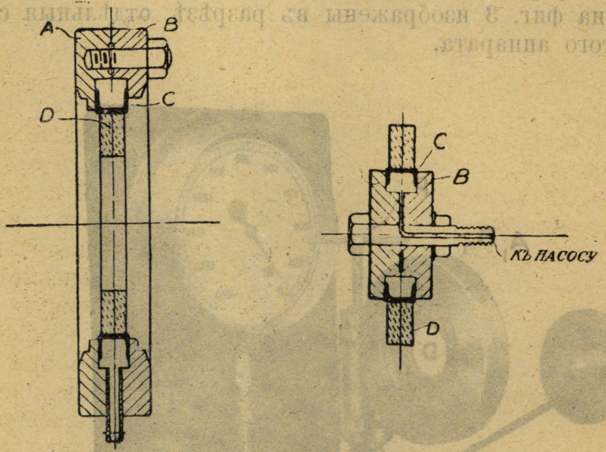
Очевидно, что въ данномъ случаѣ для разрѣшенія вопроса о распредѣленіи натяженія требуется примѣнить доступное измѣренію давленіе на цилиндрическую поверхность кольца, пропуская для этого жидкость такимъ образомъ, чтобы ни одна существенная часть происходящаго процесса не ускользала отъ наблюденія. Простой и хорошій способъ достигнуть этого указанъ моимъ ассистентомъ, г. Уитикомбомъ (F. H. Withycombe).

Фиг. 2 даетъ намъ фотографію всего аппарата, служащаго для производства внутренняго и внѣшняго давленія на кольца при помощи жидкости, а на фиг. 3 изображены въ разрѣзѣ отдѣльныя существенныя части этого аппарата.



Фиг. 2.

Для производства давленія при помощи воды или какой-нибудь другой жидкости служитъ маленькій ручной насосъ P, поршень котораго приводится въ движеніе при помощи винта, накачивающаго масло до желаемой степени давленія въ кольцеобразный промежутокъ между двумя металлическими дисками A и B; эти диски скрѣплены вмѣстѣ и служатъ для того, чтобы держать кожаное кольцо C (фиг. 3), устроенное такимъ образомъ, чтобы не происходило утечки жидкости. Это кожаное кольцо выступаетъ немного за периферію дисковъ и держитъ прозрачное кольцо D, въ которомъ нужно вызвать натяженіе. Само кожаное кольцо въ такой мѣрѣ тонко, что достаточно небольшого давленія въ нѣсколько фунтовъ на квадратный дюймъ, чтобы оно лопнуло, но, когда къ нему приложено кольцо D, то можно спокойно подвергать его давленію даже въ 2000 $ф$. на 1 кв. дюймъ. При описанныхъ выше экспериментахъ кольцо D имѣло толщину, равную внутренней ширинѣ кожанаго кольца, но небольшой процентъ достигавшагося давленія поглощался кожей и не доходилъ до кольца. Полученные экспериментальнымъ путемъ результаты должны были поэтому оказаться нѣсколько ниже, чѣмъ значенія, полученныя путемъ вычисленія; когда же мы вносимъ нужную поправку, то, какъ показываетъ таблица, получается очень хорошее совпаденіе. Въ болѣе сложныхъ случаяхъ натяженіе



Фиг. 3.

Камеры для передачи давленія на внутреннюю и внѣшнюю поверхность стекляннаго кольца (поперечное сѣченіе).

не поддается вычисленію, какъ, напримѣръ, въ цилиндрахъ съ выступающими ребрами, употребляющихся для аэроплановъ, или въ трубахъ, составленныхъ изъ скрѣпленныхъ между собою отрѣзковъ и примѣняемыхъ, напримѣръ, при сооруженіи подземныхъ желѣзныхъ дорогъ; но нетрудно опредѣлять натяженія, получающіяся при тѣхъ или иныхъ условіяхъ, экспериментальнымъ путемъ, хотя это и не такъ просто.

До сихъ поръ мы пользовались при своихъ измѣреніяхъ только упомянутымъ свойствомъ оптическихъ явленій, позволявшимъ намъ измѣрять разность главныхъ натяженій въ какой-нибудь точкѣ листа, подвергнутаго натяженію, лежащему въ той же плоскости. Однако, гораздо чаще требуется узнать величину и направленіе каждаго натяженія въ отдѣльности, и къ вопросу о томъ, какъ ихъ опредѣлять, мы теперь и должны перейти. Сначала мы займемся вопросомъ объ опредѣленіи величины главныхъ натяженій.

Главныя натяженія.

Измѣреніе суммы главныхъ натяженій въ какой-нибудь точкѣ можно выполнить, какъ указалъ Менаже, если воспользоваться, тѣмъ обстоятельствомъ, что натяженіе вызываетъ такое измѣненіе толщины сдѣланной изъ какого-нибудь матеріала пластинки, которое процорціонально суммѣ $(p+q)$ главныхъ натяженій, лежащихъ въ ея плоскости. Если, напримѣръ, оба натяженія представляютъ собою растяженія, то мы получаемъ поперечное сжатіе, равное $\frac{p+q}{mE}$, гдѣ E есть модуль упругости, а m — коэффиціентъ Пуассона. Оба послѣднихъ числа могутъ быть опредѣлены; въ виду этого можно измѣрить сумму натяженій, если воспользоваться для измѣренія поперечнаго сжатія экстенсометромъ достаточной точности. Для каждыхъ 1000 *ф.* натяженія соотвѣтствующее поперечное сжатіе для листовъ, имѣющихъ обычную толщину въ $^1/_4$ дюйма, равняется $^1/_{3000}$ дюйма, и для измѣренія такой величины съ точностью до 1 или 2 процентовъ надо пользоваться инструментомъ, способнымъ указывать измѣненія, по крайней мѣрѣ, въ одну сотую этой величины. Очень точныя измѣренія такого рода были произведены при помощи экстенсометра, который обнаруживалъ измѣненія почти въ одну двухмилліонную дюйма. Такого рода инструментомъ пользовались г. Скобль (Scoble) и я самъ при изслѣдованіи натяженій, образующихся на листѣ при заклепкѣ.

