Обложка
ищется

Обложка
ищется

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 72.

VI Сем. 15 Мая 1889 г. № 12.

Гальваническіе элементы Э. К. Шпачинскаго.

Чтобы рѣшиться выступить съ предложеніемъ новаго гальваническаго элемента въ наше время, когда и безъ того число ихъ такъ велико, нужна, безъ сомнѣнія, нѣкоторая смѣлость. Оправданіемъ такой смѣлости можетъ служить только одно изъ двухъ: или изобрѣтеніе вполнѣ *новой* для элемента комбинаціи, независимо отъ того, окажется ли она удобопримѣнимой на практикѣ или нѣтъ,—или такое усовершенствованіе прибора, которое можно сдѣлать его употребленіе болѣе *удобнымъ*.—Химическія реакціи, сопровождаемыя выдѣленіемъ энергіи въ формѣ электричества, конечно, далеко еще не всѣ исчерпаны, даже далеко не всѣ еще испробованы; довольно сказать для примѣра, что примѣнимость въ этомъ отношеніи громаднаго числа органическихъ соединеній почти не была изучена. Но придумываніе новыхъ, хотя бы и остроумныхъ комбинацій, на врядъ ли отвѣчаетъ современнымъ потребностямъ: при возрастающей съ каждымъ днемъ популярности электричества, для гальваническихъ элементовъ нужны не столько *химическія*, сколько *физико-техническія* усовершенствованія. Для сильныхъ источниковъ электричества такое усовершенствованіе почти достигнуто въ динамо-машинахъ. Но динамо-машины доступны обществамъ, а не отдѣльнымъ лицамъ: для частной, вообще болѣе мелкой эксплоатаціи электричества нужны другіе источники, именно гальваническіе элементы, которымъ суждено сдѣлаться общедоступными, даже вульгарными, которые и теперь уже переходятъ изъ кабинетовъ въ переднія, изъ вѣдѣнія спеціалистовъ въ руки обыкновенныхъ смертныхъ, изъ области научныхъ приборовъ въ категорію необходимыхъ въ обыденной жизни приспособленій.

Эта роль гальваническихъ элементовъ понимается всѣми, и всѣ изобрѣтатели новыхъ ихъ видоизмѣненій стремятся главнымъ образомъ къ идеалу общедоступности. Сюда же клонится и моя попытка. На самомъ дѣлѣ я не составилъ *новаго* элемента, не претендую на новое изобрѣтеніе, а предлагаю лишь такую *систему снаряженія элементовъ*, примѣнимую если угодно ко многимъ различнымъ хорошо извѣстнымъ типамъ, которая если, быть можетъ, и была кѣмъ нибудь испытана на практикѣ, то со всякомъ случаѣ не была—сколько мнѣ извѣстно—нигдѣ описана и оцѣнена по достоинству въ отношеніи практичности. Найдетъ ли она широкое у насъ примѣненіе и дальнѣйшее развитіе, или же будетъ предана забвенію подобно сотнямъ другихъ—это вопросъ будущаго, для безпристрастнаго рѣшенія котораго я вовсе не намѣренъ пользоваться до поры до времени чьимъ бы то ни было невѣдѣніемъ и пріоблекать въ рекламахъ свои элементы въ заманчивый покровъ *секретной* новинки. Напротивъ, я былъ бы радъ, если бы возможно большее число читателей „Вѣстника" попробовали сами составлять элементы по моей системѣ, (что, какъ они увидятъ изъ нижеслѣдующаго, дѣлается очень просто) и затѣмъ не отказались бы извѣщать меня о достигнутыхъ ими результатахъ или о сдѣланныхъ улучшеніяхъ. Въ виду этого, а также и вмѣсто отвѣтовъ на полученные мною распросы касательно изготовленія такихъ элементовъ при редакціи (о чемъ было помѣщено краткое извѣщеніе въ № 65), я изложу здѣсь въ небольшомъ рядѣ статей сущность предлагаемой мною системы и ея примѣненіе къ составленію нѣсколькихъ типовъ.

Непрерывное теченіе электричества обусловливается включеніемъ въ замкнутую цѣпь двухъ разнородныхъ проводниковъ перваго рода и одного проводника второго ряда (электролита). Всякій гидроэлектрическій элементъ можетъ быть, слѣдовательно, изображенъ такою схемою:

$$A \mid B \mid C$$

гдѣ B есть нѣкоторая жидкость, A—тотъ электродъ, отъ котораго токъ идетъ внутри элемента (обыкновенно—это цинкъ) и C—второй электродъ. Чаще всего результатомъ электролиза жидкости B бываетъ *свободный* водородъ, направляющійся по теченію и скопляющійся на границѣ проводника C. При этомъ та химическая энергія, какую былъ бы способенъ проявить этотъ электролитическій водородъ при новомъ своемъ соединеніи съ какимъ нибудь веществомъ, напримѣръ съ кислородомъ, въ такомъ простомъ гальваническомъ элементѣ не утилизируется; само же вытѣсненіе водорода, (т. е. разложеніе жидкости B) можетъ совершаться не иначе, очевидно, какъ на счетъ энергіи соединенія A съ B. Мы измѣряемъ химическую энергію тепловыми единицами, а такъ какъ электровозбудительная сила, развиваемая гальваническимъ элементомъ, прямо пропорціональна количеству выдяляемаго въ немъ тепла, то понятно, что электровозбудительная сила такого элемента, въ которомъ выдѣляется свободный водородъ, будетъ значительно меньше, чѣмъ въ такомъ элементѣ, гдѣ водородъ по мѣрѣ выдѣленія будетъ вновь окисляться, образуя воду или иное соединеніе. Въ такихъ благопріятныхъ условіяхъ находится, напримѣръ, всякій свѣже приготовленный элементъ въ первые моменты дѣйствія тока, ибо жидкость B, благодаря сообщенію съ воздухомъ, всегда содержитъ нѣкокорое хотя и незначительное количество поглощеннаго кислорода, на счетъ котораго въ первые моменты дѣйствія тока электролитическій водородъ и окисляется. Затѣмъ, когда поглощенный жидкостью B, а также и скопленный на поверхности проводника C воздухъ потеряетъ весь свой кислородъ, электровозбуд. сила элемента значительно понизится, а также и сопротивленіе его увеличится, благодаря скопленію на C пузырьковъ водорода. Все это вмѣстѣ взятое принято называть *поляризаціею* гальваническаго элемента; но было бы ошибочнымъ, какъ это слѣдуетъ изъ вышесказаннаго, считать такую поляризацію чѣмъ то въ родѣ порчи, которой простой гальваническій элементъ легко подается. Это есть вполнѣ нормальное и неизбѣжное слѣдствіе электролиза внутри самаго же источника, и съ точки зрѣнія закона сохраненія энергіи поляризацію слѣдуетъ понимать, какъ неполное превращеніе химической энергіи въ электрическую, ибо—какъ мы видѣли—часть этой энергіи расходуется на ненужное въ данномъ случаѣ разложеніе, т. е. внутри элемента совершается въ то-же время обратный переходъ части электричества въ потенціальную химическую энергію. Строго говоря, избѣгнуть этой потери—мы не въ состояніи; но мы можемъ вознаградить ее *отчасти* устройствомъ, такъ сказать, второго гальваническаго элемента, расположеннаго рядомъ съ первымъ, въ которомъ роль цинка игралъ бы электролитическій водородъ *). Въ этомъ второмъ элементѣ повторится то-же явленіе что и въ первомъ: водородъ въ немъ будетъ окисляться, или общнѣе—входить въ новое соединеніе, нѣкоторый электролитъ будетъ при этомъ разлагаться, при чемъ опять продуктъ такого вытѣсненія долженъ выдѣлиться безполезно на второмъ электродѣ. Слѣдовательно часть энергіи опять перейдетъ въ потенціальное состояніе, но меньшая, чѣмъ при выдѣленіи свободнаго водорода; притомъ этотъ второй элементъ можно придумать такъ, чтобы новый продуктъ реакціи вытѣсненія, скоплающійся на границѣ анода, не уменьшалъ своей плохой электропроводностью силы тока элемента. Если напримѣръ будетъ осаждаться металлъ, положимъ электролитическая мѣдь (какъ въ элементѣ Даніэля) то *отъ этой причины* внутреннее сопротивленіе увеличиваться не будетъ, ибо мѣдь отличный проводникъ. Вотъ причина, почему въ такомъ случаѣ ограничиваемся соединеніемъ въ одно цѣлое только двухъ простыхъ элементовъ (хотя теоретически—для уменьшенія безполезного перехода энергіи обратно въ потенціальное состояніе мы могли бы еще прибавлять третій, четвертый и т. д. элементы) и почему напр. принято говорить, что элементъ Даніэля не поляризуется. Въ сущности онъ точно такъ-же поляризуется какъ и простой элементъ: цинкъ, сѣрная кислота, мѣдь, но только поляризуется не водородомъ, а мѣдью.

