Обложка
ищется

Обложка
пщется

Второй серіи VI-го семестра № 9—10.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

№ 669—670.

Отъ редакціи.

Свершился величайшій переворотъ въ исторіи Россіи. Пали цѣпи, вѣками сковывавшія ея населеніе, сковывавшія народную волю, народную совѣсть, народную мысль.

Среди побѣднаго ликованія борцовъ за свободу изъ горнила яркой политической борьбы подымается новая Россія, твердая духомъ, сильная единеніемъ, мощная вѣрой въ свое великое дѣло.

Пусть сегодня научная мысль еще отвлечена страстнымъ порывомъ политической жизни. Завтра дѣти науки вернутся къ служенію ей, — здоровыя, свободныя и бодрыя условія жизни создадутъ высокій подъемъ научной волны. Окрѣпшая и широко развернувшаяся школа будетъ служить прочнымъ основаніемъ всей жизни новой Россіи, будетъ растить и углублять ея производительныя, творческія силы.

Руководители „Вѣстника“ будутъ счастливы отразить на страницахъ журнала этотъ подъемъ творчества въ наукѣ и школѣ, относящійся къ области точнаго знанія и посильно ему содѣйствовать.

† Гастонъ Дарбу.

Въ истекшемъ февралѣ скончался одинъ изъ наиболѣе крупныхъ французскихъ математиковъ, членъ Академіи Гастонъ Дарбу. Продуктивная научная дѣятельность Дарбу далеко выходила за предѣлы тѣхъ рамокъ, которыя доступны „Вѣстнику Опытной Физики“. Она падаетъ, главнымъ образомъ, въ область интегрированія дифференціальныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ въ связи съ геометрическими задачами, которыя къ этимъ уравненіямъ приводятъ. Однако, исключительная роль этого геометра требуетъ, чтобы „Вѣстникъ“ познакомилъ читателей съ его творчествомъ. Это будетъ выполнено въ ближайшихъ номерахъ журнала.

---

† М. Г. Попруженко.

Умеръ большой человѣкъ нашей педагогической семьи, умеръ Михаилъ Григорьевичъ Попруженко.

Кто изъ преподавателей математики не зналъ лично М. Г., этого честнаго труженика на нивѣ просвѣщенія нашего юношества, кто не слышалъ его всегда дѣловыхъ, искреннихъ и прямыхъ заключеній и замѣчаній въ математической комиссіи Педагогическаго Музея военно-учебныхъ заведеній или не видѣлъ его предсѣдателемъ перваго съѣзда преподавателей математики въ Москвѣ, тотъ знаетъ М. Г. Попруженко по его книгамъ и по той новой программѣ математики въ кадетскихъ корпусахъ, которая проведена благодаря труду и настойчивости М. Г.

М. Г. Попруженко организовалъ первый съѣздъ преподавателей математики въ Россіи и работалъ послѣднее время надъ организаціей новаго съѣзда преподавателей математики. Онъ обновилъ преподаваніе математики въ кадетскихъ корпусахъ, ввелъ въ послѣднихъ преподаваніе анализа, опустилъ многіе схоластическіе вопросы математики нашей средней школы, былъ добрымъ геніемъ преподаванія математическихъ наукъ въ нашей школѣ.

М. Г. Попруженко родился 3 августа 1854 года; среднее образованіе получилъ въ реальномъ училищѣ, а затѣмъ окончилъ Михайловское артиллерійское училище и Академію; въ 1875 г. — произведенъ въ офицеры; въ 1881 году онъ — воспитатель и преподаватель Воронежскаго корпуса, въ 1890 г. — инспекторъ классовъ Оренбургскаго Неплюевскаго корпуса, въ 1898 г. — директоръ Владимірскаго Кіевскаго корпуса; въ послѣднее время М. Г. состоялъ генераломъ для особыхъ порученій при Главномъ Управленіи военно-учебныхъ заведеній.

М. Г., Попруженко скончался отъ рака печени 13 февраля с. г. въ Кіевѣ, гдѣ онъ находился въ служебной командировкѣ; такимъ образомъ, онъ до конца своей жизни оставался вѣрнымъ себѣ и своимъ прекраснымъ идеаламъ; онъ сознавалъ, что смерть стоитъ за его плечами, но смѣло продолжалъ работать и интересоваться дѣломъ, которому онъ посвятилъ всю свою жизнь.

М. Г. написалъ прекрасный курсъ космографіи („Начала космографіи", 7 изд.), „Начала анализа" (2 изд.), интересный задачникъ по геометріи (3 изд.), „Матеріалы по методикѣ анализа безконечно-малыхъ въ средней школѣ" и много педагогическихъ и методическихъ статей изъ области преподаванія математики. Большинство ихъ помѣщено въ „Вѣстникѣ Опытной Физики и Элементарной Математики" и въ „Педагогическомъ Сборникѣ".

Люди умираютъ, но дѣла и мысли ихъ живутъ. Пусть же труды и мысли М. Г. живутъ между нами, пусть они развиваются, а мы, исполняя его завѣты и чтя его память, будемъ продолжать его работу.

Н. Каменьщиковъ.

М. Г. Попруженко — лицо, необычайно дорогое для редакціи „Вѣстника Опытной Физики". Помѣщая эти строки г. Каменьщикова, редакція отнюдь не намѣрена ими ограничиться. Она приметъ всѣ мѣры къ тому, чтобы всесторонне освѣтить прекрасную личность Михаила Григорьевича и его плодотворную научную дѣятельность.

Ред.

Объ одномъ свойствѣ непрерывной функціи.

Проф. Е. Л. Буницкаго.

(*Окончаніе**).

5. Непрерывная функція съ однимъ или двумя extrema.

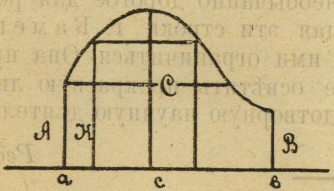
Теорема VII. Если функція $f(x)$ непрерывна въ промежуткѣ $a \dots b$ и если она имѣетъ въ немъ лишь одинъ extremum $f(c)$, то она принимаетъ въ промежуткѣ $a \dots b$ каждое изъ своихъ значеній не болѣе двухъ разъ, при чемъ существуетъ безчисленное множество значеній, которыя она принимаетъ два раза.

Промежутокъ $a \dots b$ дѣлится точкой c на части $a \dots c\rangle$ и $\langle c \dots b$, въ одной изъ которыхъ функція $f(x)$ монотонно возрастаетъ, а въ другой монотонно убываетъ (см. теорему VI и замѣчаніе къ ней въ № 667 — 668 „Вѣстника", стр. 153, 154). Въ каждой изъ этихъ частей функція $f(x)$ принимаетъ каждое изъ своихъ значеній не болѣе одного

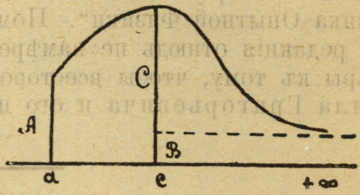
---

*) См. „Вѣстникъ", № 667 — 668.

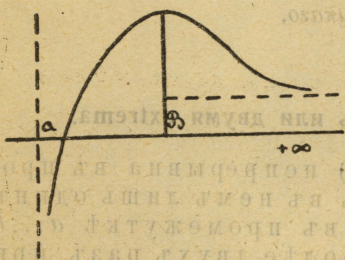
раза; поэтому въ промежуткѣ $a \dots b$ функція $f(x)$ принимаетъ каждое изъ своихъ значеній не болѣе двухъ разъ. Пусть, для большей опредѣленности, $f(c)$ есть maximum, конечно, собственный (слѣдствіе изъ теоремы V); тогда функція $f(x)$ монотонно убываетъ при измѣненіи x отъ c къ a, а также при измѣненіи x отъ c къ b; поэтому каждый изъ предѣловъ $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ есть либо число, меньшее $f(c)$, либо $-\infty$, при чемъ для значеній x, лежащихъ соотвѣтственно въ промежуткахъ (a, c) и (c, b), функція $f(x)$ принимаетъ, въ силу непрерывности, всѣ значенія, лежащія соотвѣтственно въ промежуткахъ (A, C), (C, B), гдѣ $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, $C = f(c)$, $B = \lim\limits_{x \to b} f(x)$. Такъ какъ каждый изъ предѣловъ A и B есть или число, меньшее C, или $-\infty$, то существуетъ безконечное множество чиселъ, лежащихъ одновременно въ каждомъ изъ промежутковъ (A, C) и (C, B). Пусть K есть такое число; тогда функція $f(x)$ принимаетъ значеніе, равное K, лишь по одному разу въ каждомъ изъ промежутковъ (a, c) и (c, b), принимая его, такимъ образомъ, въ промежуткѣ $a \dots b$ два раза. Подобнымъ же образомъ теорема доказывается въ томъ случаѣ, когда $f(c)$ есть minimum.



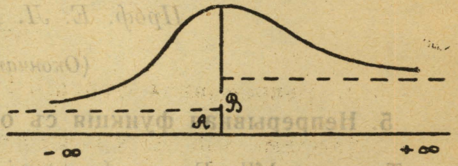
Черт. 1.



Черт. 2.



Черт. 3.



Черт. 4.

Замѣчаніе. Такъ какъ $f(c)$ оказывается наибольшимъ или наименьшимъ значеніемъ изъ всѣхъ значеній функціи $f(x)$ въ промежуткѣ $a \dots b$, то функція $f(x)$ принимаетъ значеніе $f(c)$ лишь одинъ разъ. Если предположить, для большей опредѣленности, что функція $f(x)$ задана въ замкнутомъ промежуткѣ $\langle a, b \rangle$, что единственный extremum $f(c)$ есть maximum, и что оба предѣла A и B суть числа, при чемъ $A > B$, то промежутокъ $\langle A, C)$ представляетъ собою совокупность всѣхъ значеній функціи $f(x)$, принимаемыхъ ею дважды, а число C и промежутокъ $(A, B\rangle$ даютъ вмѣстѣ всѣ значенія функціи $f(x)$, принимаемыя ею лишь одинъ разъ. Подобнымъ же образомъ выдѣляются значенія, принимаемыя функціею дважды и лишь одинъ разъ, и въ другихъ случаяхъ (когда промежутокъ $a \ldots b$ — незамкнутый, когда $f(c)$ — minimum, когда A или B суть безконечные предѣлы). На чертежѣ 1 поясненъ графически случай, разсмотрѣнный нами подробно. На чертежахъ 2, 3, 4 даны другіе типичные случаи, когда $f(c)$ — maximum, при чемъ пунктирными линіями обозначены параллельныя осямъ асимптоты кривой $y = f(x)$.

Теорема VIII. Если функція $f(x)$ непрерывна въ промежуткѣ $a \ldots b$ и если она имѣетъ въ немъ два (и только два) extremum'а $f(c_1)$ и $f(c_2)$, то справедливы слѣдующія предложенія.

1) Extrema $f(c_1)$ и $f(c_2)$ суть собственныя extrema, и притомъ они разноименны, т.-е. одинъ изъ нихъ — maximum, другой — minimum. Если предположить, для большей опредѣленности, что c_1 лежитъ между a и c_2, и что $f(c_1)$ — maximum, то функція $f(x)$ монотонно возрастаетъ при измѣненіи x отъ a до c_1 включительно, монотонно убываетъ въ замкнутомъ промежуткѣ $\langle c_1, c_2\rangle$ при измѣненіи x отъ c_1 до c_2 и монотонно возрастаетъ при измѣненіи x отъ c_2 включительно до b. Предѣлы $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to b} f(x) = B$ (конечные или безконечные) навѣрно существуютъ.

2) Нѣкоторыя изъ своихъ значеній функція $f(x)$ навѣрно принимаетъ въ промежуткѣ $a \ldots b$ два раза.

3) При наличности допущеній, сдѣланныхъ въ предложеніи 1), для того, чтобы функція $f(x)$ принимала каждое изъ своихъ значеній въ промежуткѣ $a \ldots b$ не болѣе двухъ разъ, необходимо и достаточно, чтобы A и B были числами, удовлетворяющими неравенству $A > B$, если промежутокъ $a \ldots b$ есть замкнутый промежутокъ $\langle a, b\rangle$, или же неравенству $A \geqq B$, если $a \ldots b$ есть незамкнутый промежутокъ одного изъ возможныхъ типовъ (a, b), $\langle a, b)$ или $(a, b\rangle$.

Предложеніе 1) вытекаетъ изъ слѣдствія изъ теоремы V и изъ теоремы VI, а также, въ связи съ монотонностью функціи $f(x)$ въ промежуткахъ $a \ldots c_1\rangle$ и $\langle c_2 \ldots b$, изъ указанія, изложеннаго въ концѣ главы 2-ой. Предложеніе 2) вытекаетъ изъ теоремы VII, если принять во вниманіе, что въ промежуткѣ $a \ldots c_2\rangle$ [или $\langle c_1 \ldots b)$] функція $f(x)$ имѣетъ лишь одинъ maximum (minimum) $f(c_1)$ [$f(c_2)$].

