№ 59.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

ПОПУЛЯРНО-НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛЪ,

Издаваемый Э. К. Шпачинскимъ.

РЕКОМЕНДОВАНЪ

Ученымъ Комитетомъ Министерства Народнаго Просвѣщенія **для среднихъ учебныхъ заведеній** и Главнымъ Управленіемъ Военно-Учебныхъ Заведеній **для военно-учебныхъ заведеній.**

V Семестра № 11-й.

ЭКШ

Высочайше утверж. Товарищество печатнаго дѣла и торговли И. Н. Кушнеревъ и К°, въ Москвѣ.
Кіевское Отдѣленіе, Елисаветинская ул., домъ Михельсона.
1888.

СОДЕРЖАНІЕ № 59.

ВѢСТНИКЪ
ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 59.

V Сем. 1 Декабря 1888 г. № 11.

БЕСѢДЫ ИЗЪ ОБЛАСТИ МАГНИТИЗМА *).

V. „Магнитная теплота."

Физики, объясняя себѣ явленія магнитизма вращеніемъ молекулярныхъ магнитовъ, естественно должны были прійти къ заключенію, что масса тѣла, подвергаемая намагничиванію, должна вслѣдствіе перемѣны своего состоянія (изъ немагнитнаго въ магнитное) сдѣлаться теплѣе. Въ самомъ дѣлѣ, если тѣло намагничивается, то молекулярные магниты въ немъ поворачиваются, при чемъ это поворачиваніе происходитъ не такъ то легко, такъ какъ въ тѣлѣ существуетъ между молекулярными магнитами *треніе*; нужная для этого сила приходитъ извнѣ тѣла и должна вслѣдствіе этого повысить температуру тѣла.

Экспериментальное доказательство существованія „магнитной теплоты" **) представило однако значительныя трудности.

Во первыхъ намагничиванія нельзя было производить при помощи натиранія другимъ магнитомъ, такъ какъ вслѣдствіе натиранія произошло бы нагрѣваніе куска; поэтому пришлось прибѣгнуть къ употребляемому въ настоящее время способу намагничиванія—къ намагничивающей катушкѣ; но тутъ то встрѣтились новыя препятствія.

Оказалось, что когда по катушкѣ шелъ намагничивающій токъ, то температура желѣзнаго бруска, подвергаемаго намагничиванію, росла все больше и больше, что зависѣло, конечно, отъ того, что катушка сама нагрѣвалась отъ прохожденія по ней тока и сообщала свою теплоту бруску. Это затрудненіе было удалено физиками такимъ образомъ, что желѣзный брусокъ помѣщался въ стеклянную трубку и окружался кромѣ того непроводящими веществами, а за тѣмъ уже помѣщался въ катушку.

Нагрѣваніе, получаемое отъ того, что тѣло становилось магнитнымъ, было очень ничтожно, почти неизмѣримо; чтобы увеличить его, намагничивающій токъ прерывался нѣсколько разъ въ секунду; тогда кусокъ подвергался быстрому намагничиванію и размагничиванію и такимъ образомъ перемѣнялъ свое магнитное состояніе, положимъ 20 разъ въ секунду; по прошествіи минуты кусокъ становился градуса на 3—4

*) См. „Вѣстникъ" №№ 31, 34 36 и 58.

**) Можно было бы также сказать „теплота намагничиванія."

теплѣе, смотря по величинѣ. Но явились нѣкоторые изслѣдователи, утверждавшіе, что это нагрѣваніе получилось не вслѣдствіе появленія магнитизма и его исчезновенія, а отъ того, что вокругъ бруска возбуждались индуктированные токи, которые его и нагрѣвали. Въ самомъ дѣлѣ, когда мы пропускаемъ по намагничивающей катушкѣ токъ, то во всякомъ проводникѣ находящемся по близости, долженъ тотчасъ же развиться индуктированный токъ, а такъ какъ брусокъ есть проводникъ, то вокругъ него и будутъ обѣгать каждый разъ при замыканіи и размыканіи намагничивающаго тока индуктированные токи.

Возраженіе было вполнѣ основательно. Сдѣланные опыты подтвердили это предположеніе на мѣдномъ брускѣ, взятомъ вмѣсто желѣза, такъ какъ мѣдь магнитизмомъ не обладаетъ. Однако защитники „магнитной теплоты“ измѣнили эти опыты такъ, что если нагрѣваніе происходило, то только единственно подъ вліяніемъ магнитизма. Для этого бралась желѣзная трубка и разрѣзывалась вдоль; тогда въ ней не могло появляться индуктированныхъ токовъ, такъ какъ она въ такомъ видѣ не представляла замкнутой цѣпи для индуктированныхъ токовъ. Кромѣ того нагрѣваніе такой трубки сравнивалась съ нагрѣваніемъ мѣдной такой же трубки.

Въ 1882 году наконецъ было доказано несомнѣнными фактами, что магнитизмъ переходитъ непосредственно въ теплоту. Опыты эти были сдѣланы проф. Петербургскаго Университета *Ив. Ив. Боргманомъ* *).

Итакъ „магнитная теплота“ существуетъ. Оставалось найти законы, которымъ она подчиняется. Измѣряя выдѣляемую при намагничиваніи желѣзнаго стержня теплоту, одни физики нашли, что она пропорціональна квадрату силы намагничивающаго тока, другіе же—квадрату появляющагося и исчезающаго магнитизма.

Легко показать, что ни одна изъ этихъ формулъ не соотвѣтствуетъ дѣйствительности. Въ самомъ дѣлѣ, если подвергнуть изслѣдованію различныя части намагничиваемаго бруска, то мы замѣтимъ, что *средина его будетъ обладать болѣе значительной магнитной теплотой сравнительно съ концами*. Но намъ извѣстно, что въ срединѣ стержня всегда находится мѣсто безразличія, т. е. тутъ нѣтъ свободнаго магнитизма, а слѣдовательно и нагрѣваніе должно было бы быть нуль (или же очень незначительное, зависящее отъ теплопроводности); на самомъ же дѣлѣ оно здѣсь наибольшее. Точно также на концахъ стержня (точнѣе—въ полюсахъ) свободный магнитизмъ достигаетъ своего maximum'а. Какая же здѣсь связь выдѣляемой теплоты съ величиной *исчезающаго* и *появляющагося* магнитизма? Но этого мало. Извѣстно, что стержень можно довести до насыщенія магнитизмомъ и тогда должно бы ожидать, основываясь ка найденныхъ законахъ физиковъ (для магнитной теплоты), что нагрѣваніе при одномъ и томъ же числѣ прерываній намагничивающаго тока въ секунду увеличиваться больше не будетъ, какой бы еще большій токъ мы ни брали; но дѣйствительность показываетъ противное: чѣмъ сильнѣе намагничивающій токъ, тѣмъ сильнѣе и нагрѣваніе.

„Магнитная теплота“ не можетъ также быть пропорціональна и квадрату силы намагничивающаго тока, уже по одному тому, что маг-

*) Жур. Физ.-Хим. общ. стр. 67. 1882.

нитизмъ, который и есть собственно причина нагрѣванія желѣзнаго стержня, измѣняется не параллельно вызывающему его намагничивающему току. Стержень, находящійся въ намагничивающей катушкѣ, подвергается во всѣхъ своихъ частяхъ одинаковой намагничивающей силѣ (конечно, если стержень значительно короче катушки) и слѣдовательно, если бы нагрѣваніе зависѣло только отъ силы намагничивающаго тока, то и нагрѣваніе должно было бы быть во всѣхъ точкахъ стержня одинаково; какъ показываютъ сдѣланные мною непосредственные опыты *), этого не наблюдается. Мнѣ скажутъ, что это зависитъ отъ распредѣленія магнитизма въ стержнѣ. Въ такомъ случаѣ выходитъ, что величину магнитизма слѣдуетъ принять при установленіи общаго закона къ свѣдѣнію.

Здѣсь слѣдуетъ сказать, что упомянутые псевдо-законы въ дѣйствительности никогда не наблюдались: нагрѣваніе росло быстрѣе (при извѣстныхъ намагничивающихъ силахъ), чѣмъ квадраты силы токовъ, и медленнѣе, чѣмъ квадраты временныхъ магнитизмовъ.

Такимъ образомъ, послѣ сказаннаго, становится яснымъ, что зависимости магнитной теплоты слѣдуетъ искать заразъ отъ обоихъ факторовъ: намагничивающей силы и появляющагося магнитизма, но не намъ *кажущагося*, а на самомъ дѣлѣ въ тѣлѣ существующаго, хотя бы и не дѣйствующаго наружу. Такой магнитизмъ, не дѣйствуя на магнитную стрѣлку, можетъ быть измѣренъ только индуктированными токами, которые онъ вызываетъ. **).

Назадъ тому 6 лѣтъ я вывелъ на основаніи собственныхъ опытовъ слѣдующую весьма простую формулу, связывающую „магнитную теплоту“ (W) съ величиной магнитизма (M) и намагничивающей силой (J)

$$W = a.\ M.\ J,$$

гдѣ a есть величина постоянная, зависящая отъ толщины стержня, отъ его состава и т. д. Вотъ одна изъ многихъ таблицъ, на основаніи которыхъ была выведена эта формула:

J.	M.	W.	aMJ.
6,64	4046	0,21	0,20
13,47	9187	0,95	0,94
21,30	13180	2,09	2,13
27,05	14698	2,98	3,02
35,69	16025	4,29	4,35
39,35	16407	4,92	4,91
51,05	17503	6,84	6,79

*) Жур. Физ.-Хим. Общ. 16 (3) стр. 81. 1884.

**) См ст. „Измѣреніе магнитизма индуктированными токами“ въ № 29 „Вѣстника“ стр. 103. сем. III.

Здѣсь W выражено въ градусахъ и a=0,0000076. Величины, вычисленныя по формулѣ aMJ, очень хорошо согласуются съ наблюденными (W).

Мы не будемъ входить здѣсь въ разсмотрѣніе различныхъ подробностей, какъ то: зависимости магнитной теплоты отъ толщины стержней, отъ растяженія и сжатія ихъ и отъ того обстоятельства, когда токъ *просто* прерывается, и когда онъ прерывается, съ перемѣною направленія, и т. д., а перейдемъ къ разсмотрѣнію одного пункта, очень важнаго для теоріи „магнитной теплоты."

