Обложка
ищется

Обложка
ищется

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 103.

IX Сем. 21 Октября 1890 г. № 7.

ЗАЯВЛЕНІЕ РЕДАКЦІИ.

Всѣмъ читателямъ нашимъ и сотрудникамъ, обращавшимся въ редакцію съ различнаго рода заявленіями и запросами относительно предполагавшагося изданія „Научнаго Собесѣдника по вопросамъ естествознанія", симъ объявляетъ, что журналъ этотъ издаваться не будетъ, по независящимъ отъ редакціи причинамъ.

Въ будущемъ году будетъ по прежнему и на прежнихъ условіяхъ издаваться только „Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики" (X-ый и XI-ый семестры).

НАИБОЛЬШІЯ и НАИМЕНЬШІЯ ЗНАЧЕНІЯ

квадратной дроби.

Если при измѣненіи независимаго перемѣннаго въ одномъ и томъ же смыслѣ данная функція сначала возрастаетъ, а потомъ начинаетъ убывать, то она переходитъ черезъ значеніе большее, чѣмъ сосѣднія значенія предшествующія и послѣдующія; о такой функціи говорятъ, что она переходитъ черезъ наибольшее свое состояніе или черезъ максимумъ.

Если, напротивъ, при измѣненіи независимаго перемѣннаго въ одномъ и томъ же смыслѣ данная функція сначала убываетъ, а потомъ начинаетъ возрастать, то она переходитъ черезъ значеніе меньшее, чѣмъ сосѣднія значенія предшествующія и послѣдующія; о такой функціи говорятъ, что она переходитъ черезъ наименьшее свое состояніе или черезъ минимумъ.

Поставимъ своею задачею отыскать наибольшія и наименьшія значенія квадратной дроби

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'},$$

полагая, что независимое перемѣнное x измѣняется отъ $-\infty$ до $+\infty$. Пусть y означаетъ, вообще, величину квадратной дроби. Разрѣшивъ уравненіе

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}=y$$

относительно x, получимъ

$$x=\frac{b-b'y\pm\sqrt{(b'y-b)^2-4(a'y-a)(c'y-c)}}{2(a'y-a)}$$

что можно представить въ такомъ видѣ

$$x=\frac{b-b'y\pm\sqrt{Ay^2+By+C}}{2(a'y-a)},$$

гдѣ для краткости положено

$$A=b'^2-4a'c'$$
$$B=4ac'+4a'c-2bb'$$
$$C=b^2-4ac.$$

Такъ какъ перемѣнное независимое x при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ остается вещественнымъ, то квадратная дробь можетъ получить только тѣ значенія, которыя удовлетворяютъ условію

$$Ay^2+By+C\geqq 0.$$

Напротивъ, тѣхъ значеній, которыя удовлетворяютъ условію

$$Ay^2+By+C<0$$

она имѣть не можетъ. На основаніи этого свойства квадратной дроби наибольшія и наименьшія ея состоянія могутъ быть отысканы слѣдующимъ образомъ.

Отысканіе максимума не равнаго $+\infty$.

Максимумъ функціи не равный $+\infty$ характеризуется тѣмъ, что функція не можетъ получить значеній, превосходящихъ максимумъ на безконечно малую величину. Поэтому если квадратная дробь допускаетъ максимумъ не равный $+\infty$ и если этотъ максимумъ есть α, то изъ двухъ значеній $\alpha+\varepsilon$ и $\alpha-\varepsilon$, гдѣ ε означаетъ положительную безконечно малую величину, квадратная дробь можетъ получить только второе. Отсюда видно, что число α должно удовлетворять слѣдующимъ двумъ условіямъ:

$$A(\alpha-\varepsilon)^2+B(\alpha-\varepsilon)+C\geqq 0$$
$$A(\alpha+\varepsilon)^2+B(\alpha+\varepsilon)+C<0,$$

Представивъ эти условія въ видѣ

$$-A\varepsilon^2+(2A\alpha+B)\varepsilon\leqq A\alpha^2+B\alpha+C<-A\varepsilon^2-(2A\alpha+B)\varepsilon$$

заключаемъ, что α обладаетъ свойствомъ обращать трехчленъ Ay^2+By+C въ нуль, ибо никакое число отличное отъ нуля не можетъ заключаться между двумя безконечно малыми величинами, одновременно уничтожающимися. Изъ этого между прочимъ видно, что если одновременно $A=0$ и $B=0$ при чемъ

$$C=\frac{4(ac'-ca')^2}{b'^2}>0$$

то квадратная дробь не допускаетъ maximum.

