Обложка
пщется

Обложка
ищется

Второй серіи VI-го семестра № 2.

# Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

№ 662.



## Поляризованный свѣтъ и его примѣненіе въ техникѣ.

*Проф. Е. Кокера.*

(*Окончаніе* *).

### Линіи главныхъ натяженій.

Мы уже упоминали о томъ, что всякое натяженіе въ какой-нибудь точкѣ плоскости можетъ быть разложено на два натяженія, приложенныя къ этой точкѣ подъ прямымъ угломъ одно къ другому.

Подвергнутый натяженію листъ, будучи помѣщенъ между двумя скрещенными николями, даетъ, вообще говоря, темныя полосы, указывающія, въ какихъ точкахъ направленія главныхъ натяженій соотвѣтствуютъ осямъ поляризатора и анализатора. Измѣняя угловое положеніе этихъ осей, мы каждый разъ получаемъ новый рядъ полосъ, соотвѣтствующихъ опредѣленнымъ направленіямъ осей натяженія.

Если мы, напримѣръ, возьмемъ пластинку, подвергнутую простому растяженію, съ зарубками на каждой сторонѣ ея, то мы получимъ темныя полосы, которыя мѣняютъ свое положеніе каждый разъ, когда мы поворачиваемъ оси оптическаго аппарата. Можно построить

*) См. „Вѣстникъ", № 661.

діаграмму, на которой были бы нанесены линіи центровъ, соотвѣтствующія нѣкоторому числу этихъ кривыхъ, съ отмѣченными на послѣднихъ направленіями осей натяженія; затѣмъ опредѣляется и нанолится другая система линій главныхъ натяженій, направленныхъ подъ прямымъ угломъ къ первой системѣ. Обѣ системы даютъ вмѣстѣ діаграмму, имѣющую внѣшній видъ сѣтки, указывающую направленіе главныхъ натяженій въ той или иной точкѣ и представляющую собою поэтому полное рѣшеніе вопроса. Итакъ, вопросъ о распредѣленіи натяженія въ листѣ, имѣющемъ желаемую форму и подвергнутомъ натяженію путемъ приложенія силъ, дѣйствующихъ въ плоскости листа, допускаетъ экспериментальное рѣшеніе.

## Полное рѣшеніе вопроса.

Полное экспериментальное рѣшеніе вопроса о распредѣленіи натяженія въ пластинкѣ, подвергнутой натяженію въ своей плоскости, можетъ быть иллюстрировано упомянутымъ выше изслѣдованіемъ вопроса о дѣйствіи заклепки, введенной въ однородную металлическую пластинку. Вопросъ этотъ можетъ быть теперь рѣшенъ, такъ какъ мы умѣемъ опредѣлять сумму $(p+q)$ главныхъ натяженій, разность $(p-q)$ ихъ, а также ихъ направленія. Въ этомъ вопросѣ нельзя уже пренебрегать ни однимъ изъ главныхъ натяженій, а необходимо опредѣлить какъ направленіе, такъ и величину каждаго изъ нихъ. Если при равномѣрномъ растяженіи какой-нибудь пластинки натяженіе на всемъ протяженіи листа изображалось равноотстоящими линіями, проведенными въ направленіи натяженія, то теперь мы можемъ ожидать, что направленія и взаимныя разстоянія этихъ линій претерпятъ измѣненія, въ особенности при приближеніи ихъ къ разрыву непрерывности, производимому заклепкой; при этомъ изслѣдованіе явленія оптическимъ путемъ показываетъ намъ, что линіи натяженія тѣсно сближаются, когда онѣ проходятъ вокругъ заклепки, но затѣмъ снова расходятся, если поверхность листа достаточно велика, чтобы позволить имъ это. Нетрудно изслѣдовать всю пластинку, подвергнутую такимъ образомъ натяженію, и опредѣлить какъ сумму, такъ и разность натяженій для достаточнаго числа точекъ на найденныхъ вышеуказаннымъ путемъ линіяхъ. Нѣкоторыя данныя измѣреній для поперечнаго разрѣза, проходящаго черезъ центръ заклепкн на листѣ, указаны въ таблицѣ II. Размѣры листа и ширина металла по каждую сторону заклепки равны по своей величинѣ діаметру послѣдней.

Таблица II.

| Коэффиціенты натяженія: | Натяженіе въ поперечномъ разрѣзѣ листа: | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{r}{a}$ | 1,20 | 1,40 | 1,60 | 1,80 | 2,00 | 2,50 | 3,00 |
| $\frac{p_t+p_r}{p}$ | 2,55 | 2,20 | 1,84 | 1,47 | 1,18 | 0,70 | 0,22 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{p_t - p_r}{p}$ | 2,80 | 1,60 | 1,00 | 0,76 | 0,56 | 0,10 | −0,17 |
| $\frac{p_t}{p}$ | 2,68 | 1,90 | 1,42 | 1,11 | 0,87 | 0,40 | 0,025 |
| $\frac{p_r}{p}$ | −0,125 | 0,30 | 0,42 | 0,35 | 0,31 | 0,30 | 0,195 |

**Натяженіе на срединѣ линій подъ заклепкой:**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{r}{a}$ | 1,40 | 1,50 | 1,70 | 1,90 | 2,20 | 2,50 | 2,80 |
| $\frac{p_t + p_r}{p}$ | −4,31 | −2,32 | −0,90 | −0,37 | 0,43 | 1,27 | 2,05 |
| $\frac{p_t - p_r}{p}$ | −2,56 | −2,32 | −1,87 | −1,48 | −1,25 | −1,32 | −1,60 |
| $\frac{p_t}{p}$ | −3,44 | −2,32 | −1,39 | −0,93 | −0,41 | −0,025 | 0,225 |
| $\frac{p_r}{p}$ | −0,88 | — | 0,49 | 0,55 | 0,84 | 1,20 | 1,82 |

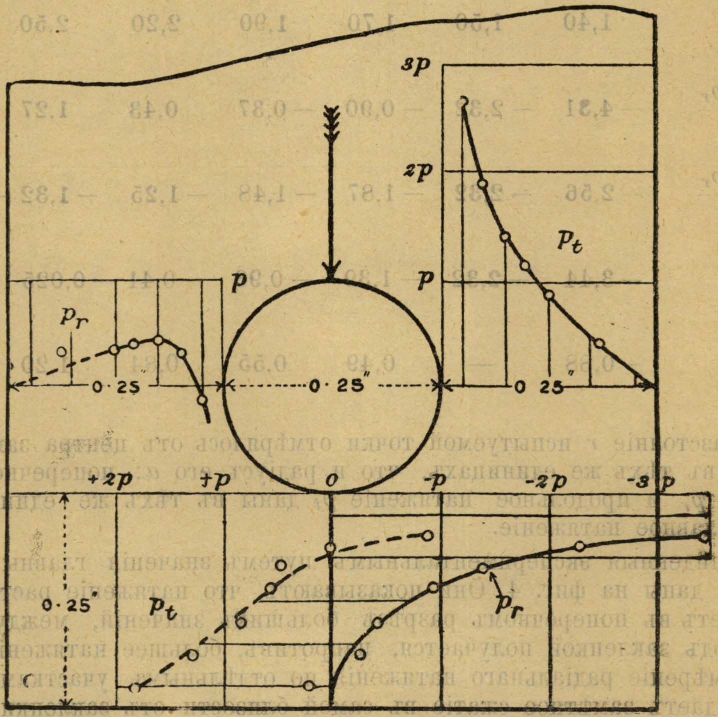
Разстояніе $r$ испытуемой точки отмѣрялось отъ центра заклепки и дано въ тѣхъ же единицахъ, что и радіусъ его $a$; поперечное натяженіе $p_r$ и продольное натяженіе $p_t$ даны въ тѣхъ же единицахъ, что и главное натяженіе.

Найденныя экспериментальнымъ путемъ значенія главныхъ натяженій даны на фиг. 4. Они показываютъ, что натяженіе растяженія достигаетъ въ поперечномъ разрѣзѣ большихъ значеній, между тѣмъ какъ подъ заклепкой получается, напротивъ, большее натяженіе сжатія. Измѣреніе радіальнаго натяженія по отдѣльнымъ участкамъ пластинки даетъ замѣтное сжатіе въ самой близости отъ заклепки и результаты, очень близкіе къ нулю, на внѣшнихъ краяхъ пластинки, что является весьма замѣчательнымъ и подтверждаетъ общую точность измѣреній. Другія подобныя же измѣренія показываютъ, что дѣйствіе заклепки вызываетъ въ листѣ съ дырой натяженіе большей интенсивности, иногда доходящей до впятеро большей величины, чѣмъ натяженіе въ непродырявленномъ листѣ.

## Дѣйствіе сжатія на болванку.

Очень большое значеніе въ инженерной практикѣ имѣетъ вопросъ о распредѣленіи натяженія въ прямоугольной болванкѣ, подвергнутой дѣйствію одного только сжатія. Этотъ вопросъ возникаетъ при испытаніи матеріаловъ, когда параллельныя грани короткой прямоугольной болванки, сдѣланной изъ такого матеріала, какъ камень, кирпичъ или цементъ, подвергаются равнымъ по величинѣ и противоположнымъ по направленію давленіямъ, и когда требуется получить натяженіе, распредѣленное съ наибольшей равномѣрностью.