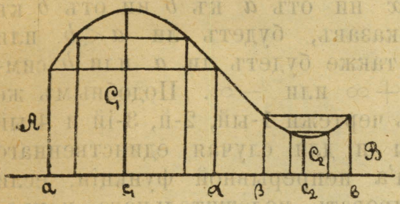
При доказательствѣ предложенія 3), сохраняя допущенія, указанныя въ текстѣ предложенія 1), введемъ обозначенія $f(c_1) = C_1$, $f(c_2) = C_2$. Такъ какъ при измѣненіи x отъ a до c_1, отъ c_1 до c_2 и отъ c_2 до b соотвѣтственно въ промежуткахъ $a \ldots c_1\rangle$, $\langle c_1, c_2\rangle$, $\langle c_2 \ldots b$ функція $f(x)$ соотвѣтственно возрастаетъ, убываетъ и снова возрастаетъ, то A есть число, меньшее C_1, или же $-\infty$, $C_2 < C_1$, а B есть число, большее C_2, или же $+\infty$.

Допустимъ теперь, что разсматриваемая функція $f(x)$ принимаетъ каждое изъ своихъ значеній въ промежуткѣ $a \dots b$ не болѣе двухъ разъ. Въ такомъ случаѣ A и B суть числа, и притомъ $A \geqq B$. Въ самомъ дѣлѣ, пусть A есть $-\infty$. Въ такомъ случаѣ, такъ какъ $C_2 < C_1$ и такъ какъ B есть либо число, большее C_2, либо $+\infty$, то числа, большія числа C_2 и достаточно близкія къ нему, лежатъ одновременно въ каждомъ изъ промежутковъ $(-\infty, C_1)$, (C_1, C_2), (C_2, B). Пусть K есть одно изъ такихъ чиселъ. Такъ какъ функція $f(x)$ принимаетъ въ промежуткахъ (a, c_1), (c_1, c_2), (c_2, b), въ силу непрерывности, всѣ значенія, лежащія соотвѣтственно въ промежуткахъ $(-\infty, C_1)$, (C_1, C_2), (C_2, B), то она получаетъ значеніе K для нѣкоторыхъ трехъ значеній независимаго перемѣннаго x_1, x_2, x_3, лежащихъ соотвѣтственно между a и c_1, между c_1 и c_2 и между c_2 и b и потому неравныхъ между собою, что противно условію. Такимъ образомъ A есть число, меньшее C_1. Допустимъ теперь, что B есть $+\infty$ или же число, большее A. Здѣсь нужно различать слѣдующихъ два вообще возможныхъ случая: либо $A \leqq C_2$, либо $C_2 \leqq A$. Такъ какъ $A < C_1$, $C_2 < C_1$, и такъ какъ B, по допущенію, есть или $+\infty$ или число, большее A (и, конечно, большее C_2), то въ первомъ случаѣ (когда $A \leqq C_2$) числа, большія числа C_2 и достаточно близкія къ нему, лежатъ одновременно въ каждомъ изъ промежутковъ (A, C_1), (C_1, C_2), (C_2, B), а во второмъ случаѣ (когда $C_2 \leqq A$) въ каждомъ изъ тѣхъ же промежутковъ лежатъ числа, большія числа A и достаточно близкія къ нему. Итакъ, если B есть $+\infty$ или число, большее A, то можно указать число K, лежащее одновременно въ каждомъ изъ промежутковъ (A, C_1), (C_1, C_2), (C_2, B), а потому, разсуждая такъ же, какъ и раньше, можно найти три неравныхъ между собою числа x_1, x_2, x_3, для которыхъ $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = K$, что противно условію. Итакъ A и B суть числа, при чемъ $A \geqq B$.

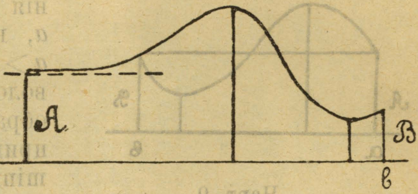
Пусть теперь $a \dots b$ есть замкнутый промежутокъ $\langle a, b \rangle$, и пусть разсматриваемая функція $f(x)$, какъ и раньше, принимаетъ каждое изъ своихъ значеній не болѣе двухъ разъ въ $a \dots b$; въ такомъ случаѣ $A > B$, т. е. равенство $A = B$ невозможно. Дѣйствительно, пусть $A = B$. Тогда, согласно съ формулами $C_2 < B = A < C_1$, A лежитъ въ промежуткѣ (C_1, C_2), а потому, въ силу непрерывности функціи $f(x)$, для нѣкотораго значенія независимаго перемѣннаго ξ, лежащаго между c_1 и c_2, выполняется равенство $f(\xi) = A$; кромѣ того, такъ какъ промежутокъ $\langle a, b \rangle$ замкнутый и такъ какъ функція $f(x)$, заданная въ немъ, непрерывна, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A = f(a)$, $\lim\limits_{x \to b} f(x) = B = f(b) = A$, а потому $f(a) = f(\xi) = f(b) = A$. Слѣдовательно функція $f(x)$ принимаетъ значеніе, равное A, для трехъ неравныхъ значеній независимаго перемѣннаго a, ξ и b, а это противно условію.

Итакъ, если разсматриваемая нами функція $f(x)$ принимаетъ каждое изъ своихъ значеній не болѣе двухъ разъ, то A и B суть числа, удовлетворяющія неравенству $A > B$, если $a \dots b$ есть замкнутый промежутокъ $\langle a, b \rangle$, и неравенству $A \geqq B$, если $a \dots b$ есть незамкнутый промежутокъ одного изъ трехъ возможныхъ типовъ.

Эти условія также и достаточны для того, чтобы изслѣдуемая функція $f(x)$ принимала каждое изъ своихъ значеній не болѣе двухъ разъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $a \ldots b$ есть замкнутый промежутокъ $\langle a, b \rangle$, и пусть $A > B$. Тогда изъ неравенствъ $C_2 < B < A < C_1$

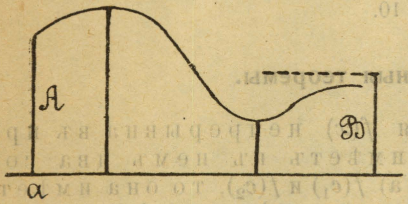


Черт. 5.

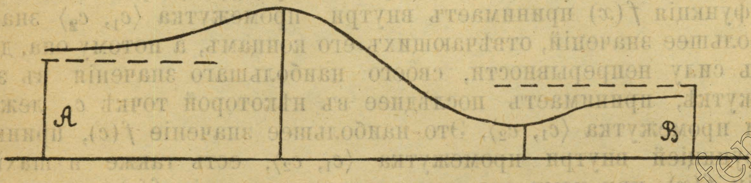


Черт. 6.

вытекаетъ, что, въ силу непрерывности, функція $f(x)$ принимаетъ для нѣкоторыхъ значеній α и β, лежащихъ внутри промежутка $\langle c_1, c_2 \rangle$, значенія, равныя соотвѣтственно числамъ A и B, при чемъ α лежитъ между c_1 и β, такъ какъ функція $f(x)$ убываетъ при измѣненіи x отъ c_1 къ c_2. Такимъ образомъ, въ силу непрерывности функціи $f(x)$, всѣ ея значенія лежатъ въ промежуткѣ $\langle C_1, C_2 \rangle$, и функція, принимая значенія C_1, C_2 и значенія, лежащія между A и B, лишь по одному разу, принимаетъ каждое изъ остальныхъ значеній дважды (см. черт. 5). Совершенно подобнымъ же образомъ можно убѣдиться, что, если $A > B$ (черт. 5, 6, 7, 8) или если $A = B$ (черт. 9, 10), то и въ случаѣ разомкнутаго промежутка $a \ldots b$ одного изъ трехъ возможныхъ типовъ изслѣдуемая функція принимаетъ каждое изъ своихъ значеній опять-таки не болѣе двухъ разъ.

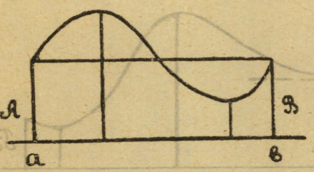


Черт. 7.

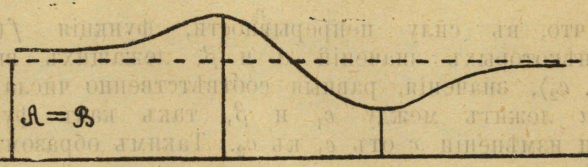


Черт. 8.

Замѣчаніе. Асимптоты, параллельныя оси x, изображены на чертежахъ 6, 7, 8, 10 пунктиромъ. Примѣромъ функціи, изображенной на черт. 10-омъ, можетъ служить (лишь при обратномъ направленіи оси x) функція $\frac{1+x+x^2}{1+x^2}$, разсмотрѣнная въ статьѣ „Къ теоріи maximum'a и minimum'a функціи одного перемѣннаго" (I-ая часть, примѣръ II-ой). Слѣдуетъ замѣтить, что предположенія, сдѣланныя въ текстѣ предложенія 1) относительно чиселъ c_1, c_2, $f(c_1)$ и $f(c_2)$, нисколько не нарушаютъ общности изслѣдованія, такъ какъ мы не фиксировали положительнаго направленія оси x ни отъ a къ b ни отъ b къ a, не указавъ, будетъ ли $a<b$ или $a>b$, а также будетъ ли a или b символомъ $+\infty$ или $-\infty$. Подобнымъ же образомъ чертежи 1-ый, 2-й, 3-ій и 4-ый пригодны и для случая единственнаго minimum'а непрерывной функціи, если не фиксировать положительнаго направленія оси y.



Черт. 9.



Черт. 10.

6. Вспомогательныя теоремы.

Теорема IX. Если функція $f(x)$ непрерывна въ промежуткѣ $a \ldots b$ и если она имѣетъ въ немъ два собственныхъ minimum'a (maximum'a) $f(c_1)$ и $f(c_2)$, то она имѣетъ еще внутри промежутка $\langle c_1, c_2\rangle$ maximum (minimum) $f(c)$, при чемъ $f(c)>f(c_1)$ и $f(c)>f(c_2)$ $[f(c)<f(c_1)$ и $f(c)<f(c_2)]$.

Пусть $f(c_1)$ и $f(c_2)$ суть два собственныхъ minimum'a, и пусть, для большей опредѣленности, $f(c_1)\leqq f(c_2)$. Согласно опредѣленію собственнаго minimum'a, внутри промежутка $\langle c_1, c_2\rangle$ можно указать достаточно близкое къ c_2 число γ, которое удовлетворяетъ неравенству $f(\gamma)>f(c_2)$ и, тѣмъ болѣе, неравенству $f(\gamma)>f(c_1)$. Такимъ образомъ функція $f(x)$ принимаетъ внутри промежутка $\langle c_1, c_2\rangle$ значеніе $f(\gamma)$, большее значеній, отвѣчающихъ его концамъ, а потому она, достигая, въ силу непрерывности, своего наибольшаго значенія въ этомъ промежуткѣ, принимаетъ послѣднее въ нѣкоторой точкѣ c, лежащей внутри промежутка $\langle c_1, c_2\rangle$. Это наибольшее значеніе $f(c)$, принимаемое функціей внутри промежутка $\langle c_1, c_2\rangle$, есть также и maximum функціи $f(x)$, при чемъ это максимальное значеніе $f(c)$, удовлетворяя неравенствамъ $f(c)\geqq f(\gamma)>f(c_1)$ и $f(c)\geqq f(\gamma)>f(c_2)$, удовлетворяетъ также неравенствамъ $f(c)>f(c_1)$, $f(c)>f(c_2)$. Подобнымъ же образомъ доказывается теорема и въ случаѣ двухъ maximum'овъ $f(c_1)$ и $f(c_2)$; предполагая, какъ и раньше, что $f(c_1)\leqq f(c_2)$, достаточно въ этомъ случаѣ выбрать внутри промежутка $\langle c_1, c_2\rangle$ число γ, настолько близкое къ c_1, чтобы удовлетворялось неравенство $f(\gamma)<f(c_1)$, и затѣмъ разсмотрѣть наименьшее значеніе $f(c)$ функціи $f(x)$ въ промежуткѣ $\langle c_1, c_2\rangle$.

Теорема X. Если функція $f(x)$ непрерывна въ промежуткѣ $a \ldots b$ и если она имѣетъ въ немъ три собственныхъ extremum'а, то существуетъ безконечное множество значеній функціи $f(x)$, каждое изъ которыхъ она принимаетъ для трехъ неравныхъ между собою значеній независимаго перемѣннаго.

Непрерывная въ $a \ldots b$ функція $f(x)$ имѣетъ, по условію, три собственныхъ extrema $f(c_1)$, $f(c_2)$, $f(c_3)$, среди которыхъ два навѣрно одноименные, т. е. они суть оба собственныя maxima или оба собственныя minima. Пусть, напримѣръ, $f(c_1)$ и $f(c_2)$ суть собственныя minima, и пусть, для большей опредѣленности,

$$(15) \quad f(c_1) \leqq f(c_2).$$

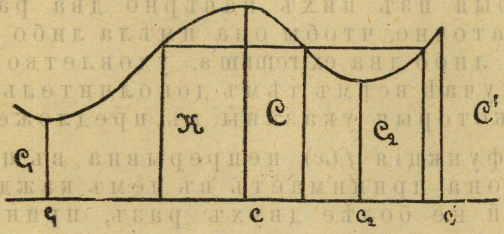
Тогда, вслѣдствіе непрерывности, функція $f(x)$ имѣетъ, по теоремѣ IX, внутри промежутка $\langle c_1, c_2 \rangle$ maximum $f(c)$, удовлетворяющій неравенствамъ

$$(16) \quad f(c) > f(c_1), \quad f(c) > f(c_2).$$

Кромѣ того, изъ опредѣленія собственнаго minimum'а вытекаетъ, что существуетъ достаточно близкое къ c_2 число c', удовлетворяющее неравенству

$$(17) \quad f(c') > f(c_2)$$

и, сверхъ того, требованію, чтобы число c_2 заключалось между c_1 и c' (черт. 11). Полагая $f(c_1) = C_1$, $f(c) = C$, $f(c_2) = C_2$, $f(c') = C'$, нахо-



Черт. 11.