Я позволилъ себѣ нѣсколько распространиться о гальванической поляризаціи какъ потому, что съ этимъ терминомъ зачастую соединяется не вполнѣ правильный взглядъ на сущность происходящихъ здѣсь явленій, такъ еще и потому, что для меня крайне важно выяснить ту роль, какую играетъ въ гальваническомъ элементѣ такъ называемый *деполяризаторъ*, т. е. то четвертое вещество, которое вводится ради образованія второго элемента рядомъ съ первымъ.

Самымъ идеальнымъ деполяризаторомъ былъ бы конечно кислородъ, ибо въ такомъ случаѣ не существовало бы никакого второго продукта,

---

*) Этотъ второй элементъ особенно наглядно выступаетъ въ томъ видоизмѣненіи Даніэлевскаго типа, которое предложилъ *Крамеръ*. Элементъ Крамера, съ двумя мѣдными электродами, и двумя пористыми сосудами устроенъ по схемѣ

A | B | C | B | D | C

гдѣ A—цинкъ, B—сѣрн. кисл., D—раств. мѣднаго купороса и C—мѣдные электроды, разъ на всегда соединенные между собою внѣ элемента.

выдѣляющагося на анодѣ, и образовалась бы только вода въ такомъ же точно количествѣ въ какомъ она была разложена токомъ. Но кислорода какъ газа, ввести непосредственно въ элементъ нельзя; растворимость же этого газа въ жидкостяхъ такъ ничтожна, что и этимъ путемъ деполяризація невозможна. Остается только пользоваться ради этой идеи *пористостью* того электрода, на которомъ выдѣляется водородъ, и—ради экономіи—приводить его въ непосредственное соприкосновеніе съ атмосфернымъ воздухомъ. Какъ извѣстно, есть нѣсколько типовъ основанныхъ на этомъ принципѣ гальваническихъ элементовъ (цинко-угольныхъ); къ нимъ относится отчасти и общеизвѣстный элементъ Лекляше, въ которомъ смѣсь угля съ пиролюзитомъ потому именно не должна быть погружена въ жидкость болѣе какъ до половины, чтобы этотъ электродъ успѣвалъ деполяризоваться также и кислородомъ воздуха. Но подобная деполяризація, хотя и самая дешевая, требуетъ вообще слишкомъ продолжительныхъ періодовъ бездѣйствія элемента, и потому не примѣнима къ случаямъ непрерывной эксплоатаціи тока.

Поэтому для деполяризаціи элемента употребляютъ обыкновенно нѣкоторое сложное четвертое вещество D, которое было бы способно къ реакціи замѣщенія одной изъ своихъ составныхъ частей электролитическимъ водородомъ. Въ такомъ случаѣ вытѣсненный продуктъ этой реакціи будетъ во все время дѣйствія тока выдѣляться. Такъ въ элементѣ Даніэля выдѣляется мѣдь, въ элементѣ Бунзена или Грове—газообразное вещество (окись азота NO), которое тотчасъ-же окисляется на счетъ кислорода воздуха и даетъ красно-бурые пары двуокиси азота (NO_2); въ элементахъ Поггендорфа, Грене и пр., гдѣ деполяризаторомъ служитъ свободная хромовая кислота (CrO_3), образующаяся при дѣйствіи сѣрной кислоты (H_2SO_4) на двухромокаліевую соль ($K_2Cr_2O_7$), хромъ не выдѣляется только потому, что въ присутствіи сѣрной кислоты онъ вновь вступаетъ въ реакцію (что составляетъ, такъ сказать, *третій* элементъ) и даетъ соединеніе $Cr_2(SO_4)_3$, которое вмѣстѣ съ сѣрно-каліевою солью K_2SO_4 кристаллизуется въ такъ называемые *хромовые квасцы*.—Я выбралъ нарочно эти три примѣра, чтобы напомнить различные возможные случаи результатовъ введенія деполяризатора. Въ первомъ примѣрѣ ненужный продуктъ реакціи есть *металлъ*, т. е. хорошій проводникъ, котораго осажденіе на электродѣ C скорѣе улучшаетъ, чѣмъ портитъ элементъ, уменьшая до нѣкоторой степени его внутреннее сопротивленіе. Въ элементѣ Бунзена выдѣляется *газообразный* продуктъ, но не на электродѣ, а переходитъ прямо въ воздухъ и разсѣивается; вслѣдствіе этого плохая его электропроводность не имѣетъ здѣсь вліянія. Наконецъ при употребленіи двухромокислаго кали выдѣляется сложный продуктъ, *переходящій въ растворъ* самой жидкости, загрязняющій ее, осаждающійся потомъ въ видѣ кристалловъ и вообще увеличивающій внутреннее сопротивленіе элемента.

Деполяризующее вещество D обыкновенно стараются расположить *между* электродами A и C, даже между жидкостью B и электродомъ C. Схема такъ приготовленнаго элемента есть вообще

$$A \mid B \mid D \mid C.$$

Обыкновенно D есть тоже жидкость, т. е. растворъ нѣкоторой соли или кислоты. Въ такомъ случаѣ необходимо позаботиться, чтобы обѣ жидкости B и D не смѣшивались непосредственно. Допустить такое смѣшеніе (какъ напримѣръ въ элементѣ Грене) можно лишь въ такомъ случаѣ, когда химическое взаимодѣйствіе между A и D не становится само по себѣ вреднымъ для функціонированія элемента. Если D есть твердое тѣло, не растворяющееся въ жидкости B (какъ напр. окись мѣди въ элементѣ Лаланда и Шаперона, или перекись марганца въ элементѣ Лекляпше, или перекись свинца въ свинцовомъ аккумуляторѣ Плянте), то никакихъ пористыхъ перегородокъ между B и D не надо, и конструкція элемента значительно упрощается.