При изслѣдованіи какого-нибудь натяженія въ плоскости надо пользоваться одновременно и оптическимъ и механическимъ методами, описанными въ настоящей статьѣ, и находить сумму двухъ главныхъ натяженій въ какой-нибудь точкѣ при помощи поперечнаго сжатія, измѣряемаго экстенсометромъ, а разность — путемъ оптическихъ измѣреній. И тотъ и другой методъ могутъ быть сведены къ чисто механическимъ измѣреніямъ и являются поэтому особенно пригодными въ инженерныхъ работахъ. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ требуется особенно заботиться о полученіи точныхъ значеній для каждой величины въ отдѣльности, — въ особенности, когда одно натяженіе гораздо меньше другого, такъ какъ тогда даже незначительныя ошибки наблюденій даютъ ошибки, составляющія большой процентъ меньшаго натяженія. Но возможно, что для устраненія этой трудности имѣется какой-нибудь другой методъ.

(Окончаніе слѣдуетъ).

Методъ діаграммъ.

С. Луптона.

Графическое изображеніе численныхъ соотношеній въ настоящее время получило огромное распространеніе и хорошо извѣстно всякому. При всей простотѣ этого пріема дѣйствительное примѣненіе его въ различныхъ случаяхъ и при разнообразныхъ условіяхъ требуетъ спеціальныхъ соображеній и спеціальныхъ средствъ выполненія. Мы считаемъ нелишнимъ сообщить краткія свѣдѣнія о возникновеніи и развитіи этого метода.

Изображеніе результатовъ наблюденій и экспериментовъ при помощи діаграммъ получило всеобщее распространеніе въ теченіе первой половины девятнадцатаго столѣтія. Одинъ изъ первыхъ примѣровъ данъ былъ Перкинсомъ (Perkins, „Philosophical Transactions", 1826) въ статьѣ, посвященной вопросу о сжимаемости воды.

Шесть лѣтъ спустя сэръ Джонъ Гершель (J. Herschel, Transactions of Astronomical Society, т. 1) сдѣлалъ докладъ о методѣ графическаго изображенія на клѣтчатой бумагѣ и о примѣненіи его къ астрономическимъ вычисленіямъ и физико-математическимъ изслѣдованіямъ.

„Интервалы въ годахъ и десятыхъ доляхъ года откладываются въ качествѣ абсциссъ, а углы въ градусахъ и десятыхъ доляхъ градуса— въ качествѣ ординатъ. Первый шагъ состоитъ въ томъ, чтобы провести, руководствуясь просто глазомѣромъ, отъ руки, но тщательно, не черезъ точки, а между ними, кривую, по возможности не отходящую или какъ можно меньше отходящую отъ этихъ точекъ, поскольку это совмѣстимо съ той формой плавной и пріятной для глаза кривизны, которая должна быть сохранена во всякомъ случаѣ.

Но такъ какъ, вѣроятно, не всѣ сдѣланныя наблюденія могутъ считаться одинаково равноцѣнными, то мы, считаясь съ этимъ, должны выдѣлить точки, соотвѣтствующія такимъ наблюденіямъ, къ которымъ можно питать наибольшее довѣріе,—напримѣръ, такимъ, которыя считаются сдѣланными при особенно благопріятныхъ условіяхъ, или такимъ, которыя являются среднимъ выводомъ изъ очень большого числа отдѣльныхъ измѣреній. Эти точки должны быть отмѣчены какимъ-нибудь особеннымъ образомъ, чтобы ихъ нельзя было смѣшать съ другими точками, и, когда мы проводимъ кривую, мы должны стараться, чтобы она прошла или черезъ эти выдѣленныя точки или очень близко отъ нихъ, или же, по крайней мѣрѣ, мы должны гораздо меньше отклоняться отъ нихъ, чѣмъ отъ точекъ, не имѣющихъ правъ на особое вниманіе.

Переходя отъ точекъ къ кривой, мы больше приближаемся къ согласованію своихъ результатовъ съ дѣйствительностью и исключаемъ въ значительной мѣрѣ ошибки наблюденій".

Немного лѣтъ спустя Реньо (Regnault, „Mémoires de l'Académie des Sciences", 1847 г., т. 21, стр. 316) довелъ этотъ методъ до художественнаго совершенства. Для изображенія расширенія ртути онъ пользовался четырьмя мѣдными листами, каждый изъ которыхъ имѣлъ площадь въ 80 *кв. см.* и былъ раздѣленъ на 10000 квадратовъ. Внутри этихъ квадратовъ численныя значенія отмѣчались при помощи особаго рѣжущаго инструмента съ тяжелымъ основаніемъ, на одной скошенной сторонѣ котораго нанесены были дѣленія шириной въ 8 *мм.*, а также десятыя доли каждаго изъ этихъ промежутковъ. Рѣзецъ прикрѣплялся къ гайкѣ, вращавшейся на полу-миллиметровомъ винтѣ, большая головка котораго была раздѣлена на 50 дѣленій, такъ что можно было точно измѣрять сотыя доли миллиметра. Наблюденныя значенія отмѣчались, какъ точки пересѣченія линій, проведенныхъ рѣзцомъ. Кривая была проведена Реньо отъ руки, а затѣмъ она была исправлена и выгравирована художникомъ. Несмотря на всѣ эти мѣры предосторожности, въ послѣднемъ листѣ все же оказалась какая-то постоянная погрѣшность.