Извѣстно, что отъ того, какъ производится давленіе на концы такой прямоугольной болванки, зависитъ распредѣленіе натяженія въ болванкѣ, и для того, чтобы получить подходящіе результаты, поверхность концовъ небольшого испытуемаго предмета покрывается какими-нибудь листами, благодаря которымъ примѣненіе давленія оказывается

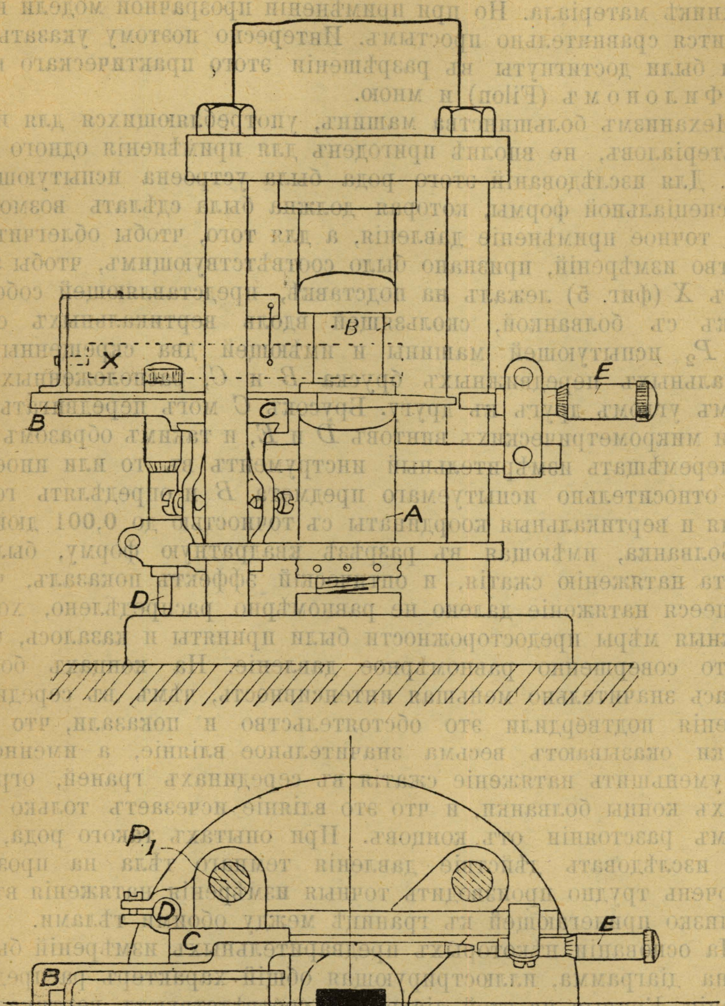



Фиг. 4.

Натяженіе у заклепки.

болѣе равномѣрнымъ. При большихъ размѣрахъ испытуемаго предмета примѣненіе этого способа создаетъ очень большія трудности, и для того, чтобы площадь между оказывающими давленіе листами машины, при помощи которой мы производимъ давленіе, и испытуемымъ предметомъ приняла ровный видъ, концы этого предмета часто покрываются гипсомъ; иногда же, помимо этого, сверху накладывается листъ изъ папки.

Трудно опредѣлить экспериментально распредѣленіе натяженія въ короткой болванкѣ, сдѣланной изъ какого-нибудь употребляемаго




Фиг. 5.

**Видъ сбоку и видъ сверху.**

въ техникѣ матеріала. Но при примѣненіи прозрачной модели вопросъ становится сравнительно простымъ. Интересно поэтому указать, какіе успѣхи были достигнуты въ разрѣшеніи этого практическаго вопроса проф. Филономъ (Filon) и мною.

Механизмъ большинства машинъ, употребляющихся для испытанія матеріаловъ, не вполнѣ пригоденъ для примѣненія одного только сжатія. Для изслѣдованій этого рода была устроена испытующая машина спеціальной формы, которая должна была сдѣлать возможнымъ весьма точное примѣненіе давленія, а для того, чтобы облегчить производство измѣреній, признано было соотвѣтствующимъ, чтобы экстенсометръ $X$ (фиг. 5) лежалъ на подставкѣ, представляющей собой треножникъ съ болванкой, скользящей вдоль вертикальныхъ столовъ $P_1$ и $P_2$ испытующей машины и имѣющей два скрещенныхъ горизонтальныхъ передвижныхъ бруска $B$ и $C$, расположенныхъ подъ прямымъ угломъ другъ къ другу. Брусокъ $C$ могъ передвигаться при помощи микрометрическихъ винтовъ $D$ и $E$, и такимъ образомъ можно было перемѣщать измѣрительный инструментъ въ то или иное положеніе относительно испытуемаго предмета $B$ и опредѣлять горизонтальныя и вертикальныя координаты съ точностью до 0,001 дюйма.

Болванка, имѣющая въ разрѣзѣ квадратную форму, была подвергнута натяженію сжатія, и оптическій эффектъ показалъ, что получившееся натяженіе далеко не равномѣрно распредѣлено, хотя всѣ возможныя мѣры предосторожности были приняты и казалось, что достигнуто совершенно равномѣрное давленіе. На концахъ болванки оказалась значительно меньшая интенсивность, чѣмъ въ серединѣ ея. Измѣренія подтвердили это обстоятельство и показали, что концы болванки оказываютъ весьма значительное вліяніе, а именно стремятся уменьшить натяженіе сжатія въ серединахъ граней, ограничивающихъ концы болванки, и что это вліяніе исчезаетъ только на нѣкоторомъ разстояніи отъ концовъ. При опытахъ такого рода, когда нужно изслѣдовать дѣйствіе давленія темнаго тѣла на прозрачное тѣло, очень трудно производить точныя измѣренія натяженія въ области, близко прилегающей къ границѣ между обоими тѣлами.

На основаніи нѣкоторыхъ предварительныхъ измѣреній была составлена діаграмма, иллюстрирующая общій характеръ распредѣленія натяженія. Кривыя на этой діаграммѣ соотвѣтствуютъ вертикальнымъ сжатіямъ, наблюденнымъ на различныхъ разстояніяхъ отъ концовъ болванки.

Неравномѣрность натяженія зависитъ, очевидно, отъ того, какимъ образомъ производилось давленіе на испытуемый матеріалъ. Въ нашемъ случаѣ для этого употреблялись латунные листы, не допускавшіе свободнаго боковаго смѣщенія сжимаемаго матеріала. Если, поэтому, воспользоваться въ качествѣ прослойки болѣе растяжимымъ матеріаломъ и передавать черезъ него давленіе, производимое на болванку, то можно, какъ это и имѣетъ мѣсто въ дѣйствительности, ожидать, что самое большое натяженіе получится въ серединѣ болванки.

Подходящимъ матеріаломъ для прослойки является листъ тонкаго каучука. Получающійся при примѣненіи его оптическій эффектъ показываетъ, что распредѣленіе натяженія носитъ совершенно другой характеръ. Натяженіе въ серединѣ линій является теперь наибольшимъ, и, кромѣ того, оно, какъ показываютъ измѣренія, искусственно увеличено на 20 процентовъ или около этого благодаря примѣненію, при томъ же самомъ общемъ давленіи, прослойки изъ каучука, при чемъ вліяніе этой прослойки не мѣстное, ограничивающееся небольшой площадью на концахъ, а сказывается на протяженіи большей части болванки.

Этимъ подтверждаются отрицательныя стороны примѣненія свинцовыхъ листовъ для производства давленія на болванку изъ испытуемаго матеріала, а измѣренія даютъ намъ количественную оцѣнку получающагося при этомъ возрастанія интенсивности натяженія.

Для того, чтобы обезпечить себѣ равномѣрное натяженіе, надо, какъ показываютъ результаты экспериментовъ, примѣнить прослойку изъ того же матеріала, и, когда это сдѣлано, мы получаемъ въ болванкѣ почти совершенно равномѣрный оптическій эффектъ, а измѣренія показываютъ, что интенсивность натяженія во всей болванкѣ приблизительно одинакова.

## Брусокъ съ отверстіемъ.

Развитіе экспериментальныхъ наблюденій надъ поляризованнымъ свѣтомъ обѣщаетъ много полезныхъ результатовъ, которые могли бы найти себѣ примѣненіе при построеніи машинъ и сооруженій, — въ особенности, при построеніи ихъ составныхъ частей. Уже было указано, что натяженія даже въ самыхъ простыхъ пластинкахъ оказываются, въ большинствѣ случаевъ, столь сложными, что не допускаютъ точнаго вычисленія, и послѣ всѣхъ обычно принимаемыхъ для упрощенія допущеній все же необходимо мириться съ недостаточно точными методами.

Разсмотримъ простѣйшій случай, когда требуется только, чтобы пластинка при помощи вколоченныхъ въ нее гвоздей передавала произведенное на нее воздѣйствіе въ направленіи своей длины.

Если мы возьмемъ пластинку прямоугольной формы, пробуравленную на обоихъ концахъ для вставленія туда гвоздей, то раньше всего ясно, что натяженіе матеріала въ непосредственной близости отъ гвоздя является очень высокимъ въ сравненіи съ натяженіемъ въ остальной части пластинки, и, какъ мы уже видѣли въ случаѣ съ заклепкой, мы получаемъ здѣсь натяженіе сжатія очень большой интенсивности въ одномъ мѣстѣ и значительное по своей величинѣ натяженіе растяженія въ другомъ, но что касается главной части пластинки, то она по размѣрамъ своимъ является чрезмѣрной для примѣненнаго воздѣйствія.