Назовемъ чрезъ E тотъ продуктъ электролиза, который выдѣляется въ окончательномъ видѣ на границѣ электрода C; тогда во все время дѣйствія тока имѣемъ комбинацію:

$$A \mid B \mid D \mid E \mid C. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Если E есть проводникъ 1-го рода (металлъ), то *электровозбудительная сила, развиваемая системою* (α), *вовсе не зависитъ отъ вещества электрода C*, точно такъ же, какъ она не зависитъ, напримѣръ, отъ того изъ какого металла проволокою мы соединяемъ полюсы элемента. Въ этомъ случаѣ электродъ C перестаетъ быть, очевидно, составною частью элемента и играетъ лишь роль обыкновеннаго соединительнаго проводника для элемента

$$A \mid B \mid D \mid E. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

На это простое слѣдствіе закона Вольты, повидимому, мало обращалось вниманія при конструкціи элементовъ, а между тѣмъ, въ виду ея упрощенія, это далеко немаловажно. Причины такого упущенія изъ виду очевидной почти истины, надо, быть можетъ, искать въ томъ, что въ наиболѣе популярномъ типѣ элемента Даніэля *продуктъ выдѣленія E* (мѣдь) *тождественъ съ веществомъ электрода C*. Но такая тождественность вовсе не обязательна (хотя она и удобна въ данномъ случаѣ), и если вмѣсто *мѣднаго* электрода C (напр. въ формѣ сосуда) мы употребимъ въ элементѣ Даніэля электродъ изъ *какого угодно другого металла* (или угля), онъ все равно покроется слоемъ гальванопластической мѣди, и электровозбудительная сила отъ этого ничуть не измѣнится.

Основываясь на этомъ, мы можемъ, слѣдовательно, *пренебрегать веществомъ электрода C въ такихъ элементахъ, гдѣ выдѣляется свободный металлъ E*, ибо электродъ служитъ здѣсь только подкладкой, не играющей никакой существенной роли.

Еще одно замѣчаніе. Если бы самъ деполяризаторъ D представлялъ собою хорошій проводникъ электричества, который можно было бы внѣ элемента соединить непосредственно съ электродомъ A (цинкомъ),— былъ ли бы тогда нуженъ второй электродъ C? Конечно, нѣтъ. Такъ, напримѣръ, если бы мѣдный купоросъ въ твердомъ видѣ (а не въ растворѣ) былъ хорошимъ проводникомъ, мы могли бы для сооруженія того-же элемента Даніэля вовсе обойтись безъ второго металлическаго электрода C и вмѣсто него погрузить въ растворъ попросту цѣльный кристаллъ мѣднаго купороса. Въ такомъ случаѣ мы бы имѣли элементъ

$$A \mid B \mid D. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

который съ перваго момента дѣйствія тока превратился бы все таки въ элементъ (β)

A | B | D ' E,

отличающійся тою лишь особенностью, что электродъ E увеличивался бы въ немъ по мѣрѣ дѣйствія тока, уменьшая этимъ внутреннее сопротивленіе.

Такимъ образомъ мы приходимъ еще къ возможности при устройствѣ элемента по системѣ (α) *пренебрегать* не только веществомъ, но *и величиною электрода C въ тѣхъ случаяхъ*, гдѣ выдѣляется свободный металлъ (E) и *гдѣ самъ деполяризаторъ (D) представляетъ хорошій сравнительно проводникъ электричества*.

Предлагаемое мною упрощеніе въ конструкціи гальвиническихъ элементовъ основывается именно на этой возможности не особенно заботиться какъ о веществѣ такъ и о величинѣ и формѣ возстановляемаго электрода. Выбравъ возможно дешевый деполяризаторъ, дающій при дѣйствіи электролитическаго водорода свободный металлъ и представляющій къ тому-же весьма мелкій порошокъ, который въ формѣ мокраго тѣста служитъ достаточно хорошимъ проводникомъ электричества,—а именно *свинцовый сурикъ* (т. е. смѣсь различныхъ окисловъ свинца легко возстановляемыхъ), я пользуюсь имъ такъ, чтобы придать элементу удобную по возможности внѣшнюю форму и понизить цѣну его до крайнихъ предѣловъ. Такимъ образомъ возникли элементы двухъ типовъ: такъ называемыя *гальваническія бутылки* и *жестянки*, подробному описанію которыхъ будетъ посвящено продолженіе этой статьи. Первыя суть не что иное, какъ цинко-свинцовые элементы, заключенные въ обыкновенныхъ любой формы и величины узкогорлыхъ бутылкахъ, которыя могутъ наполняться тою либо другою жидкостью, смотря по назначенію элемента, а также по желанію потребителя, а затѣмъ, во избѣжаніе неудобствъ испаренія, проливанія раствора и распространенія ползучихъ солей, могутъ быть попросту закупорены пробкой и на многіе мѣсяцы оставлены безъ всякаго ухода; вторыя—гальваническія жестянки, нѣсколькихъ видовъ и формъ, представляютъ тоже очень дешево обходящіеся элементы, развивающіе бо́льшее количество электричества и потому болѣе пригодные для соединенія ихъ въ батареи, т. е. вообще для эксплоатаціи болѣе сильнаго постояннаго тока въ теченіе продолжительныхъ промежутковъ времени. *Ш.*

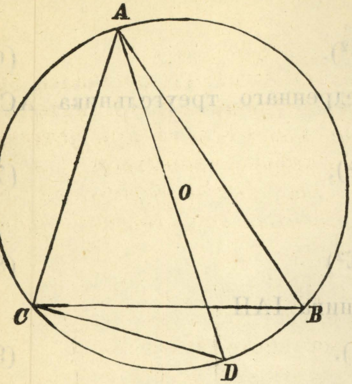
(*Продолженіе слѣдуетъ*).

О дѣленіи окружности на пятнадцать и на семнадцать равныхъ частей.

1. *Задача*. По двумъ даннымъ сторонамъ a и b треугольника и радіусу R описаннаго круга опредѣлить третью сторону треугольника.

Рѣшеніе. Описавъ радіусомъ R окружность, откладываемъ хорды $AC=a$ и $AB=b$ (что возможно, если только $a\leq 2R$ и $b\leq 2R$) и соединяемъ B и C; BC есть искомая третья сторона треугольника.

Фиг. 45.



Проводимъ чрезъ вершину A діаметръ, который пусть пересѣчетъ окружность въ D и соединяемъ D съ B и C. Тогда изъ вписаннаго четыреугольника CABD имѣемъ (фиг. 45).

$$AD.BC = AC.BD + AB.CD \qquad (1)$$

Но изъ треугольника ACD, прямоугольнаго при C, имѣемъ

$$AC^2 + CD^2 = AD^2, \text{ откуда } CD = \sqrt{AD^2 - AC^2} \qquad (2)$$

а изъ треугольника ABD, прямоугольнаго при B, имѣемъ

$$AB^2 + BD^2 = AD^2, \text{ откуда } BD = \sqrt{AD^2 - AB^2}$$

Подставляя найденныя нами величины CD и BD въ равенство (1), имѣемъ

$$AD.BC = AC\sqrt{AD^2 - AB^2} + AB\sqrt{AD^2 - AC^2} \qquad (3)$$

Но $AD = 2R$, $AC = a$, $AB = b$ и, означая BC черезъ x, имѣемъ уравненіе

$$2Rx = a\sqrt{4R^2 - b^2} + b\sqrt{4R^2 - a^2} \text{ откуда } x = \frac{a}{2R}\sqrt{4R^2 - b^2} + \frac{b}{2R}\sqrt{4R^2 - a^2} \qquad (4)$$

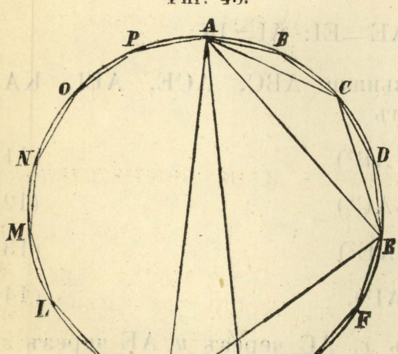
Въ частномъ случаѣ, когда $a = b$ и $R = 1$, равенство (4) теряетъ свою однородность и представляется въ видѣ

$$x = a\sqrt{4 - a^2},$$

или

$$x^2 = a^2(4 - a^2), \qquad (5)$$

Фиг. 46.