Вычтя первое неравенство изъ второго, получимъ

$$(2A\alpha+B)\varepsilon\leqq 0 \qquad \text{или} \qquad 2A\alpha+B\leqq 0$$

ибо $\varepsilon>0$. Таково второе условіе, которому должно удовлетворить число α. И легко убѣдиться, что въ этомъ условіи изъ двухъ знаковъ $<$ и $=$ знакъ равенства не имѣетъ мѣста. Въ самомъ дѣлѣ если одновременно

$$A\alpha^2+B\alpha+C=0 \qquad 2A\alpha+B=0,$$

то

$$A\varepsilon^2\geqq 0, \qquad A\varepsilon^2<0 \qquad \text{или } A\geqq 0 \qquad A<0.$$

Повидимому эти требованія можно примирить, полагая $A=0$, но тогда $B=0$ и $C=0$. Замѣнивъ A, B и C ихъ значеніями, получимъ

$$b'^2=4a'c' \qquad 2ac'+2a'c=bb' \qquad b^2=4ac$$

откуда

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$$

что возможно лишь въ томъ случаѣ, когда квадратная дробь есть величина постоянная, чего мы не предполагаемъ.

Итакъ необходимыя условія существованія максимума могутъ быть представлены въ видѣ

$$\left.\begin{aligned} A\alpha^2+B\alpha+C=0 \\ 2A\alpha+B<0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Отысканіе минимума не равнаго $-\infty$.

Минимумъ функціи не равный $-\infty$ характеризуется тѣмъ, что функція не можетъ имѣть значеній меньшихъ минимума и отличающихся отъ минимума на безконечно малую величину. Поэтому если квадратная дробь допускаетъ минимумъ не равный $-\infty$ и если этотъ минимумъ есть α, то изъ двухъ значеній $\alpha+\varepsilon$ и $\alpha-\varepsilon$, гдѣ ε означаетъ положительную безконечно-малую величину, квадратная дробь можетъ получить только первое. Отсюда видно, что число α должно удовлетворить слѣдующимъ двумъ условіямъ

$$A(\alpha+\varepsilon)^2+B(\alpha+\varepsilon)+C\geqq 0$$

$$A(\alpha-\varepsilon)^2+B(\alpha-\varepsilon)+C<0.$$

Эти необходимыя условія существованія minimum безъ труда приводятся къ виду

$$\left.\begin{aligned} A\alpha^2+B\alpha+C=0 \\ 2A\alpha+B>0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Достаточность условій (1) и (2).

Означимъ черезъ α вещественное число, удовлетворяющее условію

$$A\alpha^2+B\alpha+C=0$$

или

$$(b'\alpha-b)^2-4(a'\alpha-a)(c'\alpha-c)=0$$

и будемъ полагать, что $2A\alpha+B$ не равно нулю. Черезъ β назовемъ то значеніе x, которому соотвѣтствуетъ $y=\alpha$; слѣдовательно

$$\beta=\frac{b-b'\alpha}{2(a'\alpha-a)}=\frac{2(c'\alpha-c)}{b-b'\alpha} \qquad \beta^2=\frac{c'\alpha-c}{a'\alpha-a}.$$

Наконецъ условимся разумѣть подъ y число безконечно мало отличающееся отъ α и удовлетворяющее неравенству

$$Ay^2+By+C>0.$$

Числу y соотвѣтствуютъ два вещественныхъ значенія x; они опредѣляются формулами

$$x_1=\frac{b-b'y-\sqrt{Ay^2+By+C}}{2(a'y-a)}$$

$$x_2=\frac{b-b'y+\sqrt{Ay^2+By+C}}{2(a'y-a)}.$$

Такъ какъ y не равняется α, то числа x_1 и x_2 не равны между собою. Докажемъ, что одно изъ нихъ меньше β, а другое больше β. Для этого необходимо и достаточно доказать, что разности $\beta-x_1$ и $x_2-\beta$ имѣютъ одинаковые знаки, или