Введеніе мѣдныхъ листовъ и рѣжущаго инструмента привели къ точности и неизмѣнности вычерчиваемыхъ діаграммъ.

Методъ вычерчиванія діаграммъ сдѣлался еще болѣе легкимъ и возможно болѣе точнымъ благодаря введенію механически разграфленной бумаги, хорошій образчикъ которой, французскаго производства, представляютъ собою листы въ 1 *кв. м.*, разграфленные на квадратные миллиметры, при чемъ каждая сторона этихъ квадратовъ раздѣляется точками, отстоящими другъ отъ друга на 0,2 *мм.* Вычерчиваніе кривыхъ отъ руки также было замѣнено въ большей или меньшей степени механическимъ употребленіемъ отрѣзковъ кривыхъ и сгибающихся линеекъ.

Хотя этотъ методъ вошелъ во всеобщее употребленіе и ему посвящены многочисленныя работы (Stanley Jevons, „Principles of Science", 1877 г., стр. 492), увѣнчавшіяся прекраснымъ трудомъ проф. Гиль-Шоу (Hele-Shaw) „On Graphic Methods in Mechanical Science", тѣмъ не менѣе намъ кажется, что какъ въ вопросахъ теоретическаго обоснованія этого метода, такъ и въ вопросахъ практическаго его примѣненія осталось еще не мало неясныхъ пунктовъ. Большое число цѣнныхъ свѣдѣній является до сихъ поръ еще не опубликованнымъ и составляетъ достояніе отдѣльныхъ работниковъ въ этой области, а немногія попытки опредѣлить степень достижимой точности, которыя были сдѣланы, дали далеко не сходящіеся между собою результаты.

Въ числѣ разныхъ другихъ вопросовъ возникаютъ, какъ намъ кажется, слѣдующіе:

На какихъ листахъ (т.-е. изъ какого матеріала) лучше всего составлять діаграммы?

Механически разграфленная бумага является наиболѣе употребительной, но она не отличается большой прочностью и можетъ быть легко испорчена остріями измѣрительныхъ инструментовъ. Возможно, что самымъ лучшимъ матеріаломъ окажется обыкновенное, бѣлое или синее, стекло: оно очень мало мѣняется подъ вліяніемъ времени, коэффиціентъ линейнаго расширенія его весьма незначителенъ ($< 0,000009$), и на немъ не легко чертить. Нужныя линіи могли бы быть наносимы алмазомъ, карборундумомъ или спеціальными чернилами. Можно было бы также покрывать всю пластинку лакомъ, проводить нужныя линіи по лаку и затѣмъ вытравлять ихъ.

Оказываетъ ли цвѣтъ листа или чернилъ какое-нибудь вліяніе на точность работы, а также зависитъ ли отъ этого цвѣта болѣе или менѣе легкая выполнимость ея?

Бэббэджъ (Babbage) нашелъ, что при употребленіи чернаго или зеленаго цвѣта составленіе таблицъ облегчается и работа становится болѣе точной. Нѣкоторые утверждаютъ, что линіи шоколаднаго цвѣта на бѣломъ фонѣ выходятъ болѣе четкими, чѣмъ черныя линіи на томъ же фонѣ.

Полезно ли проводить линіи возможно болѣе тонкими, еле видимыми, или же, напротивъ, лучше проводить линіи болѣе жирныя и болѣе замѣтныя?

Существуетъ ли какой-нибудь предѣльный размѣръ, — скажемъ, примѣрно, квадратный метръ, — такого рода, что увеличеніе размѣровъ таблицы сверхъ этого предѣла уже не приводитъ къ большей точности?

Каковъ наилучшій методъ измѣренія длинъ на діаграммахъ? Какое вліяніе оказываютъ время и влага на бумажные листы и измѣненія температуры на металлическіе?

Разница въ 10° Ц. въ температурѣ помѣщенія вызываетъ измѣненіе длины металлическаго листа на 0,00017 ея, но вліяніе этого измѣненія можно устранить, пользуясь листомъ, какъ измѣрительнымъ инструментомъ.

Какую форму лучше всего придать линейкѣ? Какая линейка лучше: деревянная, стальная или же стальная, покрытая свинцомъ? Какъ нужно держать или какъ нужно прикрѣплять линейку?

Въ какихъ случаяхъ предпочтительны иначе разграфленныя таблицы, — напримѣръ, полу-логариѳмическія, логариѳмическія, треугольныя или круговыя?

Какъ это является общепризнаннымъ, нужно выбрать кривую такъ, чтобы она какъ можно меньшее число разъ мѣняла свою кривизну, поскольку, конечно, это совмѣстимо съ требованіемъ, чтобы она прошла черезъ или вблизи возможно большаго числа найденныхъ путемъ экспериментовъ точекъ, и чтобы отрѣзки ея между этими точками лежали дѣйствительно между ними. Если, предположимъ, одна или нѣсколько точекъ оказываются расположенными на значительномъ разстояніи отъ кривой, то объясняется ли это обстоятельство ошибкой въ экспериментѣ, такъ что имъ можно пренебречь, или же оно свидѣтельствуетъ о быстромъ, но непрерывномъ измѣненіи условій испытуемаго явленія, которое можетъ быть изображено путемъ измѣненія кривизны, или, наконецъ, дѣло сводится къ измѣненію самой природы явленія и должно быть представлено разрывомъ, за которымъ начинается новая кривая?