2. Представимъ себѣ окружность, радіусъ которой примемъ за единицу, раздѣленной на пятнадцать равныхъ частей въ точкахъ A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P (фиг. 46).

Соединяя послѣдовательныя точки дѣленія, имѣемъ правильный вписанный пятнадцатиугольникъ. Для опредѣленія стороны его представляются слѣдующія соотношенія. Соединяя A съ C, C съ E, A съ E, E съ I, A съ I и H мы, въ силу равенства хордъ, стягивающихъ равныя дуги, имѣемъ:

$$AB = BC = IH;\ AC = CE;\ AE = EI;\ AI = AH.$$

Но изъ равнобедреннаго треугольника ABC имѣемъ, на основанiи равенства (5)

$$AC^2=AB^2(4-AB^2). \tag{6}$$

Подробнымъ же образомъ изъ равнобедреннаго треугольника ACE выводимъ

$$AE^2=AC^2(4-AC^2), \tag{7}$$

изъ равнобедреннаго треугольника AEI

$$AI^2=AE^2(4-AE^2) \tag{8}$$

и, наконецъ, изъ равнобедреннаго треугольника IAH

$$IH^2=AI^2(4-AI^2). \tag{9}$$

Такъ что, обозначая AB=IH черезъ x, AC черезъ y, AE черезъ z, AI черезъ v, мы имѣемъ для опредѣленiя x систему 4 биквадратныхъ уравненiй съ 4 неизвѣстными

$$\left.\begin{aligned} y^2&=x^2(4-x^2)\\ z^2&=y^2(4-y^2)\\ v^2&=z^2(4-z^2)\\ x^2&=v^2(4-v^2)\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

3. Представимъ себѣ окружность, радiусъ которой примемъ за единицу, раздѣленною на семнадцать равныхъ частей въ точкахъ

A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, R, S.

Соединяя послѣдовательно точки дѣленiя, имѣемъ правильный вписанный семнадцатиугольныхъ. Для опредѣленiя стороны его имѣемъ слѣдующiя соотношенiя. Соединивъ A съ C и C съ E, A съ E и E съ I, A съ I и K, мы въ силу равенства хордъ, стягивающихъ равныя дуги, имѣемъ

$$AB=BC=IK;\ AC=CE;\ AE=EI;\ AI=IK;$$

Слѣдовательно, вписанные треугольники ABC, ACE, AEI, KAI равнобедренны и по равенству (5) имѣемъ

$$AC^2=AB^2(4-AB^2) \tag{11}$$

$$AE^2=AC^2(4-AC^2) \tag{12}$$

$$AI^2=AE^2(4-AE^2) \tag{13}$$

$$IK^2=AI^2(4-AI^2). \tag{14}$$

Такъ что, обозначая AB=IK черезъ x, AC черезъ y, AE черезъ z, AI черезъ v, мы имѣемъ для опредѣленiя x систему 4 биквадратныхъ уравненiй съ 4 неизвѣстными

$$\left.\begin{aligned} y^2&=x^2(4-x^2)\\ z^2&=y^2(4-y^2)\\ v^2&=z^2(4-z^2)\\ x^2&=v^2(4-v^2)\end{aligned}\right\}\qquad(15)$$

Система эта тождественна съ системою (10) и рѣшенія ея должны намъ дать какъ сторону правильнаго вписаннаго семнадцатиугольника, такъ и сторону правильнаго вписаннаго пятнадцатиугольника.

4. Пусть дана система уравненій *)

$$\left.\begin{aligned} y^2&=x^2(4-x^2)\\ z^2&=y^2(4-y^2)\\ v^2&=z^2(4-z^2)\\ x^2&=v^2(4-v^2)\end{aligned}\right\}\qquad(16)$$

Эта система представляетъ ту особенность, что остается тождественной при круговомъ перемѣщеніи неизвѣстныхъ x, y, z и v. Означимъ, для краткости, данныя уравненія, въ ихъ послѣдовательномъ порядкѣ, буквами K, L, M и N. Нетрудно удостовѣритьться, что при перемѣщеніи неизвѣстныхъ на четверть окружности, т. е. при замѣнѣ x y-омъ, y—z-омъ, z черезъ v и v—x-омъ, мы имѣемъ также четвертное перемѣщеніе буквъ K, L, M, N : L смѣняетъ K, M—L, N—M и K—N.

Полная таблица круговыхъ перемѣщеній x, y, z, v и соотвѣтствующихъ перемѣщеній K, L, M, N будетъ имѣть видъ

$$\begin{array}{cccc@{\qquad\qquad}cccc} x & y & z & v & K & L & M & N\\ y & z & v & x & L & M & N & K\\ z & v & x & y & M & N & K & L\\ v & x & y & z & N & K & L & M \end{array}\qquad(17)$$

Такимъ образомъ, при круговомъ перемѣщеніи неизвѣствыхъ, данныя уравненія только мѣняютъ свои мѣста и слѣдовательно система, отъ порядка уравненій не зависящая, остается тождественной.

На этой особенности основано рѣшеніе этой системы.

Функція нѣсколькихъ количествъ, сохраняющая свою абсолютную величину при круговомъ перемѣщеніи этихъ количествъ, получаетъ названіе *симметрической*. Нетрудно видѣть, что симметрическая функція

---

*) Я призналъ полезнымъ, для лицъ, хотя нѣсколько знакомыхъ съ Высшей Алгеброй, дать по возможности краткія указанія относительно пути, которымъ я шелъ. Я старался сдѣлать ихъ понятными для всѣхъ, но еслибы и не успѣлъ въ томъ, то лица, надлежащихъ свѣдѣній не имѣющія, приглашаются смотрѣть на послѣдующую статью, какъ на искусственный методъ рѣшенія данной системы, съ которымъ имъ будетъ весьма полезно познакомиться. *В. П.*