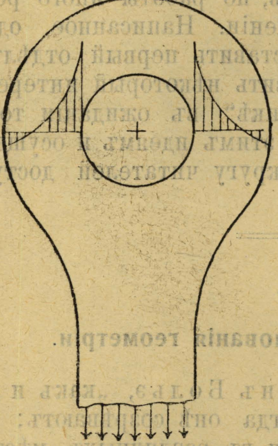
Поэтому на практикѣ мы отрѣзываемъ излишній матеріалъ, и края пластинки получаютъ изогнутую форму съ расширенными концами, наилучшую изъ всѣхъ возможныхъ для оказанія сопротивленія натяженіямъ, которымъ пластинка будетъ подвергаться. Вопросъ о формѣ, которую слѣдуетъ придать этимъ концамъ для достиженія максимума возможной прочности, занималъ многихъ инженеровъ, — въ особенности тѣхъ, которые занимались сооруженіемъ большихъ мостовъ съ балками, скрѣпленными болтами, гдѣ такого рода пластинки употребляются въ значительномъ количествѣ и имѣютъ большіе размѣры.

Въ общемъ, очень широкимъ употребленіемъ пользовались разныя изъ этихъ формъ, и уже самое разнообразіе ихъ указываетъ на неувѣренность, господствующую въ вопросѣ о наилучшей изъ всѣхъ возможныхъ формъ. Нелегко также указать, какимъ методомъ слѣдуетъ руководствоваться при выборѣ этой формы, пока мы не умѣемъ измѣрять натяженій, образующихся при различныхъ формахъ.

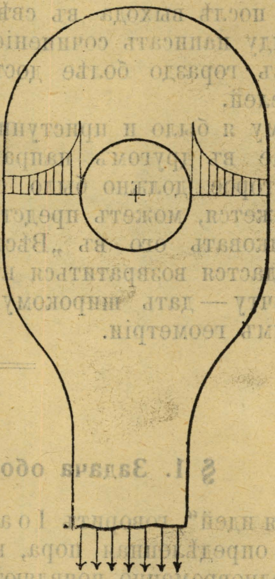
Путемъ оптическаго изслѣдованія моделей эти измѣренія производятся быстро и успѣшно. Очень общей формой является та, въ которой контуръ расширеннаго конца ограниченъ кругомъ, концентрическимъ съ отверстіемъ для гвоздя, и при достаточно большихъ размѣрахъ распредѣленіе натяженія, какъ легко видѣть по цвѣтнымъ эффектамъ на подвергаемой натяженію модели, является неудовлетворительнымъ. Дѣйствительно, въ главномъ поперечномъ сѣченіи (фиг. 6) нормальнымъ натяженіемъ является натяженіе сжатія на крайнихъ концахъ, и поэтому остальная часть пластинки должна выдерживать излишнее растяженіе, чтобы уравновѣсить общее воздѣйствіе, оказываемое на пластинку. На это указываютъ нанесенныя на фигурѣ линіи натяженія, также соотвѣтствующія произведеннымъ наблюденіямъ.

Много лучше форма, указанная Беркли (Berkeley). Особенныя достоинства этой формы бросаются, мнѣ кажется, въ глаза при одномъ взглядѣ на приведенное здѣсь изображеніе условій натяженія, соотвѣтствующихъ этой формѣ. Какъ мы видимъ изъ этого изображенія, пропорціи концовъ пластинки выбраны такъ, что въ главномъ поперечномъ сѣченіи имѣетъ мѣсто сплошное растяженіе (фиг. 7), распредѣленное болѣе равномѣрно, чѣмъ прежде, а удлиненная форма конца позволяетъ достигнуть болѣе равномѣрнаго распредѣленія въ продольномъ сѣченіи. Контуръ кажется не совсѣмъ удовлетворительнымъ, такъ какъ переходъ отъ конечной части пластинки къ главной ея части является нѣсколько рѣзкимъ, и это наводитъ на мысль, что болѣе удовлетворительное рѣшеніе вопроса получилось бы при болѣе постепенномъ переходѣ; послѣдній можно было бы осуществить при помощи кривыхъ, соотвѣтствующихъ какой-нибудь системѣ кривыхъ главнаго натяженія и получающихся въ достаточно широкой пластинкѣ прямоугольной формы. Если выполнить это, то мы, я полагаю, увидимъ, что результаты такого измѣненія контура окажутся вполнѣ удачными, а линіи натяженія — менѣе изогнутыми, такъ какъ тогда не будетъ уже въ конечной части участковъ, польза которыхъ сомнительна.

Экономное использованіе и распредѣленіе матеріала, долженствующее служить для наилучшаго сопротивленія натяженію въ томъ или иномъ сооруженіи, является, очевидно, самой желанной цѣлью всѣхъ усилій, и никогда, безусловно, эта цѣль не являлась болѣе необходимой, чѣмъ въ нѣкоторыхъ отрасляхъ современной техники, развившихся въ послѣднее время, въ постройкѣ аэростатовъ и аэроплановъ, гдѣ вѣсъ является самымъ важнымъ факторомъ. Попытки экспериментальныхъ изслѣдованій, произведенныя надъ моделями связей, употребляемыхъ при этихъ сооруженіяхъ, показали, что методъ наблюденія оптическихъ явленій будетъ, можетъ быть, нѣсколько содѣйствовать разрѣшенію этихъ вновь выдвинувшихся вопросовъ.



Фиг. 6.



Фиг. 7.

Нетрудно было бы привести еще другіе примѣры, но, можетъ быть, достаточно будетъ приведенныхъ уже случаевъ, чтобы показать примѣненіе поляризованнаго свѣта къ разрѣшенію техническихъ проблемъ натяженія, а также пользу, которую можетъ принести графическое изображеніе натяженія и въ другихъ областяхъ прикладной науки и техническихъ изысканій.

# Введеніе въ ученіе объ основаніяхъ геометріи.

*Прив.-доц. В. Ф. Кагана.*

Вскорѣ послѣ выхода въ свѣтъ моихъ „Основаній геометріи“, я имѣлъ въ виду написать сочиненіе, въ которомъ тѣ же идеи были бы проведены въ гораздо болѣе доступной формѣ, для болѣе широкаго круга читателей.

Къ этому я было и приступилъ, но работы иного рода отвлекли мое вниманіе въ другомъ направленіи. Написанное, однако, тогда введеніе, которое должно было составить первый отдѣлъ сочиненія, какъ мнѣ кажется, можетъ представить нѣкоторый интересъ, и я рѣшилъ опубликовать его въ „Вѣстникѣ“ въ ожиданіи того времени, когда мнѣ удастся возвратиться къ этимъ идеямъ и осуществить свою завѣтную мечту — дать широкому кругу читателей доступную книгу по основаніямъ геометріи.

## I.

### § 1. Задача обоснованія геометріи.

1. „Для идей“, говоритъ Іоаннъ Больэ, „какъ и для растеній, наступаетъ опредѣленная пора, когда онѣ созрѣваютъ; и въ такое время онѣ одновременно появляются въ различныхъ мѣстахъ подобно тому, какъ фіалки весной произрастаютъ всюду, гдѣ свѣтитъ солнце“. Подобнаго рода періодъ зрѣлости наступилъ въ послѣднія десятилѣтія для вопроса объ обоснованіи геометріи.

Задача обоснованія геометріи въ теченіе, можно сказать, тысячелѣтій не получала почти никакого замѣтнаго движенія, несмотря на то, что на ней неизмѣнно была сосредоточена математическая мысль. Но съ 30-хъ годовъ истекшаго столѣтія, благодаря трудамъ Лобачевскаго, Больэ (Bolyai), Гаусса (Gauss), Римана (Riemann), Гельмгольца (Helmholtz), Бельтрами (Beltrami), Кели (Cayley) Клейна (Klein), Пуанкаре (Poincaré), Ли (Lie) и др., вопросъ предсталъ въ совершенно новомъ свѣтѣ и былъ выясненъ настолько, что въ послѣднія два десятилѣтія появились опыты полнаго рѣшенія задачи на совершенно новыхъ началахъ. Піери (Pieri), Гильбертъ (Hilbert), Леви-Чивита (Levi-Civita) и др. предложили новыя системы геометріи, которыя въ настоящее время согласно признаются рѣшеніемъ главной задачи объ обоснованіи геометріи.

Вопросъ имѣетъ, правда, и другія стороны, другія задачи не столь коренной важности, въ оцѣнкѣ разработки которыхъ школой названныхъ геометровъ мнѣнія расходятся; но и здѣсь выяснены, такъ сказать, узловыя точки вопроса; выяснено, въ чемъ собственно заключается трудность задачи, въ какую сторону должно быть направлено изслѣдованіе (быть можетъ, уже болѣе логиковъ, чѣмъ математиковъ), чтобы удовлетворить и этимъ запросамъ строгой математической мысли.

Вмѣстѣ съ тѣмъ эти изслѣдованія принесли съ собой цѣлый рядъ существенно новыхъ идей, оказавшихъ огромное вліяніе на наши взгляды о сущности геометріи и математическаго познанія вообще; можно сказать больше, они произвели въ этихъ взглядахъ полный переворотъ. Эти изслѣдованія выдвинули также и рядъ новыхъ строго-математическихъ задачъ, которыя частью являются своеобразной точной постановкой отдѣльныхъ вопросовъ геометріи, частью возникли попутно въ видѣ аналогій или промежуточныхъ, подготовительныхъ изслѣдованій. Вотъ почему вся эта совокупность вопросовъ и изслѣдованій выдѣлилась въ особую дисциплину, которую въ настоящее время принято называть „ученіемъ объ основаніяхъ геометріи“. Какъ мы упоминали въ предисловіи, это „ученіе“ нашло себѣ уже выраженіе не только въ отдѣльныхъ мемуарахъ, но и въ обширныхъ сочиненіяхъ, даже трактатахъ, пытающихся дать сводку, общій обзоръ относящихся сюда изслѣдованій [Киллингъ (Killing), Энрикесъ (Enriques), Либманъ (Liebmann), Бонола (Bonola) и др.*)]. Авторы болѣе серьезныхъ сочиненій по элементарной математикѣ вводятъ своихъ читателей въ кругъ новыхъ идей [Веберъ (Weber) и Вельштейнъ (Wellstein), Клейнъ]. Наконецъ, появляются и руководства по геометріи, написанныя въ этомъ новомъ порядкѣ идей [Тиме (Time), Гальстедъ (Halsted)], совершенно порывающимъ съ традиціями классической геометріи.

