Обложка
пщется

Обложка
пщется

ВѢСТНИКЪ
ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
И
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 99.

IX Сем. 11 Сентября 1890 г. № 3.

ОБЩЕЕ РѢШЕНІЕ ВЪ ЦѢЛЫХЪ ЧИСЛАХЪ

неопредѣленныхъ уравненій 1-й степени.

(Окончаніе) *).

II.

9. Пусть требуется *рѣшить въ цѣлыхъ числахъ систему* $m+1$ *уравненій*

$$ax+by+cz+\ldots\ldots+kt+lv+\ldots\ldots+pw=u,$$
$$a'x+b'y+c'z+\ldots\ldots+k't+l'v+\ldots\ldots+p'w=u',$$
$$a''x+b''y+c''z+\ldots\ldots+k''t+l''v+\ldots\ldots+p''w=u'', \qquad (1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a^{(m)}x+b^{(m)}y+c^{(m)}z+\ldots\ldots+k^{(m)}t+l^{(m)}v+\ldots\ldots+p^{(m)}w=u^{(m)}$$

съ $m+n$ неизвѣстными x, y, z,....., t, v,...., w въ 1-й степени. По прежнему можно предположить, что во всѣхъ этихъ уравненіяхъ коэффиценты при неизвѣстныхъ и извѣстные члены суть цѣлыя числа. Кромѣ того, для возможности задачи допустимъ, что въ каждомъ уравненіи коэффиціенты при неизвѣстныхъ суть числа взаимно простыя.

10. Исключивъ изъ данныхъ уравненій (1) m неизвѣстныхъ v,....w, получимъ одно уравненіе

$$Ax+By+Cz+\ldots\ldots+Kt=U$$

съ n неизвѣстными x, y, z,...., t.

Рѣшивъ это уравненіе, какъ указано выше (I), выразимъ неизвѣстныя x, y, z,......, t полиномами 1-й степени отъ $n-1$ неопредѣленныхъ величинъ U_1, U_2,...., U_{n-1}. Чтобы найти выраженія для остальныхъ m неизвѣстныхъ v,...., w, возьмемъ изъ данной системы (1) m уравненій и подставимъ въ нихъ вмѣсто x, y, z,...., t найденныя для

*) См. „Вѣстникъ" № 97.

нихъ выраженія чрезъ $U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}$; получимъ систему m *условныхъ* уравненій съ $m+n-1$ неизвѣстными $v, \ldots, w, U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}$.

Такимъ образомъ данная система $m+1$ уравненій съ $m+n$ неизвѣстными приводится къ системѣ m уравненій съ $m+n-1$ неизвѣстными, рѣшеніе которой, чрезъ исключеніе $m-1$ неизвѣстныхъ, снова приведется къ рѣшенію одного уравненія съ n неизвѣстными. Изъ этого послѣдняго уравненія, подобно предыдущему, получимъ новую систему $m-1$ уравненій съ $m+n-2$ неизвѣстными и т. д.

Поступая такимъ образомъ, приведемъ рѣшеніе данной системы уравненій къ рѣшенію одного уравненія съ n неизвѣстными, которыя уже не будутъ связаны никакимъ другимъ условнымъ уравненіемъ и выразятся полиномами 1-й степени отъ $n-1$ произвольныхъ величинъ. Путемъ подставленія чрезъ тѣ-же произвольныя величины выразимъ и неизвѣстныя $x, y, z, \ldots, t, v, \ldots, w$.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что *рѣшеніе въ цѣлыхъ числахъ системы* $m+1$ *уравненій съ* $m+n$ *неизвѣстными выражается цѣлыми полиномами 1-й степени отъ* $n-1$ *неопредѣленныхъ величинъ*.

11. Для поясненія этого метода рѣшимъ два уравненія съ четырьмя неизвѣстными:

$$\begin{aligned} 3x-2y+4z+2t&=19, \\ 5x+6y-2z+3t&=23. \end{aligned} \tag{1}$$

Исключивъ изъ этихъ уравненій z, получимъ одно уравненіе съ тремя неизвѣстными:

$$13x+10y+8t=65. \tag{2}$$

Выписавъ рядъ коэффиціентовъ этого уравненія и составивъ смежные ряды, получимъ:

$$\begin{array}{c} 13,\ 10,\ 8, \\ 1,\ 2,\ 0, \\ 1,\ 0,\ 0. \end{array}$$

Преобразовывая за тѣмъ опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

найдемъ рядъ смежныхъ опредѣлителей

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 2, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5, & 2, & 8 \\ 2, & 1, & 4 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13, & 10, & 8 \\ 6, & 5, & 4 \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13, & 10, & 8 \\ 2, & 1, & 0 \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Рѣшеніе уравненія (2) приводится слѣдовательно, къ рѣшенію уравненій

$$\begin{aligned} 13x+10y+8t&=65, \\ 2x+\ \ y\ \ \ \text{〃}&=u_1, \\ x+\ \ y+\ \ t&=u_2, \end{aligned}$$

изъ которыхъ находимъ

$$\begin{aligned} x&=\quad 65-2u_1-\ 8u_2, \\ y&=-130+5u_1+16u_2, \\ t&=\quad 65-3u_1-\ 7u_2. \end{aligned}$$

Для опредѣленія z подставляемъ эти выраженія въ 1-е изъ данныхъ уравненій (1); получаемъ условное уравненіе, которому должны удовлетворять неопредѣленныя величины u_1 и u_2:

$$2z-11u_1-35u_2=-283. \tag{3}$$

Взявъ рядъ коэффиціентовъ этого уравненія и составивъ смежные ряды, будемъ имѣть:

$$\begin{matrix} 2, & -11, & -35, \\ 2, & 1, & 1, \\ 0, & 0, & 1. \end{matrix}$$

Рядъ смежныхъ опредѣлителей будетъ

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 2 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -11, & -35, & 2 \\ 0, & 1, & 0 \\ -6, & -18, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2, & -11, & -35 \\ 0, & 0, & 1 \\ 1, & -6, & -18 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2, & -11, & -35 \\ 0, & 0, & 1 \\ 1, & -6, & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Такимъ образомъ рѣшеніе уравненія (3) приводится къ рѣшенію уравненій

$$\begin{aligned} 2z-11u\ -35u_2&=-283, \\ \text{〃}\quad \text{〃}\quad u&=\ u'_1, \\ z-\ 6u_1\quad \text{〃}&=\ u'_2, \end{aligned}$$

изъ которыхъ находимъ

$$z = -1698 + 210u'_1 - 11u'_2,$$

$$u_1 = -\ 283 + \ 35u'_1 - 2u'_2,$$

$$u_2 = \quad " \quad u'_1 \quad ",$$

гдѣ u'_1 и u'_2 произвольныя цѣлыя числа.