$$(\beta-x_1)(x_2-\beta)>0.$$

Произведя умноженіе, получимъ

$$(x_1+x_2)\beta-\beta^2-x_1x_2>0.$$

Поставивъ сюда на мѣсто β и β^2 ихъ значенія и замѣтивъ, что

$$x_1+x_2=\frac{b-b'y}{a'y-a} \qquad x_1x_2=\frac{c'y-c}{a'y-a}$$

будемъ имѣть

$$\frac{(b-b'y)(b-b'\alpha)-2(a'y-a)(c'\alpha-c)-2(c'y-c)(a'\alpha-a)}{(a'y-a)(a'\alpha-a)}>0.$$

Пока $a'\alpha - a$ не равно нулю, знаки разностей $a'y - a$ и $a'\alpha - a$ можно считать одинаковыми, ибо числу y можно приписать значеніе какъ угодно близкое къ α. Поэтому, оставляя въ сторонѣ случай $a'\alpha - a = 0$, мы можемъ предыдущее неравенство замѣнить такимъ

$$(b-b'y)(b-b'\alpha)-2(a'y-a)(c'\alpha-c)-2(c'y-c)(a'\alpha-a)>0$$

или

$$(b'^2-4a'c')\alpha y+(2ac'+2a'c-bb')(\alpha+y)+b^2-4ac>0$$

Принявъ во вниманіе значенія A, B и C, получимъ

$$A\alpha y+B\frac{y+\alpha}{2}+C>0.$$

Что это неравенство дѣйствительно имѣетъ мѣсто, въ этомъ можно убѣдиться, допуская справедливость неравенства противоположнаго смысла.

Въ самомъ дѣлѣ, если

$$A\alpha y+B\frac{y+\alpha}{2}+C\leqq 0,$$

то непремѣнно

$$-A\alpha y-B\frac{y+\alpha}{2}-C\geqq 0.$$

Сложивъ это неравенство сначала съ неравенствомъ

$$Ay^2+By+C>0,$$

а потомъ съ тождествомъ

$$A\alpha^2+B\alpha+C=0,$$

получимъ

$$(2Ay+B)(y-\alpha)\geqq 0 \qquad (2A\alpha+B)(\alpha-y)\geqq 0.$$

Перемноживъ эти неравенства найдемъ:

$$-(2A\alpha+B)(2Ay+B)(y-\alpha)^2\geqq 0$$

или

$$(2A\alpha+B)(2Ay+B)\leqq 0.$$

Лѣвая часть не можетъ быть нулемъ, такъ какъ $2A\alpha+B$ не равно нулю; по той же причинѣ знаки множителей $2A\alpha+B$ и $2Ay+B$ при y достаточно близкомъ къ α можно сдѣлать одинаковыми. Отсюда заключаемъ, что предыдущее неравенство нелѣпо и черезъ это убѣждаемся въ справедливости неравенства

$$A\alpha y+B\frac{y+\alpha}{2}+C>0,$$

а вмѣстѣ съ нимъ и неравенства

$$(\beta-x_1)(x_2-\beta)>0.$$

Такъ доказывается, что β содержится между x_1 и x_2.

Изъ предыдущаго видно, что если x измѣняется отъ x_1 до β и затѣмъ отъ β до x_2, то эти измѣненія происходятъ въ одномъ и томъ же смыслѣ.

Если сложимъ неравенство

$$2A\alpha y+B(\alpha+y)+2C>0,$$

и тождество

$$-2A\alpha^2-2B\alpha-2C=0,$$

то получимъ

$$(2A\alpha+B)(y-\alpha)>0.$$

Разсмотримъ два случая.

Пусть $2A\alpha+B<0$, тогда $y<\alpha$. На основаніи неравенства $y<\alpha$ заключаемъ, что при измѣненіи x отъ x_1 до β, y приближается къ α увеличиваясь, а при измѣненіи x отъ β до x_2. y проходитъ прежнія значенія въ обратномъ порядкѣ и слѣдовательно уменьшается. Видимъ отсюда, что число α, удовлетворяющее условіямъ (α), представляетъ собою максимумъ квадратной дроби.