Таковы обстоятельства, изъ которыхъ читатель можетъ усмотрѣть, что ученіе объ основаніяхъ геометріи дѣйствительно вступило въ новую фазу развитія. Цѣль настоящаго сочиненія выяснить тѣ идеи, которыя этотъ новый періодъ съ собой принесъ, — ту постановку вопроса, которая, какъ мы сказали выше, въ настоящее время согласно признается рѣшеніемъ главной задачи объ обоснованіи геометріи.

2. Въ чемъ же эта задача заключается?

Еще въ глубокой древности установилось убѣжденіе, что геометрія есть наука дедуктивная, т.-е. что всѣ ея истины строго логически выводятся изъ небольшого числа основныхъ положеній, которыя въ видѣ опредѣленій, постулатовъ и аксіомъ начинаютъ собой изложеніе этой науки. Много спорили о томъ, каковъ источникъ геометрическаго познанія, — это былъ даже, я полагаю, основной вопросъ теоріи познанія вообще; но подъ этимъ всегда разумѣли источникъ, изъ котораго почерпнуты основныя положенія геометріи. Въ томъ же, что вся масса геометрическихъ истинъ дѣйствительно чисто логически или формально выводится изъ небольшого числа основныхъ положеній, не сомнѣвался, повидимому, никто. Это, впрочемъ, не означаетъ, что математики или философы удовлетворялись, скажемъ, системой Евклида или какой-либо иной системой геометріи; напротивъ, какъ мы увидимъ ниже, эти системы во всѣ времена справедливо вызывали критику, подчасъ довольно суровую, съ различныхъ

*) Мы не даемъ здѣсь болѣе подробныхъ указаній относительно соотвѣтствующихъ сочиненій, такъ какъ это со всей необходимой обстоятельностью будетъ сдѣлано ниже.

сторонъ, съ различныхъ точекъ зрѣнія. Но на эти недостатки смотрѣли, какъ на изъяны того или иного сочиненія, той или иной системы. И хотя каждая новая система давала въ руки критикамъ новое оружіе, хотя каждая новая попытка „обосновать геометрію“ оставляла вдумчиваго мыслителя столь же неудовлетвореннымъ, какъ и всѣ предыдущія, — убѣжденіе въ томъ, что геометрія все-таки есть наука дедуктивная, было непоколебимымъ: въ душѣ геометра и философа жила *вѣра* въ то, что рано или поздно будетъ найдена та система посылокъ, изъ которой можно будетъ размотать всю цѣпь геометрическихъ истинъ.

Глубокая вѣра въ дедуктивный характеръ геометріи и математики вообще иногда приводила даже къ отрицательному, чтобы не сказать пренебрежительному, отношенію къ этой наукѣ. Говорили, что геометрія и математика вообще безсильны открыть что-либо новое, ибо дедуктивная наука можетъ вскрыть только то, что заключается въ ея исходныхъ посылкахъ. Неужели же въ посылкахъ геометріи и анализа заключались такіе факты, какъ существованіе планеты Нептуна, конической рефракціи, электрическихъ волнъ, — факты, которые, несомнѣнно, были открыты математическимъ анализомъ и лишь потомъ подтверждены опытомъ? Да и помимо этого, неужели найдется хотя бы одинъ человѣкъ, серьезно изучившій математику, который будетъ отрицать въ ней творчество, вносящее новые идеи и факты? Ясно, что тутъ скрывается глубокое непониманіе сущности логическаго вывода и значенія дедуктивнаго построенія науки.

Какое же, собственно, содержаніе вкладывается въ самое требованіе логическаго, дедуктивнаго, формальнаго построенія геометріи? Глубокій анализъ этихъ понятій, а главное — взаимоотношеній между этими понятіями, отвлекъ бы насъ далеко въ область логики и психологіи. Но не коснуться этихъ вопросовъ вовсе мы не имѣемъ возможности. Мы попытаемся выяснить важнѣйшія относящіяся сюда идеи, развитіе которыхъ въ примѣненіи къ геометріи, въ сущности, и составляетъ все содержаніе современнаго ученія объ основаніяхъ геометріи. Мы должны, впрочемъ, еще разъ оговориться, что здѣсь мы можемъ коснуться этихъ вопросовъ лишь вкратцѣ; но мы полагаемъ, что самое чтеніе настоящаго сочиненія будетъ постепенно выяснять читателю эти идеи, которыя для насъ служатъ и точкой отправленія и конечнымъ заключительнымъ моментомъ. Мы хотѣли бы до нѣкоторой степени намѣтить руководящую нить, которую мы старались провести черезъ все сочиненіе. Попутно мы разсмотримъ и нѣкоторые математическіе вопросы, ясное пониманіе которыхъ намъ понадобится въ первыхъ же главахъ настоящаго сочиненія.

**3.** Итакъ, говорятъ, что геометрія развивается *логически*, *дедуктивно* или *формально*. Хотя въ эти термины очень часто, даже обычно, вкладываютъ одно и то же содержаніе, но — по существу — они выражаютъ все-таки различные оттѣнки одной и той же основной мысли. Когда говорятъ, что геометрія развивается *логически*, то этимъ хотятъ сказать, что процессъ построенія этой науки заключается исключительно въ разсужденіи, что онъ не нуждается ни въ какихъ наглядныхъ представленіяхъ, что въ это чистое разсужденіе, помимо установленныхъ ранѣе посылокъ, ни сознательно ни безсознательно не вносится никакихъ элементовъ, имѣющихъ происхожденіе гдѣ бы то ни было внѣ этихъ посылокъ. Когда говорятъ далѣе, что геометрія строится *дедуктивно*, то этимъ ближе опредѣляютъ процессъ логическаго разсужденія: это долженъ быть процессъ умозаключенія, или вывода. Вѣдь и индукція есть логическій процессъ; но геометрія должна развиваться *дедуктивно*, т.-е. путемъ силлогизмовъ — выводовъ изъ заранѣе установленныхъ посылокъ. Наконецъ, когда говорятъ, что геометрія строится *формально*, то этимъ хотятъ подчеркнуть то свойство, коренящееся уже въ идеѣ вывода, что ни основныя понятія и посылки ни выведенныя изъ нихъ предложенія не связаны неразрывно съ какими-либо опредѣленными, реальными объектами или образами, что съ основными терминами можно соединять совершенно различныя представленія, что подъ ними можно разумѣть какіе угодно объекты, лишь бы только послѣдніе находились въ согласіи съ основными посылками, т.-е. лишь бы всѣ основныя посылки были относительно этихъ объектовъ справедливы; и тогда относительно нихъ необходимо будутъ справедливы и всѣ заключенія.

Какъ мы сказали, эта сторона дѣла коренится уже въ самой идеѣ логической дедукціи. Логическій выводъ, или заключеніе изъ данныхъ сужденій есть такое предложеніе, которое справедливо во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда справедливы предложенія, изъ которыхъ заключеніе выведено; оно справедливо поэтому по отношенію къ какимъ бы то ни было объектамъ, если относительно нихъ справедливы тѣ основныя положенія, изъ которыхъ исходитъ дедукція. Дедуктивная система, какъ теперь говорятъ, можетъ имѣть различныя формы осуществленія.

Какъ извѣстно, законъ предусматриваетъ двоякаго рода юрисдикцію: судъ совѣсти и судъ формальный. Въ процессѣ, подлежащемъ суду совѣсти, судья обязанъ войти въ разсмотрѣніе индивидуальныхъ свойствъ преступника и обстоятельствъ, при которыхъ совершено пресупленіе; въ зависимости отъ всей совокупности этихъ условій онъ постановляетъ свое рѣшеніе. Для такого рода судьи нѣтъ двухъ преступниковъ и двухъ преступленій, одинаково подходящихъ подъ одну и ту же статью закона. При судѣ формальномъ судья устанавливаетъ только, имѣютъ ли мѣсто тѣ дѣянія или тѣ условія, которыя предусмотрѣны соотвѣтствующей статьей закона; и если они имѣютъ мѣсто, то постановляется рѣшеніе, этой статьей опредѣляемое. Для формальнаго суда всѣ люди, совершившіе преступленіе, предусмотрѣнное той или иной статьей закона, одинаковы въ томъ смыслѣ, что на нихъ одинаково распространяются установленные законами послѣдствія этого преступленія; вся суть только въ томъ, чтобы установить, произведено ли дѣйствительно преступленіе, имѣютъ ли мѣсто тѣ или иныя условія или нѣтъ.

Подобно этому и наше мышленіе можетъ, съ одной стороны, быть конкретнымъ или реальнымъ, т.-е. можетъ имѣть своимъ объектомъ опредѣленный предметъ или опредѣленную совокупность предметовъ, а своей задачей изысканіе тѣхъ или иныхъ свойствъ этихъ объектовъ; тогда оно, естественно, неразрывно связано съ этими объектами, къ нимъ именно относятся результаты этого мышленія. Такого рода мышленіе преобладаетъ въ индуктивныхъ наукахъ. Съ другой стороны, мышленіе можетъ быть формальнымъ, и тогда оно устанавливаетъ только, что проистекаетъ изъ опредѣленныхъ заданій, какія слѣдствія необходимо должны имѣть мѣсто, если мы примемъ нѣкоторый рядъ предложеній. И въ слово „необходимо“ вкладывается то содержаніе, что эти слѣдствія имѣютъ мѣсто всякій разъ, въ примѣненіи ко всякимъ объектамъ, на которыхъ осуществляются исходныя заданія.