Если отъ *намагничиванія* желѣзный стержень дѣлается теплѣе, то отъ *размагничиванія* онъ долженъ дѣлаться холоднѣе, и вотъ почему: для намагничиванія мы употребляемъ нѣкоторую силу, которая, поворачивая молекулярные магниты, и переходитъ въ теплоту; при размагничиваніи же силу, нужную для поворачиванія молекулярныхъ магнитовъ въ прежнее положеніе, должно дать само тѣло, вслѣдствіе чего оно должно охладиться. Нѣчто аналогичное этому мы имѣемъ на слѣдующемъ примѣрѣ: если сжать напр. желѣзную проволоку, т. е. затратить на нее силу, взятую извнѣ тѣла, то она нагрѣвается, если же теперь предоставить ее самой себѣ, то она растянется—приметъ снова свой первоначальный объемъ (если предѣлъ ея упругости не былъ перейденъ), затративъ на это силу, взятую изъ своей массы, и охладится на столько же градусовъ, на сколько она до этого нагрѣлась. Отсюда выходитъ, что размагничивая и намагничивая тѣла нѣсколько напр. сотъ разъ въ минуту (какъ это обыкновенно и дѣлается), нагрѣванія мы получить никакого не должны. Дѣйствительность же показываетъ противное.

Очевидно, что при намагничиваніи образуется больше теплоты, чѣмъ сколько ея тратится на размагничиваніе тѣла. Это же будетъ только тогда возможно, если при намагничиваніи молекулярнымъ магнитамъ при своемъ вращеніи приходится преодолѣвать большее сопротивленіе, чѣмъ при размагничиваніи тѣла.

Дѣйствительно, опыты различныхъ физиковъ показываютъ, что сила, нужная для намагничиванія, всегда больше силы, нужной для размагничиванія. Такимъ образомъ, теорія „магнитной теплоты" согласуется съ опытными данными.

Формула

$$W = a.\ M.\ J.$$

теперь становится намъ понятна. Степень нагрѣванія должна зависѣть отъ величины магнитизма (M), такъ какъ чѣмъ больше магнитизмъ, тѣмъ значитъ, и на большій уголъ повернулся молекулярный магнитъ, а слѣдовательно и тѣмъ больше произведенная работа, которая въ данномъ случаѣ выражается теплотой. Когда магнитизмъ достигъ maximum'a, то съ увеличеніемъ J стержень нагрѣвается дальше, потому что скорость, съ которой происходитъ поворачиваніе молекулярныхъ магнитовъ при намагничиваніи, растетъ тоже дальше, а размагничиваніе совершается постоянно одной и той же силой (молекулярными силами) и слѣдовательно постоянно съ одинаковою скоростью.

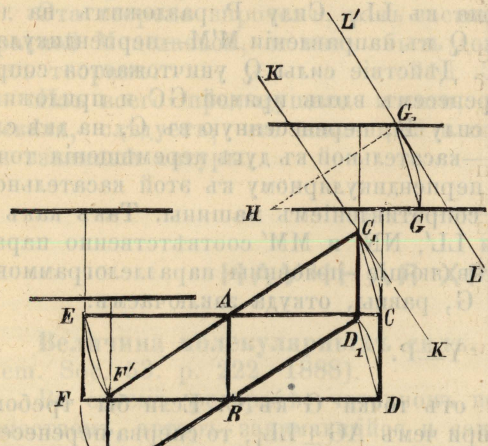
Въ заключеніе скажу, что „магнитная теплота" не особенно по вкусу приходится электротехникамъ:—она нагрѣваетъ у нихъ очень сильно электромагниты въ динамо-электрическихъ машинахъ, такъ что иногда приходится остановить машину и дать ей охладиться, а иначе можетъ сгорѣть изолировка на проволокахъ.

П. Бахметьевъ. (Цюрихъ).

О ВѢСАХЪ РОБЕРВАЛЯ.

Прямолинейный рычагъ CE, вращается около оси, проходящей чрезъ его средину A; на концахъ рычага прикрѣплены посредствомъ шарньеровъ C и E стержни CD и EF, оканчивающіеся чашками вѣсовъ, неизмѣнно соединенными со стержнями. Концы D и F стержней всегда опираются на рычагъ FD, равный рычагу EC и вращающійся около своей средины B; такова простѣйшая форма вѣсовъ Роберваля.

Фиг. 59.

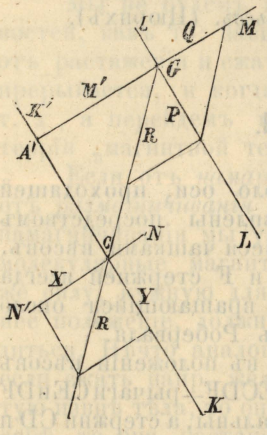


Пусть въ положеніи вѣсовъ (фиг.59) ECDF—рычаги CE и DF горизонтальны, а стержни CD и EF—вертикальны. Во всякомъ другомъ положеніи E′C′D′F′ разстоянія AC′ и BD′, AB и C′D′ остаются соотвѣтственно равными, а *потому и параллельными* между собою, такъ что C′D′ || AB || CD, и стержни перемѣщаются параллельно себѣ. Притомъ, вслѣдствіе сопротивленія оказываемаго осью A, стержни не могутъ выходить изъ первоначальной плоскости ECDF. При такихъ условіяхъ, перемѣщеніе чашки изъ одного положенія въ другое возможно лишь двумя способами: или *поступательнымъ* движеніемъ, то есть такимъ, при которомъ всякая прямая, соединяющая двѣ точки чашки или стержня, перемѣщается параллельно самой себѣ, или же поступательнымъ движеніемъ, соединеннымъ съ поворотомъ чашекъ около осей CD и EF. Такой поворотъ оказывается невозможнымъ въ силу сопротивленія шарнировъ, и единственно возможнымъ остается поступательное перемѣщеніе чашекъ, т. е. такое, при которомъ любая прямая будетъ перемѣщаться, оставаясь всегда параллельной себѣ. Проведемъ прямыя G_1H и GH, соотвѣтственно параллельныя C′A и CA. Такъ какъ изъ вышесказаннаго слѣдуетъ, что прямыя $C'G_1$ и CG равны и параллельны, то прямыя C_1C и G_1G равны и $\triangle HG_1G = \triangle AC'C$, отсюда:

$$HG_1 = AC_1 = AC = HG,$$

т. е. въ то время какъ точка C описываетъ дугу CC′ около центра A, точка G опишетъ равную первой дугу GG_1 около центра H. Касательныя къ дугамъ перемѣщеній, проведенныя для положеній различныхъ точекъ въ одинъ моментъ, напр. LL_1 и KK_1, параллельны между собою.

Фиг. 60.



Пусть къ точкѣ G приложена нѣкоторая сила. (Фиг. 60). Пусть касательная къ дугѣ перемѣщенія точки G есть LL'. Представимъ плоскость, проходящую чрезъ направленіе данной силы и линію LL', силу въ этой плоскости разложимъ на двѣ слагающія: по LL' и по направленію перпендикулярному къ LL'; дѣйствіе послѣдней, стремясь произвести движеніе недопускаемое условіями машины, уничтожается ея сопротивленіемъ. Итакъ дѣйствіе всякой силы сводится къ дѣйствію ея слагающей, взятой въ направленіи касательной къ дугѣ перемѣщенія точки въ данный моментъ. Означимъ эту силу чрезъ P.

Выберемъ на чашкѣ или стержнѣ какую либо точку C, лишь бы только прямая CG не была перпендикулярна къ LL_1. Силу P разложимъ на двѣ слагающія: Q въ направленіи $M'M$—перпендикулярномъ къ LL_1 и R—по линіи GC. Дѣйствіе силы Q уничтожается сопротивленіемъ машины; силу R перенесемъ вдоль прямой GC и приложимъ къ точкѣ C. Разложимъ теперь силу R, перенесенную въ C, на двѣ слагающія: Y—по направленію KK'—касательной къ дугѣ перемѣщенія точки C, и X—по направленію NN', перпендикулярному къ этой касательной. Дѣйствіе силы X уничтожается сопротивленіемъ машины. Такъ какъ по вышедоказанному прямыя KK' и LL', NN' и MM' соотвѣтственно параллельны, то треугольники, составляющіе половины параллелограммовъ, построенныхъ при точкахъ C и G, равны, откуда заключаемъ:

$$Y = P.$$

Итакъ сила P перенесена отъ точки G къ C. Если бы требовалось перенести ее къ точкѣ A, при чемъ $AG \perp LL_1$, то сперва перенесемъ къ C, а потомъ къ A.

Отсюда слѣдуетъ, что всякую силу, приложенную къ чашкамъ вѣсовъ Роберваля, можно перенести къ какой угодно точкѣ чашки или стержня, не измѣняя дѣйствія; поэтому дѣйствіе грузовъ положеныхъ на чашки равносильно дѣйствію тѣхъ же грузовъ приложенныхъ къ концамъ C и E рычага CE. *Г. Флоринскій.* (Кіевъ).

ШЕСТИУГОЛЬНИКЪ БРІАНШОНА.

Если въ вершинахъ Паскалева шестиугольника *) проведемъ касательныя къ кругу, то получимъ шестиугольникъ Бріаншона.

Теорема. Діагонали, соединяющія противоположныя вершины шестиугольника Бріаншона, пересѣкаются въ одной точкѣ.

*) См. „Вѣстникъ“ № 50, стр. 34, сем. V.

Доказательство этой теоремы уже дано въ одномъ изъ №№ „Вѣстн.“ *).

Отсюда слѣдуетъ:

Слѣдствіе I. Двѣ діагонали описаннаго около круга пятиугольника и прямая, соединяющая пятую вершину съ точкою касанія противоположной стороны—всѣ три пересѣкаются въ одной точкѣ.

Очевидно такихъ точекъ 5.

Слѣдствіе II. а) Двѣ прямыя, соединяющія противоположныя вершины описаннаго около круга четыреугольника и двѣ прямыя, соединяющія точки касанія къ кругу противоположныхъ сторонъ его—всѣ четыре пересѣкаются въ одной точкѣ.

б) Каждая изъ діагоналей и двѣ прямыя, соединяющія, каждую изъ остальныхъ вершинъ его съ противоположными точками касанія—каждыя три пересѣкаются въ одной точкѣ.

Слѣдствіе III. Прямыя, соединяющія вершины описаннаго около круга треугольника съ точками касанія противоположенныхъ сторонъ его—всѣ три пересѣкаются въ одной точкѣ.