Отвѣтъ на эти вопросы зависитъ отъ того, какое представленіе составилъ себѣ экспериментаторъ о предѣлахъ „ошибки“, возможной въ его экспериментахъ. Одинъ допускаетъ возможность большой ошибки въ своихъ экспериментахъ и предпочитаетъ простую кривую, которая не очень точно представляетъ его результаты; другой думаетъ, что онъ могъ сдѣлать только незначительную ошибку, и предпочитаетъ болѣе сложную кривую, проходящую ближе къ точкамъ, установленнымъ путемъ экспериментовъ; наконецъ, третій считаетъ, что онъ могъ сдѣлать только малую ошибку, что результаты его могутъ лучше всего быть представлены двумя или бóльшимъ числомъ кривыхъ, и принимаетъ, такимъ образомъ, что самая природа явленія претерпѣла какое-то дѣйствительно основное измѣненіе.

Въ дѣйствительно точныхъ работахъ экспериментаторъ болѣе или менѣе обязанъ установить съ большей или меньшей точностью предѣлы ошибки въ своихъ наблюденіяхъ. Много было написано о методахъ, ведущихъ къ этой цѣли. Большинство экспериментаторовъ не повторяютъ, кажется, своихъ экспериментовъ по нѣскольку разъ при тѣхъ же самыхъ, по возможности, условіяхъ, безъ чего невозможно никакое опредѣленіе возможной ошибки. Вмѣсто того они разсчитываютъ, что ошибки будутъ исправлены при проведеніи кривой. Удобнѣе всего опредѣляется „вѣроятная ошибка“. Для полученія ея изъ значительнаго числа (n) наблюденій надъ какимъ-нибудь однимъ явленіемъ, надо найти отклоненія (v), т. е. избытки или недостатки, каждаго наблюденія отъ ариѳметическаго средняго, сложить квадраты этихъ отклоненій, раздѣлить сумму квадратовъ на $n(n-1)$ и помножить корень квадратный изъ этого числа на 0,67449. Другими словами, вѣроятная ошибка $= 0{,}67449 \sqrt{\dfrac{\Sigma v^2}{n(n-1)}}$.

Сужденія о степени достижимой точности, вполнѣ естественно, весьма разнообразны. Установлено, что опредѣленіе плотности, напримѣръ, разбавленной азотной кислоты можетъ быть выполнено съ точностью до $^1/_{75000}$. Требованіе такой точности вполнѣ, слѣдовательно, допустимо.

Съ другой стороны, любопытно отмѣтить (Clarke's Tables, стр. 298), что недавно одинъ извѣстный экспериментаторъ, измѣряя плотность хлороформа при двухъ различныхъ температурахъ, нашелъ результаты, колеблющіеся почти на $^1/_{2500}$.

Далеко не такое всеобщее признаніе получило то обстоятельство, что графическій методъ самъ по себѣ является новымъ источникомъ ряда ошибокъ, которыя по своимъ размѣрамъ безусловно не уступаютъ и даже превосходятъ ошибки, вкрадывающіяся при тщательныхъ экспериментахъ.

Рѣшеніе какого-нибудь вопроса графическимъ путемъ состоитъ всегда изъ пяти операцій, изъ которыхъ каждая можетъ послужить источникомъ ошибокъ: изъ измѣренія абсциссъ, измѣренія ординатъ, проведенія кривой, измѣренія абсциссы и, наконецъ, новой ординаты искомаго значенія. Гиль-Шоу замѣчаетъ, что результаты, получаемые путемъ примѣненія графическихъ методовъ, нельзя считать очень точными. Ссылаясь на Понселе (Poncelet) и Кульмана (Culmann), онъ говоритъ: „Работающій надъ какимъ-нибудь построеніемъ инженеръ предпочтетъ всегда геометрическій путь рѣшенія того или иного вопроса, если для него является достаточной точность результатовъ въ предѣлахъ первыхъ трехъ десятичныхъ знаковъ (до одной тысячной); но такая точность можетъ быть получена безусловно". Предѣломъ точности для инженеровъ-механиковъ является, кажется, точность до $^1/_{2000}$. Въ случаѣ обыкновенныхъ прямоугольныхъ координатъ точность чертежа зависитъ отъ степени точности машины, при помощи которой таблицы разграфляются. Если, скажемъ, ордината отклонилась на $1'$ отъ перпендикулярнаго положенія, то измѣреніе абсциссы даетъ величину, большую или меньшую дѣйствительной на $^1/_{3400}$ длины соотвѣтствующей ординаты.

Крайне трудно составить себѣ правильное сужденіе о размѣрахъ ошибки, вкравшейся при графическомъ рѣшеніи какого-нибудь вопроса, такъ какъ это зависитъ отъ степени точности индивидуальнаго глазомѣра и умѣнія чертить. Хорошій глазъ можетъ различить десятую долю миллиметра, но съ годами, когда притомъ весьма часто развивается астигматизмъ, эта способность можетъ сильно понизиться.

С. Джевонсъ пытался опредѣлить значеніе числа π при помощи циркуля. Несмотря на всю тщательность, съ которой онъ производилъ свои опыты, ему не удалось получить степень точности, превосходящую $^1/_{540}$. Онъ не указываетъ, какими изъ многочисленныхъ приближенныхъ построеній онъ пользовался.

Чтобы получить вѣроятную ошибку, получающуюся при экспериментахъ и при графическомъ изображеніи, надо взять квадратный корень изъ суммы квадратовъ отклоненій въ каждой группѣ въ отдѣльности.

Точное сужденіе о размѣрахъ ошибокъ, какъ тѣхъ, которыя вкрадываются въ результаты экспериментовъ, такъ и тѣхъ, которыя получаются при графическомъ изображеніи, пріобрѣтаетъ еще большую важность, когда мы хотимъ установить разрывность кривой и соотвѣтствующій разрывъ непрерывности въ результатахъ, что случается, когда мы получаемъ различные въ разныхъ промежуткахъ коэффиціенты для соотвѣтствующаго разсматриваемой кривой уравненія, или когда мы нарочно беремъ разныя кривыя для разныхъ промежутковъ, или же, наконецъ, когда мы получаемъ разныя кривыя механическимъ путемъ. Необходимо, однако, замѣтить, что каждый изъ этихъ пріемовъ является, въ свою очередь, источникомъ новаго ряда ошибокъ, что при этомъ, очевидно, могутъ увеличиться размѣры первоначально сдѣланныхъ ошибокъ, и что, съ другой стороны, допущенныя первоначально ошибки могутъ быть болѣе или менѣе основательно устранены при помощи одной первой кривой.