Подставивъ значенія u_1 и u_2 въ найденныя выше выраженія для x, y, t, получимъ рѣшеніе данныхъ уравненій (1) въ видѣ слѣдующихъ полиномовъ 1-й степени:

$$x = \ \ 631 - \ 78u'_1 + \ 4u'_2,$$

$$y = -1545 + 191u'_1 - 10u'_2,$$

$$z = -1698 + 210u'_1 - 11u'_2,$$

$$t = \ \ 914 - 112u'_1 + \ 6u'_2,$$

гдѣ u'_1 и u'_2 могутъ имѣть произвольныя цѣлыя числовыя значенія.

12. Система (1) непредѣленныхъ уравненій можетъ быть рѣшена другимъ способомъ, именно: выбравъ одно изъ уравненій системы, рѣшимъ его независимо отъ другихъ уравненій; неизвѣстныя $x, y, z, \ldots, t, v, \ldots, w$, которыхъ $m+n$, выразятся полиномами 1-й степени отъ $m+n-1$ произвольныхъ величинъ $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_{m+n-1}$. Вставивъ эти полиномы вмѣсто $x, y, z, \ldots, t, v, \ldots, w$ въ остальныя m уравненій, получимъ m уравненій съ $m+n-1$ неизвѣстными $U_1, U_2, \ldots U_{m+n-1}$. Такимъ образомъ, какъ число уравненій, такъ и число неизвѣстныхъ понизилось на единицу. Повторивъ сказанное m разъ, получимъ одно уравненіе съ n неизвѣстными, рѣшивъ которое, выразимъ эти неизвѣстныя чрезъ $n-1$ произвольныхъ величинъ. Путемъ послѣдовательной подстановки чрезъ тѣ-же величины выразятся и неизвѣстныя $x, y, z, \ldots, t, v, \ldots, w$ данной системы.

13. Рѣшимъ этимъ способомъ уравненія предыдущаго примѣра:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z + 2t &= 19, \\ 5x + 6y - 2z + 3t &= 23. \end{aligned} \qquad (1)$$

Беремъ первое уравненіе и составимъ рядъ его коэффиціентовъ и смежные ряды, получимъ

$$\begin{matrix} 3, & -2, & 4, & 2, \\ 1, & 0, & 0, & 2, \\ 1, & 0, & 0, & 0. \end{matrix}$$

Рядъ смежныхъ опредѣлителей будетъ таковъ:

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 2 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3, & -2, & 4, & 2 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 1, & -1, & 2, & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Рѣшеніе перваго изъ данныхъ уравненій (1) приводится, слѣдовательно, къ рѣшенію уравненій:

$$\begin{aligned}
2x-2y+4z+2t&=19,\\
\text{„}\quad y\quad \text{„}\quad \text{„}\ &=u_1,\\
\text{„}\quad \text{„}\quad z\quad \text{„}\ &=u_2,\\
x-\ y+2z+\ t&=u_3,
\end{aligned}$$

рѣшивъ которыя, получимъ:

$$\begin{aligned}
x&=19\quad \text{„}\quad \text{„}\quad -2u_3\\
y&=\quad \text{„}\quad u_1\quad \text{„}\quad \text{„}\\
z&=\quad \text{„}\quad \text{„}\quad u_2\quad \text{„}\\
t&=-19+u_1-2u_2+3u_3.
\end{aligned}\tag{2}$$

Подставивъ эти выраженія вмѣсто x, y, z, t во второе изъ данныхъ уравненій, получимъ:

$$9u_1-8u_2-u_3=-15. \tag{3}$$

Рядъ коэффиціентовъ этого уравненія и смежные съ нимъ ряды суть

$$\begin{matrix} 9, & -8, & -1\\ 0, & 0, & 1. \end{matrix}$$

Рядъ смежныхъ опредѣлителей будетъ

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0\\ 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & -8, & 9\\ 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9, & -8, & -1\\ 0, & -1, & 0\\ 1, & 0, & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Уравненіе (3) приводится къ системѣ уравненій

$$\begin{aligned}
9u_1-8u_2-u_3&=-15,\\
\text{„}\ -\ u_2\quad \text{„}\ &=\ u'_1,\\
u_1\quad \text{„}\quad \text{„}\ &=\ u'_2,
\end{aligned}$$

изъ которыхъ получимъ

$$\begin{aligned}
u_1&=\ \text{„}\quad \text{„}\quad u'_2,\\
u_2&=\ \text{„}\ -\ u'_1\quad \text{„},\\
u_3&=15+8u'_1+9u'_2.
\end{aligned}$$

Подставивъ эти выраженія вмѣсто u_1, u_2, u_3 въ равенства (2), получимъ рѣшеніе данныхъ уравненій въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} x&=-11-16u'_1-18u'_2,\\ y&=\quad\text{"}\quad\text{"}\quad u'_2,\\ z&=\quad\text{"}\quad -u'_1\quad\text{"},\\ t&=\;26+26u'_1+28u'_2.\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

Изъ этихъ выраженій видно, что y и z могутъ имѣть произвольныя цѣлыя числовыя значенія; x и t опредѣлятся чрезъ нихъ равенствами:

$$x=-11+16z-18y,$$

$$t=\;26-26z+28y.$$

14. Въ заключеніе замѣтимъ, что система неопредѣленныхъ уравненій (1) можетъ быть рѣшена съ помощію одного изъ частныхъ рѣшеній той же системы, въ предположеніи, что извѣстные члены уравненій равны нулю. Дѣйствительно, пусть нѣкоторое частное рѣшеніе системы уравненій (1) выражается формулами:

$$x=X,\ y=Y,\ z=Z,\ldots\ldots,\ t=T,\ v=V,\ldots\ldots,\ w=W;$$

равенствами

$$x=X_0,\ y=Y_0,\ z=Z_0,\ldots\ldots,\ t=T_0,\ v=V_0,\ldots\ldots,\ w=W_0$$

обозначимъ какое нибудь частное рѣшеніе тѣхъ-же уравненій, въ предположеніи, что извѣстные члены въ нихъ равны нулю, т. е.

$$u=u'=u''=\ldots\ldots=u^{(m)}=0.$$

Чрезъ подставленіе легко убѣдиться, что значенія неизвѣстныхъ выражающіяся формулами

$$x=X+\lambda X_0,\ y=Y+\lambda Y_0,\ z=Z+\lambda Z_0,\ldots\ldots,\ w=W+\lambda W_0$$

удовлтворяютъ уравненіямъ данной системы при произвольныхъ значеніяхъ λ. При цѣлыхъ численныхъ значеніяхъ λ послѣднія формулы выражаютъ общее рѣшеніе данной системы уравненій.