Эта теорема впрочемъ, какъ частный случай болѣе общей теоремы, обратной Менелаевой, можетъ быть доказана независимо отъ выведенныхъ теоремъ.

Изъ всего предыдущаго и того, что сказано, о шестиугольникѣ Паскаля, слѣдуетъ, что вписанный и описанный шестиугольника суть двѣ взаимныя фигуры. *К. Котельниковъ* (Кіевъ).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Величина молекулярныхъ силъ. Рюкеръ. (*A. Rücker*. Jour. of the Chem. Soc. 53. p. 222. 1888).

Въ своемъ рефератѣ, читанномъ передъ лондонскимъ химическимъ обществомъ, авторъ, занимавшійся и самъ изслѣдованіемъ жидкихъ пластинокъ и ихъ молекулярныхъ силъ, дѣлаетъ сопоставленіе всѣхъ тѣхъ опытовъ, которые были сдѣланы съ примѣненіемъ различныхъ методовъ для опредѣленія молекулярныхъ силъ и величины молекулы. Результаты этихъ изслѣдованій слѣдующіе (здѣсь подъ μм. слѣдуетъ понимать одну милліонную милиметра).

118 μм. Верхняя граница для радіуса молекулярныхъ силъ, выведенная изъ опытовъ *Плато* надъ давленіемъ мыльнаго пузыря по теоріи *Максуэлля*, что натяженіе поверхности начинаетъ только тогда уменьшаться, если толщина жидкой оболочки$=\rho$, радіусу молекулярныхъ силъ.

96 до 45 μм. Между этими границами (по изслѣдованіямъ *Рейнолда* и *Рюкера*) начинаетъ толщина жидкой пластинки дѣлаться непостоянной, т. е. что ея напряженіе на поверхности начинаетъ уменьшаться. Поэтому радіусъ молекулярныхъ силъ долженъ быть меньше 96 μм. и больше 22 μм.

59 μм. Верхняя граница для ρ изъ опытовъ *Плато*, выведенная

**) См. „Вѣстникъ“. № 16 (рѣш. зад. № 41) стр. 92, сем. II.

на основаніи допущенія, что натяженіе на поверхности сначала уменьшается, если толщина=2ρ.

50 μм. Величина для ρ, выведенная *Квинкс* изъ опытовъ надъ капиллярнымъ повышеніемъ. Изъ нихъ выходитъ, что толщина жидкаго слоя начинаетъ дѣлаться непостоянной, если она равна 100 μм. или 50 μм., смотря по тому принять ли теорію *Плато* или *Максуэлля*. Вѣроятнѣе всего что величина эта лежитъ между обѣими величинами.

12 μм. Средняя толщина черныхъ (безцвѣтныхъ) пластинокъ изъ мыльной воды, измѣренныхъ по двумъ различнымъ методамъ. Эту же толщину получилъ и *Винеръ*, ниже которой тонкій серебряный слой не оказываетъ болѣе такого дѣйствія на измѣненія отраженнаго свѣта, какъ толстый серебряный слой.

10,5 μм. Толщина постояннаго водяного пота, наблюденная *Бунзеномъ* на немытомъ стеклѣ при той температурѣ (23°), при которой напряженіе водяного пара наименьшее.

4 μм. до 3 μм. Среднее разстояніе между центрами молекулъ въ газахъ при обыкновенныхъ условіяхъ, вычисленное *О. Мейеромъ*.

3 μм. до 1 μм. Толщина металлическихъ пластинокъ, необходимая для полной поляризаціи платины по *Обербеку*.

1 μм. до 0,02 μм. Толщина двойного электрическаго слоя по *Обербеку* и *Фалку*. *Липманъ* нашелъ 0,3 μм.

0,2 μм. Наименьшая толщина серебрянаго слоя, вліяющаго на фазы отраженнато свѣта по *Винеру*.

0,14 μм. до 0,11 μм. Діаметръ газообразныхъ молекулъ водорода, полученный при комбинаціяхъ 1) удѣльной индукціонной способности и коэффиціента вязкости; 2) показателя преломленія и коэффиціента диффузіи; 3) закона расширенія и теплопроводности.

0,07 до 0,02 μм. Среднее разстояніе между центрами молекулъ, если ихъ представить равномѣрно расположенными какъ въ жидкостяхъ, такъ и въ твердыхъ тѣлахъ, по *Томсону*. Верхняя граница, найденная *Л. Лоренцемъ*, была 0,1 μм.

0,02 μм. Нижняя граница для діаметра газовой молекулы по *Томсону*.

Приведенное сопоставленіе радіусовъ дѣйствія молекулярныхъ силъ и діаметровъ молекулъ обхватываетъ собою всѣ результаты вычисленія относительно этого вопроса. Очень вѣроятно, что въ будущемъ будутъ сдѣланы еще многія поправки этихъ величинъ, но онѣ все таки останутся въ предѣлахъ того же порядка. *Бхм.* (Цюрихъ).

♦ **Зеленый цвѣтъ послѣдняго солнечнаго луча. Пелла** (*Pellat*. Bull. de la soc. philomatique de Paris. 12. p. 22. 1888).

Различные наблюдатели видѣли зеленый цвѣтъ послѣдняго луча солнца при его заходѣ на морѣ*) и многіе думали, что здѣсь явленіе зависитъ отъ цвѣта моря. Но такое мнѣніе не состоятельно, такъ какъ явленіе это наблюдается при любомъ горизонтѣ. Авторъ имѣлъ случай нѣсколько разъ наблюдать это явленіе въ Парижѣ при помощи подзорной трубы и описываетъ его слѣдующимъ образомъ.

*) См. № 13 „Вѣстника", стр. 17, сем. II.

Если солнце при своемъ заходѣ принимаетъ желтую или оранжевую окраску, но не красноватую или бѣлесоватую, то его верхній край окруженъ зеленой линіей, которая дѣлается тѣмъ меньше, чѣмъ солнце находится ближе къ горизонту; впрочемъ этотъ зеленый край въ большинствѣ случаевъ неправильный. Въ моментъ заката, когда солнце почти совершенно закрыто находящимися на горизонтѣ домами, зеленый лучъ дѣйствуетъ одинъ въ теченіе нѣкоторой части секунды и имѣетъ превосходную изумрудно-зеленую окраску.

Объясненіе этого явленія по автору очень просто. Вслѣдствіе преломленія нашей атмосферы звѣзды намъ кажутся на горизонтѣ выше, чѣмъ онѣ были бы, если бы не было воздуха. Примемъ пока, что цвѣта при этомъ не поглощаются. тогда наиболѣе преломляющіеся лучи были бы наиболѣе отклонены; тогда вслѣдствіе атмосфернаго преломленія образовался бы цѣлый рядъ окрашенныхъ изображеній солнца, изъ которыхъ фіолетовое было бы самое высокое, а красное самое низкое; такъ какъ эти изображенія по большей части совпадаютъ другъ съ другомъ, то получился бы бѣлый дискъ солнца съ желто-краснымъ краемъ внизу и съ зелено-фіолетовымъ вверху. Но такъ какъ желтооранжевая окраска солнца показываетъ намъ, что синіе и фіолетовые лучи поглощаются атмосферой, то верхній край солнца естественно долженъ намъ казаться зеленымъ. *Бхм.* (Цюрихъ).

♦ **Теорія діамагнитизма. Блондло.** (*R. Blondlot* C. R. 106 p. 1347. 1888).

Въ 1850 году *Беккерель* установилъ теорію діамагнитизма, которая не признавала различія въ отношеніи парамагнитныхъ и діамагнитныхъ тѣлъ къ магниту, а напротивъ утверждала, что всѣ тѣла и даже пустота парамагнитны; называемыя діамагнитными, будутъ тѣла, которыя слабѣе магнитны, чѣмъ пустота. Эта теорія, допускавшая между парамагнитизмомъ и діамагнитизмомъ только числовое различіе, подвергалась нападкамъ *В. Вебера* и *Тиндаля*; свои доказательства противнаго они основывали на опытахъ, показывавшихъ имъ, что подъ вліяніемъ магнитизма діамагнитныя тѣла показываютъ противоположную полярность, чѣмъ парамагнитныя. Вслѣдствіе этого теорія Беккереля была всѣми оставлена.

Въ новѣйшее время за эту теорію заступились два физика: *Браунъ* при помощи теоретическихъ изслѣдованій и *Блондло* съ помощію интереснаго опыта, показывающаго, что классическіе опыты Тиндаля для доказательства діамагнитной полярности несостоятельны. Опытъ Тиндаля состоялъ въ слѣдующемъ. Въ укрѣпленной горизонтальной катушкѣ былъ подвѣшенъ висмутовый брусокъ, концы котораго высовывались на нѣсколько центиметровъ по обѣ стороны. Одинъ конецъ (A) бруска находился между полюсами сильнаго электромагнита. Если пропустить по спирали токъ, то конецъ A сдѣлается полюсомъ и притянется электромагнитомъ. Опытъ показываетъ, что висмутъ притягивается какъ разъ обратно, чѣмъ желѣзо.

Блондло описываетъ слѣдующій опытъ. Вмѣсто висмутовой палочки онъ подвѣшиваетъ стеклянную трубку съ растворомъ хлористаго желѣза въ метиловомъ алкоголѣ (27 вѣсов. частей хлор. желѣза и 55 алкоголя). Такая трубка парамагнитна и отклоняется какъ и желѣзный брусокъ. Опытъ былъ повторенъ, когда трубку помѣстили въ жолобъ, наполненный концентрированнымъ растворомъ хлористаго желѣза (55 частей хл. жел. и 45 частей алкоголя): отклоненіе произошло въ *обратную сторону*, т. е. такъ-же какъ и висмутовой палочки.

Наполненная хлор. желѣзомъ трубка такимъ образомъ ведетъ себя въ воздухѣ какъ парамагнитное тѣло, а въ средѣ, которая магнитнѣе чѣмъ она, трубка дѣлается діамагнитной, что говоритъ въ пользу теоріи Беккереля и опровергаетъ выводы Тиндаля. Такимъ образомъ діамагнитизма—явленія, которое до сихъ поръ никакимъ образомъ не могло быть объяснено,—болѣе не существуетъ. *Бхм.*

♦ **Замѣчательное увеличеніе магнитности марганцевой стали отъ прокаливанія ея опилокъ. Барретъ.** (*W. F. Barrett*. Scien. Proc. Roy. Dublin Soc. 6. p. 107. 1888).