Всякій установленный путемъ экспериментовъ результатъ изображается точкой; какъ бы мы ни увеличивали размѣры нашей діаграммы, эти точки останутся точками и будутъ вызывать ложное впечатлѣніе точности. Возникаетъ вопросъ, не слѣдуетъ ли, когда въ данной работѣ требуется весьма значительная точность, опредѣлять, — пользуясь мыслью, высказанной Гершелемъ, — вѣроятную ошибку для каждаго установленнаго путемъ эксперимента результата? Каждый результатъ былъ бы тогда представленъ кругомъ, радіусъ котораго равнялся бы половинѣ вѣроятной ошибки и былъ бы тѣмъ больше по размѣрамъ, чѣмъ больше размѣры діаграммы. Если мы теперь произведемъ при подобныхъ же условіяхъ новый экспериментъ, то существуютъ почти равные шансы за то, что новый результатъ упадетъ внутрь или внѣ нашего круга, и это даетъ намъ возможность измѣрять степень точности наблюденій. Такъ какъ трудно возразить что-либо противъ кривой, пересѣкающей нашъ кругъ, то, въ зависимости отъ размѣровъ таблицы, мнѣніе чертежника по вопросу о выборѣ направленія для своей кривой можетъ претерпѣвать глубокія измѣненія.

Волны въ пескѣ и въ снѣгѣ*).

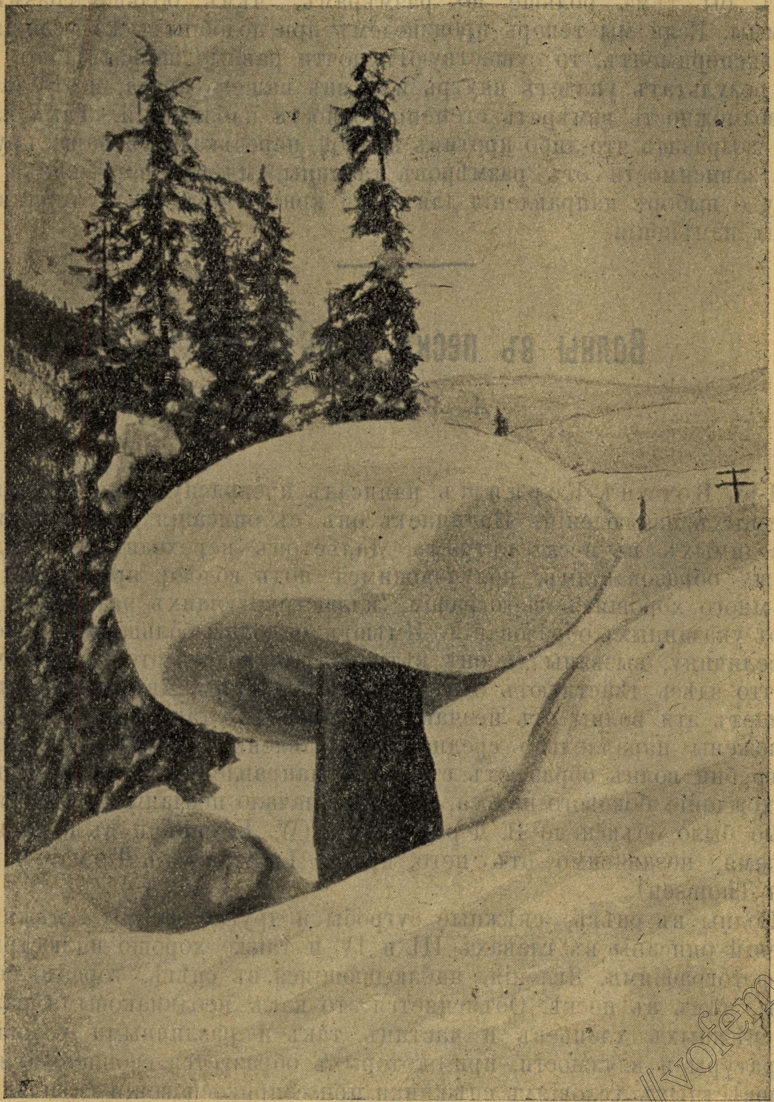
А. Маллокка.

Д-ръ Воганъ Корнишъ написалъ прекрасную книгу, полную интересныхъ наблюденій. Начинаетъ онъ съ описанія волнъ и ряби, производимыхъ въ пескѣ вѣтромъ. Далѣе онъ переходитъ къ подобнымъ же образованіямъ, получающимся подъ водою; при этомъ онъ даетъ много хорошихъ фотографій, иллюстрирующихъ различный характеръ указанныхъ образованій. Имѣютъ ли волны бо́льшую или меньшую величину, вызваны ли онѣ вѣтромъ или водою, это безразлично: ясно, что здѣсь дѣйствуютъ однѣ и тѣ же причины. Авторъ правильно различаетъ эти волны отъ песчаныхъ наносовъ, такъ какъ послѣдніе расположены параллельно среднему направленію струи, въ то время какъ гребни волнъ образуютъ съ этимъ направленіемъ прямые углы. Происхожденіе бокового наноса, дающаго начало песчанымъ насыпямъ, впервые было объяснено В. Фроудомъ (W. Froude) и въ одно и то же время, независимо отъ него, проф. Джэмсомъ Томсономъ (James Thomson).