15. Напр. уравненія послѣдняго примѣра

$$3x-2y+4z+2t=19,$$

$$5x+6y-2z+3t=23$$

имѣютъ частное рѣшеніе

$$x=3,\ y=1,\ z=2,\ t=2;$$

уравненія

$$3x-2y+4z+2t=0,$$

$$5x+6y-2z+3t=0,$$

удовлетворяются числами

$$x=2,\ y=-9,\ z=-10,\ t=8.$$

Поэтому общее рѣшеніе данныхъ уравненій можетъ быть выражено въ такомъ видѣ:

$$x=3+2\lambda,\ y=1-9\lambda,\ z=2-10\lambda,\ t=2+8\lambda,$$

гдѣ λ обозначаетъ произвольное цѣлое число.

Дм. Ефремовъ (Ив.-Возн.).

КЪ ТЕОРІИ ДЕСЯТИЧНЫХЪ ДРОБЕЙ.

Есть возможность указать, почему, при обращеніи въ десятичную дробь простой дроби, въ составъ знаменателя которой кромѣ иныхъ множителей входятъ множители 2 или 5 въ какой либо степени, передъ періодомъ получится столько цыфръ, какъ велика высшая степень 2 и 5 въ знаменателѣ.

Возьмемъ въ общемъ видѣ такую дробь:

$$\frac{a}{2^n5^mb}.$$

По теоріи неопредѣленныхъ множителей ее можно разложить на два слагаемыя, одно съ знаменателемъ 2^n5^m, другое съ b. Въ самомъ дѣлѣ

$$\frac{a}{2^n5^mb}=\frac{x}{2^n5^m}+\frac{y}{b} \text{ или } \frac{xb+2^n5^my}{2^n5^mb},$$

для опредѣленія x и y достаточно рѣшить неопредѣленное уравненіе

$$bx+2^n5^my=a.$$

Это уравненіе всегда можетъ быть рѣшено въ цѣлыхъ числахъ, потому что b, 2^n5^m и a суть числа взаимно первыя.

Но отъ обращенія дроби $\frac{x}{2^n5^m}$ въ десятичную получается дробь конечная, имѣющая m или n цыфръ, смотря потому, какое число больше. Отъ обращенія $\frac{y}{b}$ получается чистая періодическая дробь. Вся же дробь

$$\frac{a}{2^n5^mb}$$

есть алгебраическая сумма дробей

$$\frac{x}{2^n5^m}\pm\frac{y}{b}.$$

Складывая чистую періодическую съ конечной, мы нарушаемъ періодъ первой, измѣняя въ ней столько цыфръ, сколько ихъ въ дроби конечной, другими словами,—періодъ отодвигается вправо на столько цыфръ, сколько ихъ было въ конечной дроби. Порядокъ цыфръ въ дроби, начиная съ періода, остается тотъ же, но начинается періодъ уже съ иной цыфры. Пояснимъ сказанное примѣромъ. Пусть дано:

$$\frac{17}{140}=0,12(142857).$$

Разлагаемъ $\frac{17}{140}$ на два слагаемыя

$$\frac{x}{20}+\frac{y}{7}=\frac{7x+20y}{140}=\frac{17}{140}.$$

Для опредѣленія x и y достаточно рѣшить въ цѣлыхъ числахъ неопредѣленное уравненіе

$$7x+20y=17.$$

Разложеніе можно написать:

$$\frac{11}{20}-\frac{3}{7} \tag{1}$$

$$\frac{4}{7}-\frac{9}{20} \tag{2}$$

$$\frac{11}{7}-\frac{29}{10} \tag{3}$$

....

$$\frac{31}{20}-\frac{10}{7} \tag{4}$$

....

только разложенія (1) и (2) различны.

Удобнѣе всего воспользоваться разложеніемъ (2)

$$\frac{4}{7}=0,(571428);\quad \frac{9}{20}=0,45,$$

вычитая, имѣемъ

$$\begin{array}{r} 0,5714285714285714 28\ldots \\ -\,0,4500000000000000 00\ldots \\ \hline 0,1214285714285714 28\ldots \end{array}$$

или

$$0,12(142857).$$

Прежде періодъ начинался съ цыфры 5, теперь съ 1, т. е. передвинулся чрезъ 2 цыфры вправо.

$$20=2^2 5.$$

Другой примѣръ:

$$\frac{1039}{2600}=0,399(615384).$$

Имѣемъ:

$$\frac{1039}{2600}=\frac{5}{13}+\frac{3}{200};\quad \frac{5}{13}=0,(384615);\quad \frac{3}{200}=0,015;$$

складывая, имѣемъ:

$$\begin{array}{r} 0,3846153846153846 15\ldots\ldots\ldots \\ +\,0,0150000\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \hline 0,399(615384). \end{array}$$

Періодъ начинается не съ цыфры 3, а съ цыфры 6, число цыфръ въ періодѣ то же.

Наконецъ $200=5^2.2^3$.

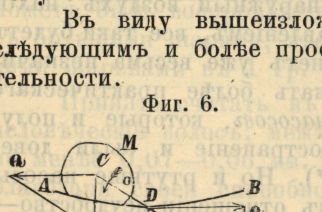
В. Макашовъ (Ив.-Возн.).

О ВѢСАХЪ РОБЕРВАЛЯ.

Въ руководствахъ физики, извѣстныхъ мнѣ, независимость равновѣсія вѣсовъ Роберваля отъ положенія взвѣшиваемаго тѣла на чашкѣ или остается недоказанной, (физика Малинина, Lehrbuch der Physik, Reis), или доказывается, но неудовлетворительно, какъ въ руководствѣ Краевича. Доказательство послѣдняго и очень сложно, и мало убѣдительно, такъ какъ не соотвѣтствуетъ дѣйствительности: тѣло при взвѣшиваніи кладется на чашку, а не подвѣшивается снизу ея. Къ послѣднему заключенію можно придти, разсматривая доказательство Краевича.