количествъ K, L, M, N будетъ въ то же время и симметрическою функціею x, y, z и v или, такъ какъ въ K, L, M, N x, y, z и v входятъ только во второй степени, то и симметрическою функціею x^2, y^2, z^2 и v^2. Въ самомъ дѣлѣ, круговая перестановка буквъ x, y, z и v повлечетъ за собою только круговое перемѣщеніе буквъ K, L, M и N, отъ которыхъ по положенію функція не измѣняется. Но Высшая Алгебра доказываетъ, что всякая раціональная симметрическая функція четырехъ количествъ x^2, y^2, z^2 и v^2 будетъ функціею количествъ

$$S_1 = x^2 + y^2 + z^2 + v^2 \tag{18}$$

$$S_2 = x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 + x^2v^2 + y^2v^2 + z^2v^2 \tag{19}$$

$$S_3 = x^2y^2z^2 + y^2z^2v^2 + x^2y^2v^2 + x^2z^2v^2 \tag{20}$$

$$S_4 = x^2y^2z^2v^2. \tag{21}$$

Такъ что, образовавъ какія-нибудь симметрическія функціи количествъ K, L, M и N, мы будемъ имѣть уравненія относительно S_1, S_2, S_3 и S_4. Для опредѣленія четырехъ неизвѣстныхъ S_1. S_2, S_3 и S_4 нужна система четырехъ уравненій, и конечное уравненіе, къ которому мы придемъ для опредѣленія одного изъ неизвѣстныхъ исключеніемъ трехъ другихъ, не должно превышать четвертой степени, если мы при составленіи уравненій воспользуемся симмитрическими функціями K, L, M и N по возможности низшаго порядка. Въ самомъ дѣлѣ x^2, y^2, z^2 и v^2 суть корни уравненія 4-ой степени

$$X^4 - S_1X^3 + S_2X^2 - S_3X + S_4 = 0. \tag{22}$$

Но съ другой стороны, составляя изъ данной системы конечное уравненіе относительно x^2 или y^2 или z^2 или v^2—оно будетъ тождественно во всѣхъ четырехъ случаяхъ въ силу симметріи—путемъ исключенія трехъ другихъ неизвѣстныхъ, мы получимъ уравненіе 16-ой степени относительно x^2, слѣдовательно x^2 не можемъ имѣть болѣе 16 различныхъ значеній. Въ предположеніи одной системы значеній для S_1, S_2, S_3 и S_4 уравненіе (22) дастъ не болѣе 4 различныхъ значеній для x^2, а для предѣльнаго количества 16-ти величинъ x^2, S_1, S_2, S_3 и S_4 не могутъ имѣть болѣе четырехъ системъ значеній, т. е., другими словами, одно изъ этихъ количествъ не можетъ имѣть болѣе четырехъ различныхъ значеній, всѣ же другія должны быть его раціональными функціями. Слѣдовательно, относительно S_1, S_2, S_3 и S_4 возможна система уравненій, изъ которой можно вывести конечное уравненіе относительно S_1 или S_2 или S_3 или S_4 степени не выше четвертой. Принимая предѣльную величину 4, мы видимъ, что эта система можетъ состоять только изъ трехъ уравненій первой степени и одного четвертой или же двухъ уравненій первой степени и двухъ—второй. Соображенія, на которыхъ мы не остановимся, показываютъ, что изъ данной системы уравненій нельзя извлечь трехъ уравненій первой степени относительно S_1, S_2, S_3 и S_4; вторая же возможная комбинація упрощается тѣмъ, что одно изъ квадратныхъ уравненій имѣетъ видъ $\varphi^2(S_1, S_2, S_3, S_4) = Q$ и можетъ быть непосредственно обращено въ уравненіе первой степени $\varphi(S_1, S_2, S_3, S_4) = \pm Q$; слѣдовательно, опредѣленіе S_1, S_2, S_3 и S_4 сводится къ рѣшенію системы трехъ уравненій первой степени и одного второй, т. е. окончательно къ рѣшенію уравненія 2-ой степени.

Располагая величинами S_1, S_2, S_3 и S_4, легко разложить уравненіе (22) на два квадратныхъ. Въ самомъ дѣлѣ уравненіе 4-ой степени, имѣющее корнями x^2, y^2, z^2 и v^2 распадается на два квадратныхъ, имѣющихъ корнями соотвѣтственно x^2 и z^2, y^2 и v^2, т. е.

$$X^2-(x^2+z^2)X+x^2z^2=0 \tag{23}$$

$$X^2-(y^2+v^2)X+y^2v^2=0. \tag{24}$$

И мы рѣшимъ уравненіе (22), опредѣливъ коэффиціенты (x^2+z^2), (y^2+v^2), x^2z^2 и y^2v^2. Изъ таблицы (17) видно, что при замѣнѣ x черезъ z и наоборотъ, y черезъ v и наоборотъ, уравненія K и M съ одной стороны, L и M съ другой, мѣняются мѣстами. Отсюда видно, что полусимметрическая функція K, L, M и N т. е. сохраняющая свою величину при перемѣщеніи неизвѣстныхъ на половину окружности, будетъ и полусимметрическою кункціею x^2, y^2, z^2 и v^2 или, что все равно, симметрическою относительно (x^2+z^2) и (y^2+v^2) съ одной стороны, x^2z^2 и y^2v^2 съ другой. Мы покажемъ, какъ надлежащимъ выборомъ полусимметрическихъ функцій K, L, M и N опредѣляются $(x^2+z^2)(y^2+v^2)$ и $x^2z^2-y^2v^2$, что въ связи съ уравненіями

$$(x^2+z^2)+(y^2+v^2)=S_1 \tag{25}$$

$$(x^2+z^2)(y^2+v^2)+x^2z^2+y^2v^2=S_2 \tag{26}$$

опредѣляетъ коэффиціенты (x^2+z^2), (y^2+v^2), x^2z^2 и y^2v^2.

Таковъ бѣглый очеркъ принциповъ, на которыхъ основано рѣшеніе системы уравненій (15). Но не ихъ развитіе и строгое доказательство законности ихъ примѣненія составляютъ цѣль этой статьи. Наша задача, въ предѣлахъ программы журнала, показать возможность дѣленія окружности на семнадцать равныхъ частей и *непосредственнаго* дѣленія на пятнадцать равныхъ частей въ предѣлахъ начальной алгебры и элементарной геометріи, возможность, доказательства которой мы до сихъ поръ не встрѣчали.

5. Пусть дана система уравненій

$$\left.\begin{aligned} y^2&=x^2(4-x^2)\\ z^2&=y^2(4-y^2)\\ v^2&=z^2(4-z^2)\\ x^2&=v^2(4-v^2)\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Положимъ

$$S_1=x^2+y^2+z^2+v^2 \tag{28}$$

$$S_2=x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2+x^2v^2+y^2v^2+z^2v^2 \tag{29}$$

$$S_3=x^2y^2z^2+y^2z^2v^2+x^2z^2v^2+x^2y^2v^2 \tag{30}$$

$$S_4=x^2y^2z^2v^2 \tag{31}$$

и преобразуемъ данную систему уравненій въ новую систему 4-хъ уравненій относительно S_1, S_2, S_3 и S_4.