Авторъ открылъ въ прошломъ году, что сталь, содержащая отъ 12 до 15% марганца, теряетъ вполнѣ свою магнитность. Кромѣ того этотъ сплавъ отличается отъ стали тѣмъ, что, будучи быстро охлажденъ, онъ дѣлается мягкимъ, при медленномъ же охлажденіи—хрупкимъ.

Авторъ открылъ теперь еще одно новое свойство этого сплава, а именно, если взять его опилки, которыя слабо притягиваются магнитомъ, и накалить до красна, то онѣ послѣ охлажденія сильно притягиваются. Предположеніе, что можетъ быть это свойство зависитъ отъ окисленія, оказалось несостоятельнымъ, такъ какъ то же явленіе наблюдалось и послѣ прокаливанія въ атмосферѣ водорода; кромѣ того былъ произведенъ и химическій анализъ.

Опыты со сплавомъ, содержавшимъ 3% угля, 60% желѣза и 36% марганца, были еще замѣчательнѣе. До прокаливанія сплавъ не притягивается, но послѣ прокаливанія притяженіе было очень сильное.

Авторъ сравнилъ явленія, наблюдаемыя на проволокахъ и листочкахъ изъ марганцевой стали, съ явленіями, наблюдаемыми на опилкахъ. Кусочекъ такого листочка притягивался сильнымъ электромагнитомъ съ силою одного грамма, послѣ прокаливанія притяженіе возросло до 2 гр. Сплошной кусокъ ни до нагрѣванія, ни послѣ нагрѣванія не показывалъ никакого притяженія. Точно также велъ себя и кусочекъ тонкой проволоки. Опилки, помѣщенныя въ стеклянную трубку, притягивались до нагрѣванія съ силою 5 цгр., а послѣ прокаливанія съ силою 20 цгр. Такимъ образомъ увеличеніе въ притяженіи для опилокъ значительно больше, чѣмъ для проволокъ или листочковъ. Если завернуть опилки плотно въ платиновую жесть и затѣмъ ихъ прокалить, то притяженіе будетъ только вдвое сильнѣе, чѣмъ прежде. Притяженія совсѣмъ не замѣчалось, если опилки прокаливались въ сжатомъ состояніи.

Относильно температуры, при которой это явленіе наблюдается, можно только сказать, что оно не наблюдается при 100° и 250°; слабое притяженіе начинаетъ замѣчаться при темномъ каленіи и въ полной силѣ наступаетъ только при слабомъ красномъ каленіи. *Бхм.*

♦ **Вертикальныя движенія атмосферы.** Ch. André. (C. R. CVII p. 703—704).

Ліонская обсерваторія имѣетъ три метеорологическія станціи на различныхъ высотахъ. Эти станціи снабжены тождественными аппаратами. Сравнивая среднія давленія, соотвѣтствующія тому же часу дня для этихъ станцій, André нашелъ, что разности ихъ измѣняются весьма правильно въ теченіе сутокъ, достигая maximum'а около 7—8 часовъ утра и minimum'а около 3—4 часовъ вечера. Разности среднихъ температуръ измѣняются въ обратномъ порядкѣ и достигаютъ предѣльныхъ значеній почти двумя часами раньше разностей давленій. Вычисливъ среднія давленія для самой высшей станціи по соотвѣтственнымъ давленіямъ низшей, André нашелъ, что эти вычисленныя давленія меньше среднихъ наблюденныхъ для промежутка времени между 6 часами вечера и 6 часами утра и больше этихъ послѣднихъ для промежутка отъ 6 часовъ утра до 6 часовъ вечера. Отсюда онъ заключаетъ, что въ атмосферѣ постоянно существуютъ вертикальныя теченія: нисходящія ночью и воосходящія днемъ. Подобное же измѣненіе разностей давленій константировалъ и L. Teisserenc de Bort сравнивая наблюденія, произведенныя на вершинѣ Puy-de-Dôme и въ Клермонской долинѣ. *Н. С.*

АРИѲМЕТИЧЕСКІЯ НАЧАЛА ГАРМОНИЗАЦІИ *)

§ 1. Изученіе первыхъ началъ гармоніи сопряжено съ затрудненіями столь значительными, что изъ десяти начинавшихъ учиться теоріи музыки едва одинъ пошелъ дальше самыхъ элементарныхъ понятій. Причину этого слѣдуетъ искать, по моему, въ томъ, что начала гармоніи вообще излагаются въ неудобопонятной формѣ. Ученикъ сразу забрасывается цѣлымъ рядомъ новыхъ понятій и терминовъ, въ которыхъ въ сущности нѣтъ надобности, когда рѣчь идетъ о гармонизаціи простого басового мотива; самыя-же правила голосоведенія, будучи выражены словами, довольно сбивчивы и очень плохо удерживаются въ памяти. Я говорю здѣсь по личному опыту. Не смотря на выработанную научными занятіями привычку вникать въ сущность новаго вопроса, мои попытки уразумѣть безъ посторонней помощи начала гармонизаціи оставались довольно безплодными; меня устрашало то, что я предвидѣлъ значительную трату времени. Впослѣдствіи я снова сталъ заниматься гармоніей, пользуясь извѣстнымъ руководствомъ Чайковскаго. Уже при чтеніи первыхъ страницъ у меня зародился вопросъ, нельзя ли вмѣсто словъ выражать правила гармонизаціи какими нибудь простыми числовыми отношеніями и формулами. Мои попытки въ этомъ направленіи увѣнчались успѣхомъ: я нашелъ, что въ самомъ дѣлѣ основныя правила гармонизаціи могутъ быть выражены чрезвычайно простыми численными отношеніями. Я сообщаю здѣсь главнѣйшіе результаты своихъ изслѣдованій, въ надеждѣ, что любители музыки за это скажутъ мнѣ „спасибо".—Предлагаемыя здѣсь ариѳметическія начала гармонизаціи могутъ служить прочнымъ фундаментомъ теоріи музыки, и было бы весьма желательно, чтобы музыканты специалисты занялись дальнѣйшей разработкой данныхъ здѣсь основаній.

§ 2. Обратимъ прежде всего вниманіе на тотъ фактъ, что взаимное расположеніе двухъ какихъ либо трезвучій одного лада вполнѣ опредѣленно можетъ быть выражено однимъ числомъ съ надлежащимъ знакомъ плюсъ или минусъ. Представимъ себѣ, что всѣ діатоническія клавиши („ступени") на фортепіанѣ обозначены по порядку, снизу вверхъ, текущимъ номеромъ. Пусть a_1, a_2, a_3 три данные звука;

*) Помѣщаемъ, согласно обѣщанію, настоящую статью, хотя не вполнѣ раздѣляемъ высказанныя авторомъ мнѣнія и оставляемъ за собою право возвратиться въ послѣдствіи къ затронутому здѣсь вопросу.—Читателей вовсе не знакомыхъ съ теоріею музыки просимъ извинить насъ за удѣленіе въ журналѣ мѣста статьѣ мало для нихъ доступной, и принять во вниманіе, что мы дѣлаемъ это лишь по просьбѣ тѣхъ, которые совершенно основательно включаютъ *теорію* музыки въ область практической физики. *Прим. ред.*

тогда мы говоримъ, что они образуютъ трезвучіе въ *тѣсномъ* положеніи въ слѣдующихъ трехъ случаяхъ:

1) когда $a_2-a_1=2$; $a_3-a_2=2$; (основное положеніе)
2) „ $a_2-a_1=2$; $a_3-a_2=3$; (первое обращеніе)
3) „ $a_2-a_1=3$; $a_3-a_2=2$; (второе обращеніе)

звуки же a_1, a , a_3 называемъ нижнимъ, среднимъ и верхнимъ голосомъ.

Допустимъ теперь, что три голоса трезвучія перемѣщаются соотвѣтственно на n_1, n_2, n_3 ступени внизъ или вверхъ Тогда промежутки i_1 и i_2 между голосами въ новомъ положеніи будутъ:

$$i_1=a_2-a_1+(n_2-n_1);\quad i_2=a_3-a_2+(n_3-n_2),$$

и если мы опять введемъ условіе, чтобы новые промежутки были или оба $=2$, или же чтобы одинъ изъ нихъ былъ $=2$, а другой $=3$, что необходимо для того чтобы голоса въ новомъ положеніи снова образовали трезвучіе въ тѣсномъ расположеніи, то при данной суммѣ передвиженій $n_1+n_2+n_3=m$ самыя числа n_1, n_2, n_3 вполнѣ опредѣлятся. Легко убѣдиться, что при такихъ условіяхъ одна изъ разностей n_2-n_1 или n_3-n_2 всегда будетъ равна нулю, и что если напр. $n_2-n_1=0$, то n_3 будетъ или $=n_1$, или $=n_1\pm1$.

Предоставляю читателю убѣдиться лично на частныхъ примѣрахъ въ справедливости вышесказаннаго, и привожу одинъ только примѣръ для поясненія нашего положенія. Пусть дано трезвучіе C—E—G и пусть требуется подвергнуть его передвиженію на $+17$ ступеней. Въ данномъ случаѣ

$$a_2-a_1=a_3-a_2=2;\quad m=n_1+n_2+n_3=17.$$

По условію два изъ чиселъ n должны быть одинаковы, что приводитъ къ уравненію вида $2n+n'=17$; условіе же что $n'-n$ должно быть или $=0$ или $=\pm1$ удовлетворяется только при $n=6$, $n'=5$. Отсюда видимъ, что изъ трехъ голосовъ a_1, a_2, a_3 два должны перемѣститься на $+6$ ступеней, а третій—на $+5$; очевидно, что на $+5$ ступеней можно передвинуть только нижній голосъ (C), потому что только при этомъ условіи

$$i_1=a_2-a_1+(n_2-n_1)=3;\quad i_2=a_3-a_2+(n_3-n_2)=2,$$

и получается новое трезвучіе во второмъ обращеніи. Если-же мы бы захотѣли перемѣстить на $+5$ ступеней не нижній, а средній (E) или верхній голосъ (G), то i_1 и i_2 получились бы равными 2, 1, или 1, 2,—что противно принятымъ условіямъ. Итакъ, при передвиженіи голосовъ на $+17$ ступеней отъ трезвучія C—E—G переходимъ къ трезвучію A—*d*—*f*.