Въ виду вышеизложеннаго я замѣняю доказательство Краевича слѣдующимъ и болѣе простымъ, и вполнѣ соотвѣтствующимъ дѣйствительности.

Фиг. 6.



Пусть на чашкѣ AB (фиг. 6) вѣсовъ Роберваля лежитъ тѣло M, центръ тяжести его пусть будетъ C, вѣсъ тѣла обозначимъ черезъ P и изобразимъ его линіей CP. Разложимъ силу P по правилу параллелограма на двѣ силы Q и R по направленіямъ CD (линіи, соединяющей центръ тяжести тѣла съ точкой, въ которой чашка прикрѣплена къ вертикальному стержню) и CQ, параллельной коромыслу вѣсовъ. Точку приложенія силы R перенесемъ въ D, такъ что $DR_1=CR$, и силу R_1 разложимъ на двѣ силы: P_1, направленную вдоль вертикальнаго стержня, и Q_1, параллельную коромыслу вѣсовъ. Такимъ образомъ, на тѣло M и чашку вѣсовъ дѣйствуютъ теперь три силы: Q, Q_1 и P_1. Изъ равенства треугольниковъ

CPR и DP_1R_1, имѣющихъ по равной сторонѣ $CR=DR_1$ и равнымъ угламъ, прилегающимъ къ этимъ сторонамъ

$$PCR=P_1DR_1 \text{ и } CRP=DR_1P_1,$$

заключаемъ, что

$$P_1=P \text{ и } PR=P_1R_1,$$

а слѣдовательно и $Q_1=Q$.

Силы Q и Q_1 представляютъ пару силъ, стремящуюся вращать тѣло M и чашку вѣсовъ около оси O въ указанномъ направленіи, но тѣло вращаться въ указанномъ направленіи не можетъ, этому препятствуетъ треніе его о чашку, а чашка вращаться не можетъ, потому что она прикрѣплена къ стержню.

Итакъ, пара силъ Q и Q_1 уничтожается, остается одна сила P_1, которая и дѣйствуетъ на коромысло вѣсовъ по вертикальному направленію; величина этой силы равна вѣсу тѣла. Итакъ, гдѣ бы тѣло M ни лежало на чашкѣ вѣсовъ, вѣсъ его всегда можетъ быть перенесенъ въ точку D и всегда, слѣдовательно, дѣйствуетъ на одну и ту-же точку коромысла, иными словами: равновѣсіе вѣсовъ Роберваля не зависитъ отъ положенія взвѣшиваемаго тѣла на чашкѣ.

И. Шамаевъ (Новочеркасскъ).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Новый воздушный насосъ Барренберга. При помощи обыкновенныхъ воздушныхъ насосовъ не удается довести разрѣженія дальше извѣстнаго предѣла, недостаточнаго во многихъ случаяхъ, какъ напр. при изготовленіи трубокъ Гейслера, Крукса, а также и электрическихъ лампочекъ. Причина этого неудобства заключается въ томъ, что какъ бы ни былъ хорошо прилаженъ поршень насоса, наружный воздухъ, находящійся подъ обыкновеннымъ атмосфернымъ давленіемъ, все таки будетъ проникать во внутрь, когда тамъ давленіе станетъ уже весьма незначительнымъ. Это обстоятельство принудило искать болѣе практическаго разрѣшенія задачи въ устройствѣ *ртутныхъ насосовъ*, которые и получили въ послѣднее время значительное распространеніе и были доведены до высокой степени усовершенствованія *). Но и ртутные насосы имѣютъ одно весьма серьезное въ техническомъ отношеніи неудобство— это медленность работы, не говоря уже объ ихъ хрупкости. Въ виду этого на фабрикахъ, гдѣ приготовляются электрическія лампочки, ртутными насосами пользуются лишь подъ конецъ разрѣженія, предварительное же выкачиваніе воздуха дѣлается при помощи поршневыхъ насосовъ, приводимыхъ въ движеніе паровою машиною.—Недавно нѣкто Барренбергъ (въ Англіи) придумалъ весьма удачное и простое усовершенствованіе

*) NB. Въ послѣднемъ (№ 6) выпускѣ Журнала Русскаго Физ.-Хим. Общ. есть замѣтка И. Ф. Усагина о сдѣланномъ имъ улучшеніи ртутнаго насоса Шпренгеля.

этихъ послѣднихъ насосовъ: чтобы значительно уменьшить вышеуказанное просачиванiе наружнаго воздуха между стѣнками цилиндра и поршнемъ, стоитъ только уменьшить разницу давленiй воздуха надъ и подъ поршнемъ, т. е. при помощи *второго насоса* выкачивать воздухъ изъ верхней части *перваго насоса*. Барренбергъ такъ и сдѣлалъ; въ его воздушномъ насосѣ имѣется три цилиндра; среднiй, основной, выкачиваетъ воздухъ изъ приводимыхъ въ сообщенiе съ нимъ лампочекъ, а два крайнiе служатъ лишь для выкачиванiя воздуха изъ средняго цилиндра. Всѣ три прошня приводятся въ движенiе паровой машиной. Такъ устроенный насосъ работаетъ весьма быстро и доводитъ разрѣженiе до того же предѣла, какъ и ртутный. *Ш*.

♦ **Кварцевыя нити***). Во многихъ физическихъ и астрономическихъ приборахъ, предназначенныхъ для точныхъ измѣренiй, тонкiя нити играютъ существенно важную роль; ими пользуются въ тѣхъ случаяхъ, когда нужно измѣрить величину ничтожныхъ силъ, ибо дѣйствiе такихъ силъ удобнѣе всего уравновѣшивать упругостью при крученiи нѣкоторой тонкой нити. Законы крученiя однородныхъ и правильно цилиндрическихъ стержней и нитей установлены Кулономъ и Вертгеймомъ; по нимъ: сила крученiя прямо пропорцiональна углу закручиванiя, прямо пропорцiональна четвертой степени дiаметра сѣченiя, обратно пропорцiональна длинѣ и—не зависитъ отъ натяженiя. Отсюда понятно, какъ важно для обнаруженiя слабыхъ эффектовъ употребленiе *возможно тонкой* нити или проволоки; если напр. уменьшимъ дiаметръ проволоки вдвое, оставляя неизмѣнными ея матерiалъ и длину, то ея крученiе уменьшится въ 16 разъ; иными словами, чувствительность прибора не измѣнится, если мы укоротимъ его проволоку или нить въ 16 разъ, но за то уменьшимъ вдвое ея дiаметръ. Неудивительно поэтому, что при современныхъ прiемахъ изготовленiя тончайшихъ нитей, можно доводить чувствительность различныхъ крутильныхъ вѣсовъ до поразительныхъ предѣловъ; такъ напр., классическiй опытъ Кавендиша, требовавшiй въ оное время грандiозныхъ размѣровъ для обнаруженiя взаимнаго тяготѣнiя массъ, теперь можетъ быть воспроизведенъ на столѣ, при помощи небольшого прибора съ большими шарами, вѣсящими каждый не болѣе 1 кгр. и съ маленькими шариками въ 1 гр. каждый.