димъ [см. (15), (16), (17)], что эти значенія функціи $f(x)$ связаны неравенствами

$$C_1 \leqq C_2 < C', \quad C_1 < C, \quad C_2 < C.$$

Такимъ образомъ, число C_2, будучи меньше каждаго изъ чиселъ C и C', лежитъ въ промежуткѣ $\langle C_1, C \rangle$, а потому существуетъ безконечное множество чиселъ, большихъ числа C_2 и достаточно близкихъ къ нему, которыя лежатъ одновременно внутри каждаго изъ промежутковъ $\langle C_1, C \rangle$, $\langle C, C_2 \rangle$ и $\langle C_2, C' \rangle$. Пусть K есть одно изъ такихъ чиселъ. Такъ какъ K лежитъ внутри каждаго изъ промежутковъ

$\langle C_1, C\rangle$, $\langle C, C_2\rangle$, $\langle C_2, C'\rangle$, то оно заключается такимъ образомъ между значеніями, принимаемыми функціей $f(x)$ соотвѣтственно по концамъ каждаго изъ промежутковъ $\langle c_1, c\rangle$, $\langle c, c_2\rangle$, $\langle c_2, c'\rangle$, а потому существуютъ три значенія x_1, x_2, x_3 независимаго перемѣннаго, лежащія соотвѣтственно внутри этихъ промежутковъ и поэтому неравныя между собою и удовлетворяющія равенствамъ $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = K$.

Подобнымъ же образомъ можно доказать теорему въ томъ случаѣ, если изъ трехъ собственныхъ extrema два суть maxima, но можно также привести этотъ случай къ предыдущему съ помощью слѣдующаго разсужденія. Разсмотримъ функцію $[-f(x)]$; она непрерывна въ $a\ldots b$, такъ какъ функція $f(x)$ непрерывна въ $a\ldots b$. Функція $[-f(x)]$ имѣетъ три собственныхъ extrema $[-f(c_1)]$, $[-f(c_2)]$, $[-f(c_3)]$, такъ какъ функція $f(x)$ имѣетъ собственныя extrema $f(c_1), f(c_2), f(c_3)$, при чемъ каждый extremum лишь измѣняетъ названіе maximum'а на minimum, и наоборотъ. Поэтому, если разсматриваемая функція $f(x)$ имѣетъ изъ трехъ extrema два maxima, напримѣръ, $f(c_1)$ и $f(c_2)$, то функція $[-f(x)]$, удовлетворяя условію теоремы, имѣетъ изъ трехъ extrema $[-f(c_1)]$, $[-f(c_2)]$, $[-f(c_3)]$ два minima $[-f(c_1)]$ и $[-f(c_2)]$, откуда слѣдуетъ, по предыдущему случаю, что для нѣкоторыхъ трехъ неравныхъ значеній x_1, x_2, x_3 независимаго перемѣннаго выполняются равенства $[-f(x_1)] = [-f(x_2)] = [-f(x_3)] = -K$, или же $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = K$, гдѣ $(-K)$, а потому и K можетъ принимать безконечное множество значеній.

7. Окончательные выводы.

Теорема XI. 1) Для того, чтобы функція $f(x)$, непрерывная въ промежуткѣ $a\ldots b$, принимала въ немъ каждое изъ своихъ значеній не болѣе двухъ разъ, принимая нѣкоторыя изъ нихъ навѣрно два раза, необходимо и достаточно, чтобы она имѣла либо одинъ extremum въ $a\ldots b$, либо два extremum'а, удовлетворяя въ послѣднемъ случаѣ всѣмъ тѣмъ дополнительнымъ ограниченіямъ, которыя указаны въ предложеніи VIII, 3).

2) Если функція $f(x)$ непрерывна въ промежуткѣ $a\ldots b$ и если она принимаетъ въ немъ каждое изъ своихъ значеній не болѣе двухъ разъ, принимая нѣкорыя изъ нихъ навѣрно два раза, то она частично монотонна въ промежуткѣ $a\ldots b$, при чемъ этотъ промежутокъ распадается либо на двѣ, либо на три части, въ которыхъ функція $f(x)$ попеременно то возрастаетъ, то убываетъ.

Пусть функція $f(x)$ непрерывна въ промежуткѣ $a\ldots b$, и пусть она принимаетъ въ немъ каждое изъ своихъ значеній не болѣе двухъ разъ, принимая нѣкоторыя изъ нихъ дѣйствительно два раза. Тогда (слѣдствіе изъ теоремы IV) функція $f(x)$ имѣетъ лишь собственныя extrema, при чемъ она не можетъ имѣть ни безконечнаго множества extrema, ни конечнаго ихъ числа, большаго двухъ. Дѣйствительно, если бы разсматриваемая функція $f(x)$ имѣла либо безконечное множество extrema, либо конечное число ихъ, но большее двухъ, то она навѣрно имѣла бы три собственныхъ extrema, а потому, будучи непрерывной въ $a \dots b$, она (теорема X) принимала бы нѣкоторыя изъ своихъ значенiй трижды въ $a \dots b$, что противно условiю. Итакъ функцiя $f(x)$ имѣетъ не болѣе двухъ собственныхъ extrema въ $a \dots b$. Она не можетъ не имѣть ни одного внутренняго extremum'а въ $a \dots b$, такъ какъ тогда она была бы монотонна въ $a \dots b$ (теорема III) и принимала бы поэтому каждое изъ своихъ значенiй лишь одинъ разъ, что также противно условiю. Итакъ, разсматриваемая функцiя $f(x)$ имѣетъ или одинъ extremum или два extrema въ $a \dots b$.

Если непрерывная въ $a \dots b$ функцiя $f(x)$ имѣетъ лишь одинъ extremum, то этого достаточно для того, чтобы она принимала въ $a \dots b$ каждое изъ своихъ значенiй не болѣе двухъ разъ, принимая нѣкоторыя изъ нихъ навѣрно два раза (теорема VII). Если же непрерывная въ $a \dots b$ функцiя $f(x)$ имѣетъ два extrema, — конечно, собственныхъ (слѣдствiе изъ теоремы V), — то этого достаточно для того, чтобы функцiя $f(x)$ принимала въ $a \dots b$ каждое изъ своихъ значенiй не болѣе двухъ разъ, принимая нѣкоторыя изъ нихъ дѣйствительно дважды, лишь тогда, если соблюдены ограниченiя, указанныя въ теоремѣ VIII, 3) и поясненныя чертежами 5 — 10. Такимъ образомъ, предложенiе 1) доказано.

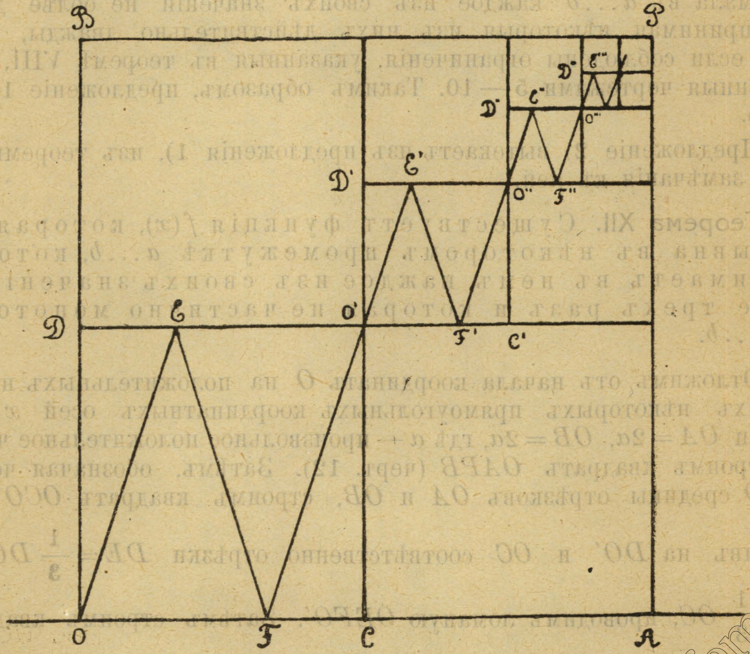
Предложенiе 2) вытекаетъ изъ предложенiя 1), изъ теоремы VI и изъ замѣчанiя къ ней.

Теорема XII. Существуетъ функцiя $f(x)$, которая непрерывна въ нѣкоторомъ промежуткѣ $a \dots b$, которая принимаетъ въ немъ каждое изъ своихъ значенiй не болѣе трехъ разъ и которая не частично монотонна въ $a \dots b$.

Отложимъ отъ начала координатъ O на положительныхъ направленiяхъ нѣкоторыхъ прямоугольныхъ координатныхъ осей x и y отрѣзки $OA = 2a$, $OB = 2a$, гдѣ a — произвольное положительное число, и построимъ квадратъ $OAPB$ (черт. 12). Затѣмъ, обозначая черезъ C и D средины отрѣзковъ OA и OB, строимъ квадратъ $OCO'D$ и, отложивъ на DO' и OC соотвѣтственно отрѣзки $DE = \frac{1}{3} DO'$ и $FC = \frac{1}{3} OC$, проводимъ ломаную $OEFO'$. Затѣмъ строимъ квадратъ $O'C'O''D'$ со сторонами, вдвое меньшими сторонъ квадрата $OCO'D$ и одинаково направленными съ ними, и проводимъ въ немъ ломаную $O'E'F'O''$, подобную ломаной $OEFO'$, затѣмъ — квадратъ $O''C''O'''D''$ со сторонами, вдвое меньшими сторонъ квадрата $O'C'O''D'$ и одинаково направленными съ ними, и ломаную $O''E''F''O'''$, подобную ломаной $O'E'F'O''$, и т. д. безъ конца. Опредѣлимъ теперь функцiю $f(x)$ въ замкнутомъ промежуткѣ $\langle 0, 2a \rangle$ слѣдующими условiями: внутри него и при $x = 0$ значенiе функцiи $f(x)$ опредѣляется ординатой безконечной ломаной $OEFO'E'F'O''E''F''O'''\ldots$, а при $x=2a$: $f(2a)=2a$, такъ что

$$(18)\quad \lim_{x\to 2a} f(x)=f(2a),$$

какъ это вытекаетъ изъ самого способа построенія безконечной ломаной. Построенная такимъ образомъ функція $f(x)$ непрерывна [см. (18)] въ промежуткѣ $\langle 0,\ 2a\rangle$, при чемъ она принимаетъ въ немъ каждое изъ своихъ значеній не болѣе трехъ разъ, такъ какъ она обладаетъ этимъ свойствомъ въ каждомъ изъ промежутковъ $\langle 0,\ a\rangle$, $\langle a,\ \frac{3}{2}a\rangle,\ldots,\ \langle\frac{2^n-1}{2^{n-1}}a,\ \frac{2^{n+1}-1}{2^n}a\rangle,\ldots$ и такъ какъ каждая изъ частей $OEFO'\ldots F^{(n-1)}O^{(n)}$ безконечной ломаной $OEFO'\ldots O^{(n)}E^{(n)}\ldots$ расположена ниже остальной ея части $O^{(n)}E^{(n)}F^{(n)}\ldots$ и ниже точки P (слѣдуетъ имѣть, конечно, также въ виду, что каждая изъ прямыхъ DO', $D'O''$, $D''O'''$,... встрѣчаетъ ломаную $OEFO'\ldots F^{(n-1)}O^{(n)}\ldots$



Черт. 12.

лишь въ трехъ точкахъ). Но построенная нами функція $f(x)$ не обладаетъ въ промежуткѣ $\langle 0,\ 2a\rangle$ свойствомъ частичной монотонности, такъ какъ она не обладаетъ имъ ни въ какой части $\langle 2a-\varepsilon,\ 2a\rangle$ этого промежутка, гдѣ $0<\varepsilon<2a$; дѣйствительно, безконечная ломаная $OEFO'\ldots F^{(n-1)}O^{(n)}\ldots$ образуетъ между параллельными оси y прямыми $x=2a-\varepsilon$ и $x=2a$ безконечное множество зигзаговъ.

Замѣчаніе. Выбирая положительное число a произвольно, разсматривая построенную нами функцію $f(x)$ въ разомкнутомъ промежуткѣ $0 \ldots 2a$ одного изъ трехъ возможныхъ типовъ, перемѣщая ось y параллельно самой себѣ и дополняя графику чертежа 12-го въ точкахъ O или P частями любыхъ кривыхъ, ордината которыхъ возрастаетъ съ возрастаніемъ абсциссы, можно построить функцію, удовлетворяющую условію теоремы и опредѣленную въ любомъ данномъ промежуткѣ $a \ldots b$. Увеличивая число зигзаговъ въ нѣкоторыхъ (или во всѣхъ) частяхъ $OEF \ldots O'$, $O'E'F' \ldots O''$ и т. д. вспомогательной ломаной, расположенныхъ въ послѣдовательныхъ квадратахъ $OCO'D$, $O'C'O''D'$ и т. д. (но такъ, чтобы это число не превосходило даннаго цѣлаго, положительнаго и большаго трехъ числа m), можно построить функцію, непрерывную въ промежуткѣ $a \ldots b$, принимающую въ немъ каждое изъ своихъ значеній не болѣе m разъ, при чемъ $m > 3$, и не частично монотонную въ $a \ldots b$.