Лицамъ, желающимъ усвоить себѣ начала теоріи музыки по настоящему способу, рекомендую поупражняться на нотной бумагѣ въ перемѣщеніи голосовъ даннаго трезвучія на опредѣленное число ступеней. Очень легко убѣдиться въ томъ, что процессъ этотъ—чисто механическій и что при этомъ нѣтъ надобности обращать вниманіе на тональное содержаніе данныхъ и образующихся трезвучій.

Отмѣтимъ еще слѣдующіе два факта:

1) Трезвучія, отличающіяся на $\pm 7k$ ступеней, выражаютъ одно и тоже трезвучіе въ различныхъ его положеніяхъ или обращеніяхъ. Такъ напр. передвиженіемъ на $+7$, $+14$, $+21$ ступеней отъ C—E—G переходимъ къ: E—G—*c*, G—*c*—*e*, *c*—*e*—*g*.

2) Если число ступеней m между двумя трезвучіями есть кратное трехъ, то оба трезвучія находятся въ одинаковомъ обращеніи; другими словами, при m кратномъ трехъ всѣ три голоса перемѣщаются параллельно на одинаковое число ступеней.

§ 3. Сущность гармонизаціи заключается въ томъ, что извѣстные аккорды должны слѣдовать другъ за другомъ въ извѣстномъ порядкѣ. Легко предвидѣть какую пользу мы можемъ извлечь изъ только что установленнаго факта, что совмѣстное передвиженіе трехъ голосовъ вполнѣ опредѣляется однимъ числомъ съ соотвѣтственнымъ знакомъ. Вмѣсто длинныхъ объясненій словами какимъ образомъ нужно вести голоса согласно законамъ гармоніи, мы можемъ выражать это перемѣщеніе цыфрами, что придастъ нашимъ разсужденіямъ и краткость, и ясность.

Первая задача по гармоніи, съ которою долженъ ознакомиться учащійся, состоитъ въ томъ, чтобы къ данному басу подобрать три верхніе голоса. При этомъ предполагается сначала, что басъ всегда даетъ основную ноту (тонику, или приму) трезвучія.

При рѣшеніи такой задачи должны быть соблюдены слѣдующія условія:

1) чтобы перемѣщенія голосовъ были возможно меньше (начало наименьшихъ перемѣщеній);

2) чтобы по мѣрѣ возможности верхніе голоса двигались противоположно басу, т. е чтобы число m было положительнымъ, когда басъ движется внизъ, и—отрицательнымъ, когда басъ движется вверхъ;

3) чтобы три верхніе голоса не передвигались параллельно;

4) чтобы верхній голосъ не дѣлалъ шага болѣе какъ на ± 3 ступени;

5) чтобы не произошли такъ называемыя „скрытыя квинты или октавы“.

Скрытыя квинты или октавы происходятъ, когда два какіе нибудь голоса a_1 и a, двигаясь въ одну сторону, образуютъ въ новомъ положеніи квинту или октаву. Скрытыя квинты или октавы *допускаются* при четырехголосномъ веденіи гармоніи, когда одинъ изъ голосовъ остается неподвижнымъ.

Эти основные законы гармоніи—эмпирическіе и основываются на требованіяхъ благозвучія. Мы не станемъ ихъ ни доказывать, ни подвергать критикѣ, а принимаемъ ихъ какъ догмы, и займемся вопросомъ, какимъ образомъ слѣдуетъ вести верхніе три голоса такъ, чтобы при заданномъ басѣ они удовлетворяли вышеупомянутымъ законамъ.

§ 4. Пусть басъ a_0 дѣлаетъ шагъ n, принимая положеніе a_0+n Верхніе три голоса при параллельномъ перемѣщеніи передвигались бы на $+3n$ ступней, но такое слѣдованіе голосовъ недозволительно, а потому слѣдующее трезвучіе нужно принять въ какомъ нибудь другомъ обращеніи. Всевозможныя обращенія даннаго трезвучія мы получимъ, если къ числу $3n$ прибавимъ $\pm 7k$, гдѣ k нѣкоторое цѣлое число. Итакъ, при ходѣ баса на n ступеней, верхніе голоса имѣютъ возможность передвинуться на $3n \pm 7k$ ступеней. Принимая за k послѣдовательныя цѣлыя числа 1, 2, 3, 4,....., получимъ рядъ чиселъ, изъ которыхъ мы должны выбрать тѣ, которыя даютъ гармонизацію согласную съ вышеприведенными законами.

Разсмотримъ теперь подробнѣе всѣ частные случаи.

1) $n=0$, т. е. басъ остается на мѣстѣ. Согласно основной нашей формулѣ

$$3n \pm 7k \qquad (1)$$

передвиженіе верхнихъ голосовъ можетъ выражаться числами

$$0, \quad \pm 7, \ \pm 14, \ \pm 21, \ \ldots\ldots;$$

изъ нихъ возможны только два первыя; 0 (верхніе голоса тоже остаются на своихъ мѣстахъ) и ± 7 (обращеніе трезвучія). Движенія ± 14, ± 21,..... противорѣчатъ 4-му условію голосоведенія (§ 3).

2) $n=\pm 1$, т. е. басъ дѣлаетъ шагъ на секунду; возможныя передвиженія верхнихъ голосовъ по формулѣ (1) будутъ:

$$\ldots \mp 18, \ \mp 11, \ \mp 4, \ \pm 3, \ \pm 10, \ \pm 17, \ldots.$$

Изъ нихъ движеніе ∓ 4 есть единственное, удовлетворяющее всѣмъ требованіямъ гармоніи; въ самомъ дѣлѣ при: движеніи ± 3 было бы недозволенное параллельное перемѣщеніе, при ± 10—получились бы скрытыя квинты или октавы, при ∓ 11—два голоса дѣлаютъ шагъ на квинту, и пр.

3) $n = \pm 2$. Басъ дѣлаетъ шагъ на терцію. Для верхнихъ голосовъ имѣемъ рядъ:

$$\ldots\ldots \mp 15,\ \mp 8,\ \mp 1,\ \pm 6,\ \pm 13,\ \pm 20, \ldots\ldots$$

∓ 15, ± 13, ± 20 соотвѣтствуютъ слишкомъ большимъ перемѣщеніямъ голосовъ, ± 6 не годится какъ параллельное движеніе ихъ, ∓ 1 же даетъ прекрасную гармонизацію, при которой два голоса остаются на мѣстѣ и только третій движется, противоположно басу на одинъ шагъ вверхъ или внизъ. Движеніе ∓ 8 противорѣчитъ только началу возможно меньшихъ перемѣщеній, въ остальныхъ же годится и въ практикѣ нерѣдко употребляется,

4) $n = \pm 3$. Басъ дѣлаетъ шагъ на кварту. Ходъ верхнихъ голосовъ выражается рядомъ

$$\ldots\ldots \mp 19;\ \mp 12,\ \mp 5,\ \pm 2,\ \pm 9,\ \pm 16, \ldots\ldots$$

Отвергая ∓ 19, ± 16 (слишкомъ большія передвиженія), ∓ 12 и ± 9 (параллельное движеніе), остается разсматривать движенія ± 2 и ∓ 5. При первомъ одинъ изъ голосовъ остается на мѣстѣ, но остальные два двигаются въ туже сторону какъ и басъ. При ∓ 5 всѣ голоса движутся противоположно басу, но движеніе ихъ не наименьшее. Въ практикѣ чаще выбираютъ шагъ ± 2, хотя и ∓ 5 теоріею допускается.

5) $n = \pm 4$. Басъ дѣлаетъ шагъ на квинту. Для верхнихъ голосовъ имѣемъ:

$$\ldots\ldots \mp 16,\ \mp 9,\ \mp 2,\ \pm 5,\ \pm 12,\ \pm 19. .$$

Движеніе ∓ 2 даетъ гармонизацію безусловно хорошую (одинъ голосъ остается на мѣстѣ, два остальные движутся противоположно басу на одну ступень); движеніе же ± 5 здѣсь рѣшительно не годится, такъ какъ верхніе голоса, двигаясь въ ту же сторону какъ и басъ, непремѣнно образуютъ скрытыя квинты и октавы.

6) $n = \pm 5$. Басъ дѣлаетъ шагъ на сексту. Для верхнихъ голосовъ имѣемъ:

$$\ldots\ldots \mp 13,\ \mp 6,\ \pm 1,\ \pm 8,\ \pm 15 \ldots\ldots$$

Движенія ∓ 13, ± 15 слишкомъ большія, ∓ 6—параллельное; ± 8 то же не годится, такъ какъ верхніе голоса, двигаясь въ одну сторону съ басомъ, непремѣнно образуютъ квинты и октавы.

Итакъ для гармонизаціи хода баса на сексту остается только передвиженіе ± 1, хотя и при этомъ движущійся голосъ перемѣщается въ ту же сторону какъ и басъ. Поэтому видимъ, что шагъ баса на сексту гармонизируется значительно хуже, чѣмъ шагъ на секунду (обращенную сексту).

7) $n = \pm 6$. Басъ дѣлаетъ шагъ на септиму. Движеніе верхнихъ голосовъ выражается рядомъ

$$\ldots\ldots \mp 10,\ \mp 3,\ \pm 4,\ \pm 11, \ldots\ldots$$

± 4 здѣсь не годится, такъ какъ при движеніи баса и верхнихъ голосовъ въ одну и ту же сторону происходятъ квинты и октавы. Движеніе ∓ 3 приводитъ къ параллельному перемѣщенію голосовъ. При ∓ 10 соблюдается правило противоположнаго хода баса и верхнихъ голосовъ, но одинъ изъ верхнихъ голосовъ скачетъ на квинту, что непріятно для уха. Такимъ образомъ видно, что *шагъ баса на септиму не можетъ быть хорошо гармонизируемъ,* а требуетъ разныхъ частныхъ правилъ во избѣжаніе возникающихъ несообразностей.

8) $n = \pm 7$ Басъ скачетъ на октаву. Верхніе голоса остаются на мѣстѣ или передвигаются на ∓ 7 ступеней. *В. Фабриціусъ* (Кіевъ).

(Окончаніе слѣдуетъ).

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Отдѣленіе Физическихъ Наукъ ИМПЕРАТОРСКАГО Общества Любителей Естествознанія, Антропологіи и Этнографіи, состоящаго при Московскомъ Университетѣ, проситъ насъ перепечатать въ „Вѣстникѣ" нижеслѣдующее:

Правила для соисканія преміи имени В. П. Мошнина.