4. Всѣ эти соображенія очень просты и очень извѣстны. Мы находимъ ихъ въ каждомъ элементарномъ учебникѣ логики, а творецъ этой науки Аристотель уже установилъ точный кодексъ, которому долженъ слѣдовать процессъ строгой дедукціи.

Но эта простота оказывается иллюзіей, когда мы пытаемся дѣйствительно примѣнить всѣ эти соображенія къ сколько-нибудь сложному логическому построенію. Причины этого многообразны; но въ конечномъ счетѣ онѣ всегда сводятся къ тому, что болѣе или менѣе сложная работа человѣческой мысли, можно сказать, никогда не укладывается въ рамки этой простой классификаціи. Пріемы индуктивнаго и дедуктивнаго мышленія, конкретнаго и формальнаго, переплетаются между собою въ такой мѣрѣ, что логика безсильна произвести расчлененіе.

Изслѣдователь, имѣющій предметомъ своихъ изысканій совершенно опредѣленную систему объектовъ, исходя изъ свойствъ этихъ объектовъ, нерѣдко строитъ теорію, несравненно болѣе общую, охватывающую гораздо болѣе обширный матеріалъ, чѣмъ тотъ, который служилъ субстратомъ для построеній его творческой мысли. Цѣлымъ дисциплинамъ приписывали гораздо болѣе узкое значеніе, чѣмъ онѣ дѣйствительно имѣли; а это, въ свою очередь, совершенно сбивало съ пути философа, который искалъ источника этого познанія; и проходили иногда столѣтія, прежде чѣмъ такого рода ошибка была понята.

Съ другой стороны, мыслитель, пытавшійся построить формально дедуктивную систему, въ дѣйствительности обыкновенно имѣлъ передъ собой опредѣленную систему образовъ, служившихъ субстратомъ его отвлеченныхъ разсужденій; и въ цѣпь логическихъ выводовъ онъ безсознательно вносилъ элементы, неразрывно связанные съ витавшимъ передъ нимъ образомъ, не содержавшіеся въ его посылкахъ, и тѣмъ разрушалъ дедукцію. И тутъ бывало нужно много времени, чтобы уяснить себѣ ошибки, и еще неизмѣримо больше, — чтобы ихъ исправить.

Геометрія пережила ту и другую эволюцію. Ея творцы, сознательные и безсознательные, всегда имѣли передъ глазами опредѣленные пространственные образы и съ нихъ писали свою науку; а въ дѣйствительности они построили дисциплину, обнимающую неизмѣримо болѣе широкую область идей, чѣмъ въ нее вкладывали. Кодификаторы же геометріи пытались претворить унаслѣдованное достояніе въ дедуктивную систему, но не умѣли отвлечься отъ тѣхъ образовъ, которыми руководились эти творцы, и тѣмъ постоянно разрушали свою дедукцію.

Трудно себѣ представить, сколько ожесточенныхъ споровъ, недоразумѣнiй и заблужденiй возникало на этой почвѣ. Однако, дѣйствительно уяснить себѣ эту работу мысли нелегко. Цѣль настоящаго сочиненiя, какъ мы уже сказали выше, въ томъ именно и заключается, чтобы детально выяснить тѣ трудности, которыя представляла задача объ обоснованiи геометрiи, и тѣ результаты, которые нужно въ настоящее время считать достигнутыми. Но при сложности вопроса не такъ просто даже формулировать самую постановку задачи. Мы считаемъ поэтому полезнымъ разобрать здѣсь небольшую теорiю, на которой можно будетъ выяснить намѣченныя здѣсь общiя соображенiя и затѣмъ по аналогiи показать, какъ ставится задача объ обоснованiи геометрiи. Мы имѣемъ въ виду обоснованiе ученiя о величинѣ, какъ это сдѣлано прив.-доц. С. О. Шатуновскимъ въ статьѣ „О постулатахъ, лежащихъ въ основанiи понятiя о величинѣ“ *). Мы тѣмъ охотнѣе посвящаемъ здѣсь мѣсто этому вопросу, что и самыя идеи эти, по существу своему, будутъ намъ необходимы въ ближайшихъ главахъ.

*(Продолженiе слѣдуетъ)*

# БИБЛIОГРАФIЯ.

## III. Новости иностранной литературы.

**Ф. Тальботъ.** *Субмарины* (F. A. Talbot — „Submarines: their Mechanism and Operations“; стр. X + 274; Лондонъ, W. Heinemann, 1915 г.; цѣна 3 ш. 6 п.).

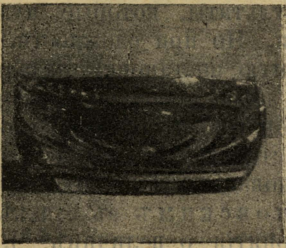
Автора „Субмаринъ“ можно поздравить съ выпущенной имъ книгой, хорошо написанной и посвященной вопросу, возбуждающему теперь необыкновенно большой интересъ среди весьма широкаго круга читателей. Авторъ указываетъ, что его книга не является технической, и это можетъ вызвать опасенiе, что вышедшая книга не даетъ ясныхъ и точныхъ свѣдѣнiй; однако, дѣло обстоитъ не такъ. Вопросъ, которому посвящена книга, такъ новъ и такъ мало извѣстенъ, что блестящее изложенiе всего вопроса, которое читатель найдетъ въ этой книгѣ, будетъ имѣть, безъ сомнѣнiя, большой и непосредственный успѣхъ. Цѣна книги — умѣренная (3 ш. 6 п.), и трудно выбрать лучшiй подарокъ для какого-нибудь любознательнаго юноши; впрочемъ, книга эта написана не только для юношей: всякiй прочтетъ ее съ захватывающимъ интересомъ.

Разсматриваемая книга не носитъ техническаго характера. Трудности, связанныя съ техникой судостроенiя, — какъ, напримѣръ, вопросъ о высотѣ метацентра при различныхъ погруженiяхъ, — въ ней не разбираются; трудности,

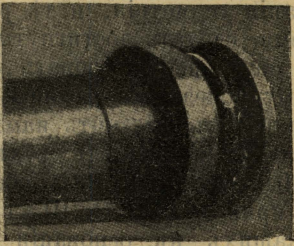
---

*) Труды Перваго Съѣзда преподавателей математики.

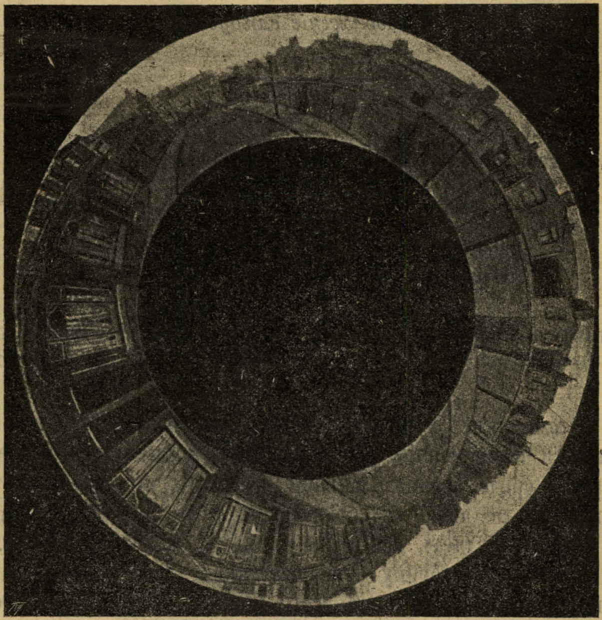
относящіяся къ вопросу объ установкѣ машинъ, — если не считать бѣглаго упоминанія объ особенныхъ характерныхъ свойствахъ двигателя Дизеля, — вовсе не обсуждаются; тонкости вопроса объ оптическихъ свойствахъ перископа не излагаются, хотя вообще вопросъ этотъ, конечно, подвергается разсмотрѣнію.



Стекло безъ оправы.



Стекло въ своей оправѣ.



Фиг. 1.

„Глазъ на всѣ стороны“ въ перископѣ.

Непрерывный видъ по всей окружности.

Изъ этихъ краткихъ указаній достаточно видно, въ какомъ смыслѣ разсматриваемая книга не является технической; съ точки зрѣнія широкаго интереса къ данному вопросу въ цѣломъ это обстоятельство надо только привѣтствовать, такъ какъ содержащіяся въ книгѣ 20 главъ, въ томъ видѣ, который они имѣютъ, полны интереса, а техническое обсужденіе всѣхъ многочисленныхъ вопросовъ, относящихся къ постройкѣ современной подводной лодки, было бы, очевидно, невозможно. Пишущій эти строки хотѣлъ бы только по этому поводу замѣтить, что лучше было бы въ той части книги, гдѣ рѣчь идетъ о перископахъ, разсмотрѣть нѣсколько полнѣе оптическія части перископа и, въ частности, болѣе подробно изложить оптическій принципъ „глаза на всѣ стороны" перископа, изобрѣтеннаго Фаннелемъ (Funnel) и построеннаго Ниблеттомъ (Niblett) и Алдисомъ (Aldis). Мы приводимъ великолѣпную фотографію вида, наблюдаемаго черезъ этотъ глазъ. (фиг. 1). Перископъ былъ установленъ не на морѣ, а посреди улицы. Въ центрѣ круга — пустое круглое пятно. Мы приводимъ также снимки особенной, спеціально приготовленной линзы, напоминающей нѣсколько стеклянные изоляторы, употребляющіеся для фортепьяно. Однако, невозможно видѣть, какъ она функціонируетъ, и эта невозможность привести подробное описаніе способа пользованія ею вызываетъ еще большую досаду при взглядѣ на фотографію удивительнаго вида, полученнаго при ея помощи.