Волны въ снѣгѣ, снѣжные сугробы и другія формы снѣжныхъ скопленій описаны въ главахъ III и IV и также хорошо иллюстрированы фотографіями. Явленія, наблюдающіяся въ снѣгѣ, гораздо болѣе сложны, чѣмъ въ пескѣ. Объясняется это какъ неодинаковыми размѣрами снѣжныхъ хлопьевъ и частицъ, такъ и различными условіями температуры и влажности, при которыхъ образуется скопленіе снѣга. При извѣстныхъ условіяхъ снѣжинки при соприкосновеніи сцѣпляются; при другихъ, когда температура низка, онѣ ведутъ себя одна по отношенію къ другой, скорѣе, какъ частицы сухого порошка; въ послѣднемъ случаѣ сцѣпленіе снѣжинокъ между собою происходитъ только

*) Д-ръ Воганъ Корнишъ (Dr. Vaughan Cornish) — „Волны въ пескѣ и въ снѣгѣ и вихри, производящіе ихъ“; 383 стр. съ гравюрами; Лондонъ, T. Fisher Unwin, n. d.; цѣна 10 ш.

послѣ примѣненія болѣе или менѣе продолжительнаго давленія. Вслѣдствіе этого формы, принимаемыя скопленіями снѣга вблизи всякаго рода препятствій, значительно различаются между собою.



Фиг. 1.

Видъ снизу на девятифутовый снѣжный грибъ.

Одно изъ самыхъ интересныхъ наблюденій, приводимыхъ въ книгѣ, касается естественнаго просѣиванія, которому подвергается песокъ, когда вѣтеръ разноситъ его по различнымъ направленіямъ. Авторъ просѣялъ одну пробу песка пустыни черезъ серію ситъ изъ проволочной сѣтки съ градуированными петлями, при чемъ оказалось, что 94% песчаныхъ крупинокъ обладаютъ поперечникомъ, величина котораго находится между 0,02 и 0,01 дюйма.

Было бы интересно произвести эту сортировку въ большихъ размѣрахъ. Дѣло въ томъ, что нѣкоторыя явленія, а именно явленіе „поющаго песка", а также необычайный грохотъ, который иногда слышится при скольженіи песка по склону песчаныхъ холмовъ, зависятъ отъ того, одинаковъ ли объемъ зеренъ или нѣтъ. Въ своемъ „Путешествіи на биглѣ" (въ главѣ XVI) Дарвинъ упоминаетъ о холмѣ въ Чили, извѣстномъ подъ названіемъ „El Bramante", который замѣчателенъ былъ тѣмъ, что скользившій по склонамъ его песокъ издавалъ какой-то грохочущій шумъ; онъ сообщаетъ также о томъ, что явленіе это подробно описано Летценомъ (Leetzen) и Эренбергомъ (Ehrenberg), указывающими на него, какъ на причину тѣхъ звуковъ, которые слышали нѣкоторые путешественники на горѣ Синаѣ. О подобномъ же феноменѣ разсказалъ мнѣ одинъ изъ моихъ друзей, который въ сопровожденіи другихъ спускался по склону песчанаго холма, нанесеннаго вѣтромъ околы скалы въ нильской долинѣ. Насколько можно было замѣтить, двигалась лишь небольшая поверхностная струя песка, сдвинутаго со своего мѣста шагами людей, а между тѣмъ шумъ постепенно увеличивался и мало-по-малу перешелъ въ грохотъ, при чемъ, казалось, вибрировала вся масса холма. Это наводитъ на мысль, что каждая изъ крупинокъ совершала въ одинъ и тотъ же промежутокъ времени одно и то же колебаніе, распространявшееся на значительную глубину; а это можно себѣ представить лишь въ томъ случаѣ, если принять, что крупинки были совершенно одинаковыми по объему.

Какимъ образомъ вѣтеръ производитъ сортировку песка, это остается неяснымъ. Объясненіе д-ра Корниша состоитъ въ томъ, что преобладающій объемъ крупинокъ достигается тогда, когда прекращается взаимное ихъ треніе. Если это такъ, то можно было бы опредѣлить указанный объемъ, принимая во вниманіе твердость матеріала и корень квадратный изъ средняго квадрата скорости толчка. Безъ сомнѣнія, существуетъ извѣстный объемъ, при которомъ всю работу толчка можетъ взять на себя эластичность крупинокъ, при чемъ не нарушается ихъ цѣлостность. Во всякомъ случаѣ, вопросъ о томъ, какимъ образомъ песокъ подымается вѣтромъ, мало выясненъ. Слѣдуетъ предположить, что вѣтеръ, сталкиваясь съ почвой, долженъ двигаться параллельно ея поверхности; кажется вѣроятнымъ, что частицы, движущіяся вдоль поверхности, могутъ быть подняты надъ нею при болѣе или менѣе косвенномъ столкновеніи съ другими частицами, неподвижными или же движущимися съ другими скоростями. Какъ только мы представимъ себѣ частицы поднятыми въ вихревой воздушный потокъ, дальнѣйшее ихъ распредѣленіе не представляетъ уже прежнихъ трудностей для объясненія.

По поводу всякой структуры, характеризующейся извѣстнымъ „періодомъ", всегда возникаютъ интересныя проблемы, но тѣ періоды и тѣ длины волнъ, которыми занимается д-ръ Корнишъ, не должны быть смѣшиваемы съ періодами и длинами волнъ, принадлежащими устойчивымъ системамъ, каковыми являются, напримѣръ, водяныя волны. Періоды подобныхъ системъ опредѣляются тѣмъ же путемъ и на тѣхъ же основаніяхъ, что и періодъ маятника.