Принято считать въ разговорномъ языкѣ весьма тонкой нитью—человѣческiй волосъ; между тѣмъ самый тонкiй волосъ имѣетъ дiаметръ не менѣе 0,07—0,06 мм. Онъ употребляется только въ гигрометрахъ, благодаря своей способности удлиняться при поглощенiи атмосферной влаги, и по этой же причинѣ не годится вовсе для крутильныхъ вѣсовъ. Тоньше волоса можно приготовить металлическiя проволоки, мѣдныя, серебряныя и пр., дiаметромъ въ 0,05 мм.; можно даже придать мѣдной проволокѣ дiаметръ въ 0,03 мм., но это крайне затруднительно и такiя проволоки весьма непрочны. Приблизительно тотъ же дiаметръ въ 0,03 мм. имѣютъ стеклянныя нити; въ нѣкоторыхъ случаяхъ онѣ и пригодны, ибо ихъ легко получить какой угодно длины, негигроскопичны и достаточно прочны; имѣютъ однакожъ то важное неудобство, что, обладая

*) См. замѣтку г. *Бхм.* въ № 27 „Вѣстника", стр. 66, сем. III.

малою сравнительно упругостью, послѣ прекращенія дѣйствія закручивающей силы не возвращаются въ первоначальное положеніе. Вслѣдствіе этого въ точныхъ приборахъ чаще прибѣгаютъ въ некрученной шелковинкѣ; она еще тоньше (діам. около 0,025), обладаетъ достаточною прочностью, представляетъ хорошій изоляторъ и закручивается правильнѣе; но неоднородность ея строенія составляетъ нѣкоторое неудобство, ибо каждая шелковинка состоитъ какъ бы изъ двухъ (или большаго числа) нитей склееныхъ вмѣстѣ. Еще тоньше шелковинокъ можно выбрать паутину; строеніе паутиныхъ нитей тоже неправильно, ибо онѣ состоятъ чаще всего изъ цѣлаго пучка склеенныхъ болѣе тонкихъ нитей. По сравненію съ толщиною они весьма прочны *), повидимому обладаютъ хорошею упругостью, но мнѣ неизвѣстно примѣнялись ли онѣ когда либо къ крутильнымъ вѣсамъ; обыкновенно же онѣ вставляются только въ оптическіе инструменты въ видѣ перекрестныхъ нитей, микрометровъ и пр. какъ самыя тонкія изъ нитей, которыя до сихъ поръ были извѣстны **).

---

*) Астрономъ Мичшель въ доказательство прочности паутинной нити приводитъ слѣдующій фактъ. Надо было придѣлать къ маятнику часовъ приспособленіе для замыканія тока всякую секунду посредствомъ опусканія въ ртуть пучка проволокъ; послѣ многихъ неудачныхъ попытокъ пришлось прибѣгнуть къ паутинной нити, на которой висѣлъ этотъ замыкатель; оказалось, что паутина отлично выполняла роль такого передатчика качаній маятника и—не подвергаясь никакой порчѣ, приподымая и опуская пучекъ проволокъ каждую секунду—выполняла свое назначеніе въ теченіе трехъ лѣтъ и вѣроятно могла бы служить и дольше, если бы при передѣлкѣ часовъ не была устранена нарочно.—Нѣкто Блоквель опредѣлялъ для одной паутинной нити непосредственной нагрузкой предѣлъ разрыва; выдерживаемый нитью грузъ былъ 3,95 гр., т. е. въ 6 разъ больше вѣса самого паука, создавшаго ее.

**) Процессъ образованія такихъ органическихъ нитей какъ шелковинки или паутинныя, заключается въ томъ, что нѣкоторая жидкость продавливается насѣкомымъ изъ спеціальныхъ желѣзокъ сквозь тончайшія отверстія и быстро отвердѣваетъ на воздухѣ; при этомъ слипается въ одну нить цѣлая система элементарныхъ нитей; отсюда—неправильность строенія. Но весьма вѣроятно, что такому процессу образованія нитей шелковичными червями и пауками можно подражать искусственно, и если въ настоящее время удалось уже напр. получать нѣчто въ родѣ настоящаго шелка продавливаніемъ сквозь капиллярныя трубки нѣкоторой полужидкой массы, то можно ожидать, что такимъ же пріемомъ можно будетъ приготовлять и болѣе тонкія нити, которыя передъ настоящими шелковинками и паутинами будутъ имѣть преимущество вполнѣ однороднаго строенія и произвольной длины. (NB. На случай, если бы кто либо изъ читателей захотѣлъ попытаться приготовить такую искусственную шелковинку и изучить ея пригодность въ отношеніи прочности, крученія и пр. для крутильныхъ вѣсовъ, привожу рецептъ приготовленія такъ называемаго „французскаго искусственнаго шелка" (г. Дювивіеръ'а), не ручаясь впрочемъ за его точность: надо приготовить три раствора: 1) изъ 70 гр. пироксилина (огнестрѣльной ваты) въ 1 литрѣ уксусной кислоты, 2) изъ 50 гр. клея въ 1 литрѣ уксусной кислоты и 3) изъ 125 гр. гутаперчи въ 1 литрѣ сѣрнистаго углерода. Къ этимъ растворамъ прибавляютъ немного (сколько?) глицерина и растительнаго (?) масла. Затѣмъ смѣсь фильтруется и продавливается сквозь капиллярныя трубки. Полученныя нити промываются въ 1) растворѣ соды, 2) растворѣ бѣлка и 3) въ очень слабомъ растворѣ сулемы, и затѣмъ для окончательнаго отвердѣванія подвергаются дѣйствію углекислоты.)