Перемножая данныя уравненія почленно и сокращая на $x^2y^2z^2v^2$, имѣемъ

$$(4-x^2)(4-y^2)(4-z^2)(4-v^2)=1 \tag{32α}$$

или

$$255-64S_1+16S_2-4S_3+S_4=0. \tag{32β}$$

Складывая данныя уравненія почленно, имѣемъ

$$-3(x^2+y^2+z^2+v^2)+(x^4+y^4+z^4+v^4)=0. \tag{33}$$

Но

$$x^4+y^4+z^4+v^4=(x^2+y^2+z^2+v^2)^2-2(x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2+x^2v^2+y^2v^2+z^2v^2)=$$
$$=S_1{}^2-2S_2.$$

Вслѣдствіе чего уравненіе (33) принимаетъ видъ

$$S_1{}^2-3S_1-2S_2=0. \tag{34}$$

Вычитая изъ перваго уравненія системы (27) второе, имѣемъ

$$y^2-z^2=4(x^2-y^2)-x^4+y^4$$

или

$$\frac{y^2-z^2}{x^2-y^2}=4-x^2-y^2.$$

Но первое уравненіе даетъ $4-x^2=\frac{y^2}{x^2}$; слѣдовательно

$$\frac{y^2-z^2}{x^2-y^2}=\frac{y^2}{x^2}-y^2=\frac{y^2}{x^2}(1-x^2). \tag{35}$$

Подобнымъ же образомъ, вычитая изъ второго уравненія третье и выводя величину $(4-y^2)$ изъ второго, имѣемъ

$$\frac{z^2-v^2}{y^2-z^2}=4-y^2-z^2=\frac{z^2}{y^2}-z^2=\frac{z^2}{y^2}(1-y^2). \tag{36}$$

Вычитая изъ третьяго четвертое, имѣемъ

$$\frac{v^2-x^2}{z^2-v^2}=4-z^2-v^2=\frac{v^2}{z^2}-v^2=\frac{v^2}{z^2}(1-z^2).$$

И наконецъ, вычитаніе перваго уравненія изъ четвертаго даетъ

$$\frac{x^2-y^2}{v^2-x^2}=4-v^2-x^2=\frac{x^2}{v^2}-x^2=\frac{x^2}{v^2}(1-v^2). \tag{37}$$

Перемножая уравненія (35). (36), (37) и (38) почленно, имѣемъ

$$\frac{y^2-z^2}{x^2-y^2}\cdot\frac{z^2-v^2}{y^2-z^2}\cdot\frac{v^2-x^2}{z^2-v^2}\cdot\frac{x^2-y^2}{v^2-x^2}=\frac{y^2}{x^2}(1-x^2)\frac{z^2}{y^2}(1-y^2)\frac{v^2}{z^2}(1-z^2)\frac{x^2}{v^2}(1-v^2),$$

что по сокращеніи даетъ

$$(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)(1-v^2)=1, \tag{38}$$

а по раскрытіи скобокъ

$$S_1-S_2+S_3-S_4=0. \tag{39}$$

Вычитая каждое данное уравненіе почленно изъ 4-го, имѣемъ новую систему

$$\left.\begin{aligned} 4-y^2&=4-4x^2+x^4=(2-x^2)^2\\ 4-z^2&=4-4y^2+y^4=(2-y^2)^2\\ 4-v^2&=4-4z^2+z^4=(2-z^2)^2\\ 4-x^2&=4-4v^2+v^4=(2-v^2)^2 \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Перемножая эти уравненія почленно, имѣемъ

$$[(2-x^2)(2-y^2)(2-z^2)(2-v^2)]^2=(4-y^2)(4-z^2)(4-v^2)(4-x^2),$$

что въ силу равенства (32a) даетъ

$$(2-x^2)(2-y^2)(2-z^2)(2-v^2)=\pm 1. \tag{41}$$

Нетрудно показать, что знакъ $+$ соотвѣтствуетъ случаю пятнадцатиугольника и знакъ — случаю семнадцатиугольника. Въ самомъ дѣлѣ, въ случаѣ пятнадцатиугольника x, y, z и v представляютъ соотвѣтственно хорды, стягивающія дуги въ 24°, 48°, 96° и 192°; слѣдовательно, основываясь на теоремѣ, что большія дуги стягиваются и большими хордами и вспомнивъ, что хорда стягивающая дугу въ 90° равняется $\sqrt{2}$, имѣемъ соотношенія

$$x<\sqrt{2};\ y<\sqrt{2};\ z>\sqrt{2};\ v>\sqrt{2}.$$

Откуда слѣдуетъ, что произведеніе

$$(2-x^2)(2-y^2)(2-z^2)(2-v^2)$$

въ случаѣ пятнадцатиугольника должно имѣть положительный знакъ. Подобнымъ же образомъ доказывается, что отрицательный знакъ соотвѣтствуетъ случаю семнадцатиугольника.

Установивъ это, раскриваемъ скобки въ уравненіи (41). Имѣемъ

$$16\pm 1-8S_1+4S_2-2S_3+S_4=0. \tag{42}$$

Въ этомъ выраженіи ± 1 перешло въ другой членъ равенства и потому знакъ $+$ соотвѣтствуетъ семнадцатиугольнику, знакъ — пятнадцатиугольнику.

Такимъ образомъ для опредѣленія S_1, S_2, S_3 и S_4 имѣемъ систему четырехъ уравненій.

$$\left.\begin{aligned} 255-64S_1+16S_2-4S_3+S_4&=0 \\ S_1-S_2+S_3-S_4&=0 \\ 16\pm1-8S_1+4S_2-2S_3+S_4&=0 \\ S_1{}^2-3S_1-2S_2&=0 \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Рѣшаемъ эти уравненія по общимъ правиламъ.

Складывая первое и второе и сокращая на 3, имѣемъ

$$85-21S_1+5S_2-S_3=0. \tag{44}$$

Складывая первое и третье, имѣемъ

$$16\pm1-7S_1+3S_2-S_3=0. \tag{45}$$

И вычитая уравненіе (45) изъ (44), получаемъ

$$69-(\pm1)-14S_1+2S_2=0. \tag{46}$$

Что по сложеніи съ четвертымъ уравненіемъ системы (43) даетъ уравненіе второй степени относительно S_1

$$S_1{}^2-17S_1+69-(\pm1)=0 \tag{47}$$

откуда

$$S_1=\frac{17}{2}\pm\sqrt{\frac{289}{4}-69\pm1}=\frac{17\pm\sqrt{13\pm4}}{2}.$$

Знакъ $\pm$ подъ радикаломъ, какъ мы знаемъ, соотвѣтствуетъ двумъ различнымъ случаямъ. Что же касается до знака передъ радикаломъ, то нетрудно сдѣлать выборъ. Въ самомъ дѣлѣ, какъ въ случаѣ пятнадцатиугольника, такъ и въ случаѣ семнадцатиугольника x и y представляютъ собою хорды, стягивающія дуги, меньшія 60°, и потому, основываясь на теоремѣ о соотвѣтствіи большихъ хордъ большимъ дугамъ и замѣтивъ, что дуга, стягивающая хорду въ 60°, равняется единицѣ, заключаемъ что $x^2<1$ и $y^2<1$. И такъ какъ само собою въ общихъ случаяхъ z и $v<2$ т. е. $z^2<4$ и $v^2<4$, то

$$S_1=x^2+y^2+z^2+v^2<1+1+4+4<10,$$

такъ что

$$S_1=\frac{17-\sqrt{13\pm4}}{2}. \tag{48}$$

По данной величинѣ S_1, изъ уравненій (46) и (44) опредѣляются S_2 и S_3, а изъ какого нибудь изъ первыхъ трехъ уравненій системы (43) и S_4.

Такъ какъ x^2, y^2, z^2 и v^2 суть корни уравненія 4-ой степени

$$X^4-S_1X^3+S_2X^2-S_3X+S_4=0 \tag{49}$$

то вопросъ сводится, при наличности величинъ S_1, S_2, S_3 и S_4 къ рѣшенію этого уравненія. Разложимъ его на два квадратныхъ

$$X^2-(x^2+z^2)X+x^2z^2=0 \tag{50}$$

$$X^2-(y^2+v^2)X+y^2v^2=0 \tag{51}$$

и постараемся опредѣлить коэффиціенты (x^2+z^2), (y^2+v^2), x^2z^2 и y^2v^2.