Конечно, въ случаѣ четнаго и большаго двухъ значенія m приходится слегка измѣнить характеръ построенія ломаной (напримѣръ, начиная строить часть, лежащую въ первомъ квадратѣ, изъ точки D, а не изъ точки O, или же дополняя ломаную, отвѣчающую числу $m-1$, надлежащей вѣтвью, исходящей изъ точки O или P, и т. п.).

Итакъ, изъ теоремъ I, XI, 2) и XII вытекаетъ слѣдующее свойство непрерывной функціи, указанное во введеніи (см. 1): если непрерывная функція принимаетъ каждое изъ своихъ значеній одинъ или не болѣе двухъ разъ въ томъ промежуткѣ, въ которомъ она задана, то она въ немъ соотвѣтственно монотонна или же частично монотонна; если же непрерывная функція принимаетъ каждое изъ своихъ значеній не болѣе m разъ, гдѣ m — данное цѣлое положительное число, большее двухъ, то она можетъ и не быть частично монотонной.

Введеніе въ ученіе объ основаніяхъ геометріи.

Прив.-доц. В. Ф. Кагана.

(*Продолженіе* *).

§ 7. Отсутствіе противорѣчія въ постулатахъ сравненія.

1. Устанавливая выше основныя свойства понятій: „равно“, „больше“ и „меньше“, мы указали 9 такихъ свойствъ, а затѣмъ обнаружили, что одно изъ нихъ является слѣдствіемъ восьми остальныхъ (§ 3, п. 3). Тамъ же мы указали, что ни одно изъ этихъ 8 свойствъ уже не представляетъ собой слѣдствія семи остальныхъ, т. е. что ни

*) См. „Вѣстникъ“, № 664 — 665.

одинъ изъ постулатовъ I — VIII не можетъ быть выведенъ логически изъ семи остальныхъ. Къ доказательству этого утвержденія мы теперь и должны были бы обратиться.

2. Однако, предварительно мы поставимъ еще другой вопросъ. Постулаты I — VIII послужили для насъ основой небольшой теоріи, которая сводится къ теоремамъ I — VIII (§ 4, п. 2). Эта небольшая теорія — ученіе о величинѣ — играетъ врядъ ли не важнѣйшую роль въ дѣлѣ обоснованія всей математики. Спрашивается, имѣется ли у насъ увѣренность въ томъ, что эти постулаты, а вмѣстѣ съ тѣмъ и построенная на нихъ теорія, не содержатъ логическаго противорѣчія; и если у насъ такого рода увѣренность имѣется, то на чемъ она основана.

Чтобы отвѣтить на этотъ вопросъ, спросимъ себя прежде, какое содержаніе вкладывается въ самое утвержденіе, что данная система предложеній содержитъ внутреннее противорѣчіе. Обычный отвѣтъ на этотъ вопросъ заключается въ томъ, что совмѣстное существованіе этихъ предложеній невозможно. Но этотъ отвѣтъ можно назвать правильнымъ лишь въ томъ случаѣ, если его надлежащимъ образомъ понимать. Дѣло въ томъ, что предложенія, какъ таковыя, конечно, совмѣстно существуютъ, разъ мы совмѣстно ихъ написали или совмѣстно ихъ произносимъ. Смыслъ предыдущаго утвержденія заключается, слѣдовательно, не въ томъ, что самыя предложенія не могутъ совмѣстно существовать, а въ томъ, что они не могутъ быть совмѣстно реализованы, т.-е. что не можетъ быть такой совокупности объектовъ, относительно которой предложенія были бы одновременно справедливы. Еще иначе: нельзя приписать терминамъ такихъ значеній, при которыхъ эти предложенія были бы совмѣстно справедливы.

Иногда уже по самому строенію предложеній мы можемъ обнаружить въ нихъ внутреннее противорѣчіе. Логика даетъ намъ для этого, въ сущности, только одно средство, именно такъ называемый законъ противорѣчія. Два предложенія, изъ которыхъ одно присваиваетъ нѣкоторому объекту какое-либо свойство, а другое за нимъ это самое свойство отрицаетъ, — такія два предложенія не могутъ совмѣстно существовать въ указанномъ выше смыслѣ, т.-е. не могутъ быть совмѣстно осуществлены. Если въ данной системѣ предложеній два предложенія такого рода существуютъ или если два предложенія такого рода могутъ быть выведены по этой системѣ, какъ логическія слѣдствія, то система противорѣчива.

Такихъ двухъ предложеній въ системѣ постулатовъ I — VIII нѣтъ. Если бы у насъ была увѣренность въ томъ, что и никакіе выводы изъ этихъ постулатовъ къ такому явному противорѣчію привести не могутъ, если бы мы имѣли средства логически это обнаружить, то вопросъ объ отсутствіи противорѣчія былъ бы исчерпанъ логическимъ путемъ. Но на пути такого способа рѣшенія вопроса стоятъ препятствія, повидимому, непреодолимыя; къ этому мы еще возвратимся въ слѣдующей главѣ, когда будемъ говорить о сущности логическаго вывода.

3. Но если отъ этого пути мы вынуждены отказаться, то намъ остается только другой путь, по существу эмпирическій: мы должны

обнаружить, что существуютъ такіе объекты и соотношенія, которыя дѣйствительно осуществляютъ постулаты I — VIII. Если такіе объекты и соотношенія существуютъ, если, слѣдовательно, предложенія, выражающія постулаты I — VIII, могутъ получить реальное осуществленіе на одной и той же системѣ объектовъ, то о внутреннемъ противорѣчіи между ними не можетъ быть рѣчи. Но разъ рѣчь идетъ о реальномъ осуществленіи, то таковое можно выполнить только эмпирическимъ путемъ. И такого рода эмпирическіе примѣры осуществленія постулатовъ сравненія мы уже дали выше (въ § 3). Мы указали, что постулатамъ сравненія удовлетворяютъ послѣдовательность событій во времени, совокупность цѣлыхъ чиселъ. Мы разсмотрѣли въ п. 3 § 4 въ видѣ примѣра родъ, составленный изъ нѣсколькихъ поколѣній; такъ какъ такой родъ состоитъ изъ опредѣленнаго числа лицъ, то мы имѣемъ возможность перебрать всѣ возможныя комбинаціи и на каждой изъ нихъ въ отдѣльности убѣдиться въ томъ, что соотношенія α, β, γ удовлетворяютъ постулатамъ сравненія.

Мы приведемъ, однако, еще одну реализацію постулатовъ сравненія и именно ту, которую приводитъ прив.-доц. С. О. Шатуновскій въ названной выше работѣ; это есть простѣйшая ихъ реализація.

4. Какъ велико должно быть наименьшее число элементовъ комплекса, чтобы при надлежащихъ соотношеніяхъ α, β, γ могли получить осуществленіе постулаты I — VIII?

Для того, чтобы получилъ осуществленіе постулатъ IV (транзитивность соотношенія α), въ комплексъ должны входить три элемента A, B, C, находящіеся въ соотношеніяхъ, требуемыхъ этимъ постулатомъ:

$$A\alpha B, \quad B\alpha C, \quad A\alpha C. \tag{1}$$

Далѣе, чтобы могъ найти осуществленіе постулатъ V, въ комплексъ прежде всего должны входить два элемента, изъ которыхъ одинъ стоитъ къ другому въ соотношеніи β; оба эти элемента не могутъ находиться въ числѣ упомянутыхъ уже трехъ элементовъ, ибо эти три элемента попарно связаны соотношеніемъ α, каковое исключаетъ соотношеніе β (постулатъ II). Итакъ въ комплексѣ долженъ быть еще, по крайней мѣрѣ, одинъ элементъ D, который находится съ нѣкоторымъ элементомъ въ соотношеніи β; въ наиболѣе благопріятномъ для насъ случаѣ (т.-е. въ предположеніи возможно меньшаго числа элементовъ въ комплексѣ) элементъ D находится въ соотношеніи β съ однимъ изъ перечисленныхъ уже элементовъ (иначе понадобился бы еще одинъ элементъ), скажемъ, съ элементомъ A; иначе говоря, имѣетъ мѣсто одно изъ соотношеній $A\beta D$ или $D\beta A$. Но, если элементы нашего комплекса связаны соотношеніями, удовлетворяющими постулатамъ I — VIII, то и теоремы I — VIII имѣютъ мѣсто. Поэтому, въ силу теоремы VIII,3 и соотношеній (1), изъ соотношенія $A\beta D$ слѣдуетъ:

$$A\beta D, \quad B\beta D, \quad C\beta D, \tag{2}$$

а изъ соотношенія $D\beta A$ слѣдуетъ:

$$D\beta A, \quad D\beta B, \quad D\beta C. \tag{2'}$$

Въ соотношеніяхъ (2) элементъ D занимаетъ вторыя мѣста, въ соотношеніяхъ ($2'$) — первыя. Но если бы имѣли мѣсто соотношенія ($2'$), то изъ нихъ, въ силу теоремы II, 1, вытекало бы, что

$$A\gamma D,\quad B\gamma D,\quad C\gamma D,$$

гдѣ D занимаетъ вторыя мѣста; въ этомъ случаѣ мы могли бы начать разсужденіе не съ соотношеній β, а съ соотношеній γ. Ничего не измѣняя по существу, мы можемъ поэтому считать, что въ комплексѣ имѣютъ мѣсто соотношенія (2). Но для того, чтобы могъ найти себѣ осуществленіе постулатъ V, должно, сверхъ соотношеній (2), имѣть мѣсто еще одно соотношеніе, содержащее D, а именно такое соотношеніе, въ которомъ D стоитъ въ отношеніи β къ нѣкоторому элементу комплекса. Такимъ элементомъ не можетъ быть ни одинъ изъ первыхъ трехъ элементовъ, ибо, въ силу теоремы I, 1, ни одно изъ соотношеній

$$D\beta A,\quad D\beta B,\quad D\beta C$$

несовмѣстно съ соотношеніями (2). Итакъ, въ нашемъ комплексѣ необходимо долженъ быть еще одинъ элементъ E и должно имѣть мѣсто соотношеніе

$$D\beta E. \tag{3}$$

Для того же, чтобы имѣлъ мѣсто постулатъ (V), должны, въ виду соотношеній (2) и (3), также имѣть мѣсто соотношенія:

$$A\beta E,\quad B\beta E,\ C\beta E. \tag{4}$$

Въ силу теоремы II, 1, соотношенія (2), (3) и (4) влекутъ за собой соотношенія:

$$\left.\begin{array}{r} D\gamma A,\quad D\gamma B,\quad D\gamma C,\\ E\gamma D,\\ E\gamma A,\quad E\gamma B,\quad E\gamma C. \end{array}\right\} \tag{5}$$

Далѣе, чтобы былъ осуществленъ постулатъ VII, наряду съ соотношеніями (1) должны были бы существовать соотношенія:

$$B\alpha A,\quad C\alpha B,\quad C\alpha A. \tag{6}$$

Наконецъ, чтобы получилъ осуществленіе постулатъ VIII, должны имѣть мѣсто соотношенія:

$$A\alpha A,\quad B\alpha B,\quad C\alpha C,\quad D\alpha D,\quad E\alpha E. \tag{7}$$

Итакъ, изложенныя въ этомъ пунктѣ соображенія приводятъ къ слѣдующему выводу: чтобы въ комплексѣ нашли осуществленіе постулаты I — VIII, онъ долженъ содержать не менѣе 5 элементовъ и таковые должны быть связаны соотношеніями (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7)*).

5. Допустимъ теперь, что мы имѣемъ нѣкоторый комплексъ, состоящій изъ 5 элементовъ A, B, C, D, E, и что между этими элементами имѣютъ мѣсто троякаго рода соотношенія α, β, γ и при этомъ такъ, что эти соотношенія выражаются и исчерпываются таблицами (1) — (7). Это значитъ, что соотношенія α, β, γ имѣютъ между элементами этихъ комплексовъ мѣсто въ тѣхъ и только въ тѣхъ комбинаціяхъ, которыя отмѣчены въ таблицахъ (1) — (7); еще яснѣе, — если λ есть одно изъ трехъ соотношеній α, β или γ, а X и Y — элементы нашего комплекса, то соотношеніе $X \lambda Y$ имѣетъ или не имѣетъ мѣсто, смотря по тому, встрѣчается ли оно въ перечнѣ (1) — (7) или нѣтъ. Спрашивается, удовлетворяютъ ли въ этомъ комплексѣ соотношенія α, β, γ постулатамъ I — VIII? Нетрудно убѣдиться, что они этимъ требованіямъ дѣйствительно удовлетворяютъ.