При той таинственности, которая окружаетъ все, относящееся къ подводнымъ лодкамъ, нѣсколько поражаетъ то обиліе свѣдѣній о германскихъ субмаринахъ, которое мы встрѣчаемъ въ книгѣ. Но авторъ получилъ эти свѣдѣнія непосредственно отъ крупповскаго акціонернаго общества въ Эссенѣ. Онъ получилъ также много свѣдѣній отъ строителей подводныхъ лодокъ въ Америкѣ и, пользуясь этими и другими источниками, сумѣлъ собрать большое число великолѣпныхъ рисунковъ. Пріятно узнать, что покрывало таинственности, окружающей развитіе подводнаго строительства въ Англіи, кажется автору совершенно непроницаемымъ.

Единственная опечатка или же ошибка, допущенная по недосмотру, встрѣчается на стр. 50, гдѣ давленіе морской воды на извѣстной глубинѣ опредѣляется въ столько-то фунтовъ на квадратный футъ. Должно читать: на квадратный дюймъ.

*К. В. Бойсъ.*

(Заимствовано изъ журнала „Nature").

## II. Собственныя сообщенія авторовъ, переводчиковъ и редакторовъ о выпущенныхъ книгахъ.

Авторы, переводчики и редакторы новыхъ сочиненій приглашаются присылать для этого отдѣла краткія сообщенія о выпущенныхъ ими сочиненіяхъ, объ ихъ характерѣ и объ ихъ назначеніи. Къ этимъ сообщеніямъ долженъ быть приложенъ экземпляръ сочиненія. Помѣщая эти сообщенія, редакція сохраняетъ, однако, за собою право помѣстить и независимую рецензію.

**А. Киселевъ**. *Элементарная алгебра.* Уч. Ком. Мин. Нар. Пр. допущена въ качествѣ руководства для гимназій мужскихъ и женскихъ, и реальныхъ училищъ; рекомендована Учебн. Ком. при Св. Синодѣ для употребленія въ духовныхъ семинаріяхъ въ качествѣ учебнаго пособія; одобрена Деп. Торг. и Мануф., какъ пособіе для коммерческихъ училищъ. Для кадетскихъ корпусовъ рекомендована, какъ руководство. Изданіе 28-е, т-ва «В. В. Думновъ, насл. бр. Салаевыхъ», 1916 г., цѣна 1 р. 50 коп.

Въ настоящемъ 28-мъ изданіи, помимо тщательнаго пересмотра всего содержанія книги съ цѣлью устраненія опечатокъ, недомолвокъ, шероховатостей слога и т. п., сдѣланы еще слѣдующія дополненія, измѣненія и сокращенія.

Послѣ «алгебраическаго дѣленія» добавлена (мелкимъ шрифтомъ) новая, весьма важная для основъ алгебры, глава VI: «Услозія тождественности многочленовъ», въ которой устанавливается законъ тождества многочленовъ съ однимъ и съ нѣсколькими перемѣнными и, какъ слѣдствіе изъ него, выводится однозначность первыхъ четырехъ алгебраическихъ дѣйствій надъ многочленами. Такимъ образомъ, ощущавшаяся въ прежнихъ изданіяхъ недостаточность обоснованія нѣкоторыхъ основныхъ вопросовъ элементарной алгебры теперь устранена. Вмѣстѣ съ тѣмъ теперь теорема (§ 83) о дѣлимости многочлена на разность $x - a$ изложена проще и строже, чѣмъ прежде, а также теорема прежняго § 77 (о дѣлимости многочлена порознь на разности $x - a_1$ и $x - a_2$) теперь изложена въ болѣе общемъ видѣ (§ 84), вслѣдствіе чего явилась возможность установить другой, болѣе важный признакъ тождественности многочленовъ (конецъ § 84).

Въ прежнихъ изданіяхъ изложеніе теоремъ объ отрицательныхъ показателяхъ было разбросано по разнымъ мѣстамъ курса. Теперь все, относящееся до этихъ показателей, собрано въ одно цѣлое и помѣщено вмѣстѣ съ главою о дробныхъ и ирраціональныхъ показателяхъ непосредственно передъ отдѣломъ («Логариѳмы»), въ которомъ является впервые настоятельная потребность въ обобщеніи понятія о показателѣ на всѣ виды вещественныхъ чиселъ.

Въ § 235 (мелкимъ шрифтомъ — «Освобожденіе уравненія отъ знаковъ радикала помощью неопредѣленныхъ коэффиціентовъ») сдѣлано небольшое добавленіе (въ согласіи со статьею проф. Е. Л. Буницкаго — «Къ вопросу объ освобожденіи знаменателя дроби отъ радикаловъ», помѣщенною въ „Вѣстникѣ Опытной Физики и Элементарной Математики“ за 1915 г., № 630), разъясняющее, что указанный способъ всегда приводитъ къ цѣли.

Съ цѣлью по возможности сократить объемъ учебника мы устранили изъ настоящаго изданія помѣщавшіяся прежде въ концѣ книги (необязательныя для прохожденія) два приложенія: одно, излагающее теорію ирраціональныхъ чиселъ, какъ сѣченій въ области чиселъ раціональныхъ, и другое, устанавливающее при помощи логариѳмическаго ряда размѣръ погрѣшности, происходящей отъ допущенія пропорціональности разностей между логариѳмами разностямъ между соотвѣтствующими числами.

---

**А. Киселевъ.** *Краткая ариѳметика для высшихъ начальныхъ училищъ.* Особымъ отдѣломъ Ученаго Комитета Мин. Нар. Пр. допущена въ качествѣ руководства для высшихъ начальныхъ училищъ, а также и для низшихъ женскихъ учебныхъ заведеній; Учебнымъ Ком. при Мин. Путей Сообщ. рекомендована, какъ полезное учебное пособіе для техническихъ желѣзнодорожныхъ училищъ этого Министерства; Деп. Торг. и Мануф. допущена въ качествѣ пособія въ торговыхъ классахъ и школахъ. Изданіе 20-е, т-ва «В. В. Думновъ, насл. бр. Салаевыхъ», 1917 г., цѣна 45 к.

Настоящее изданіе значительно переработано сравнительно съ предыдущими съ цѣлью бо́льшаго согласованія съ программами высшихъ начальныхъ училищъ и бо́льшей наглядности и простоты изложенія. Главнѣйшія измѣненія состоятъ въ слѣдующемъ (перечисляемъ ихъ въ порядкѣ слѣдованія параграфовъ, нумерацію которыхъ, кстати сказать, пришлось теперь измѣнить).

Сокращено изложеніе измѣненія суммы и остатка, а также произведенія и частнаго, при чемъ это изложеніе разбито на части, сообразно 4 дѣйствіямъ, и каждая часть помѣщена непосредственно за тѣмъ дѣйствіемъ, къ которому она относится (§§ 22, 31, 46, 62).

Въ § 48, въ которомъ говорится о произведеніи 3-хъ и болѣе сомножителей (а также и въ § 135, гдѣ говорится о произведеніи дробныхъ чиселъ), добавлено разъясненіе, что сомножителей можно соединять въ отдѣльныя группы; добавленіе это мы считаемъ полезнымъ въ виду того, что въ курсѣ ариѳметики, хотя бы и краткомъ, приходится часто пользоваться сочетательнымъ свойствомъ произведенія.

Въ началѣ главы „Дѣленіе" (цѣлыхъ чиселъ) помѣщены 2 задачи, на которыхъ разъясняется двоякое значеніе дѣленія (§ 49). Равнымъ образомъ, и передъ каждымъ изъ остальныхъ дѣйствій помѣщена соотвѣтствующая задача съ цѣлью, между прочимъ, напомнить преподавателю, что каждое дѣйствіе полезно начинать съ разсмотрѣнія подходящихъ задачъ.

Нѣсколько подробнѣе, чѣмъ прежде, говорится (§ 76) о переводѣ заданія времени по старому стилю на новый стиль и обратно.

Упрощены примѣры на сложеніе и вычитаніе составныхъ именованныхъ чиселъ (§§ 81, 82).

Значительно измѣнено изложеніе „Элементарнаго курса дробей". Такъ, вмѣсто прежняго „Измѣненія величины дроби съ измѣненіемъ ея членовъ" (§ 99 въ прежнихъ изданіяхъ) и послѣдующаго вывода изъ этого измѣненія объ увеличеніи и уменьшеніи дроби въ нѣсколько разъ, теперь разъяснено (нагляднымъ путемъ) основное свойство дроби (§ 98), что величина ея не измѣняется отъ умноженія или дѣленія ея членовъ на одно и то же число. Вслѣдъ за этимъ свойствомъ дается понятіе о сокращеніи дроби (§ 99). Далѣе указывается, какъ можно складывать и вычитать дроби, и только послѣ этого говорится объ увеличеніи дроби въ нѣсколько разъ (умноженіе дроби на цѣлое число) и объ уменьшеніи ея въ нѣсколько разъ (о дѣленіи на цѣлое число равныхъ частей).

Изложеніе признаковъ дѣлимости теперь, во-первыхъ, упрощено (оно не основывается, какъ прежде, на двухъ общихъ истинахъ о дѣлимости суммы, а проводится болѣе конкретно на каждомъ частномъ случаѣ), во-вторыхъ, поставлено въ болѣе тѣсную связь съ изложеніемъ курса дробей. Такъ, каждый признакъ, по его разъясненіи, тотчасъ же примѣняется къ сокращенію дробей.