Но безспорное преимущество передъ всѣми вышеперечисленными имѣютъ *кварцевыя нити*, которыя *Vernon Boys* придумалъ приготовлять для крутильныхъ вѣсовъ. Для этого онъ выпускаетъ изъ небольшого лука стрѣлу, къ концу которой прикрѣпленъ кусокъ кварца *), послѣ того какъ кварцевая палочка достаточно расплавится въ своей средней части въ пламени друмондовой горѣлки; при быстромъ полетѣ стрѣлы расплавленный кварцъ вытягивается въ очень правильную и необычайно тонкую нить, діаметръ которой не больше 0,005 мм., а иногда бываетъ и гораздо менѣе. Удавалось получить столь тонкія нити, что ихъ почти нельзя видѣть, нельзя даже фотографировать. Употребляемыя Vernon Boys'омъ нити имѣютъ діаметръ въ 0,0025 мм.; ихъ крученіе въ 10000 разъ слабѣе крученія той же длины самыхъ тонкихъ стекляныхъ нитей; ихъ прочность значительно больше прочности шелковинокъ и стекляныхъ нитей (напр. нить въ 0,005 мм. легко выдерживаетъ нагрузку въ 2 гр.) и—что очень важно—ихъ упругость такъ значительна, что при прекращеніи дѣйствія закручивающей силы онѣ возвращаются къ первоначальному положенію. Чтобы дать понятіе объ увеличеніи чувствительности прибора при замѣнѣ его нити карцевою нитью, достаточно сказать, что при кварцевой нити въ 0,4 метра длины, чувствительность будетъ такова (или даже больше), какая была бы при употребленіи возможно тонкой стекляной нити, имѣющей длину равную высотѣ Эйфелевой башни. (300 м.). *Ш.*

⧫ **Новый пирометрическій пріемъ.** Температура оказываетъ вліяніе на скорость истеченія газовъ сквозь капиллярныя трубки. На этомъ основаніи *Барусъ* (въ Америкѣ) устроилъ пирометръ; онъ состоитъ изъ серебряной капиллярной трубки съ діаметромъ въ 0,43 мм. и длиною въ 20 цм., черезъ которую проходитъ опредѣленный объемъ газа, находящагося подъ постояннымъ давленіемъ. Опыты показали, что процессъ прохожденія всего газа сквозь каналъ трубки оканчивается: при температурѣ 15°С.—въ 80 секундъ, при 100°С.—въ 115 сек., при 500°С.—въ 310 сек. и при 700°С.—въ 427 сек. *Ш.*

⧫ **Разъѣданіе растворимыхъ тѣлъ на границѣ свободной поверхности жидкости.** Изъ нѣкоторыхъ опытовъ, относящихся къ категоріи этихъ явленій, *Спрингъ* сдѣлалъ заключеніе, что химическая энергія жидкостей больше въ ихъ поверхностномъ слоѣ, чѣмъ внутри. Однакожъ *Бехговъ*, не соглашаясь съ этимъ, далъ другое объясненіе факту разъѣданія кристалловъ на границѣ свободной поверхности растворителя; по его мнѣнію погруженная часть кристалла окружена оболочкой изъ болѣе насыщеннаго раствора, который, какъ болѣе тяжелый, сплываетъ по поверхности погруженной части внизъ; новыя порціи растворителя могутъ слѣдовательно подходить къ кристаллу лишь на свободной поверхности, гдѣ поэтому кристаллъ и разрушается прежде всего. Въ подтвер-

*) Мнѣ неизвѣстно какую изъ разновидностей кварца употребляетъ Boys для приготовленія нитей; вѣроятно, однакожъ, что для этой цѣли годится напр. горный хрусталь.

ждeніе этого Бехговъ покрылъ верхнюю половину кристалла воскомъ и погрузилъ его весь въ жидкость; въ этомъ случаѣ разъѣданіе произошло по границѣ, гдѣ оканчивается восковая оболочка*). *Ш*.

ЗАДАЧИ.

№ 84. Показать, что если $x+y+z=0$, то

$$\left(\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}+\frac{x-y}{z}\right)\left(\frac{x}{y-z}+\frac{y}{z-x}+\frac{z}{x-y}\right)=9.$$

(Заимств.) *А. Гольденбергъ* (Спб.)

№ 85. Рѣшить уравненіе

$$(x^3-3qx+p^3-3pq)^2-4(px+q)^3=0.$$

(Заимств.) *А. Гольденбергъ* (Спб.)

№ 86. Раздѣлить площадь сектора въ крайнемъ и среднемъ отношеніи дугою окружности концентрическою съ дугою сектора.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

---

*) Хотя въ пользу такого же отрицанія вліянія поверхностнаго натяженія жидкости на ея химическую энергію говорятъ и тѣ опыты, которые я предпринималъ въ прошломъ году (вмѣстѣ съ г. Корольковымъ), но мнѣ кажется, что вопросъ этого нельзя считать еще рѣшеннымъ. Дѣйствительно, à priori нельзя утверждать, что въ поверхностномъ слоѣ жидкости, гдѣ молекулярная группировка иная чѣмъ внутри жидкости, гдѣ физическія свойства претерпѣваютъ замѣтныя измѣненія, химическія свойства остаются безъ измѣненія. Такіе факты напр. какъ окисленіе мѣди на счетъ кислорода воздуха въ присутствіи сѣрной кислоты, или свинца—въ присутствіи уксусной кислоты, скорѣе говорятъ въ пользу того предположенія, что тонкій поверхностный слой жидкости, которой при подобныхъ опытахъ металлы смачиваются, относится какъ то иначе въ химическомъ отношеніи, чѣмъ вся масса жидкости. Мы убѣдились, правда, что въ атмосферѣ водорода тонкій слой сѣрной кислоты, покрывающей мѣдь, не оказываетъ на нее никакого вліянія, но—повторяю—вопросъ остается по моему мнѣнію открытымъ, и въ химіи подобныя реакціи въ присутствіи воздуха остаются пока безъ разъясненія. Возможно и то, что поверхностный слой жидкости относится совершенно иначе къ поглощенію прилегающихъ газовъ, чѣмъ это мы привыкли считать, имѣя дѣло съ данной массой жидкости. Было бы поэтому крайне интересно изучить поглощательную способность различныхъ жидкостей, покрывающихъ тонкимъ слоемъ твердыя вещества, и жидкихъ пленокъ. Мнѣ кажется, что предпринятые въ этомъ направленіи опыты (которыхъ, къ сожалѣнію, мы съ г. Корольковымъ не имѣемъ возможности вести дальше) обнаружили бы весьма рѣзкія различія и доказали бы, по всей вѣроятности, что количество поглощаемаго жидкостью газа обусловливается не только температурой, давленіемъ и веществомъ газа, но еще и относительною величиною свободной поверхности самой жидкости.