6. Замѣтимъ прежде всего, что въ таблицахъ (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) имѣется 25 соотношеній; каждый изъ 5-ти элементовъ связанъ съ каждымъ изъ этихъ элементовъ однимъ изъ нашихъ трехъ соотношеній. Это станетъ особено ясно, если мы перепишемъ эти 25 соотношеній въ слѣдующемъ порядкѣ:

$$\begin{array}{ccccc} A\alpha A, & A\alpha B, & A\alpha C, & A\beta D, & A\beta E, \\ B\alpha A, & B\alpha B, & B\alpha C, & B\beta D, & B\beta E, \\ C\alpha A, & C\alpha B, & C\alpha C, & C\beta D, & C\beta E, \\ D\gamma A, & D\gamma B, & D\gamma C, & D\alpha D, & D\beta E, \\ E\gamma A, & E\gamma B, & E\gamma C, & E\gamma D, & E\alpha E. \end{array} \qquad (8)$$

Здѣсь первая строка показываетъ, что элементъ A стоитъ къ каждому изъ 5 элементовъ въ одномъ изъ соотношеній α, β, γ и притомъ только въ одномъ (ибо, повторяемъ, соотношенія, въ этой таблицѣ не написанныя, вовсе не имѣютъ мѣста). Такимъ же образомъ вторая строка обнаруживаетъ, что элементъ B стоитъ въ одномъ и и притомъ только въ одномъ изъ 5 соотношеній къ каждому изъ 5 элементовъ и т. д. Отсюда ясно, что соотношенія эти удовлетворяютъ, съ одной стороны, постулату I (ибо каждый элементъ стоитъ въ одномъ изъ трехъ соотношеній къ каждому изъ 5 элементовъ), а, съ другой стороны, постулатамъ II и III (ибо каждое соотношеніе исключаетъ другое соотношеніе между тѣми же элементами).

7. Чтобы убѣдиться въ томъ, что соотношеніе α транзитивно, т.-е. что удовлетворяется постулатъ IV, замѣтимъ, что соотношеніе α въ таблицѣ (8) имѣетъ мѣсто въ 11 случаяхъ. Мы должны перебрать

*) Постулаты могутъ найти осуществленіе и въ комплексѣ съ тремя элементами; но тогда соотношеніе α будетъ существовать только въ видѣ $A\alpha A$.

всѣ эти случаи. Начнемъ съ соотношенія AaA. Посмотримъ, можетъ ли получить осуществленіе условіе постулата IV въ такомъ порядкѣ, чтобы соотношеніе AaA составляло въ немъ первое звено. Для этого второе звено должно начинаться съ элемента A, которымъ заканчивается первое; такихъ соотношеній (начинающихся съ элемента A) въ нашей таблицѣ имѣется 3 (первыя три въ первой строкѣ). Возможны, слѣдовательно, только три комбинаціи, начинающіяся со звена AaA и осуществляющія условіе постулата IV:

$$AaA,\ AaA;\quad AaA,\ AaB;\quad AaA,\ AaC.$$

Постулатъ IV требуетъ, чтобы сосуществованіе соотношеній въ этихъ трехъ комбинаціяхъ влекло за собой соотношенія AaA, AaB, AaC, каковыя дѣйствительно имѣли мѣсто. Итакъ, всякій разъ, какъ условіе постулата IV осуществляется въ нашемъ комплексѣ съ первымъ звеномъ AaA, — постулатъ оправдывается.

Посмотримъ теперь, можетъ ли въ нашемъ комплексѣ получить осуществленіе постулатъ IV въ такомъ порядкѣ, чтобы первымъ звеномъ служило соотношеніе AaB. Ясно, что вторымъ звеномъ въ такомъ случаѣ должно служить соотношеніе a, начинающееся съ элемента B; такихъ соотношеній имѣется 3: это первыя 3 соотношенія во второй строкѣ. Мы получаемъ, такимъ образомъ, три комбинаціи:

$$AaB,\ BaA;\quad AaB,\ BaB;\quad AaB,\ BaC.$$

По требованію постулата IV эти соотношенія должны имѣть слѣдствіями соотношенія AaB, AaA, AaC, каковыя дѣйствительно имѣютъ мѣсто. Итакъ, если условіе постулата IV осуществляется въ нашемъ комплексѣ съ первымъ звеномъ AaB, то постулатъ всегда оправдывается.

Такимъ же образомъ мы должны обозрѣть, въ какихъ комбинаціяхъ получаетъ осуществленіе условіе постулата IV, когда первымъ звеномъ служитъ каждое изъ остальныхъ 9 соотношеній a въ нашемъ комплексѣ. Мы убѣдимся, что соотношеніе, которое, по требованію постулата IV, должно сопутствовать каждой комбинаціи, дѣйствительно имѣетъ мѣсто. Для полной отчетливости мы приводимъ всѣ возможныя комбинація, помѣщая за каждой комбинаціей требуемое постулатомъ соотношеніе:

$$AaC,\ CaC;\ AaC.\quad AaC,\ CaA;\ AaA.\quad AaC,\ CaB;\ AaB.$$

$$BaB,\ BaB;\ BaB.\quad BaB,\ BaA;\ BaA.\quad BaB,\ BaC;\ BaC.$$

$$BaA,\ AaA;\ BaA.\quad BaA,\ AaB;\ BaB.\quad BaA,\ AaC;\ BaC.$$

$$BaC,\ CaC;\ BaC.\quad BaC,\ CaA;\ BaA.\quad BaC,\ CaB;\ BaB.$$

$$CaC,\ CaC;\ CaC.\quad CaC,\ CaA;\ CaA.\quad CaC,\ CaB;\ CaB.$$

$$CaA,\ AaA;\ CaA.\quad CaA,\ AaB;\ CaB.\quad CaA,\ AaC;\ CaC.$$

$$CaB,\ BaB;\ CaB.\quad CaB,\ BaA;\ CaA.\quad CaB,\ BaC;\ CaC.$$

$$DaD,\ DaD;\ DaD.\quad EaE,\ EaE;\ EaE.$$

Итакъ, во всѣхъ случаяхъ, когда въ нашемъ комплексѣ съ соотношеніями (8) осуществляется условіе постулата IV, требуемое имъ слѣдствіе имѣетъ мѣсто. Иначе говоря, соотношенія α, β, γ въ нашемъ комплексѣ удовлетворяютъ постулату IV.

8. Совершенно такъ же можно убѣдиться въ томъ, что соотношенія α, β, γ въ нашемъ комплексѣ удовлетворяютъ постулатамъ V и VI: это дѣлается даже много проще. Начнемъ съ постулата VI.

Соотношеніе γ имѣетъ мѣсто въ нашей таблицѣ въ 7 случаяхъ; именно это суть первыя три соотношенія 4-ой строки и первыя четыре соотношенія 5-ой. Но если возьмемъ три соотношенія 4-ой строки и первыя три соотношенія 5-ой, то мы легко убѣдимся, что ни одно изъ нихъ не можетъ служить первымъ звеномъ комбинаціи, выполняющей условіе постулата VI: всѣ эти шесть соотношеній заканчиваются однимъ изъ элементовъ A, B, C, которые соотношенія типа γ не начинаютъ, — имъ не соотвѣтствуетъ требуемое второе звено. Но четвертое соотношеніе 5-ой строки $E\beta D$ въ соединеніи съ каждымъ изъ трехъ первыхъ соотношеній 4-ой строки воспроизводитъ комбинацію, предусматриваемую условіемъ постулата VI; это суть слѣдующія три комбинаціи:

$$E\gamma D,\ D\gamma A;\quad E\gamma D,\ D\gamma B;\quad E\gamma D,\ D\gamma C;$$

согласно постулату VI, эти комбинаціи должны повлечь за собою соотношенія $E\gamma A$, $E\gamma B$, $E\gamma C$, которыя дѣйствительно имѣютъ мѣсто: это суть первыя три соотношенія въ послѣдней строкѣ таблицы (8).

Такимъ же образомъ мы видимъ, что наша таблица даетъ только три комбинаціи, воспроизводящія условіе постулата V:

$$A\beta D,\ D\beta E;\quad B\beta D,\ D\beta E;\quad C\beta D;\quad D\beta E;$$

постулатъ V требуетъ, чтобы при наличности этихъ соотношеній имѣли мѣсто также соотношенія $A\beta E$, $B\beta E$, $C\beta E$; эти соотношенія мы дѣйствительно находимъ въ таблицѣ.

Еще проще обнаруживается обратимость соотношенія α (постулатъ VII). Соотношеніямъ $A\alpha B$, $A\alpha C$, $B\alpha C$ соотвѣтствуютъ соотношенія $B\alpha A$, $C\alpha A$, $C\alpha B$ и обратно. Наконецъ, діагональныя соотношенія въ таблицѣ (8) обнаруживаютъ возвратность соотношенія α (постулатъ VIII).

9. Все изложенное приводитъ къ слѣдующему результату. Если въ нѣкоторомъ комплексѣ, составленномъ изъ пяти элементовъ, между послѣдними имѣютъ мѣсто троякаго рода соотношенія, которыя распредѣлены между ними такъ, какъ это указано въ таблицѣ (8), то соотношенія эти удовлетворяютъ постулатамъ I — VIII. Нашъ вопросъ былъ бы совершенно исчерпанъ, если бы мы обнаружили, что возможенъ такой комплексъ изъ пяти элементовъ съ такими соотношеніями въ немъ α, β, γ, которыя выражаются таблицей (8). Но это очень просто обнаружить. Возьмемъ пять буквъ A, B, C, D, E и составимъ изъ нихъ слѣдующія комбинаціи:

$$AA,\ BB,\ CC,\ DD,\ EE,$$
$$AB,\ AC,\ BC, \qquad (9)$$
$$\frac{A}{D},\ \frac{B}{D},\ \frac{C}{D},\ \frac{A}{E},\ \frac{B}{E},\ \frac{C}{E},\ \frac{D}{E}.$$

Будемъ говорить, что одинъ элементъ нашего комплекса стоитъ къ другому въ соотношеніи α, если онъ въ таблицѣ (9) написанъ съ нимъ рядомъ съ той или съ другой стороны. Будемъ говорить далѣе, что одинъ элементъ стоитъ къ другому въ соотношеніи β, если онъ написанъ надъ нимъ, и въ соотношеніи γ, если онъ написанъ подъ нимъ. Тогда тотъ фактъ, что въ таблицѣ (9) имѣется комбинація AA, выразится черезъ $A\alpha A$; тотъ фактъ, что имѣется комбинація AB, выразится черезъ $A\alpha B$ и $B\alpha A$; наконецъ, тотъ фактъ, что имѣется комбинація $\frac{A}{D}$, выразится черезъ $A\beta D$ и $D\gamma A$. Если мы такимъ образомъ отмѣтимъ соотношенія, выражаемыя всѣми комбинаціями (9), то мы получимъ таблицу (8).

Итакъ, соотношенія (8) дѣйствительно могутъ быть реализованы, и потому отсутствіе противорѣчія въ постулатахъ I — VIII не подлежитъ сомнѣнію.

Нужно, однако, отмѣтить, что въ построеніи таблицы (9), въ сущности, не было необходимости. Мы привели ее исключительно ради большей ясности; по существу же, мы вполнѣ могли ограничиться таблицей (8). Въ самомъ дѣлѣ, составимъ изъ элементовъ A, B, C, D, E и изъ промежуточныхъ литеръ α, β, γ таблицу (8) и будемъ говорить, что элементъ A находится, скажемъ, къ элементу B въ соотношеніи α, если въ таблицѣ (8) есть комбинація $A\alpha B$ и т. д. Еще иначе, выраженіе, скажемъ, „элементъ D находится къ элементу E въ соотношеніи γ“ означаетъ, что въ таблицѣ (8) есть комбинація $D\gamma E$. При такой точкѣ зрѣнія таблица (8) сама осуществляетъ соотношенія α, β, γ, удовлетворяющія постулатамъ I — VIII.

10. Итакъ, мы обнаружили, что постулаты сравненія не содержатъ внутренняго противорѣчія. Послѣднимъ моментомъ этого доказательства является эмпирическій актъ — созерцаніе таблицы (8). Наше убѣжденіе въ этомъ имѣетъ такимъ образомъ исключительно эмпирическое обоснованіе. Существуетъ, однако, установившееся недовѣріе ко всякому эмпирическому познанію, и иного читателя это можетъ до извѣстной степени оставить неудовлетвореннымъ.

Не входя здѣсь въ общія разсужденія объ эмпирическомъ познаніи вообще, замѣтимъ, что здѣсь такого рода недовѣріе не имѣетъ основанія. Недовѣріемъ, въ большей или меньшей степени заслуженнымъ, пользуются эмпирическіе законы, устанавливаемые на основаніи многократнаго наблюденія. Причиной этого недовѣрія является то обстоятельство, что закономѣрности (сосуществованія), подтвердившіяся при многократныхъ наблюденіяхъ, могутъ все же не подтвердиться при новомъ наблюденіи; исторія индуктивныхъ наукъ дѣйствительно свидѣтельствуетъ, что эмпирическіе законы постоянно приходилось ограничивать, дополнять, видоизмѣнять, а то и вовсе отвергать.