Нахожденіе общаго наибольшаго дѣлителя указывается только для 2-хъ чиселъ и только способомъ послѣдовательнаго дѣленія, такъ какъ въ краткомъ курсѣ ариѳметики общимъ наибольшимъ дѣлителемъ приходится пользоваться лишь для сокращенія дроби и притомъ въ томъ только случаѣ, когда по признакамъ дѣлимости затруднительно опредѣлить, сокращается ли дробь или нѣтъ; но въ этомъ случаѣ также затруднительно было бы примѣнить способъ разложенія членовъ дроби на простыхъ множителей.

По разъясненіи процесса нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя, а также и наименьшаго кратнаго, тотчасъ же указывается примѣненіе перваго для сокращенія дробей и второго — для приведенія ихъ къ общему наименьшему знаменателю.

Передъ объясненіемъ умноженія дробныхъ чиселъ разобрано нѣсколько простыхъ задачъ, на которыхъ уясняется полезность обобщенія понятія объ умноженіи на тѣ случаи, когда множитель есть отвлеченная дробь или отвлеченное смѣшанное число (§ 127).

Въ самомъ началѣ главы о дѣленіи дробныхъ чиселъ указаны (§ 137) всѣ случаи, когда при рѣшеніи задачъ приходится по даннымъ произведенію и одному изъ сомножителей отыскивать другого сомножителя, т.-е. приходится пользоваться дѣйствіемъ дѣленія. При помощи этихъ предварительныхъ задачъ учащимся уясняются всѣ различныя значенія, которыя можетъ имѣть дѣленіе дробныхъ чиселъ, отчего, конечно, смыслъ самого дѣйствія становится для нихъ болѣе нагляднымъ.

Правила для различныхъ случаевъ дѣленія, конечно, можно было бы вывести на основаніи этихъ различныхъ значеній дѣленія; но это потребовало бы такого количества времени, которымъ едва ли можетъ располагать преподаватель высшаго начальнаго училища. Поэтому мы предпочли выводить всѣ правила однообразно, исходя изъ того предположенія, что дѣленіемъ находится множитель по даннымъ произведенію и множимому.

Добавлено (§§ 134, 140) краткое разсмотрѣніе измѣненія произведенія и частнаго дробныхъ чиселъ при измѣненіи данныхъ чиселъ; свѣдѣнія объ этомъ нужны для пониманія нѣкоторыхъ свойствъ отношенія.

Дѣйствія надъ дробными именованными числами (прежніе §§ 129, 130, 131) теперь выпущены, такъ какъ, съ одной стороны, о раздробленіи и превращеніи дробнаго именованнаго числа теперь говорится ранѣе, а именно, о раздробленіи — при объясненіи нахожденія дроби отъ даннаго числа (§ 103), а о превращеніи — въ главѣ о дѣленіи дробныхъ чиселъ, когда объясняется, какъ узнать, какую часть меньшее данное число составляетъ отъ бо́льшаго (§ 137, замѣчаніе къ задачѣ 2-ой); съ другой стороны, дѣйствія надъ дробными числами легко выполняются безъ особыхъ правилъ и должны быть усвоены практически на рѣшеніи задачъ.

Выпущенъ совсѣмъ прежній § 148-ой о періодическихъ десятичныхъ дробяхъ, такъ какъ въ курсѣ высшихъ начальныхъ училищъ эти дроби не проходятся.

Нѣсколько упрощено опредѣленіе отношенія (§ 158).

Значительно упрощено изложеніе (§ 165) основного свойства пропорціи (произведеніе крайнихъ равно произведенію среднихъ) и, особенно, обратнаго предложенія (если произведеніе двухъ чиселъ равно произведенію двухъ другихъ чиселъ, то...), которое мы теперь предпочли изложить въ видѣ противоположнаго предложенія (если 4 числа не составляютъ пропорціи, то произведеніе крайнихъ чиселъ не равно произведенію среднихъ). При доказательствѣ общности предложеній прямого и противоположнаго мы сочли возможнымъ члены пропорціи обозначить буквами, такъ какъ въ высшихъ начальныхъ училищахъ, въ 3 классѣ, въ которомъ проходятся пропорціи, введены теперь „начала алгебры", а буквенное обозначеніе членовъ пропорціи представляетъ — помимо другихъ цѣлей — хорошее упражненіе въ переходѣ отъ ариѳметики къ алгебрѣ.

Добавленъ § 166-й, въ которомъ разъясняется, что два предложенія (прямое и противоположное), разсмотрѣнныя въ предыдущемъ параграфѣ, выражаютъ необходимый и достаточный признакъ пропорціональности 4-хъ чиселъ. Мы считаемъ, что слѣдуетъ, по возможности, пользоваться всякимъ представляющимся случаемъ, чтобы уяснять учащимся такіе важные термины, какъ „необходимый" и „достаточный". Конечно, случаи такого рода были въ курсѣ ариѳметики и раньше (напримѣръ, въ признакахъ дѣлимости); но математическое развитіе учащихся въ 1-мъ и 2-мъ классахъ училища едва ли достаточно для пониманія этихъ терминовъ, чего нельзя сказать о 3-мъ классѣ, въ которомъ проходятся пропорціи.

# ЗАДАЧИ.

## Подъ редакціей проф. Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

**№ 343** (6 сер.). Найти всѣ шестизначныя числа $[abcdef]$, изображаемыя по десятичной системѣ цифрами $a, b, c, d, e, f$ и обладающія слѣдующими свойствами: само число $[abcdef]$ есть точный квадратъ, и каждая изъ суммъ

$[ab]+[cd]+[ef]$ и $[ba]+[dc]+[fe]$ соотвѣтствующихъ двузначныхъ чиселъ также есть точный квадратъ.

*М. Шебаршинъ* (Дѣйствующая армія).

**№ 344** (6 сер.). Въ треугольникѣ $ABC$ проведена биссектриса $BE$ и по обѣ стороны отъ нея одинаково къ ней наклоненные отрѣзки $BF$ и $BD$, концы которыхъ $F$ и $D$ лежатъ на прямой $AC$. Доказать справедливость тожества

$$\frac{AE-EC}{AE\,.\,EC}=\frac{FE-ED}{FE\,.\,ED}.$$

*Н. Михальскій* (Екатеринославъ).

**№ 345** (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$64\sin^6 x-96\sin^4 x+36\sin^2 x=3.$$

*Н. С.* (Одесса).

**№ 346** (6 сер.). На діаметрѣ $AB$ даннаго круга построить вписанную въ него равнобочную трапецію $ACDB$ по отрѣзку $ED=a$ отъ точки $E$ пересѣченія ея діагоналей до вершины $D$.

*R.*

# РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

**№ 300** (6 сер.). *Черезъ точку* A, *лежащую внутри даннаго круга, провести хорду такъ, чтобы она раздѣлилась въ точкѣ* A *въ данномъ отношеніи* m : n. *Рѣшить задачу путемъ геометрическаго построенія.*

Задача можетъ быть рѣшена методомъ подобія. Пусть $BC$ есть искомая хорда, и пусть, по условію, $AB:AC=\alpha:\beta$, гдѣ $\alpha$ и $\beta$ суть данные отрѣзки. Предполагая, что задача рѣшена, проводимъ радіусъ $OB$ и прямую $OA$, а изъ точки $C$ проводимъ прямую, параллельную $OB$, до встрѣчи въ точкѣ $D$ съ прямой $OA$. Тогда изъ подобія треугольниковъ $AOB$ и $ADC$ имѣемъ, что

$$\frac{AD}{AO}=\frac{DC}{BO}=\frac{AB}{AC}=\frac{\alpha}{\beta},\quad \text{откуда}\quad AD=\frac{AO\,.\,\alpha}{\beta},\quad DC=\frac{BO\,.\,\alpha}{\beta}.$$

Отсюда вытекаетъ слѣдующее построеніе: строимъ отрѣзокъ $\frac{AO\,.\,\alpha}{\beta}$, какъ четвертый пропорціональный къ даннымъ отрѣзкамъ $AO$, $\alpha$ и $\beta$, и откладываемъ полученную длину на продолженіи отрѣзка $OA$ отъ точки $A$ до соотвѣтствующей точки $D$; затѣмъ, построивъ подобнымъ же образомъ отрѣзокъ $\frac{BO\,.\,\alpha}{\beta}$, описываемъ изъ точки $D$ радіусомъ, равнымъ этому отрѣзку, окружность до пересѣченія съ данной окружностью въ двухъ вообще различныхъ точкахъ $C$ и $C'$; продолживъ прямыя $CA$ и $C'A$ до встрѣчи съ данной окружностью соотвѣтственно въ точкахъ $B$ и $B'$, находимъ вообще двѣ хорды $BC$ и $B'C'$, дающія рѣшеніе предложеннаго вопроса.

*N. N.* (Тифлисъ); *Н. С.* (Одесса).

**№ 304** (6 сер.). *На діаметрѣ даннаго круга построить, какъ на основаніи, равнобедренный треугольникъ такъ, чтобы отрѣзокъ его боковой стороны отъ вершины до пересѣченія съ окружностью равнялся данной длинѣ* a.