№ 87. Рѣшить безъ помощи тригонометріи слѣдующую задачу (помѣщенную въ „Прямол. Тригонометріи“ Пржевальскаго, изд. 3-ье 1834 г. стр. 205, № 13).

„Направленіе маяка B относительно корабля, находящагося въ A, „было сначала NO (сѣв.-вост.); но когда корабль прошелъ на востокъ „разстояніе AC=a, то маякъ B былъ уже относительно корабля по на-„правленію NNO (сѣв.-сѣв.-вост.). Найти разстояніе корабля отъ маяка „въ обоихъ положеніяхъ A и C.“ *Н. Николаевъ* (Пенза).

№ 88. Даны двѣ параллельныя прямыя MN и PQ и нѣкоторая сѣкущая AB, встрѣчающая MN въ точкѣ B. Въ той же плоскости дана еще точка C; черезъ нее требуется провести сѣкущую, пересѣкающую PQ, MN и AB соотвѣтственно въ точкахъ D, E и F, такъ, чтобы отношеніе отрѣзковъ DE къ CF было равно данному отношенію $\frac{m}{n}$.

(Заимств.) *О. Пергаментъ* (Одесса).

№ 89. Даны n точекъ на плоскости: описать наименьшую окружность, обнимающую всѣ данныя точки. *И. Ивановъ* (Спб.)

№ 90. Показать, что число α, опредѣленное рядомъ

$$\alpha=\frac{1}{q}+\frac{1}{q^{a}}+\frac{1}{q^{a^2}}+\frac{1}{q^{a^3}}+\dots\dots\dots$$

гдѣ q и a суть цѣлыя положительныя числа большія 1, есть число несоизмѣримое. *И. Ивановъ* (Спб.)

Упражненія для учениковъ.

1. ABC—треугольникъ, D—средина стороны AB, E—средина стороны AC. Доказать, что прямая, проходящая чрезъ D и E, параллельна сторонѣ BC.—(*Намекъ*: проведите CF ∥ AB).

2. ABC—треугольникъ, D—средина стороны AB. Доказать, что прямая, проведенная изъ D параллельно BC, пройдетъ чрезъ средину E стороны AC.

3. ABCD—трапеція, AC и BD—ея діагонали, G и H—средины ихъ. E и F—средины непараллельныхъ сторонъ трапеціи. Доказать:

1) что точки E, F, G, H лежатъ на прямой параллельной основаніямъ трапеціи;

2) что разстояніе EF равно полусуммѣ, разстояніе GH—полуразности основаній взятой трапеціи.

4. ABCD—четыреугольникъ; E, F, G, H—средины его сторонъ:

AB, BC, CD, DA. Доказать, что фигура — EFGH — параллелограмъ. (*Намекъ*: проведите діагонали: AC, BD).

Разсмотрѣть тѣ частные случаи, когда діагонали четыреугольника: 1) перпендикулярны; 2) равны; 3) перпендикулярны и равны.

5. ABCD — четыреугольникъ; E, F, G, H — средины его сторонъ; K — средина діагонали AC, L — средина діагонали BD. Доказать:

1) что прямыя GE, FH взаимно дѣлятся пополамъ въ точкѣ встрѣчи N;

2) что каждая изъ фигуръ: KFLH, KELG есть параллелограмъ;

3) что точка N — *центръ параллелограма* EFGH — есть въ то же время центръ каждаго изъ параллелограмовъ: KFLH, KELG.

6 ABCD — параллелограмъ, O — точка пересѣченія его діагоналей (центръ). Доказать:

1) что всякая прямая MN, проходящая чрезъ точку O и ограниченная обводомъ фигуры, дѣлится пополамъ въ точкѣ O;

2) что прямая MN разлагаетъ параллелограмъ на двѣ совмѣстимыя фигуры: AMND, BNMB.

7. На сторонахъ AB и CD параллелограма ABCD взяты: точки E и F такъ, что AE=CF, и точки G и H такъ, что BG=DH. Доказать:

1) что фигура EGFH — параллелограмъ;

2) что всѣ такимъ образомъ построенные параллелограммы имѣютъ общій центръ съ параллелограмомъ ABCD.

8. Данъ параллелограмъ ABCD и дана точка E на одной изъ сторонъ его. Требуется *вписать* въ данный параллелограмъ другой такъ, чтобы точка E была однюй изъ его вершинъ. Число рѣшеній?

9. Данъ параллелограмъ ABCD и дана точка M внутри его обвода. Требуется вписать въ данный параллелограмъ другой такъ, чтобы одна изъ его сторонъ проходила чрезъ точку M. Число рѣшеній?

10. Опредѣлить путь, которому долженъ слѣдовать на прямоугольномъ *билльярдѣ* шаръ, поставленный на немъ, чтобы, *отразившись* отъ всѣхъ бортовъ, вернуться въ точку исхода (шаръ *отражается* подъ угломъ равнымъ тому, подъ которымъ встрѣчаетъ каждый изъ бортовъ). Число рѣшеній? Длина всего пройденнаго пути?

А. *Гольденбергъ* (Спб.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 38 (2-я серія). Внутри равносторонняго треугольника, площадь котораго равна 64□, взята точка, изъ которой на стороны треугольника опущены перпендикуляры, относящіеся между собою по длинѣ какъ 1:4:7. Опредѣлить площадь треугольника, образованнаго прямыми, соединяющими основанія этихъ перпендикуляровъ.