Песчаныя волны являются продуктами неустойчивости, и во всѣхъ мнимо-періодическихъ структурахъ, образующихся подобно этимъ волнамъ, амплитуда и длина волнъ независимы между собою. Въ этомъ

Фиг. 2.

Рябь на пескѣ въ Солтбернѣ.

отношеніи эти структуры отличаются отъ устойчивыхъ системъ, которыя являются изохронными. Въ неустойчивыхъ системахъ измѣненіе, какимъ бы малымъ оно ни было, имѣетъ тенденцію къ увеличенію, пока не будетъ достигнутъ тотъ предѣлъ, при которомъ происходитъ нѣчто въ родѣ разрушенія системы. Можно дать самые разнообразные примѣры того, какъ неустойчивость приводитъ къ мнимо-періодическому движенію или къ такой же системѣ. Гейзеры, вскипающіе черезъ довольно опредѣленные промежутки времени, завываніе вѣтра (здѣсь періодъ зависитъ отъ образованія вихрей вокругъ небольшихъ препятствій), ступеньчатые обрѣзки различныхъ матеріаловъ, получающіеся при примѣненіи рѣжущихъ инструментовъ, — все это примѣры, иллюстрирующіе вышесказанное, хотя они и взяты изъ столь различныхъ областей.

Вслѣдствіе недостатка мѣста приходится опустить многое изъ того, чѣмъ занимается авторъ, какъ, напримѣръ, вопросы о такъ называемыхъ „снѣжныхъ грибахъ“ или о бороздахъ, вытаптываемыхъ скотомъ. Хотя и слѣдуетъ сказать, что объясненія автора не такъ хороши, какъ его описанія, но все же книгу можно рекомендовать, какъ собраніе наиболѣе интересныхъ изъ числа появившихся до сихъ поръ въ той же области наблюденій.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей проф. Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 339 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\frac{7}{x}=4(3+x^2+x^3+x^4+\cdots).$$

Г. Боевъ (Саратовъ).

№ 340 (6 сер). Найти цѣлыя положительныя значенія для x, при которыхъ выраженіе

$$x^x-3x^2+14$$

дѣлится на $x-1$.

Н. С. (Одесса).

№ 341 (6 сер.). Найти общій видъ значеній для x, y, z, при которыхъ выраженіе

$$x^n+y^n+z^n$$

обращается въ нуль, если n есть цѣлое положительное число, некратное 3-хъ, и, наоборотъ, получаетъ значеніе, неравное нулю, если n дѣлится на 3.

R.

№ 342 (6 сер.). Построить точку M, лежащую внутри даннаго равнобедреннаго треугольника ABC и обладающую тѣмъ свойствомъ, что периметры треугольниковъ AMB, BMC и CMA имѣютъ равную длину.

X.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 279 (6 сер.). *Доказать тожество*

$$C_m^k + C_n^1 C_m^{k+1} + C_n^2 C_m^{k+2} + \cdots + C_n^n C_m^{k+n} = C_{m+n}^{k+n},$$

гдѣ C_p^q *обозначаетъ число сочетаній изъ* p *по* q, *при условіи, что* $k + n \leqq m$.

Предложенное для доказательства равенство вѣрно при $n = 1$, такъ какъ

$$C_m^k + C_1^1 C_m^{k+1} = C_m^k + C_m^{k+1} = C_{m+1}^{k+1},$$

что вытекаетъ изъ извѣстнаго равенства

$$(1) \quad C_x^y + C_x^{y+1} = C_{x+1}^{y+1}$$

при $x = m$ и при $y = k$. Допустимъ теперь, что при **любыхъ** значеніяхъ m и k, удовлетворяющихъ ограниченію

$$(2) \quad k + n \leqq m,$$

и при нѣкоторомъ **опредѣленномъ** значеніи n предложенная для доказательства формула вѣрна именно для этого значенія n, и разсмотримъ выраженіе

$$C_m^k + C_{n+1}^1 C_m^{k+1} + C_{n+1}^2 C_m^{k+2} + \cdots + C_{n+1}^n C_m^{k+n} + C_{n+1}^{n+1} C_m^{k+(n+1)}.$$

Преобразовывая въ этомъ выраженіи каждый изъ множителей C_{n+1}^1, $C_{n+1}^2, \ldots$, C_{n+1}^n по формулѣ (1) при $x = n + 1$ и при y, равномъ соотвѣтственно 0, 1, 2,..., $n - 1$ (при чемъ при $y = 0$ полагаемъ $C_n^0 = 1$) и замѣчая, что $C_{n+1}^{n+1} = 1$, находимъ, что

$$C_m^k + C_{n+1}^1 C_m^{k+1} + C_{n+1}^2 C_m^{k+2} + \cdots + C_{n+1}^n C_m^{k+n} + C_{n+1}^{n+1} C_m^{k+(n+1)} =$$

$$= C_m^k + (C_n^1 + 1)\, C_m^{k+1} + (C_n^2 + C_n^1)\, C_m^{k+2} + \cdots + (C_n^n + C_n^{n-1})\, C_m^{k+n} + C_m^{k+n+1} =$$

$$= (C_m^k + C_n^1 C_m^{k+1} + C_n^2 C_m^{k+2} + \cdots + C_n^n C_m^{k+n}) +$$

$$+ (C_m^{k+1} + C_n^1 C_m^{k+2} + \cdots + C_n^{n-1} C_m^{k+n} + C_n^n C_m^{k+n+1}).$$

Но, по допущенію, формула

$$C_m^z + C_n^1 C_m^{z+1} + C_n^2 C_m^{z+2} + \cdots + C_n^n C_m^{z+n} = C_{m+n}^{z+n}$$