Пусть $AB$ есть данный діаметръ, $ACB$ — искомый треугольникъ, $O$ — центръ даннаго круга, $D$ — точка пересѣченія стороны $AC$ треугольника съ данной окружностью. Такъ какъ, по условію, $CA = CB$, то точка $C$ лежитъ на продолженіи радіуса $OF$, перпендикулярнаго къ діаметру $AB$. Обозначимъ длину $AD$ черезъ $x$ и опустимъ перпендикуляръ $OE$ на хорду $AD$. Тогда изъ прямоугольнаго треугольника $AOC$ найдемъ, что

$$(1)\quad AC\,.\,AE = \overline{OA}^2.$$

Но $AC = AD + DC = x + a$, такъ какъ, по условію, $DC = a$, и $AE = DE = \frac{1}{2}AD = \frac{x}{2}\cdot$ Поэтому, обозначая радіусъ $OA$ даннаго круга черезъ $r$, мы можемъ записать равенство (1) въ видѣ: $(x+a)\frac{x}{2} = r^2$, или

$$(2)\quad x(x+a) = 2r^2.$$

Итакъ, искомый отрѣзокъ $AD$ есть положительный корень квадратнаго уравненія $x^2 + ax - 2r^2 = 0$. — Отсюда вытекаетъ слѣдующее построеніе. Замѣчая, что $AF$ и $BF$ суть смежныя стороны вписаннаго въ данный кругъ квадрата, отложимъ на продолженіи $BF$ отрѣзокъ $FK = a$ и построимъ на немъ окружность, какъ на діаметрѣ; затѣмъ соединимъ центръ $M$ этого круга съ точкой $A$ и обозначимъ ближайшую къ $A$ точку встрѣчи построенной окружности съ сѣкущей $AM$ черезъ $L$, а вторую точку пересѣченія черезъ $N$. Такъ какъ $\angle AFB = \frac{\pi}{2}$, то построенная нами окружность центра $M$ касается прямой $AF$ въ точкѣ $F$. Поэтому $AL(AL + LN) = \overline{AF}^2$, или же $AL(AL + a) = (r\sqrt{2})^2 = 2r^2$, такъ какъ $AF$ есть сторона квадрата, вписаннаго въ данный кругъ. Итакъ,

$$(2)\quad AL(AL + a) = 2r^2.$$

Сравнивая равенства (1) и (2), находимъ, что $x = AL$, а потому для рѣшенія предложенной задачи достаточно, выполнивъ указанное построеніе, описать окружность радіусомъ $AL$ изъ $A$, какъ изъ центра, до пересѣченія въ точкѣ $D$ съ данной окружностью; тогда, продолживъ $AD$ до пересѣченія въ точкѣ $C$ съ прямой $OF$, получимъ искомый равнобедренный треугольникъ $ACB$.

*N. N.* (Тифлисъ); *Н. Семеновъ* (Одесса).

**№ 305** (6 сер.). *Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе*

$$\frac{10\sqrt[3]{9(2x+1)}}{y-1} = y(1 + y + y^2 + y^3).$$

Представивъ данное уравненіе послѣдовательно въ видѣ:

$$10\sqrt[3]{9(2x+1)} = y(y^4 - 1),\quad 10^3\,.\,9(2x+1) = y^3(y^4-1)^3,$$

$$(1)\qquad 2x + 1 = \frac{y^3(y^4-1)^3}{9\,.\,10^3},$$

замѣчаемъ, что для рѣшенія предложенной задачи достаточно найти такія цѣлыя значенія $y$, при которыхъ правая часть равенства (1) обращается въ цѣлое и притомъ нечетное число. Но правая часть равенства (1) представляетъ собою цѣлое число при любомъ цѣломъ значеніи $y$. Дѣйствительно, произведеніе $y(y^4-1)$ дѣлится на 5 при любомъ цѣломъ значеніи $y$, такъ какъ при $y$, кратномъ 5-ти, множитель $y$ этого произведенія дѣлится на 5, а при $y$, некратномъ 5-ти, дѣлится на 5, согласно теоремѣ Ферма́та, множитель $y^4-1$; кромѣ того, при $y$ четномъ множитель $y$ дѣлится на 2, а при $y$ нечетномъ множитель $y^4-1$ дѣлится на 2, такъ что при любомъ цѣломъ значеніи $y$ произведеніе $y(y^4-1)$ дѣлится на 2. Итакъ, при любомъ цѣломъ значеніи $y$ произведеніе $y(y^4-1)$ дѣлится и на 2 и на 5, а потому оно дѣлится на 10, откуда вытекаетъ, что выраженіе $y^3(y^4-1)^3$ дѣлится при любомъ цѣломъ значеніи $y$ на $10^3$. Произведеніе $y(y^4-1)$ дѣлится также при любомъ цѣломъ значеніи $y$ на 3; дѣйствительно, представивъ это произведеніе въ видѣ $y(y^2-1)(y^2+1)$, находимъ, что при $y$, кратномъ 3-хъ, дѣлится на 3 множитель $y$, а при $y$, некратномъ 3-хъ, дѣлится на 3, согласно теоремѣ Ферма́та, множитель $y^2-1$. Поэтому при цѣлыхъ значеніяхъ $y$ выраженіе $y^3(y^4-1)^3$ дѣлится на $3^3$, т. е. на 27, а потому дѣлится и на 9. Итакъ, выраженіе $y^3(y^4-1)^3$ дѣлится при всякомъ цѣломъ значеніи $y$ на два взаимно простыхъ числа $10^3$ и 9, а потому оно дѣлится и на произведеніе $9.10^3$; другими словами, правая часть равенства (1) есть цѣлое число при любомъ цѣломъ значеніи $y$. При $y$ нечетномъ каждое изъ чиселъ $y^2-1$ и $y^2+1$ четно, а потому произведеніе $(y^2-1)(y^2+1)$, т. е. $y^4-1$, дѣлится на 4; поэтому при нечетномъ $y$ произведеніе $y^3(y^4-1)^3$ дѣлится на $4^3$, или же на $2^6$, а такъ какъ число $9.10^3$ дѣлится лишь на $2^3$, но не на высшую степень 2-хъ, то при $y$ нечетномъ правая часть равенства (1) есть число четное, откуда слѣдуетъ, что предложенное уравненіе не рѣшается въ цѣлыхъ числахъ въ томъ предположеніи, что $y$ есть число нечетное. Предположимъ теперь, что $y$ есть число четное, т. е. что (2) $y=2z$, гдѣ $z$ есть цѣлое число. Если $z$ есть число четное, то $y$ кратно 4-хъ, и числитель $y^3(y^4-1)^3$ правой части уравненія (1), дѣлясь на $y^3$, опять дѣлится на $4^3$, а потому предложенное уравненіе не рѣшается въ цѣлыхъ числахъ. Если же $z$ въ равенствѣ (2) есть число нечетное, то числитель правой части уравненія (1) дѣлится лишь на $2^3$, но не на высшую степень 2-хъ, а потому, такъ какъ и знаменатель правой части уравненія (1) дѣлится лишь на $2^3$, то при $y=2z$ и при $z$ нечетномъ правая часть равенства (1) есть нечетное число, и уравненіе (1) даетъ поэтому цѣлое значеніе для $x$. Изъ всего сказаннаго вытекаетъ, что для рѣшенія предложеннаго уравненія въ числахъ цѣлыхъ достаточно положить въ равенствѣ (2) $z=2t+1$, гдѣ $t$ — любое цѣлое число, подставить найденное значеніе $y$ въ правую часть уравненія (1) и опредѣлить изъ него $x$. Такимъ образомъ мы приходимъ къ общимъ формуламъ цѣлыхъ рѣшеній:

$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{(2t+1)^3\,[16\,(2t+1)^4-1]^3}{9.5^3}-1\right),\qquad y=4t+2,$$

въ которыхъ $t$ — произвольное цѣлое число. Напримѣръ, при $t=0$ получимъ систему рѣшеній $x=1$, $y=2$.

*М. Шебаршинъ* (дѣйствующая армія); *Н. С.* (Одесса).

# Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

**О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника", подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.**

**В. П. Ивановъ.** *Избранныя главы элементарной алгебры.* Глава I. Признаки дѣлимости многочленовъ (полиномовъ). Глава II. Разложеніе алгебраическихъ выраженій на простые раціональные множители. Баку, 1916. Стр. 83 + IV. Ц. 1 руб.

**М. Ѳ. Зиминъ.** *Раціональные тетраэдры.* Новочеркасскъ, 1915. Стр. 42.

**Его же.** *Обобщенные возвратные ряды.* Новочеркасскъ, 1915. Стр. 25.

**В. В. Добровольскій.** *Краткія свѣдѣнія по математикѣ и собраніе задачъ для учениковъ ремесленныхъ и техническихъ училищъ.* Вып. I. Москва, 1916. Стр. 56. Ц. 1 руб.

**В. Кармиловъ.** *Значеніе математики въ познаніи міра и новыя области ея приложенія.* (Возможность предсказанія войнъ). Самара, 1915. Стр. 55. Ц. 50 к.

**П. Енько.** Директоръ Императорскаго училища глухонѣмыхъ. *Справочникъ по начальному счету для учащихся.* Петроградъ, 1915. Стр. 33. Ц. 15 к.

**Его же.** *Сборникъ практическихъ расчетовъ для начальнаго обученія счету по лабораторному методу.* Петроградъ, 1915. Стр. 43. Ц. 15 к.

*Отчетъ о дѣятельности Николаевской главн. физической обсерваторіи и подвѣдомственныхъ ей учрежденій за 1915 г.* Ч. I. — Ученая дѣятельность. Стр. 112. Ч. II. — Организаціонно-административная дѣятельность. Стр. 135. Петроградъ. 1916.

*Указатель учебныхъ пособій по географіи и справочникъ по литературѣ предмета.* Петроградъ, 1916. Стр. 32. Ц. 20 к.

Редакторъ прив.-доц. В. Ф. Каганъ. Издатель В. А. Гернетъ.

Дозволено военной цензурой.

Типографія „Техникъ"—Одесса, Екатерининская, 58.

Обложка
ищется

Обложка
ищется