§ 1. Премія имени Владиміра Петровича Мошнина образуется изъ процентовъ съ капитала, пожертвованнаго въ размѣрѣ 8000 руб. вдовою покойнаго В. П. Мошнина Надеждою Константиновною Мошниной Императорскому Обществу Любителей Естествознанія, Антропологіи и Этнографіи.

§ 2. Основной капиталъ преміи остается неприкосновеннымъ на вѣчныя времена и можетъ возрастать отъ причисленія къ нему нѣкоторой части процентовъ (§§ 8 и 22). Проценты съ капитала употребляются исключительно на преміи и на медали рецензентамъ (§ 22) или же на увеличеніе капитала.

§ 3. Капиталъ преміи имени В. П. Мошнина, со всѣми могущими быть приращеніями, составляетъ собственность Императорскаго Общества Любителей Естествознанія, Антропологіи и Этнографіи. Обращенный въ государственныя пятипроцентныя бумаги, онъ хранится въ Московскомъ Губернскомъ Казначействѣ въ видѣ депозита Попечителя Московскаго Учебнаго Округа.

§ 4. Премія имени В. П. Мошнина присуждается ежегодно и состоитъ на первое время изъ трехъ сотъ (300) рублей. Съ теченіемъ времени она можетъ быть повышаема постепенно каждый разъ на пятьдесятъ (50) рублей, по усмотрѣнію Общества, по мѣрѣ того, какъ состояніе капитала дастъ къ тому возможность.

Примѣчаніе. Въ случаѣ удвоенія капитала Общество Любителей Естествознанія можетъ, буде сочтетъ желательнымъ, установить двѣ очередныя преміи, цѣнностью не менѣе трехъ сотъ (300) руб. каждая.

§ 5. Премія имени В. П. Мошнина назначается за самостоятельныя научныя изслѣдованія въ области физики и химіи, а также за выдающіяся изобрѣтенія и усовершенствованія по практическому приложенію этихъ наукъ, съ соблюденіемъ очереди между науками, такъ что одинъ годъ выдается премія по физикѣ, на слѣдующій годъ по химіи и т. д.

Примѣчаніе. Первая присуждаемая премія назначается по физикѣ.

§ 6. На соисканіе преміи принимаются сочиненія только на русскомъ языкѣ, внесенныя въ Отдѣленіе Физическихъ Наукъ Общества Любителей Естествознанія ихъ авторами или же членами Общества, какъ напечатанныя въ теченіе послѣднихъ трехъ лѣтъ, такъ и рукописныя.

Примѣчаніе. Анонимныя сочиненія не принимаются на конкурсъ. Сочиненія тѣхъ авторовъ, кои на основаніи § 9 не имѣютъ права на полученіе преміи, не подлежатъ разсмотрѣнію и возвращаются авторамъ.

§ 7. Премія ни въ какомъ случаѣ не раздѣляется между авторами двухъ или нѣсколькихъ сочиненій.

§ 8. Въ случаѣ, если ни одно изъ представленныхъ на конкурсъ сочиненій не удостоится преміи, на слѣдующій за симъ годъ объявляются двѣ преміи—одна по очередной наукѣ и одна по неочередной. На третій годъ премія не переходитъ и не выданная неочередная премія причисляется къ основному капиталу.

§ 9. Учрежденіе преміи имени В. П. Мошнина, согласно волѣ жертвовательницы, имѣетъ цѣлью оказать содѣйствіе русскимъ ученымъ, нуждающимся въ матеріальной и нравственной поддержкѣ при продолженіи ихъ научныхъ занятій, преимущественно начинающимъ.

Въ виду сего считаются безусловно не имѣющими права на полученіе преміи: 1) члены Императорской Академіи Наукъ, лица удостоенныя степени доктора химіи и физики, и профессора высшихъ учебныхъ заведеній.

Примѣчаніе. Вопросъ о томъ, можетъ ли представленное сочиненіе быть допущено на конкурсъ, рѣшается Отдѣленіемъ Физическихъ Наукъ простымъ большинствомъ голосовъ и закрытою баллотировкою, если относительно этого вопроса окажется разногласіе между членами Отдѣла.

2) Президентъ, вице-президентъ и секретарь Общества Любителей Естествознанія; Предсѣдатели и товарищи предсѣдателей всѣхъ Отдѣловъ и Отдѣленій Общества, Предсѣдатель Физико-Химической Коммиссіи Отдѣленія Физическихъ Наукъ Общества и всѣ члены Совѣта Общества, за исключеніемъ секретарей Отдѣловъ и Отдѣленій.

3) Иностранные подданные.

§ 10. Право на полученіе преміи принадлежитъ только самому автору удостоеннаго сочиненія, но отнюдь не издателю; въ случаѣ смерти автора послѣ присужденія преміи, она выдается законнымъ его наслѣдникамъ.

§ 11. Въ случаѣ, если удостоенное преміи сочиненіе будетъ напечатано въ изданіяхъ Общества, автору сочиненія выдается безплатно сто отдѣльныхъ оттисковъ.

§ 12. Сочиненія, назначенныя на конкурсъ, должны быть доставлены въ Отдѣленіе Физическихъ Наукъ не позже 1-го Мая того года, въ которомъ будетъ происходить присужденіе преміи.

§ 13. Для разсмотрѣнія представленныхъ на соисканіе каждой преміи сочиненій, Отдѣленіе Физическихъ Наукъ не позже 15-го Мая назначаетъ изъ среды своей особую спеціальную Коммиссію: Коммиссія можетъ, если признаетъ нужнымъ, поручить разсмотрѣніе того или другого изъ конкурсныхъ сочиненій ученому, не принадлежащему къ ея составу.

Примѣчаніе. Авторы сочиненій представленныхъ на соисканіе преміи не могутъ быть избираемы въ члены Коммиссіи.

§ 14. Предсѣдательство въ каждой спеціальной Коммиссіи (§ 13) принадлежитъ предсѣдателю Отдѣленія Физическихъ Наукъ Общества Любителей Естествознанія. Предсѣдатель Физико-Химической Коммиссіи состоитъ членомъ спеціальной Коммиссіи когда премія присуждается по химіи.

§ 15. Константинъ Владиміровичъ Мошнинъ считается пожизненно членомъ каждой спеціальной Коммиссіи.

§ 16. На основаніи письменнаго доклада спеціальной Коммиссіи о всѣхъ разсмотрѣнныхъ сочиненіяхъ Отдѣленіе Физическихъ Наукъ въ особомъ закрытомъ засѣданіи присуждаетъ премію большинствомъ голосовъ присутствующихъ членовъ посредствомъ открытой баллотировки, при чемъ принимается въ соображеніе § 9.

Въ случаѣ, если одинаковое число голосовъ будетъ подано въ пользу нѣсколькихъ сочиненій, то производится перебаллотировка между этими сочиненіями, причемъ голосъ Предсѣдателя даетъ перевѣсъ, если число голосовъ, поданныхъ за различныя сочиненія, опять окажется одинаковымъ.

§ 17. Докладъ Коммиссіи и заключеніе Отдѣленія Физическихъ Наукъ не позже 1-го Октября представляются на утвержденіе Общества Любителей Естествознанія.

§ 18. Сочиненія, не получившія преміи, могутъ быть удостоены почетнаго отзыва или иной почетной награды отъ Общества.

§ 19. Присужденіе преміи и наградъ Общества провозглашается въ годичномъ засѣданіи Общества Любителей Естествознанія, 15-го Октября, причемъ читается вполнѣ или въ сокращеніи докладъ Коммиссіи объ удостоенныхъ сочиненіяхъ. Докладъ этотъ печатается in extenso въ протоколѣ годичнаго засѣданія Общества.

Въ годичномъ же засѣданіи объявляется о томъ, какія преміи предстоятъ къ выдачѣ на слѣдующій годъ.

§ 20. О присужденіи преміи имени В. П. Мошнина, состоявшемся въ отчетномъ году, и о преміяхъ, предстоящихъ на слѣдующій годъ, публикуется ежегодно послѣ 15-го Октября въ „Московскихъ Вѣдомостяхъ".

§ 21. Въ особенныхъ случаяхъ, когда рецензія того или другого изъ конкурсныхъ сочиненій требовала со стороны рецензента значительнаго труда и составляетъ сама по себѣ цѣнную научную работу, Отдѣленіе Физическихъ Наукъ можетъ присудить автору рецензіи, посредствомъ закрытой баллотировки, большинствомъ присутствующихъ членовъ, особую золотую медаль Общества. Присужденіе медали представляется на утвержденіе Общества.

По каждой отдѣльной преміи болѣе одной медали въ годъ не выдается.

Рецензіи, удостоенныя медали, печатаются въ изданіяхъ Общества.

§ 22. На изготовленіе медалей, буде онѣ потребуются, отчисляется каждый разъ изъ процентовъ капитала, пожертвованнаго Н. К. Мошниной, сумма не болѣе ста (100) рублей по каждой отдѣльной преміи. Неизрасходованная на сей предметъ сумма причисляется къ капиталу преміи.

§ 23 Въ случаѣ необходимости измѣнить правила о преміи имени В. П. Мошнина, Общество Любителей Естествознанія, по представленію Отдѣленія Физическихъ Наукъ, ходатайствуетъ о семъ въ установленномъ порядкѣ, причемъ, однако, основныя положенія о преміи, выраженныя жертвовательницей, должны быть соблюдены на вѣчныя времена*).

ЗАДАЧИ.

№ 401. Сифонная трубка, одно колѣно которой значительно длиннѣе другого, содержитъ нѣкоторое количество ртути; ее опускаютъ вертикально въ воду, такъ чтобы короткое колѣно вполнѣ погрузилось и чтобы находящаяся въ немъ ртуть была подъ давленіемъ столба воды въ 1,5 метра. Въ длинномъ колѣнѣ ртуть находится подъ давленіемъ атмосферы. Опредѣлить разность уровней. (Задача Паскаля). (Заимств.) *Ш.*

№ 402. Требуется вычислить длину трехъ стальныхъ и двухъ латунныхъ стержней, изъ которыхъ хотятъ сдѣлать уравнительный маят-

*) Относительно § 5 этихъ правилъ позволяемъ себѣ сдѣлать слѣдующее замѣчаніе: если премія имени В. П. Мошнина можетъ быть выдаваема не только за научныя изслѣдованія по физикѣ или химіи, но и за выдающіяся изобрѣтенія и усовершенствованія, то чѣмъ гарантируется право изобрѣтателя на привилегію, въ случаѣ если, не заручившись еще таковою, напр. по недостатку средствъ на уплату пошлинъ, онъ пожелалъ бы представить описаніе или модель своего изобрѣтенія на конкурсъ? *Прим. ред.*

никъ для часовъ въ 0,5 метра длиною, если даны коэффиценты лин. расширенія:

для стали $\alpha = 0,0000108$; для латуни $\beta = 0,0000188$.