Обратимся къ данной системѣ уравненій (27). Вычитая изъ перваго уравненія третье почленно, имѣемъ

$$y^2-v^2=4(x^2-z^2)-x^4+z^4 \text{ или } \frac{y^2-v^2}{x^2-z^2}=4-(x^2+z^2) \tag{52}$$

Подобнымъ же образомъ, вычитая почленно изъ второго уравненія четвертое, имѣемъ

$$z^2-x^2=4(y^2-v^2)-y^4+v^4 \text{ или } \frac{z^2-x^2}{y^2-v^2}=4-(y^2+v^2) \tag{53}$$

Перемножая почленно уравненія (52) и (53), имѣемъ

$$\frac{y^2-v^2}{x^2-z^2}\times\frac{z^2-x^2}{y^2-v^2}=\Big[4-(x^2+z^2)\Big]\Big[4-(y^2+v^2)\Big] \tag{54}$$

что по сокращеніи даетъ

$$(x^2+v^2)(y^2+v^2)=4S_1-17. \tag{54β}$$

Слѣдовательно, (x^2+z^2) и (y^2+v^2) будутъ корнями квадратнаго уравненія

$$X^2-S_1X+4S_1-17=0 \tag{55}$$

откуда, замѣтивъ что $x^2+z^2<y^2+v^2$, имѣемъ

$$x^2+z^2=\frac{S_1}{2}-\sqrt{\frac{S_1{}^2}{4}-4S_1+17}$$

Для опредѣленія x^2z^2 и y^2v^2 имѣемъ слѣдующія соотношенія

$$(x^2+z^2)(y^2+v^2)+(x^2z^2+y^2v^2)=S_2.$$

Подставляя сюда величину S_2 въ функціи S_1 по уравненіи 4 системы (43) и величину $(x^2+z^2)(y^2+v^2)$, выведенную въ равенствѣ (54β), имѣемъ

$$x^2z^2+y^2v^2=\frac{S_1{}^2-11S_1+34}{2}. \tag{56}$$

Далѣе, складывая почленно уравненія первое и третье, второе и четвертое системы (27), имѣемъ

$$y^2+v^2=4(x^2+z^2)-(x^4+z^4)=4(x^2+z^2)-(x^2+z^2)^2+2x^2z^2 \tag{57}$$

$$x^2+z^2=4(y^2+v^2)-(y^4+v^4)=4\,y^2+v^2)-(y^2+v^2)^2+2y^2v^2. \tag{58}$$

Вычитая почленно уравненія (57) и (58), имѣемъ

$$\left[(y^2+v^2)-(x^2+z^2)\right]\left[5-(x^2+z^2+y^2+v^2)\right]=2(x^2z^2-y^2v^2) \qquad (59)$$

Но изъ уравненія (55) разность корней (y^2+v^2) и (x^2+z^2) имѣетъ величиною

$$2\sqrt{\frac{S_1^2}{4}-4S_1+17}$$

слѣдовательно изъ уравненія (59)

$$x^2z^2-y^2v^2=(5-S_1)\sqrt{\frac{S_1^2}{4}-4S+17} \qquad (60)$$

Комбинируя это уравненіе съ уравненіемъ (56), имѣемъ

$$x^2z^2=\frac{S_1^2-11S_1+34}{4}-\frac{S_1-5}{2}\sqrt{\frac{S_1^2}{4}-4S+17}. \qquad (61)$$

Слѣдовательно x^2 и z^2 будутъ корнями квадратнаго уравненія

$$X^2-\left(\frac{S_1}{2}-\sqrt{\frac{S_1^2}{4}-4S+17}\right)X+$$

$$+\left(\frac{S_1^2-11S_1+34}{4}-\frac{S_1-5}{2}\sqrt{\frac{S_1^2}{4}-4S_1+17}\right)=0 \qquad (62)$$

откуда, замѣтивъ, что $x^2<z^2$, извлекаемъ

$$x=\sqrt{\frac{S_1}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S_1^2}{4}-4S+17}-}$$

$$\overline{-\sqrt{\frac{-S_1^2+14S_1-34}{8}-\frac{10-S_1}{4}\sqrt{\frac{S_1^2}{4}-4S+17}}} \qquad (63)$$

или, подставляя сюда численную величину S_1 изъ уравненія (48)

$$x=\sqrt{\frac{17-\sqrt{13\pm4}}{8}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15\pm2-\sqrt{13\pm4}}{8}}-}$$

$$\overline{-\sqrt{\frac{19-(\pm2)+3\sqrt{13\pm4}}{16}-\frac{3+\sqrt{13\pm4}}{8}\sqrt{\frac{15\pm2-\sqrt{13\pm4}}{8}}}} \qquad (64)$$

Взявъ знакъ $+$, имѣемъ сторону правильнаго вписаннаго семнадцатиугольника

$$x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{17\quad\sqrt{17}}{2}-\sqrt{\frac{17-\sqrt{17}}{2}}-\sqrt{\sqrt{17}+3}.\sqrt{\sqrt{17}-\sqrt{\frac{17-\sqrt{17}}{2}}}} \tag{65}$$

Взявъ знакъ $-$, имѣемъ сторону правильнаго вписаннаго пятнадцатиугольника

$$x=\frac{1}{2}\sqrt{7-\sqrt{5}-\sqrt{6\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}}. \tag{66}$$

Послѣдняя формула можетъ быть преобразована различными способами. Величины x выведены въ предположенiи $R=1$, но такъ какъ стороны одноименныхъ описанныхъ и вписанныхъ многоугольниковъ пропорцiональны радiусамъ круговъ, то для всякаго R ихъ достаточно умножить на R. *В. Полтавцевъ* (Москва).

ЗАДАЧИ.

№ 477. Доказать неравенство

$$\lg(1+\delta)<\delta.$$

Дм. Ефремовъ (Ив.-Вознес.)

№ 478. Рѣшить уравненiе

$$\mathrm{Sin}\,mx.\mathrm{Sin}\,3mx=a.$$

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 479. Даны двѣ прямыя, на каждой изъ нихъ по точкѣ, A и B, и кромѣ того внѣшняя точка P. Провести черезъ P прямую, пересѣкающую данныя прямыя въ точкахъ L и M, такъ, чтобы отрѣзки AL и BM иаходились между собою въ данномъ отношенiи. (Задача Аполлонiя Пергамскаго). *З. Колтовскiй* (Харьковъ).

№ 480. Стержень, опирающiйся своими концами на неподвижныя подставки, можетъ выдерживать по срединѣ максимальное давленiе груза P. Поперечное сѣченiе этого стержня есть трапецiя съ основанiями a и b, при чемъ бóльше основанiе a прилегаетъ къ подставкамъ. На какую величину можно увеличить грузъ P безъ опасенiя сломать тотъ-же стержень, если онъ будетъ повернутъ такъ, что опираться на подставки будетъ меньшее основанiе b? *А. Плетневъ* (Воронежъ).