Совершенно иначе обстоитъ дѣло въ нашемъ случаѣ. Здѣсь доказательство отсутствія логическаго противорѣчія въ данной системѣ предложеній требуетъ только однократнаго эмпирическаго подтвержденія факта, что эти предложенія (въ какомъ либо одномъ случаѣ) осуществляются. Разъ есть хотя бы одна система объектовъ и соотношеній, которые удовлетворяютъ постулатамъ I — VIII, то не можетъ уже быть сомнѣній въ томъ, что эта система постулатовъ свободна отъ противорѣчій. Повседневная жизнь безъ участія сознанія давно привела къ этому убѣжденію. Но сопоставленіе того, что написано въ таблицѣ (8), устанавливаетъ это съ тою степенью достовѣрности, какая вообще доступна для нашего сужденія. Это сопоставленіе требуетъ созерцанія таблицы (8) и нѣкоторыхъ другихъ эмпирическихъ въ ней операцій (комбинированія отдѣльныхъ написанныхъ въ таблицѣ соотношеній); но мы утверждаемъ и постараемся это ниже доказать, что здѣсь мы имѣемъ дѣло съ такими эмпирическими пріемами, какихъ мы не въ состояніи избѣжать ни при какомъ сужденіи, не исключая простѣйшихъ силлогизмовъ.

Итакъ, тотъ фактъ, что постулаты I — VIII не содержатъ внутренняго противорѣчія, въ конечномъ счетѣ подтверждается только соображеніями эмпирическаго свойства; но эти соображенія имѣютъ высшую степень достовѣрности, какую можетъ дать какое бы то ни было сужденіе.

§ 8. Независимость постулатовъ сравненія.

1. Теперь мы обратимся къ вопросу о независимости постулатовъ сравненія. Методъ, которымъ мы при этомъ будемъ пользоваться, по существу, не отличается отъ того, которымъ мы пользовались въ предыдущемъ параграфѣ. Если бы одинъ изъ постулатовъ, скажемъ, I-ый, былъ слѣдствіемъ остальныхъ, то это означало бы, что всякій разъ, какъ нѣкоторыя соотношенія α, β, γ въ комплексѣ удовлетворяютъ постулатамъ II — VIII, они необходимо удовлетворяютъ также постулату I. Если мы обнаружимъ поэтому, что существуетъ такой комплексъ и такія три соотношенія въ немъ, которыя удовлетворяютъ постулатамъ II — VIII, между тѣмъ какъ постулатъ I не выполняется, то этимъ будетъ доказана независимость постулата I отъ остальныхъ.

2. Возьмемъ комплексъ, состоящій изъ всѣхъ треугольниковъ на плоскости. Будемъ говорить, что треугольникъ A находится къ треугольнику B въ соотношеніи α, если треугольникъ A конгруэнтенъ треугольнику B. Будемъ говорить далѣе, что треугольникъ A находится къ треугольнику B въ соотношеніи β, если первый можетъ быть помѣщенъ такъ, чтобы второй находился внутри его. Будемъ, наконецъ, говорить, что треугольникъ A находится къ треугольнику B въ соотношеніи γ, если первый можетъ быть помѣщенъ внутри второго.

Совершенно ясно, что соотношеніе α исключаетъ соотношенія β и γ, т.-е. что постулаты II и III удовлетворены. Ясно также, что всѣ три соотношенія транзитивны: если $\triangle A$ конгруэнтенъ $\triangle B$, а $\triangle B$ конгруэнтенъ $\triangle C$, то $\triangle A$ конгруэнтенъ $\triangle C$; если $\triangle A$ можетъ охватить $\triangle B$, а этотъ послѣдній можетъ охватить $\triangle C$, то $\triangle A$ можетъ охватить $\triangle C$; если, наконецъ, $\triangle A$ можетъ помѣститься внутри $\triangle B$, а послѣдній — внутри $\triangle C$, то $\triangle A$ можетъ помѣститься внутри $\triangle C$. Постулаты IV — VI, такимъ образомъ, также удовлетворены. Не менѣе ясно, что a есть соотношеніе возвратное и обратимое (постулаты VII и VIII).

Съ другой стороны, наши соотношенія, очевидно, не удовлетворяютъ постулату I. Въ самомъ дѣлѣ, возможны, конечно, два треугольника, которые не конгруэнтны и изъ которыхъ ни одинъ не можетъ быть помѣщенъ внутри другого.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что постулатъ I не является слѣдствіемъ остальныхъ.

3. Казалось бы, что вопросъ о дизъюнкціи, играющій при установленіи критеріевъ сравненія основную роль, всегда долженъ былъ бы исчерпываться до конца въ каждомъ частномъ случаѣ. Между тѣмъ этимъ нерѣдко пренебрегаютъ, что приводитъ иногда къ неправильнымъ выводамъ. Мы приведемъ только одинъ примѣръ.

Въ п. 5 § 6-го мы привели критеріи, которые могутъ служить для сравненія площадей прямолинейныхъ фигуръ. Въ этомъ случаѣ провѣрка постулатовъ сравненія представляетъ затрудненія только по отношенію къ вопросу о наличности дизъюнкціи. Существованіе таковой казалось настолько очевиднымъ, что самый вопросъ возникъ лишь недавно. Итальянскій геометръ Лацпери (Lazzeri) въ 1895 г., повидимому, первый доказалъ, что дизъюнкція здѣсь дѣйствительно имѣетъ мѣсто.

Но совершенно аналогичные критеріи можно было бы предложить для сравненія объемовъ многогранниковъ. Именно, можно было бы принять слѣдующія опредѣленія: a) будемъ считать объемъ многогранника A равнымъ объему многогранника B, если первый можно разложить на такія многогранныя же части, изъ которыхъ можно составить многогранникъ B; b) будемъ говорить, что многогранникъ A имѣетъ большій объемъ, чѣмъ многранникъ B, если первый можно разложить на многогранныя части и изъ послѣднихъ составить многогранникъ, внутри котораго помѣщается второй многогранникъ; c) мы будемъ, наконецъ, говорить, что многогранникъ A имѣетъ меньшій объемъ, нежели многогранникъ B, если первый можно разложить на многогранныя части и изъ нихъ составить многогранникъ, содержащійся внутри многогранника B. Вопросъ о томъ, даютъ ли эти критеріи дизъюнкцію, настолько труденъ, что проф. Гильбертъ (Hilbert) въ рѣчи, произнесенной въ общемъ собраніи перваго международнаго математическаго конгресса въ Парижѣ, отнесъ ее къ числу труднѣйшихъ задачъ, ожидающихъ еще своего рѣшенія. Задача эта дѣйствительно была разрѣшена позднѣе Деномъ (Dehn) и именно въ томъ смыслѣ, что эти критеріи не даютъ дизъюнкціи. Денъ показалъ, что постулатъ I не имѣетъ мѣста; поэтому для опредѣленія объема многогранниковъ эти критеріи сравненія служить не могутъ, несмотря на аналогію, которую они имѣютъ съ соотвѣтствующими критеріями для площадей многоугольниковъ.

4. Переходимъ къ вопросу о независимости постулата II.

Какъ мы видѣли въ предыдущемъ параграфѣ, существуютъ такіе комплексы и такія соотношенія въ нихъ α, β, γ, которые удовлетворяютъ постулатамъ сравненія. Возьмемъ такой комплексъ съ соотношеніями α, β, γ и установимъ въ томъ же комплексѣ нѣсколько иныя соотношенія α', β', γ'. Именно, подъ соотношеніемъ $A\alpha' B$ и $A\gamma' B$ мы будемъ разумѣть соотвѣтственно то же, что и подъ соотношеніями $A\alpha B$ и $A\gamma B$; но подъ соотношеніемъ $A\beta' B$ мы будемъ разумѣть соединеніе соотношеній α и β; иными словами, подъ соотношеніемъ $A\beta' B$ мы будемъ разумѣть, что имѣетъ мѣсто либо $A\alpha B$, либо $A\beta B$. [Если, напримѣръ, α, β, γ обозначаютъ $=$, $>$, $<$, то α', β', γ' означаютъ $=$, $\geqslant$, $<$].

Ясно, что соотношенія α', β', γ' постулату II не удовлетворяютъ. Въ самомъ дѣлѣ, если имѣетъ мѣсто соотношеніе $A\alpha B$, то совмѣстно существуютъ соотношенія $A\alpha' B$ и $A\beta' B$. Съ другой стороны, остальнымъ постулатамъ соотношенія α', β' γ' удовлетворяютъ. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ соотношенія α, β, γ постулату I удовлетворяютъ, то для каждой пары элементовъ имѣетъ мѣсто, по крайней мѣрѣ, одно изъ соотношеній α', β' γ', т. е. послѣднія удовлетворяютъ постулату I. Ясно также, что соотношеніе α' (т.-е. α) исключаетъ соотношеніе γ' (т.-е. γ); постулатъ III тоже удовлетворенъ.

Изъ того обстоятельства, что соотношенія α' и γ' совпадаютъ соотвѣтственно съ соотношеніями α и γ слѣдуетъ, что удовлетворяются также постулаты IV, VI, VII и VIII. Но легко видѣть, что и постулатъ V также справедливъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть имѣютъ мѣсто соотношенія $A\beta' B$ и $B\beta' C$. Первое означаетъ, что имѣетъ мѣсто либо соотношеніе $A\alpha B$, либо соотношеніе $A\beta B$; второе означаетъ, что имѣетъ мѣсто либо $B\alpha C$, либо $B\beta C$; такимъ образомъ, имѣетъ мѣсто одна изъ четырехъ комбинацій:

$$A\alpha B,\ B\alpha C;\quad A\alpha B,\ B\beta C;\quad A\beta B,\ B\alpha C;\quad A\beta B,\ B\beta C.$$

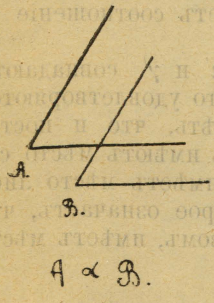
Но при первой комбинаціи имѣетъ мѣсто соотношеніе $A\alpha C$ (постулатъ IV), при второй и третьей $A\beta C$ (теоремы VIII, 3 и VIII, 4 п. 2 § 4-го), при четвертой $A\beta C$ (постулатъ V); слѣдовательно, во всякомъ случаѣ имѣетъ мѣсто соотношеніе $A\beta' C$. Итакъ, соотношенія α', β', γ' удовлетворяютъ постулату V.

Вмѣстѣ съ тѣмъ доказано, что постулатъ II не зависитъ отъ остальныхъ постулатовъ. Читателю будетъ, быть можетъ, полезно прослѣдить эти отвлеченныя разсужденія на болѣе наглядномъ примѣрѣ. Возьмемъ комплексъ всевозможныхъ треугольниковъ, подобныхъ одному опредѣленному треугольнику. Въ этомъ комплексѣ подъ соотношеніемъ $A\alpha' B$ будемъ разумѣть, что $\triangle A$ конгруэнтенъ $\triangle B$; подъ соотношеніемъ $A\gamma' B$ будемъ разумѣть, что треугольникъ A можетъ быть помѣщенъ внутри треугольника B; наконецъ, подъ соотношеніемъ $A\beta' B$ будемъ разумѣть, что треугольникъ A не можетъ быть помѣщенъ внутри треугольника B. Эти соотношенія удовлетворяютъ всѣмъ постулатамъ, кромѣ II.

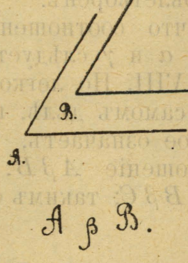
5. Совершенно ясно, что такимъ же образомъ мы можемъ доказать и независимость постулата III. Для этого достаточно опредѣлить соотношенія α', β', γ' нѣсколько иначе, — именно такъ, чтобы соотношенія α' и β' совпадали соотвѣтственно съ соотношеніями α и β, а соотношеніе γ' было соединеніемъ соотношеній α и γ.

6. Займемся теперь вопросомъ о независимости постулата IV. При этомъ мы вновь воспользуемся геометрическими соображеніями.

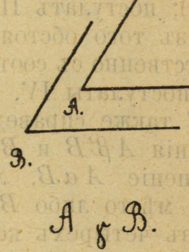
Возьмемъ комплексъ угловъ, имѣющихъ параллельныя стороны и обращенныхъ отверстіями въ одну и ту же сторону. Если периферія угла A имѣетъ въ этомъ комплексѣ хотя бы одну общую точку съ периферіей угла B, то мы будемъ говорить что уголъ A стоитъ къ углу B въ соотношеніи α. Если периферія угла A не имѣетъ общихъ точекъ съ периферіей угла B и вершина A лежитъ внѣ угла B, то мы будемъ говорить, что уголъ A стоитъ къ углу B въ соотношеніи β; если периферія угла A не имѣетъ общихъ точекъ съ периферіей угла B, но вершина угла A лежитъ внутри угла B, то мы будемъ говорить, что уголъ A стоитъ къ углу B въ соотношеніи γ (черт. 1, 2, 3).



Черт. 1.



Черт. 2.

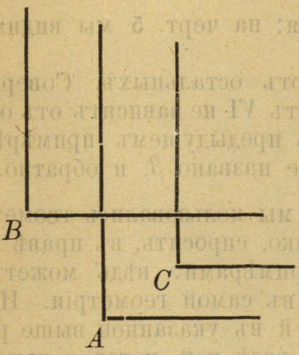


Черт. 3.