Если напротивъ $2A\alpha+B>0$, то $y>\alpha$. Поэтому при измѣненіи x отъ x_1 до β, y будетъ уменьшаться, а при измѣненіи x отъ β до x_2—будетъ увеличиваться. Это значитъ, что число α, удовлетворяющее условіямъ (β), представляетъ собою минимумъ квадратной дроби.

Особенный случай.

Наше изслѣдованіе не обнимаетъ собою того случая, когда $a'\alpha-a=0$. Этотъ случай должно слѣдовательно разсмотрѣть особо.

Поставивъ въ равенство

$$A\alpha^2+B\alpha+C=0$$

на мѣсто A, B и C ихъ значенія и замѣнивъ α черезъ $\frac{a}{a'}$, получимъ

$$(ab'-ba')^2=0 \qquad \text{или} \qquad \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}.$$

Таково необходимое условіе, при которомъ можетъ представиться случай $\alpha=\frac{a}{a'}$.

Поставивъ на мѣсто α его значеніе въ формулу

$$\beta=\frac{2(c'\alpha-c)}{b-b'\alpha},$$

будемъ имѣть

$$\beta = \frac{2(c'a - a'c)}{ba' - ab'}.$$

Такъ какъ числитель $c'a - a'c$ при существованіи условія $ba' - b'a = 0$ не можетъ быть нулемъ и такъ какъ разность $ba' - b'a$ можетъ приближаться къ нулю, оставаясь постоянно положительной или постоянно отрицательной, то независимо отъ знака разности $c'a - a'c$ находимъ $\beta = \pm\infty$. Если перемѣнное независимое, постоянно увеличиваясь, дѣлается равнымъ $+\infty$ или. постоянно уменьшаясь, дѣлается равнымъ $-\infty$, то дальнѣйшихъ измѣненій въ прежнемъ смыслѣ оно имѣть не можетъ.

Поэтому то значеніе квадратной дроби, которое соотвѣтствуетъ $\beta = +\infty$ или $\beta = -\infty$ не представляетъ ни maximum ни minimum.

Это значитъ, что число α равное $\frac{a}{a'}$ и равное $\frac{b}{b'}$ не есть ни maximum ни minimum, хотя удовлетворяетъ одному изъ условій (1) и (2).

Отысканіе максимума равнаго $+\infty$ и минимума равнаго $-\infty$.

Намъ остается разузнать теперь, не допускаетъ ли квадратная дробь максимумъ равный $+\infty$ или минимумъ равный $-\infty$.

Квадратная дробь можетъ обратиться въ $+\infty$ или въ $-\infty$ только для того значенія x, при которомъ $a'x^2 + b'x + c'$ равняется нулю. Пусть же имѣемъ тождественно

$$a'\beta'^2 + b'\beta' + c' = 0.$$

Число β' не можетъ быть корнемъ трехчлена $ax^2 + bx + c$; въ противномъ случаѣ квадратная дробь могла бы быть сокращена на $x - \beta'$.

Максимумъ равный $+\infty$ и минимумъ равный $-\infty$ характеризуются тѣмъ, что для значеній x предшествующихъ β' и для значеній x слѣдующихъ за β' квадратная дробь сохраняетъ одинъ и тотъ же знакъ: плюсъ для максимума и минусъ для минимума. Слѣдовательно для того, чтобы имѣлъ мѣсто максимумъ равный $+\infty$ или минимумъ равный $-\infty$ необходимо и достаточно, чтобы каждое изъ выраженій

$$\frac{a(\beta' - \delta)^2 + b(\beta' - \delta) + c}{a'(\beta' - \delta)^2 + b'(\beta' - \delta) + c'} \quad \text{и} \quad \frac{a(\beta' + \delta)^2 + b(\beta' + \delta) + c}{a'(\beta' + \delta)^2 + b'(\beta' + \delta) + c'}$$

гдѣ δ безконечно малая величина, сохраняло одинъ и тотъ же знакъ. На основаніи тождества

$$a'\beta'^2 + b'\beta' + c' = 0$$

предыдущія выраженія приводятся къ виду

$$\frac{a\beta'^2 + b\beta' + c - (2a\beta' + b)\delta + a\delta^2}{-(2a'\beta' + b')\delta + a'\delta^2}$$

$$\frac{a\beta'^2 + b\beta' + c + (2a\beta' + b)\delta + a\delta^2}{(2a'\beta' + b')\delta + a'\delta^2}.$$