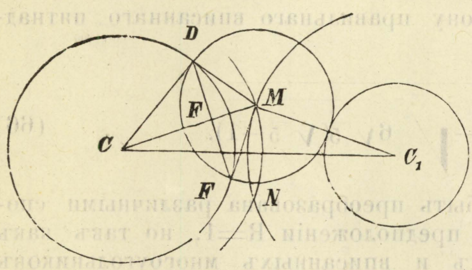
РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 349. Даны на плоскости двѣ окружности радіусовъ R и r. Даннымъ радіусомъ ρ начертить третью окружность, касательную къ одной изъ данныхъ и пересѣкающую вторую такъ, чтобы общая хорда имѣла данную длину a.

Изслѣдовать условія возможности и числа рѣшеній.

Описавъ изъ центра C_1 (фиг. 47) радіусомъ равнымъ $R+\rho$ окружность, найдемъ геометрическое мѣсто центровъ окружностей радіуса ρ, касающихся данной окружности. Построивъ далѣе въ другой данной окружности хорду $DE=a$ и описавъ изъ концовъ ея D и E радіусомъ ρ дуги, получимъ точку пересѣченія M—центръ окружности радіуса ρ, имѣющей при пересѣченіи съ данной разсматриваемой окружностью общую хорду a. Геометрическое мѣсто этихъ центровъ есть окружность проведенная изъ C радіусомъ CM.

Фиг. 47.



Задача возможна, если

$$CM+C_1M > CC_1.$$

Такъ какъ

$$C_1M=R+\rho,$$

$$CM=CF+FM=\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}+\sqrt{\rho^2-\frac{a^2}{4}},$$

то условіе возможности можно выразить такъ:

$$R+\rho+\sqrt{\rho^2-\frac{a^2}{4}}+\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}} > CC_1,$$

при чемъ задача имѣетъ два рѣшенія.

Если же

$$R+\rho+\sqrt{\rho^2-\frac{a^2}{4}}+\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}=CC_1,$$

то задача имѣетъ только одно рѣшеніе; наконецъ, ни одного рѣшенія, когда

$$R+\rho+\sqrt{\rho^2-\frac{a^2}{4}}+\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}} < CC_1.$$

Мильскій (?). Ученики: Курск. г. (7) *Т. Ш.*, (8) *П. Г.*, Новоз. р. уч. (7) *М. Н.*, Кам.-Под. г. (7) *А. Р.*, Камыш. р. уч. (6) *А. З.*, 1-й Спб. г. (7) *А. К.*, Угрюп. р. уч. (6) *П. У—ъ*, Тифл. р. уч. (7) *Н. П.*

№ 366. Въ треугольникѣ стороны составляютъ ариѳметическую прогрессію. Показать, что высота, соотвѣтствующая средней сторонѣ, равна радіусу соотвѣтственнаго внѣвписаннаго круга, а также равна утроенному радіусу круга внутривписаннаго.

Положимъ, что стороны треугольника a, b, c соотвѣтственно равны m, $m+d$, $m+2d$. Обозначимъ теперь высоту, соотвѣтствующую средней сторонѣ, чрезъ h, площадь чрезъ S; тогда, если r радіусъ круга вписаннаго, а ρ—круга внѣвписаннаго, имѣемъ на основаніи извѣстныхъ формулъ

$$h=\frac{2S}{b},\quad r=\frac{2S}{a+b+c},\quad \rho=\frac{2S}{a-b+c},$$

или, принявъ во вниманіе наши обозначенія:

$$h=\frac{2S}{m+d},\quad r=\frac{2S}{3(m+d)},\quad \rho=\frac{2S}{m+d},$$

что и требовалось доказать.

Ѳ. Кондратьевъ (Ив.-Возн.), *М. Сухановъ* (ст. Усть-Медв.), *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ), *В. Соллертинскій* (Гатчино), *П. Трипольскій* (Полтава), *С. Блажко* (Москва). Ученики: Полт. р. уч. (5) *Е. Ц.*, Курск г. (6) *В. Х.*, Тифл. 2-й г. (6) *М. А.*, Урюп. р. уч. (6) *П. У—ъ*, Вятск. р. уч. (7) *И. П.*, Тифл. р. уч. (7) *Н. П.*, Оренб. г. (8) *Ан. П.*

№ 370. Медіана AM треугольника ABC дѣлитъ уголъ A на двѣ части m и n, удовлетворяющія условію;

$$3\operatorname{tg}\left(\frac{m+n}{2}\right)=19\operatorname{tg}\left(\frac{m-n}{2}\right).$$

Найти отношеніе сторонъ AB и AC.

Изъ треугольниковъ ABM и ACM имѣемъ

$$\frac{AB}{BM}=\frac{\operatorname{Sin}AMB}{\operatorname{Sin}m},\quad \frac{AC}{CM}=\frac{\operatorname{Sin}AMC}{\operatorname{Sin}n};$$

раздѣляя эти равенства почленно, получаемъ:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{\operatorname{Sin}n}{\operatorname{Sin}m},$$

такъ какъ $\operatorname{Sin}AMB=\operatorname{Sin}AMC$.

Изъ даннаго условія имѣемъ

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{m-n}{2}\right)}=\frac{19}{3},$$

но легко найти, что

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{m-n}{2}\right)}=\frac{1+\frac{\operatorname{Sin}n}{\operatorname{Sin}m}}{1-\frac{\operatorname{Sin}n}{\operatorname{Sin}m}}=\frac{1+\frac{AB}{AC}}{1-\frac{AB}{AC}}.$$

Слѣдовательно

$$\frac{1+\frac{AB}{AC}}{1-\frac{AB}{AC}}=\frac{19}{3},$$

откуда

$$\frac{AB}{AC}=\frac{8}{11}.$$

Ѳ. Кондратьевъ (Ив.-Возн.), *Н. Артемьевъ* (Спб.), *Н. Николаевъ* (Пенза), *З. А.* (Новозыб.), *В. Соллертинскій* (Гатчино), *М. Сухановъ* (ст. Усть-Медв.), *С. Блажко* (Москва). Ученики: Новозыб. р. уч. (7) *М. Н.*, Ворон. к. к. (6) *К. А.*, Урюп. р. уч. (6) *П. У—ъ*, Кам.-Под. г. (7) *А. Р.*, Тифл. р. уч. (7) *Н. П.*

№ 378. Если въ прямоугольномъ треугольникѣ сумма катетовъ остается постоянной, то при какомъ условіи конусъ, образованный вращеніемъ этого треугольника около одного изъ катетовъ, имѣетъ наибольшій объемъ?

Пусть высота конуса будетъ x, а радіусъ основанія y, тогда

$$V=\frac{1}{3}\pi xy^2=\frac{1}{3}\pi.4.x.\frac{y}{2}.\frac{y}{2},$$

а произведеніе величинъ, сумма которыхъ

$$x+\frac{y}{2}+\frac{y}{2}=x+y=\text{пост.}$$

имѣетъ наибольшую величину при равенствѣ сомножителей; слѣдовательно

$$x=\frac{y}{2},$$

т. е. для maximum'а объема необходимо, чтобы неподвижный катетъ былъ вдвое меньше другого катета.

А. Колтановскій (Немировъ), *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ), *В. Соллертинскій* (Гатчино), *П. Трипольскій* (Полтава), *С. Кричевскій* (Харьковъ)

Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Кіевъ, 7 Августа 1889 г.
Типо-литографія Высочайше утвержд. Товарищества И. Н. Кушнеревъ и К°.

Обложка
пщется

Обложка
ищется