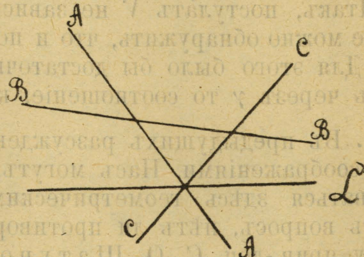
Теперь ясно, что каждый уголъ нашего комплекса стоитъ къ каждому другому углу либо въ соотношеніи α, либо въ соотношеніи β, либо въ соотношеніи γ. Въ самомъ дѣлѣ, если периферія угла A не имѣетъ общихъ точекъ съ периферіей угла B, то вершина угла A лежитъ либо внѣ, либо внутри угла B. Постулатъ I имѣетъ мѣсто. Нетрудно также видѣть что соотношеніе $A\alpha B$ исключаетъ каждое изъ соотношеній $A\beta B$ и $A\gamma B$, такъ что постулаты II и III также удовлетворены. Легко далѣе видѣть, что соотношенія β и γ транзитивны (постулаты V и VI), и что α есть соотношеніе обратимое и возвратное (постулаты VII и VIII). Но соотношеніе α не транзитивно, какъ это видно изъ черт. 4, гдѣ имѣютъ мѣсто соотношенія $A\alpha B$ и $B\alpha C$, но въ то же время вмѣсто соотношенія $A\alpha C$ имѣетъ мѣсто несовмѣстное съ нимъ соотношеніе $A\beta C$. Такимъ образомъ, постулатъ IV не представляетъ собою слѣдствія остальныхъ постулатовъ.

Для доказательства независимости постулата V намъ придется прибѣгнуть къ примѣру, нѣсколько болѣе сложному.

Въ нѣкоторой плоскости выдѣлимъ опредѣленную прямую L, которую будемъ называть осью; для наглядности будемъ считать, что за ось принята горизонтальная прямая (черт. 5). Разсмотримъ комплексъ $\mathfrak{A}$, состоящій изъ всѣхъ прямыхъ этой плоскости, кромѣ прямой L. Если какая-либо прямая A этого комплекса пересѣкаетъ прямую L, то подъ угломъ наклоненія прямой A къ оси L мы будемъ разумѣть уголъ, который лучъ, идущій отъ точки пересѣченія по оси въ опредѣленную сторону, скажемъ, вправо, образуетъ съ лучемъ, идущимъ отъ точки пересѣченія по прямой A вверхъ отъ оси. При такомъ соглашеніи уголъ, подъ которымъ прямая A, пересѣкающая ось, наклонена къ оси, будетъ опредѣленъ однозначно.



Черт. 4.



Черт. 5.

Если A и B суть прямыя комплекса $\mathfrak{A}$ и прямая A совпадаетъ съ прямой B или параллельна послѣдней, то мы будемъ говорить, что прямая A находится къ прямой B въ соотношеніи α ($A\,\alpha\,B$).

Ясно, что α есть соотношеніе транзитивное, обратимое и возвратное, т.-е. удовлетворяетъ требованіямъ постулатовъ IV, VII и VIII.

Если прямая A пересѣкаетъ прямую B въ одной точкѣ, не принадлежащей оси, или пересѣкаетъ прямую B въ точкѣ, принадлежащей оси, но въ этомъ послѣднемъ случаѣ наклонена къ оси подъ меньшимъ угломъ, нежели прямая B, то мы будемъ говорить, что прямая A находится къ прямой B въ соотношеніи β ($A\,\beta\,B$). Если, наконецъ, прямая A пересѣкаетъ прямую B въ точкѣ, лежащей на оси, но наклонена къ оси подъ угломъ, большимъ, нежели прямая B, то она находится къ прямой B въ соотношеніи γ ($A\,\gamma\,B$). На черт. 5 имѣютъ мѣсто соотношенія:

$$A\beta B,\quad A\gamma C,\quad B\beta A,\quad B\beta C,\quad C\beta B,\quad C\beta A.$$

Если A и B суть двѣ прямыя нашего комплекса и A не совпадаетъ съ B и не параллельна ей, то прямая A пересѣкаетъ прямую B въ точкѣ, лежащей внѣ оси или на оси; такимъ образомъ, если не имѣетъ мѣста соотношеніе $A\,\alpha\,B$, то необходимо должно имѣть мѣсто одно изъ соотношенiй $A\beta B$ или $A\gamma B$. Постулаты I — III удовлетворены; кромѣ того, какъ мы видѣли выше, постулаты IV, VII и VIII также удовлетворены.

Легко обнаружить, что удовлетворяется также и постулатъ VI. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что имѣютъ мѣсто соотношенiя $A\gamma B$ и $B\gamma C$. Это означаетъ, что прямая A пересѣкаетъ прямую B въ точкѣ O, лежащей на оси, и что при этомъ прямая A наклонена къ оси подъ большимъ угломъ, нежели прямая B; далѣе, прямая B пересѣкаетъ прямую C также на оси и наклонена къ послѣдней подъ большимъ угломъ, нежели прямая C. Но отсюда слѣдуетъ, что всѣ три прямыя пересѣкаютъ ось въ одной и той же точкѣ, и что прямая A наклонена къ оси подъ большимъ угломъ, нежели прямая C; иными словами, имѣетъ мѣсто соотношенiе $A\gamma C$. Постулатъ VI, такимъ образомъ, удовлетворяется.

Но постулатъ V не удовлетворяется: на черт. 5 мы видимъ соотношенiя $A\beta B$, $B\beta C$ и $A\gamma C$.

Итакъ, постулатъ V не зависитъ отъ остальныхъ. Совершенно такъ же можно обнаружить, что и постулатъ VI не зависитъ отъ остальныхъ. Для этого было бы достаточно въ предыдущемъ примѣрѣ обозначать черезъ γ то соотношенiе, которое названо β, и обратно.

7. Въ предыдущихъ разсужденiяхъ мы пользовались геометрическими соображенiями. Насъ могутъ, однако, спросить, въ правѣ ли мы пользоваться здѣсь геометрическими примѣрами: вѣдь можетъ возникнуть вопросъ, нѣтъ ли противорѣчiя въ самой геометрiи. Именно поэтому прив.-доц. С. О. Шатуновскiй въ указанной выше работѣ пользуется исключительно таблицами въ родѣ той, которая приведена въ параграфѣ 7. Для доказательства независимости восьми постулатовъ имъ составлены 8 таблицъ такимъ образомъ, что въ каждой изъ нихъ осуществляются 7 постулатовъ и одинъ не осуществляется. Мы достаточно выяснили въ предыдущемъ параграфѣ, что осуществленiе каждаго изъ соотношенiй $A\alpha B$, $A\beta B$ или $A\gamma B$ можетъ свестись просто къ тому, что въ таблицу занесена та или другая комбинацiя.

Для доказательства независимости постулата VII г. Шатуновскiй строитъ таблицу, которая отличается отъ таблицы (8) на стр. 209 только тѣмъ, что въ ней соотношенiя $B\alpha A$, $C\alpha A$ и $C\alpha B$ замѣнены черезъ $B\gamma A$, $C\gamma A$, $C\gamma B$. Таблица получаетъ, такимъ образомъ, видъ:

$$\begin{array}{lllll}
A\alpha A, & A\alpha B, & A\alpha C, & A\beta D, & A\beta E, \\
B\gamma A, & B\alpha B, & B\alpha C, & B\beta D, & B\beta F, \\
C\gamma A, & C\gamma B, & C\alpha C, & C\beta D, & C\beta E, \\
D\gamma A, & D\gamma B, & D\gamma C, & D\alpha D, & D\beta E, \\
E\gamma A, & E\gamma B, & E\gamma C, & E\gamma D, & E\alpha E
\end{array} \tag{1}$$

Въ этой таблицѣ, какъ и въ таблицѣ (8), имѣется 25 соотношенiй: каждый изъ 5 элементовъ стоитъ къ каждому же изъ нихъ въ одномъ изъ соотношенiй α, β, γ. При этомъ никогда соотношенiе вида $X\alpha Y$ не сопровождается соотношенiемъ $X\beta Y$ или $X\gamma Y$; постулаты I — III, такимъ образомъ, удовлетворены. Врядъ ли здѣсь будетъ цѣлесообразно повторять весь рядъ разсужденiй, какой былъ приведенъ въ предыдущемъ параграфѣ для провѣрки постулатовъ сравненiя. Читатель продѣлаетъ это самъ и убѣдится, что постулаты IV — VI и VIII также удовлетворены. Между тѣмъ постулатъ VII здѣсь не находитъ осуществленiя, какъ это видно изъ того, что соотношенiямъ $A\alpha B$, $A\alpha C$ и $B\alpha C$ сопутствуютъ не соотношенiя $B\alpha A$, $C\alpha A$ и $C\alpha B$, какъ это требовалъ бы постулатъ VII и какъ это имѣетъ мѣсто въ таблицѣ (8), а другiя соотношенiя $B\gamma A$, $C\gamma A$, $C\gamma B$.

8. Наконецъ, для доказательства независимости постулата VIII мы присоединимъ къ элементамъ, изъ которыхъ составлена таблица (8), еще шестой элементъ F. Вмѣстѣ съ тѣмъ къ таблицѣ присоединяются еще 11 соотношенiй, которыя выражаютъ, что всѣ остальные элементы стоятъ къ элементу F въ соотношенiи β, а элементъ F стоитъ ко всѣмъ элементамъ и въ томъ числѣ къ самому себѣ — въ соотношенiи γ. Такимъ образомъ получается таблица:

$$\begin{array}{l}
A\alpha A,\ A\alpha B,\ A\alpha C,\ A\beta D,\ A\beta E,\ A\beta F,\\
B\alpha A,\ B\alpha B,\ B\alpha C,\ B\beta D,\ B\beta E,\ B\beta F,\\
C\alpha A,\ C\alpha B,\ C\alpha C,\ C\beta D,\ C\beta E,\ C\beta F,\\
D\gamma A,\ D\gamma B,\ D\gamma C,\ D\alpha D,\ D\beta E,\ D\beta F,\\
E\gamma A,\ E\gamma B,\ E\gamma C,\ E\gamma D,\ E\alpha E,\ E\beta F,\\
F\gamma A,\ F\gamma B,\ F\gamma C,\ F\gamma D,\ F\gamma E,\ F\gamma F.
\end{array} \qquad (2)$$

Мы предоставляемъ читателю убѣдиться въ томъ, что и здѣсь постулаты I — VII удовлетворены; постулатъ же VIII не имѣетъ мѣста, такъ какъ онъ нарушается соотношенiемъ $F\gamma F$.

9. Мы видимъ такимъ образомъ, что постулаты I — VIII, которыми опредѣляется понятiе о величинѣ, независимы въ томъ смыслѣ, что ни одинъ изъ нихъ не является слѣдствiемъ остальныхъ. Средства, которыми эта независимость доказана, какъ и приведенное въ предыдущемъ параграфѣ доказательство независимости постулатовъ, приводятся въ послѣдней инстанцiи къ интуицiи — къ созерцанiю таблицы; но мы выяснили выше, что это такого рода интуицiя, которая менѣе, чѣмъ какое-либо иное сужденiе, способна вызывать въ насъ сомнѣнiе. Мы еще возвратимся къ этому въ слѣдующемъ параграфѣ.

10. Здѣсь же мы считаемъ полезнымъ обратить вниманiе еще на одно соображенiе. Нижеслѣдующее разсужденiе, вопреки приведеннымъ выше разсужденiямъ, какъ будто обнаруживаетъ, что постулатъ VIII представляетъ собой слѣдствiе остальныхъ.

Пусть A будетъ нѣкоторый элементъ комплекса, въ которомъ установлены соотношенія a, β, γ, удовлетворяющія постулатамъ I—VIII. Пусть B будетъ элементъ, къ которому элементъ A стоитъ въ соотношеніи a, такъ что имѣетъ мѣсто соотношеніе $A a B$. Въ такомъ случаѣ, въ силу постулата VII, имѣетъ также мѣсто соотношеніе $B a A$. Но изъ соотношеній $A a B$ и $B a A$, въ виду транзитивности свойства a (постулатъ IV), вытекаетъ соотношеніе $A a A$; это есть именно то, чего требуетъ постулатъ VIII.

При всей своей простотѣ это разсужденіе все-таки не лишено, конечно, изъяна. Дѣло въ томъ, что все разсужденіе начинается допущеніемъ, что въ комплексѣ существуетъ элементъ B, къ которому элементъ A стоитъ въ соотношеніи a. Это допущеніе не содержится, однако, въ постулатахъ I — VIII. Предыдущее разсужденіе основанное на постулатахъ I — VIII, доказываетъ только слѣдующее. Если элементъ A стоитъ въ соотношеніи a къ какому-нибудь элементу комплекса, то онъ находится въ этомъ соотношеніи и къ самому себѣ. Но отсюда, очевидно, отнюдь не слѣдуетъ, что всякій элементъ стоитъ въ соотношеніи a къ самому себѣ. Таблица (2) на стр. 29 потому именно и доказываетъ независимость постулата VIII, что въ ней элементъ F не находится въ соотношеніи a ни къ одному изъ элементовъ комплекса.

11. Нужно сказать, что послѣднія соображенія приведены нами не только для того, чтобы выяснить, насколько осторожно нужно дѣлать каждое умозаключеніе. Для насъ было важнѣе доказать, что постулатъ VIII могъ бы быть замѣненъ другимъ постулатомъ VIII′: всякій элементъ комплекса стоитъ въ соотношеніи a, по крайней мѣрѣ, къ одному изъ элементовъ комплекса. Тогда изъ постулатовъ I — VII, VIII′ вытекаетъ постулатъ VIII, какъ и, наоборотъ, изъ системы I — VIII вытекаетъ предложеніе VIII′. Системы постулатовъ I — VII, VIII и I — VII, VIII′ эквивалентны въ томъ смыслѣ, что все содержаніе одной системы исчерпывается также другой.