(Заимств.) *Ш.*

№ 403. Въ треугольникѣ ABC даны: отношеніе сторонъ $\frac{b}{c} = k$, биссекторъ l внутренняго угла A и биссекторъ l_1 внѣшняго угла при A. Доказать, что площадь треугольника S выражается

$$S = \frac{k^2 - 1}{4k} l l_1.$$

А. Гольденбергъ (Спб.)

№ 404. Вершины нѣкотораго четыреугольника не умѣщаются на чертежѣ; на немъ проведены лишь части его сторонъ. Найти точку пересѣченія діагоналей четыреугольника. *Д. Расторгуевъ* (Якутскъ).

№ 405. Черезъ точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямыя соотвѣтственно параллельныя тремъ сторонамъ. Этими прямыми треугольникъ разобьется на три параллелограма и три треугольника. Требуется доказать, что произведеніе площадей всѣхъ трехъ параллелограмовъ въ 8 разъ больше произведенія площадей трехъ треугольниковъ.

А. Бобятинскій (Ег. зол. пр.).

№ 406. Построить треугольникъ по данной сторонѣ, разности прилежащихъ угловъ и произведенію двухъ другихъ сторонъ.

В. Соллертинскій (Гатчино).

№ 407. Въ двухъ данныхъ точкахъ построить данные углы такъ, чтобы ихъ соотвѣтственныя стороны пересѣкались на данной прямой.

Проф. *В. Ермаковъ*.

Загадки и вопросы.

№ 21. Раздѣливъ 1 на $1-x$, получимъ:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots\ldots$$

Сдѣлаемъ теперь $x = 2$, тогда найдемъ:

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots\ldots$$

что представляетъ очевидный абсурдъ. Найти и разъяснить ошибку.

(Заимств.) *Ш.*

№ 22. Два купца перевозили вмѣстѣ свой товаръ на кораблѣ, и каждый имѣлъ по 15 ящиковъ. Во время путешествія поднялась буря, корабль былъ поврежденъ, и капитанъ объявилъ, что для возможности спасенія людей необходимо половину товара выбросить въ море. Первый купецъ ничего не имѣлъ противъ этого, но второй ни за что не хотѣлъ лишиться не только 8, но даже и 7 своихъ ящиковъ и требовалъ, чтобы этотъ спорный вопросъ былъ рѣшенъ по жребію. Поэтому всѣ 30 ящиковъ были установлены какъ попало въ кружокъ, и капитанъ, считая ихъ громко, каждый девятый ящикъ велѣлъ бросать за бортъ. Но онъ

такъ удачно выбралъ начало счета, что всѣ 15 ящиковъ упрямаго купца оказались выброшенными, а всѣ ящики перваго купца уцѣлѣли.—Какъ ящики были разставлены? (Заимств.) *Ш.*

NB. Желающимъ предоставляется рѣшить этотъ вопросъ, какъ задачу въ общемъ видѣ: Дано N первыхъ натуральныхъ чиселъ, расположенныхъ въ кружокъ; начиная съ 1, каждое m-ое число вычеркивается, до тѣхъ поръ пока не будетъ вычеркнуто q чиселъ (максимальное значеніе $q=N-1$). Какія числа останутся?

Упражненія для учениковъ.

Рѣшить уравненія:

1) $3^{x}=(2187)^{\frac{1}{x}}$. Отв. $x=\pm\sqrt{7}$.

2) $\sqrt[2x+3]{4^{3-x}}=1024$. Отв. $x=-\frac{12}{11}$.

3) $\dfrac{\sqrt[q-x]{a^{p+x}}}{\sqrt[q+x]{a^{p-x}}}=\sqrt[q^2-x^2]{a^2}$. Отв. $x=\frac{1}{p+q}$.

4) $3^{x+1}-3^{x}-162=0$. Отв. $x=4$.

5) $m^{x}-3m^{x-2}=5$. Отв. $x=2+\dfrac{\lg 5-\lg(m^2-3)}{\lg m}$.

6) $x^{\sqrt[3]{x}}=\left(\sqrt[3]{x}\right)^{x}$. Отв. $x=1,\ 0,\ 4\sqrt[3]{4},\ 4a\sqrt[3]{4},\ 4a^2\sqrt[3]{4}$. 0, ±3

7) $\left.\begin{array}{l} x^{y}=y^{x} \\ x^{3}=y^{5} \end{array}\right|$ Отв. $x=\left({}^{5}/_{3}\right)^{{}^{5}/_{2}}$, $y=\left({}^{5}/_{3}\right)^{{}^{3}/_{2}}$.

8) $x^{x+y}-y^{4m}=0$; $y^{x+y}-x^{m}=0$. Отв. $x=\dfrac{1+4m\pm\sqrt{1+8m}}{2}$.

З. Архимовичъ (Новозыбковъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 143. У торговки было a яблокъ, которыя она продавала послѣдовательно n покупателямъ слѣдующимъ образомъ: первому покупателю она продала половину бывшаго у нея количества яблокъ и еще полъ яблока, второму половину оставшагося количества и еще полъ яблока третьему—половину того, что осталось послѣ продажи первымъ двумъ и снова полъ яблока, и т. д. Послѣ продажи всѣмъ покупателямъ у нея осталось b яблокъ. Найти условія, которымъ должны удовлетворять цѣлыя числа a, b и n, чтобы задача была возможна въ томъ предположеніи, что торговка, продавая яблока, ихъ не разрѣзывала.

Пусть количества яблокъ, проданныхъ первому, второму, ... i—му . . . . , n—му покупателямъ, будутъ

$$x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_n,$$

тогда

$$x_1 = \frac{a+1}{2},$$

$$x_2 = \frac{a+1-x_1}{2},$$

$$x_3 = \frac{a+1-x_1-x_2}{2},$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_i = \frac{a+1-x_1-x_2-\ldots\ldots-x_{i-1}}{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = \frac{a+1-x_1-x_2-\ldots\ldots-x_{n-1}}{2}$$

$$x_1+x_2+x_3+\ldots\ldots+x_n = a-b.$$

Вычитая каждое изъ уравненій, кромѣ перваго и послѣдняго, изъ предыдущаго, получаемъ

$$x_1-x_2=\frac{x_1}{2},\; x_2-x_3=\frac{x_2}{2},\ldots,\; x_{i-1}-x_i=\frac{x_{i-1}}{2},\ldots,\; x_{n-1}-x_n=\frac{x_{n-1}}{2}$$

или

$$x_2=\frac{x_1}{2},\; x_3=\frac{x_2}{2},\ldots,\; x_i=\frac{x_{i-1}}{2},\ldots\ldots,\; x_n=\frac{x_{n-1}}{2}.$$

Откуда видно, что величины $x_1, x_2, \ldots x_n$ образуютъ геометрическую прогрессію съ знаменателемъ $\frac{1}{2}$; а потому

$$x_i=\frac{x_1}{2^{i-1}}.$$

А такъ какъ изъ перваго уравненія имѣемъ

$$x_1=\frac{a+1}{2},$$

то общая формула для каждаго изъ количествъ x_i будетъ

$$x_i = \frac{a+1}{2^i},$$

гдѣ i имѣетъ всѣ значенія отъ 1 до n.

Послѣднее изъ нашихъ уравненій, при этихъ условіяхъ выразится такъ

$$2x_1 - x_n = a - b,$$

или

$$a+1-\frac{a+1}{2^n}=a-b$$

или, наконецъ,

$$a+1=2^n(b+1).$$

Слѣдовательно

$$x_i = 2^{n-i}(b+1).$$

Итакъ, если n и b будутъ произвольными цѣлыми положительными числами, то и $a=2^n(b+1)-1$ и x_i, при i не превосходящемъ n, будутъ такими же числами.

А. Колтановскій (Немировъ), *П.....іусъ* (?), *Н. Артемьевъ* и *Мясковъ* (Спб.) *В. Гиммельфарбъ* и *И. Кукуджановъ* (Кіевъ). Ученикъ Тульск. г. (8), *Н. И.*

№ 152. Полый шаръ въ водѣ не тонетъ и не плаваетъ; плотность матеріала δ, радіусъ наружной поверхности r. Найти толщину стѣнки.

Означивъ толщину стѣнки черезъ x, имѣемъ изъ условій задачи.

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \left[\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi (r-x)^3\right]\delta,$$

Отсюда

$$r-x=r\sqrt[3]{\frac{\delta-1}{\delta}},$$

Слѣд.

$$x=r\left(1-\sqrt[3]{\frac{\delta-1}{\delta}}\right).$$

И. Кукуджановъ (Кіевъ). Ученикъ: Тиф. р. у. (7) *Н. И.*

№ 198. Нѣкоторый инструментъ издаетъ ноту *Do* (*ut*). Какую ноту будетъ слышать наблюдатель, приближающійся къ источнику звука со скоростью 41, 5 м. въ секунду? (Скорость звука=332 м.).

Если наблюдатель стоитъ на одномъ мѣстѣ, то тонъ звучащаго тѣла не будетъ измѣняться, такъ какъ каждую секунду въ его ухо будетъ попадать равное число звуковыхъ волнъ. Когда же онъ начнетъ приближаться къ звучащему тѣлу, то въ его ухо попадутъ еще и тѣ звуковыя волны, которыя не успѣли бы дойти, если-бы онъ оставался неподвижнымъ, вслѣдствіе чего тонъ звучащаго тѣла будетъ казаться выше. Обозначимъ чрезъ 1 число звуковыхъ волнъ тона *do*, доходящихъ въ одну секунду, тогда увидимъ, что число волнъ, воспринимаемыхъ ухомъ наблюдателя, при приближеніи къ источнику звука, будетъ

$$1+\frac{1}{8}=\frac{9}{8},$$

(41,5 м=одной восьмой скорости звука).

При нашихъ обозначеніяхъ это соотвѣтствуетъ тону *Re*.

Н. Страдомскій (Черниговъ).