По условію

$$\frac{a^2}{4}\sqrt{3}=64,$$

слѣдовательно сторона △-ка

$$a=\frac{16}{\sqrt[4]{3}}.$$

Если обозначимъ длину перпендикуляровъ:

$$OA=x,\ OB=4x \text{ и } OC=7x,$$

то

$$\frac{a}{2}(x+4x+7x)=64,$$

или

$$\frac{6x.16}{\sqrt[4]{3}}=64,$$

откуда

$$x=AO=\frac{2}{3}\sqrt[4]{3},$$

$$4x=OB=\frac{8}{3}\sqrt[4]{3},$$

$$7x=OC=\frac{14}{3}\sqrt[4]{3}.$$

Очевидно, что углы AOB, AOC и COB равны каждый 120° и площадь △-ка ABC равна

$$\text{пл. } AOC+\text{пл. } AOB+\text{пл. } COB,$$

но

$$\text{пл. } AOC=\frac{AO.OC.\sqrt{3}}{4},\quad \text{пл. } AOB=\frac{AO.OB.\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{и пл. } BOC=\frac{BO.OC.\sqrt{3}}{4}.$$

Послѣ подстановки и сокращеній найдемъ, что

$$\text{пл. } \triangle\text{-ка } ABC = 13\square.$$

Н. Николаевъ и *А. П.* (Пенза), *М. Акопянцъ* (Тифлисъ).

№ 416. Найти такое число, которое увеличивается втрое при перенесеніи послѣдней его цыфры на первое мѣсто.

Условіе этой задачи, выраженное алгебраически, будетъ

$$3x = \frac{x-a}{10} + a.10^{n-1},$$

гдѣ x искомое число, a—послѣдняя его цыфра и n число цыфръ его. Это условіе даетъ

$$x = \frac{(10^n - 1)}{29}.a = \frac{999..9.a}{29},$$

что требуетъ, чтобы число 999..... раздѣлить на 29 безъ остатка. Исполнивъ это на самомъ дѣлѣ, получимъ для наименьшаго изъ такихъ чиселъ

$$x = 3448275862068965517241379 31.a$$

при $n = 28$.

Послѣднее равенство показываетъ, что a не можетъ быть менѣе 3. Слѣдовательно $9 \geqq a \geqq 3$, т. е.

$$a = 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8 \text{ и } 9.$$

Искомыхъ чиселъ, значитъ, будетъ семь.

Н. Артемьевъ и *А. Плетневъ* (Спб.).

NB. Если на мѣстѣ a поставить 0 и число 344.......9310 свернуть въ кольцо, то оно будетъ имѣть всѣ свойства *магическаго кольца*. (См. № 25 „Вѣстника“ стр. 17, сем. III и ср. задачу № 65 (I-ой сер.), рѣш. въ № 18 „Вѣстн.“).

№ 478. Рѣшить уравненіе

$$\mathrm{Sin}\,mx.\mathrm{Sin}\,3mx = a.$$

Пусть

$$3mx = \frac{z+y}{2} \quad \text{и} \quad mx = \frac{z-y}{2}.$$

Тогда

$$z = 4mx, \text{ а } y = 2mx.$$

Такъ какъ

$$-2\mathrm{Sin}\frac{z+y}{2}\,\mathrm{Sin}\frac{z-y}{2} = \mathrm{Cos}\,z - \mathrm{Cos}\,y,$$

то данное уравненіе можно представить въ такомъ видѣ

$$\mathrm{Cos}4mx - \mathrm{Cos}2mx = -2a.$$

Полагая, далѣе, $2mx = t$ и находимъ

$$\mathrm{Cos}2t - \mathrm{Cos}t = -2a.$$

Отсюда

$$2\mathrm{Cos}^2 t - \mathrm{Cos}t - (1-2a) = 0.$$

Рѣшая это уравненіе, получимъ величину для $t = 2mx$.

С. Кричевскій (Ромны), *Н. Волковъ* (Воронежъ).

№ 508. Найти истинное значеніе выраженія

$$(1-x)\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}$$

при $x=1$.

Данное выраженіе можетъ быть представлено еще въ такомъ видѣ

$$(1-x)\mathrm{Cotg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right),$$

или

$$\frac{1-x}{\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}(1-x)} = \frac{\frac{\pi}{2}(1-x)}{\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}(1-x)} \cdot \frac{2}{\pi}.$$

Извѣстно, что

$$lim. \frac{\frac{\pi}{2}(1-x)}{\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}(1-x)} = 1,$$

слѣдовательно

$$\left[(1-x)\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}\right]_{x=1} = \frac{2}{\pi}.$$

Н. Артемьевъ (Спб.). Ученики: Черн. г. (8) *Д. З.*, 1-й Спб. г. (8) *К. К.*, Пинск. р. уч. (7) *С. Т.*

№ 545. Показать, что если

$$x = by + cz + dt + \ldots\ldots\ldots$$

$$y = ax + cz + dt + \ldots\ldots\ldots$$

$$z = ax + by + dt + \ldots\ldots\ldots$$

$$t = ax + by + cz + \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

то

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}+\frac{d}{d+1}+\ldots\ldots=1.$$

Вычитая другъ изъ друга почленно уравненія, получимъ:

$$x(a+1)=y(b+1)=z(c+1)=t(d+1)=\ldots\ldots\ldots,$$

тогда

$$y=\frac{x(a+1)}{b+1},\ z=\frac{x(a+1)}{c+1},\ t=\frac{x(a+1)}{d+1},\ldots\ldots\ldots$$

$$x=\frac{y(b+1)}{a+1},\ z=\frac{y(b+1)}{c+1},\ t=\frac{y(b+1)}{d+1},\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Вставляя первый рядъ значеній въ первое уравненіе, второй во второе, и т. д., получимъ рядъ равенствъ:

$$\frac{1}{a+1}=\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}+\frac{d}{d+1}+\ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{b+1}=\frac{a}{a+1}+\frac{c}{c+1}+\frac{d}{d+1}+\ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{c+1}=\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{d}{d+1}+\ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{d+1}=\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}+\ldots\ldots,$$

сложивъ которыя, найдемъ

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+\ldots\ldots\ldots=(n-1)\left(\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}+\ldots\ldots\right)$$

Прибавляя къ обѣимъ частямъ по выраженію

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}+\ldots\ldots,$$

и увидимъ, что

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}+\frac{d}{d+1}+\ldots\ldots=1.$$

И. Пастуховъ (Пермь), *С. Кричевскій* (Ромны), *Н. Волковъ* (Воронежъ), *Я. Эйлеръ* (Могилевъ). Ученикъ Курск. г. (8) *В. Х.*

Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Кіевъ, 4 Октября 1890 г.
Типо-литографія Высочайше утвержд. Товарищества И. Н. Кушнеревъ и К°.

Обложка
пщется

Обложка
ищется