Мы могли бы идти и дальше въ этомъ направленіи. Мы видѣли, напримѣръ, что изъ системы I — VII, VIII (а, слѣдовательно, и изъ системы I — VII, VIII′) вытекаетъ теорема II, 2 § 4-го, согласно которой соотношеніе $A \gamma B$ влечетъ за собой соотношеніе $B \beta A$. Покажемъ, что этимъ предложеніемъ можно замѣнить постулатъ VI. Итакъ, обозначимъ черезъ VI′ предложеніе: соотношеніе $A \gamma B$ влечетъ за собой соотношеніе $B \beta A$. Покажемъ, что изъ постулатовъ I — V, VI′, VII, VIII (или VIII′) вытекаетъ постулатъ VI.

Для этого замѣтимъ прежде всего, что при доказательствѣ теоремы I, 1 § 3-го (выраженной въ общей формѣ въ § 4-омъ), мы не пользовались вовсе постулатомъ VI [т. е. предложеніемъ 8)]; стало быть, разъ мы остальные постулаты сохраняемъ, то сохраняется и предложеніе: „соотношеніе $A \beta B$ исключаетъ соотношеніе $B \beta A$".

Положимъ теперь, что имѣютъ мѣсто соотношенія $A \gamma B$ и $B \gamma C$. Тогда, въ силу постулата VI′, имѣютъ мѣсто соотношенія $B \beta A$ и $C \beta B$. Но изъ соотношеній $C \beta B$ и $B \beta A$, въ силу постулата V, вытекаетъ соотношеніе $C\beta A$; а отсюда, въ силу упомянутой выше теоремы I, 1, слѣдуетъ, что не имѣетъ мѣста соотношеніе $A\beta C$. Съ другой стороны, соотношеніе $A\alpha C$ находилось бы въ противорѣчіи съ соотношеніемъ $C\beta A$ (постулаты VII и II). Поэтому имѣетъ мѣсто соотношеніе $A\gamma C$.

Мы видимъ такимъ образомъ, что одна и та же теорія можетъ разматываться изъ различныхъ системъ постулатовъ. Иначе говоря, постулаты, лежащіе въ основаніи той или иной дисциплины, не представляютъ собой чего-либо фиксированнаго, а допускаютъ варіаціи, часто весьма многообразныя (быть можетъ, даже безконечно многообразныя).

(Окончаніе слѣдуетъ).

Третій Всероссійскій Съѣздъ преподавателей математики.

Въ работахъ по подготовкѣ 3-го Всероссійскаго Съѣзда преподавателей математики, предположеннаго на Рождествѣ 1917 — 1918 года, выразили согласіе принять участіе слѣдующія лица, образовавшія Организаціонный Комитетъ.

Предсѣдатель: З. А. Макшеевъ. Товарищи предсѣдателя: А. В. Васильевъ, П. А. Некрасовъ. Секретари: С. А. Богомоловъ, А. Р. Кулишеръ, Б. Б. Піотровскій, Г. М. Фихтенгольцъ. Казначеи: И. Н. Кавунъ, Д. Э. Теннеръ.

Члены: С. А. Богомоловъ, С. Н. Бернштейнъ, А. М. Бригеръ, А. В. Васильевъ, А. К. Власовъ, А. А. Волковъ, З. З. Вулихъ, И. П. Глаголевъ, Н. Н. Гернетъ, Д. Н. Зейлигеръ, Д. С. Зерновъ, Н. А. Извольскій, Я. В. Іодынскій, И. Н. Кавунъ, В. Ф. Каганъ, А. П. Киселевъ, П. А. Компаніецъ, В. А. Кондратьевъ, Б. М. Кояловичъ, В. А. Крогіусъ, Н. А. Крыловъ, А. Р. Кулишеръ, К. О. Лебединцевъ, А. К. Линдебергъ, З. А. Макшеевъ, Г. О. Мебесъ, Б. К. Млодзѣевскій, Д. Д. Мордухай-Болтовской, П. А. Некрасовъ, Н. Н. Парфентьевъ, С. Г. Петровичъ, К. Б. Пеніонжкевичъ, Б. Б. Піотровскій, С. И. Полнеръ, К. А. Поссе, Н. Ф. Рудольфъ, С. Е. Савичъ, Н. Н. Салтыковъ, П. А. Самохваловъ, Д. М. Синцовъ, Г. К. Сусловъ, Д. Э. Теннеръ, Л. Н. Тяпкина, Я. В. Успенскій, В. М. Филипповъ, Г. М. Фихтенгольцъ, М. Л. Франкъ, С. О. Шатуновскій, В. І. Шиффъ, Я. А. Шохатъ С. И. Шохоръ-Троцкій, І. И. Чистяковъ, П. А. Эренфестъ, Т. А. Эренфестъ.

Выполняемая въ настоящее время Организаціоннымъ Комитетомъ работа распредѣлена между слѣдующими Комиссіями:

I. Комиссія по выработкѣ общихъ основаній постановки курса математики въ средней школѣ.

II. Комиссія по вопросу о постановкѣ курса аналитической геометріи, анализа и алгебры.

Въ этихъ двухъ комиссіяхъ предсѣдательствованіе было поручено М. Г. Попруженко, нынѣ скончавшемуся.

III. Комиссія по вопросу о постановкѣ курса геометріи и тригонометріи. Предсѣдатель: С. А. Богомоловъ.

IV. Комиссія по вопросу по постановкѣ курса ариѳметики. Предсѣдатель: И. Н. Кавунъ. Петровскій Островъ, Земская учительская школа.

V. Комиссія по вопросу о соотношеніи между преподаваніемъ математики и механики въ средней школѣ. Предсѣдатель: С. Г. Петровичъ. Сергіевская, 42.

VI. Комиссія по вопросу объ особенностяхъ постановки курса математики въ женскихъ учебныхъ заведеніяхъ. Предсѣдательница: В. І. Шиффъ. В. О. 14 лин., д. № 31.

VII. Комиссія по вопросу объ особенностяхъ постановки курса математики въ коммерческихъ училищахъ. Предсѣдатель: П. А. Некрасовъ. Петр. ст., Матвѣевская, 11.

VIII. Комиссія по вопросу о подготовкѣ преподавателей. Предсѣдатель: С. И. Шохоръ-Троцкій. Нижегородская ул., 23-А.

Сверхъ того намѣчены комиссіи:

1) По подготовкѣ къ съѣзду докладовъ научнаго содержанія. Предсѣдатель — С. Е. Савичъ.

2) По вопросу объ особенностяхъ постановки курса математики въ среднихъ и низшихъ техническихъ учебныхъ заведеніяхъ. Предсѣдатель — М. Л. Франкъ.

3) По вопросу о постановкѣ курса математики въ народной школѣ повышеннаго типа.

Составъ этихъ трехъ комиссій еще не опредѣлился.

Съ заявленіями и запросами по дѣламъ Съѣзда слѣдуетъ обращаться въ Организаціонный Комитетъ (Петроградъ, Педагогическій Музей в.-уч. зав., Фонтанка, 10) или къ предсѣдателямъ комиссій по указаннымъ выше адресамъ.

БИБЛІОГРАФІЯ.

II. Собственныя сообщенія авторовъ, переводчиковъ и редакторовъ о выпущенныхъ книгахъ.

Авторы, переводчики и редакторы новыхъ сочиненій приглашаются присылать для этого отдѣла краткія сообщенія о выпущенныхъ ими сочиненіяхъ, объ ихъ характерѣ и объ ихъ назначеніи. Къ этимъ сообщеніямъ долженъ быть приложенъ экземпляръ сочиненія. Помѣщая эти сообщенія, редакція сохраняетъ, однако, за собою право помѣстить и независимую рецензію.

М. Д. Свѣтозаровъ. *Эѳиръ, пространство и время.* Элементарное изложеніе принципа относительности.

Помѣщаемыя въ настоящей книгѣ статьи: «Абсолютное движенiе въ пространствѣ» и «Принципъ относительности» представляютъ собою содержанiе двухъ сообщенiй, сдѣланныхъ авторомъ въ 1916 году въ общихъ собранiяхъ членовъ Полтавскаго Кружка любителей физико-математическихъ наукъ. Обѣ статьи элементарнаго характера и имѣютъ цѣлью въ научной формѣ дать изложенiе основъ того революцiоннаго ученiя, которое извѣстно подъ именемъ принципа относительности и которое, вслѣдствiе крайней отвлеченности своихъ идей, заключенныхъ въ оболочку символовъ высшей математики, является мало доступнымъ для неспецiалиста. Въ первой статьѣ, излагающей попытки опытнаго рѣшенiя вопроса объ абсолютномъ движенiи тѣлъ въ пространствѣ, даются историческiя и логическiя предпосылки теорiи относительности Эйнштейна; самой же теорiи относительности посвящена вторая статья. Источникомъ, изъ котораго авторъ пользовался матерiаломъ для своей работы, служили различныя сочиненiя, имѣющiяся по данному вопросу на русскомъ языкѣ, какъ оригинальныя, такъ и переводныя, и прежде всего тѣ, гдѣ вопросъ трактуется элементарно, какъ, напримѣръ: Льюиса и Толмэна Бурсiана, Бялобржескаго, Ла-Роза, Пуанкаре, Хвольсона, Умова, Эренфеста и др.

Книги и брошюры, поступившiя въ редакцiю.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцiю „Вѣстника", подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманiя, будетъ данъ отзывъ.

М. Д. Свѣтозаровъ. *Эѳиръ, пространство и время.* Элементарное изложенiе принципа относительности. Съ 12 чертежами послѣ текста. Изданiе Полтавскаго Кружка любителей физико-математическихъ наукъ. Полтава, 1917. Стр. 61. Ц. 1 руб. (Складъ изданiя у секретаря Кружка — Полтава, Марiинская женская гимназiя).

Н. С. Дрентельнъ. *Воздухъ, вода — тепло.* Рядъ простыхъ физическихъ опытовъ на самодѣльныхъ приборахъ для начальнаго преподаванiя и практическихъ занятiй. 20 рисунковъ. Съ прибавленiемъ: Книжныя пособiя по физикѣ для учителей начальной школы. Изданiе т-ва Сидоровъ, Соколовъ и К°. Петроградъ, 1916. Стр. 32. Ц. 40 к.

В. С. Галицкiй. *Чтенiя по физикѣ на курсахъ для взрослыхъ Екатеринославскаго Отдѣленiя Русскаго Техническаго Общества.* Свойства твердыхъ тѣлъ, жидкостей и газовъ (физическiя). Теплота. Изданiе 2-ое, дополненное. Екатеринославъ, 1916. Стр. 100. Ц. 1 руб. 25 к.

А. I. Бачинскiй. *Физика для среднихъ учебныхъ заведенiй.* Выпускъ второй (Ученiе о звукѣ. Ученiе о свѣтѣ). Съ подробнымъ описанiемъ 11 лабораторныхъ работъ, 247 рисунками и двумя таблицами въ краскахъ. Изданiе т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1917. Стр. 208. Ц. 1 руб. 25 к.

А. Воронецъ. *Таблица логариѳмовъ и справочникъ формулъ и вспомогательныхъ таблицъ по курсу элементарной математики.* Пособiе для учащихся въ среднихъ учебныхъ заведенiяхъ. Изданiе т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1917. Стр. 228. Ц. 1 руб. 50 к.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей проф. Е. Л. Буницкаго.

№ 359 (6 сер.). Доказать справедливость тожества

$$2^m+\frac{n-m}{1}\cdot 2^{m-1}+\frac{(n-m)(n-m+1)}{1\,.\,2}\cdot 2^{m-2}+\cdots+$$

$$+\frac{(n-m)(n-m+1)\cdots(n-3)(n-2)}{1\,.\,2\ldots(m-2)(m-1)}\cdot 2+\frac{(n-m)(n-m+1)\cdots(n-2)(n-1)}{1\,.\,2\ldots(m-1)\,m}=$$

$$=1+\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\,.\,2\ldots m}$$

при любомъ цѣломъ значеніи n и при любомъ цѣломъ положительномъ значеніи m.

М. Шебаршинъ (Дѣйствующая армія).

№ 360 (6 сер.). Въ данномъ треугольникѣ ABC провести трансверсаль XYZ (X — на сторонѣ AB, Y — на сторонѣ AC, Z — на продолженіи стороны BC) данной длины l такъ, чтобы разность площадей треугольниковъ AXY и YCZ имѣла данную величину.

И. Александровъ (Москва).

№ 361 (6 сер.). Доказать, что выраженіе

$$5^{2n}-4^n-21$$

при любомъ цѣломъ положительномъ значеніи n кратно 84.

А. Бутомо (Саратовъ).

№ 362 (6 сер.). Упростить выраженіе

$$C^n_{m-3}+3C^{n-1}_{m-3}+3C^{n-2}_{m-3}+C^{n-3}_{m-3},$$

въ которомъ C^q_p обозначаетъ вообще число сочетаній изъ p элементовъ по q, а m и n суть любыя цѣлыя положительныя числа (притомъ, конечно, такія, что разсматриваемое выраженіе имѣетъ опредѣленный смыслъ).

Редакторъ прив.-доц. В. Ф. Каганъ. Издатель В. А. Гернетъ.

Типографія „Техникъ“—Одесса, Екатерининская, 58.

Обложка
пщется

Обложка
ищется