№ 218. Сколько цыфръ имѣетъ число:

$$1+10^4+\frac{10^4(10^4-1)}{1.\ 2.}+\frac{10^4(10^4-1)(10^4-2)}{1.2.3.}+\ .\ .\ .\ .$$

Указать общій пріемъ для рѣшенія подобныхъ задачъ.

Данный рядъ сравнимъ со второю частью разложенія бинома Ньютона:

$$(x+a)^n=x^n+nax^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}a^2+\ .\ .\ .\ .$$

Очевидно, чтобы изъ этого разложенія получить данный рядъ, необходимо положить

$$x=1,a=1,n=10^4$$

Слѣд. сумма членовъ даннаго ряда будетъ

$$2^{10^4}=2^{10000}$$

Логариѳмируя, видимъ, что характеристика логариѳма этого числа будетъ 3010, слѣд. число 2^{10000} имѣетъ 3011 цыфръ. Общій пріемъ такой: нужно данный рядъ, имѣющій сходство съ разложеніемъ бинома Ньютона, замѣнить степенью двучлена. Затѣмъ уже логариѳмированіемъ опредѣлимъ сколько цыфръ имѣетъ это число.

П. Никульцевъ (Смол.). Ученики: Т. Х. р. уч. (7) *С. Х.*, Тиф. р. уч. (7) *Н. П.*

№ 227. Показать что если *a*, *b*, *c* суть стороны треугольника, а A, B, C—соотвѣтствующіе его углы, то

$$\mathrm{Sin}\,{}^1\!/_2\mathrm{A}<\frac{a}{2\sqrt{cb}}$$

и $$\operatorname{Cos}A+\operatorname{Cos}B+\operatorname{Cos}C<\frac{3}{2}.$$

Извѣстно, что

$$\operatorname{Sin}{}^1/_2A=\sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{4bc}}=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}.$$

Очевидно теперь, что

$$\operatorname{Sin}{}^1/_2A<\frac{a}{2\sqrt{bc}}$$

Подобнымъ же образомъ находимъ

$$\operatorname{Sin}{}^1/_2B<\frac{b}{2\sqrt{ac}},\quad \operatorname{Sin}{}^1/_2C<\frac{c}{2\sqrt{ab}}.$$

Отсюда

$$\operatorname{Sin}{}^1/_2A\ \operatorname{Sin}{}^1/_2B\ \operatorname{Sin}{}^1/_2C<\frac{1}{8}.$$

Для суммы косинусовъ угловъ треугольника легко найти такую зависимость:

$$\operatorname{Cos}A+\operatorname{Cos}B+\operatorname{Cos}C=1+4\operatorname{Sin}{}^1/_2A\ \operatorname{Sin}{}^1/_2B\ \operatorname{Sin}{}^1/_2C.$$

Принявъ во вниманіе полученное неравенство, найдемъ

$$\operatorname{Cos}A+\operatorname{Cos}B+\operatorname{Cos}C<{}^3/_2.$$

Веприцкій (Карсъ), *С. Шатуновскій* (Кам. Под.). *Н. Артемьевъ* (Спб.). *А. Бобятинскій* (Ег. зол. пр.), *Ивановскій* (Воронежъ). *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ). *И. Кукуджановъ* (Кіевъ). Ученики: Тифл. р. уч. (7) *Н. П.*, Кишинев. р. уч. (7) *Д. Л.*

№ 267. Доказать справедливость слѣдующихъ равенствъ:

$$\operatorname{Cos}b+\operatorname{Cos}(a+b)+\operatorname{Cos}(2a+b)+\ldots\ldots+\operatorname{Cos}\Big[(n-1)a+b\Big]=$$

$$=\frac{\operatorname{Sin}\frac{na}{2}\operatorname{Cos}\left(\frac{n-1}{2}a+b\right)}{\operatorname{Sin}\frac{a}{2}};$$

$$\operatorname{Sin}b+\operatorname{Sin}(a+b)+\operatorname{Sin}(2a+b)+\ldots\ldots+\operatorname{Sin}\Big[(n-1)a+b\Big]=$$

$$=\frac{\operatorname{Sin}\frac{na}{2}\operatorname{Sin}\left(\frac{n-1}{2}a+b\right)}{\operatorname{Sin}\frac{a}{2}}.$$

Извѣстно изъ тригонометріи, что

$$\operatorname{Sin}(x+y)-\operatorname{Sin}(x-y)=2\operatorname{Sin}y.\operatorname{Cos}x.$$

Пусть теперь $x=b+ma$, а $y=\frac{a}{2}$;

Тогда $\mathrm{Sin}\left(b+\frac{2m+1}{2}a\right)-\mathrm{Sin}\left(b+\frac{2m-1}{2}a\right)=2\mathrm{Cos}(b+ma)\mathrm{Sin}\frac{a}{2}$.

Давая здѣсь m рядъ значеній

$$0, 1, 2, 3, \ldots\ldots (n-1),$$

получимъ $\mathrm{Sin}\left(b+\frac{a}{2}\right)-\mathrm{Sin}\left(b-\frac{a}{2}\right)=2\mathrm{Cos}b\mathrm{Sin}\frac{a}{2}$,

$$\mathrm{Sin}\left(b+\frac{3a}{2}\right)-\mathrm{Sin}\left(b+\frac{a}{2}\right)=2\mathrm{Cos}(a+b)\mathrm{Sin}\frac{a}{2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathrm{Sin}\left(b+\frac{2n-1}{2}a\right)-\mathrm{Sin}\left(b+\frac{2n-3}{2}\right)=2\mathrm{Cos}\left[(n-1)a+b\right]\mathrm{Sin}\frac{a}{2}.$$

Складывая, находимъ

$$\mathrm{Sin}\left(b+\frac{2n-1}{2}a\right)-\mathrm{Sin}\left(b-\frac{a}{2}\right)=2\left[\mathrm{Cos}b+\mathrm{Cos}(a+b)+\mathrm{Cos}(2a+b)+\ldots+\right.$$

$$\left.+\mathrm{Cos}\left\{(n-1)a+b\right\}\right]\mathrm{Sin}\frac{a}{2}.$$

Но первая часть этого равенства можетъ быть представлена въ такомъ видѣ:

$$2\mathrm{Sin}\frac{an}{2}\mathrm{Cos}\left(b+\frac{n-1}{2}a\right),$$

Слѣд.

$$\mathrm{Cos}b+\mathrm{Cos}(a+b)+\mathrm{Cos}(2a+b)+\ldots+\mathrm{Cos}\left[(n-1)a+b\right]=$$

$$=\frac{\mathrm{Sin}\frac{na}{2}\mathrm{Cos}\left(b+\frac{n-1}{2}a\right)}{\mathrm{Sin}\frac{a}{2}}.$$

Помня же, что

$$\mathrm{Cos}(x-y)-\mathrm{Cos}(x+y)=2\mathrm{Sin}x\mathrm{Sin}y.$$

мы подобнымъ образомъ получимъ

$$\mathrm{Sin}b+\mathrm{Sin}(a+b)+\mathrm{Sin}(2a+b)+\ldots+\mathrm{Sin}\left[(n-1)a+b\right]=$$

$$=\frac{\mathrm{Sin}\frac{na}{2}\mathrm{Cos}\left(b+\frac{n-1}{2}a\right).}{\mathrm{Sin}\frac{a}{2}}$$

В. Вознесенскій и *И. Кумсковъ* (Воронежъ), *М. Л.* (Архангельскъ), *Н. Соболевскій* (Москва). *А. Бобятинскій* (Ег. зол. пр.). Ученики: Ворон. к.к. (?) *Н.*, (?) *И. К.*, Курск. г. (7) *И. Г.*, Тифл, р. уч. (7) *Н. П.*

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Кіевъ, 6 Февраля 1889 г.
Типо-литографія Высочайше утвержд. Товарищества И. Н. Кушнеревъ и К°.

НОВОЕ ИЗОБРѢТЕНІЕ

ЛИНОВАЛЬНАЯ МАШИНКА

ВИРПШИ.

Серебряная медаль на Екатеринбургской выставкѣ. Линуетъ быстро бумагу различнаго формата, въ различныхъ направленіяхъ: **горизонтально, вертикально,** болѣе или менѣе наклонно, **часто** или **рѣдко**—по желанію.

КОНТОРСКАЯ ЛИНОВАЛЬНАЯ МАШИНКА

съ карандашами и перьями для линованія **различными** цвѣтными **чернилами** различной величины бланокъ, конторскихъ книгъ, нотныхъ графъ и пр. Одной машинки достаточно для цѣлаго учрежденія. Стопа писчей бумаги разлиновывается ею въ $1^1/_2$ часа.

Цѣна 25 р. съ перес. за 40 ф.

ШКОЛЬНАЯ МАШИНКА

для линованія тетрадей (тетрадь разлиновывается въ 3—4) минуты съ карандашами и перьями.

Цѣна 8 р. перес. за 6 фунт.

АДРЕСЪ: **гор. САРАПУЛЬ** (Вятск. губ.) въ Фотографію братьевъ **ВИРПША.**

Машинки высылаются съ наложеннымъ платежемъ по полученіи $^1/_3$ выше означенной суммы денегъ.

Отзывъ Директора Сарапульскаго Реальнаго училища.

Изобрѣтенная г. Валентиномъ Вирпша **линовальная машинка,** удостоенная серебряной медали на Екатеринбургской выставкѣ, по своей практичности, простотѣ устройства и скорости работы представляетъ весьма полезное и необходимое учебное пособіе для сельскихъ и городскихъ училищъ. Машинка эта значительно сокращаетъ время и трудъ, которые обыкновенно тратятся на утомительную разграфку ученическихъ тетрадей при помощи линейки и карандаша; самая разграфка производится въ ней карандашами или особыми перьями съ чернилами, весьма быстро и отчетливо, съ равными разстояніями между линіями, которыя могутъ быть проведены въ какихъ угодно направленіяхъ.

Простота устройства машинки даетъ возможность работать съ нею прямо, безъ особаго навыка и подготовки.

Пріобрѣтенная для Сарапульскаго реальнаго училища линовальная машинка послѣдняго, усовершенствованнаго устройства, при которомъ всѣ перья заразъ погружаются въ общій желобокъ съ чернилами, употребляется для разграфки ученическихъ тетрадей при урокахъ чистописанія. Машинка эта работаетъ очень быстро, отчетливо и вѣрно и по своей практичности заслуживаетъ полнаго одобренія.

Директоръ училища **А. Генкель.**

11-го Октября 1887 года. 3—3.