Если $2a'\beta'+b'$ не равно нулю, то знаменатели этихъ дробей при δ безконечно маломъ имѣютъ различные знаки. Но знаки знаменателей должны быть одинаковы, такъ какъ одинаковы знаки числителей. Слѣдовательно необходимо

$$2a'\beta'+b'=0 \qquad \text{или} \qquad \beta'=-\frac{b'}{2a'}.$$

Поставивъ это значенiе β' въ равенство

$$a'\beta'^2+b'\beta'+c'=0,$$

получимъ

$$b'^2-4a'c'=0 \qquad \text{или } A=0.$$

Таково необходимое условiе, при которомъ квадратная дробь допускаетъ максимумъ равный $+\infty$ или минимумъ равный $-\infty$. На основанiи формулъ

$$2a'\beta'+b'=0 \qquad \text{и} \qquad b'^2=4a'c'$$

изслѣдуемыя дроби приводятся къ такимъ

$$\frac{4ac'+4ca'-2bb'-4(a'b-ab')\delta+4aa'\delta^2}{4a'^2\delta^2}$$

$$\frac{4ac'+4ca'-2bb'+4(a'b-ab')\delta+4aa'\delta^2}{4a'^2\delta^2}$$

а эти въ свою очередь могутъ быть замѣнены слѣдующими

$$\left(\frac{1}{2a'\delta}\right)^2(B-4(a'b-ab')\delta+4aa'\delta^2)$$

$$\left(\frac{1}{2a'\delta}\right)^2(B+4(a'b-ab')\delta+4aa'\delta^2).$$

Каждое изъ этихъ выраженiй обладаетъ знакомъ одинаковымъ со знакомъ B. Поэтому максимумъ равный $+\infty$ имѣетъ мѣсто при $B>0$, а минимумъ равный $-\infty$ при $B<0$. Случай $B=0$ невозможенъ, такъ какъ при $B=0$ имѣли бы тождественно

$$a\beta'^2+b\beta'+c=0.$$

Общiй выводъ.

На основанiи изложеннаго приходимъ къ слѣдующимъ заключенiямъ.

Чтобы найти максимумъ или минимумъ квадратной дроби, должно разрѣшить относительно α уравненіе

$$A\alpha^2+B\alpha+C=0.$$

Если α окажется мнимымъ или равнымъ $-\frac{B}{2A}$, то квадратная дробь не будетъ имѣть ни maximum ни minimum. Она не будетъ обладать ни однимъ изъ этихъ состояній еще въ томъ случаѣ, когда одновременно $A=0$ и $B=0$. Во всѣхъ остальныхъ случаяхъ квадратная дробь допускаетъ или maximum или minimum или даже оба эти состоянія, смотря по тому, будетъ ли имѣть мѣсто пропорція $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ или нѣтъ.

Случай 1. Пусть пропорція $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ не имѣетъ мѣста. Если A не равняется нулю, то α будетъ имѣть два значенія

$$\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A} \quad \text{и} \quad \frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}.$$

Первое изъ нихъ, для котораго $2A\alpha+B<0$, будетъ maximum, а второе, для котораго $2A\alpha+B>0$, будетъ minimum. Если же $A=0$, то α будетъ имѣть единственное значеніе $-\frac{C}{B}$. Это значеніе при $B>0$ будетъ minimum и въ то же время квадратная дробь будетъ имѣть максимумъ равный $+\infty$. Напротивъ при $B<0$ значеніе $-\frac{C}{B}$ будетъ maximum и въ то же время квадратная дробь будетъ имѣть минимумъ равный $-\infty$.

Случай 2. Пусть пропорція $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ имѣетъ мѣсто. При A не равномъ нулю одно изъ значеній α будетъ $\frac{a}{a'}$, а другое $\frac{Ca'}{Aa}$. Первое изъ этихъ значеній $\frac{a}{a'}$, не представляетъ собою ни maximum ни minimum, такъ какъ значеніе x ему соотвѣтствующее равно $\pm\infty$. Второе значеніе $\frac{Ca'}{Aa}$ будетъ maximum если $a'c-ac'>0$, или minimum если $a'c-ac'<0$. При $A=0$, α обладаетъ единственнымъ значеніемъ $\frac{a}{a'}$, которое не есть ни maximum, ни minimum. Въ этомъ случаѣ квадратная дробь допускаетъ или только максимумъ равный $+\infty$ если $a'c-ac'>0$, или только минимумъ, равный $-\infty$, если $a'c-ac'<0$.