вѣрна и при $z = k$ и при $z = k + 1$ [см. (2)]. Поэтому

$$C_m^k + C_{n+1}^1 C_m^{k+1} + C_{n+1}^2 C_m^{k+2} + \cdots + C_{n+1}^{n+1} C_m^{k+n+1} = C_{m+n}^{k+n} + C_{m+n}^{k+n+1},$$

откуда, согласно съ равенствомъ (1) при $x = m + n$ и $y = k + n$,

$$C_m^k + C_{n+1}^1 C_m^{k+1} + C_{n+1}^2 C_m^{k+2} + \cdots + C_{n+1}^{n+1} C_m^{k+(n+1)} = C_{m+(n+1)}^{k+(n+1)},$$

т. е. предложенная для доказательства формула, будучи вѣрна при опредѣленномъ значеніи n, остается вѣрной и при возрастаніи n на 1. Но разсматриваемая формула вѣрна при $n = 1$; слѣдовательно, она вѣрна вообще при любыхъ цѣлыхъ положительныхъ значеніяхъ m, k и n, удовлетворяющихъ ограниченію $k + n \leqq m$.

В. Поповъ (Валки, Харьковской губ.); *Г. Михн—ъ* (Одесса).

№ 292 (6 сер.). *Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе*

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + x)(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + x^2) = y^2.$$

При x цѣломъ (и, по смыслу задачи, положительномъ) находимъ по извѣстнымъ формуламъ, что

$$1 + 2 + 3 + \cdots + x = \frac{x(x+1)}{2}, \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + x^2 = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6}.$$

Такимъ образомъ, данное уравненіе можно представить въ видѣ:

$$(1) \quad \left[\frac{x(x+1)}{2}\right]^2 \cdot \frac{2x+1}{3} = y^2, \quad \text{откуда} \quad (2) \quad \frac{2x+1}{3} = \left[\frac{2y}{x(x+1)}\right]^2.$$

Обозначимъ несократимую дробь, равную раціональному числу $\frac{2y}{x(x+1)}$, черезъ $\frac{m}{n}$. При этомъ обозначеніи равенство (2) приметъ видъ: (3) $\frac{2x+1}{3} = \frac{m^2}{n^2}$, откуда будетъ слѣдовать, что $2x + 1$ дѣлится на 3, такъ какъ въ противномъ случаѣ дробь $\frac{2x+1}{3}$ была бы несократимой и изъ равенства [см. (3)] двухъ несократимыхъ дробей мы имѣли бы, что $3 = n^2$, т. е. 3 было бы точнымъ квадратомъ. Итакъ, $\frac{2x+1}{3}$ есть цѣлое число, которое, будучи [см. (3)] квадратомъ раціональнаго числа $\frac{m}{n}$, равно квадрату нѣкотораго цѣлаго числа, которое, для большей простоты изслѣдованія, всегда можно предположить неотрицательнымъ. Итакъ, (4) $\frac{2x+1}{3} = z^2$, гдѣ z — цѣлое неотрицательное число, откуда (5) $x = \frac{3z^2 - 1}{2}$, и для того, чтобы x было цѣлымъ, необходимо и достаточно предположить, что z есть число нечетное; итакъ, (6) $z = 2t + 1$, гдѣ t — любое цѣлое неотрицательное число. Изъ равенствъ (5) и (6) находимъ, что $x = \frac{3(2t+1)^2 - 1}{2}$, т. е.

$$(7) \quad x = 6t^2 + 6t + 1.$$

Изъ равенствъ (1) и (4) находимъ, что $\left(\frac{x(x+1)z}{2}\right)^2 = y^2$, откуда $y = \pm\frac{x(x+1)z}{2}$, или же [см. (7), (6)]

$$(8)\quad y = \pm(6t^2+6t+1)(3t^2+3t+1)(2t+1).$$

Формулы (7) и (8), въ которыхъ достаточно положить $t = 0, 1, 2, \ldots$, даютъ всѣ соотвѣтствующія цѣлыя положительныя рѣшенія разсматриваемаго уравненія.

Е. Р. (Вязьма); *Г. Боевъ* (Саратовъ).

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника“, подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

С. А. Богомоловъ. *Аксіома непрерывности, какъ основаніе для опредѣленія длины окружности, площади круга, поверхностей и объемовъ круглыхъ тѣлъ.* (Докладъ, читанный въ засѣданіи отдѣла математики при Педагогическомъ Музеѣ военно-учебныхъ заведеній). Петроградъ, 1916. Стр. 26.

1916 годъ въ сельско-хозяйственномъ отношеніи по отвѣтамъ, полученнымъ отъ хозяевъ. Вып. II. Состояніе хлѣбовъ и травъ къ 10 іюня. Цѣны на рабочія руки въ періодъ весеннихъ посѣвовъ. Съ двумя раскрашенными картами. Изд. Министерства Земледѣлія. Отд. сельской экономіи и сельско-хозяйственной статистики. Петроградъ, 1916. Стр. XVI + 88.

К. Б. Пеніонжкевичъ. *Систематическій сборникъ задачъ по анализу безконечно-малыхъ (дифференціальное и интегральное исчисленія).* Пособіе для учениковъ VII класса реальныхъ училищъ. Съ указаніемъ рѣшеній типичныхъ задачъ. Петроградъ, 1916. Стр. IV + 259 Ц. 2 руб.

I. И. Кацманъ. *Теорія соединеній и биномъ Ньютона.* Съ примѣрами и задачами съ рѣшеніями. Кіевъ, 1916. Стр. 31. Ц. 50 к.

Редакторъ прив.-доц. В. Ф. Каганъ. Издатель В. А. Гернетъ.

Дозволено военной цензурой.

Типографія „Техникъ“—Одесса, Екатерининская, 58.

Обложка
пщется

Обложка
ищется