П. С. Флоровъ (Тамбовъ).

Сжатіе при распредѣленіи круговъ различныхъ діаметровъ въ ряды.

1. Если слить вмѣстѣ 100 куб. центиметровъ чистой воды и 100 куб. центиметровъ чистаго безводнаго спирта, то въ суммѣ получается не 200 куб. центиметровъ смѣси, а меньше. А именно, по опредѣленіямъ Д. И. Менделѣева, получается всего 192 объема смѣси.

То-же самое происходитъ и для многихъ другихъ жидкостей. Въ большинствѣ случаевъ, если слить двѣ жидкости, химически не дѣйствующія одна на другую, то объемъ смѣси оказывается менѣе суммы объемовъ составныхъ частей.

Отчего это происходитъ? Потому-ли, что при смѣшеніи всякихъ жидкостей, даже такихъ, про которыхъ принято думать, что онѣ не дѣйствуютъ химически одна на другую, на самомъ дѣлѣ происходитъ нѣкоторое химическое взаимодѣйствіе, или сжатіе можетъ быть объяснено и безъ химическихъ силъ?

На самомъ дѣлѣ можно указать геометрическія причины, вслѣдствіе которыхъ смѣшеніе двухъ разнородныхъ системъ можетъ привести къ сжатію. Возьмемъ сосудъ наполненный дробью, опредѣленнаго калибра, и пусть эта дробь занимаетъ въ сосудѣ высоту, соотвѣтствующую 100 куб. центиметрамъ. Всыпемъ въ тотъ-же сосудъ такой-же объемъ дроби другого калибра, и перемѣшаемъ тщательно смѣсь. Тогда мы увидимъ, что эта смѣсь будетъ занимать не 200 куб. центиметровъ, а меньше, и притомъ тѣмъ меньше, въ извѣстныхъ предѣлахъ, чѣмъ больше отличались калибры ссыпанныхъ объемовъ дроби. Если вмѣсто дроби взять тѣла большихъ размѣровъ больше отличающіяся по величинѣ, то можно даже достичь того, что прибавленіе одного объема шариковъ малаго размѣра къ объему шаровъ большого размѣра нисколько не измѣнитъ занимаемаго ими пространства. Напр. если въ ящикъ, наполненный пушечными ядрами, всыпать дроби, то очевидно, что дробинки, помѣщаясь въ промежуткѣ между ядрами, нисколько не увеличатъ занимаемаго ими мѣста, пока количество присыпанной дроби не превзойдетъ нѣкоторой величины.

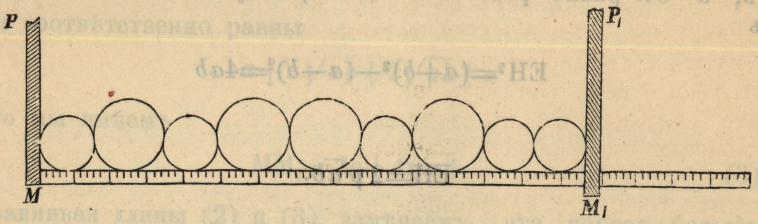
То-же можетъ происходить и въ жидкостяхъ. Если частицы двухъ различныхъ жидкостей имѣютъ различные размѣры, то при смѣшеніи этихъ жидкостей можетъ происходить нѣчто вродѣ того, что происходитъ при смѣшеніи шариковъ различныхъ діаметровъ, и такимъ образомъ сжатіе можетъ имѣть чисто геометрическое происхожденіе.

Вопросъ объ опредѣленіи пространства, занимаемаго шарами различныхъ размѣровъ при ихъ смѣшеніи, есть чисто геометрическая задача, независимая отъ приложимости ея въ теоріи растворовъ. Происходитъ ли сжатіе въ растворахъ отъ причинъ химическихъ, или механическихъ, или отъ тѣхъ и другихъ вмѣстѣ, во всякомъ случаѣ при смѣшеніи твердыхъ шариковъ должно происходить сжатіе отъ чисто геометрическихъ причинъ. Въ примѣненіи къ растворамъ вопросъ былъ поставленъ проф. Д. И. Менделѣевымъ въ лекціяхъ, читанныхъ имъ нѣсколько лѣтъ тому назадъ на Высшихъ Женскихъ Курсахъ въ С.-Петербургѣ по Теоретической Химіи, и въ извѣстномъ обширномъ трудѣ его „Изслѣдованіе водныхъ растворовъ по удѣльному вѣсу". (Спб. 1887. 8°. 520 стр.)

Задача поставлена, но никѣмъ не рѣшена. Д. И. Менделѣевъ самъ пробовалъ получить нѣкоторые результаты опытнымъ путемъ, смѣшивая зерна различныхъ діаметровъ. Теоретическое изслѣдованіе вопроса представляетъ большія трудности, и можетъ быть даже рѣшеніе задачи и невозможно въ конечномъ видѣ. Въ настоящей статьѣ я намѣренъ разсмотрѣть вопросъ, сходный съ задачей Менделѣева, хотя и гораздо менѣе сложный, рѣшеніе котораго можетъ быть дано въ простой и полной формѣ. А именно я разсмотрю не распредѣленіе шаровъ, а распредѣленіе круговъ, и притомъ не въ пространствѣ трехъ измѣреній и даже не на плоскости, а вдоль прямой линіи, и покажу, какъ можно вычислить сжатіе, происходящее при различной группировкѣ круговъ различныхъ діаметровъ

2. Для иллюстраціи задачи, которую мы намѣрены изслѣдовать, вообразимъ слѣдующій простой приборъ. PMM_1P_1 (фиг. 13) есть рамка, состоящая изъ двухъ вертикальныхъ брусьевъ PM и P_1M_1 и одного

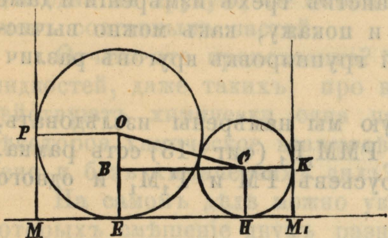
Фиг. 13.



горизонтальнаго MM_1, на которомъ нанесены дѣленія. Одинъ изъ вертикальныхъ брусьевъ PM неподвижно скрѣпленъ съ горизонтальнымъ брусомъ, другой можетъ передвигаться вдоль этого бруска. Поставивъ весь приборъ вертикально, мы имѣемъ какъ бы модель сосуда, имѣющаго два измѣренія, и въ этотъ сосудъ мы можемъ укладывать какіе нибудь круги, напр. монеты, скажемъ двугривенные и гривенники. Возьмемъ нѣсколько такихъ монетъ, напр. 4 двугривенныхъ и 5 гривенниковъ, и уложимъ ихъ въ какомъ нибудь порядкѣ въ нашъ сосудъ, начиная отъ неподвижнаго бруса PM, и когда уложимъ послѣднюю монету, придвинемъ подвижной брусъ до касанія съ послѣднею монетою, какъ показано на чертежѣ. Протяженіе, занимаемое совокупностью монетъ, будетъ тогда измѣряться шириною сосуда, вмѣщающаго ихъ т. е. разстояніемъ между брусами PM и P_1M_1, которое можно отмѣрить на дѣленіяхъ, на горизонтальномъ брускѣ MM_1. Размѣстимъ тѣ же 9 монетъ въ какомъ нибудь иномъ порядкѣ, и смѣримъ ширину сосуда, ихъ вмѣщающаго при новомъ распредѣленіи монетъ. Окажется, что она различна въ различныхъ случаяхъ. Брусъ P_1M_1 придется то удалять отъ PM, то приближать къ нему. При нѣкоторомъ распредѣленіи монетъ, ширина сосуда, ихъ вмѣщающаго, будетъ наименьшая, при нѣкоторомъ другомъ распредѣленіи — наибольшая. Посмотримъ же, какъ нужно распредѣлить наши монеты, чтобы получить наибольшее или наименьшее сжатіе и какъ велико это сжатіе.

3. Начнемъ съ простѣйшаго случая. Положимъ, что намъ дано два кружка различныхъ діаметровъ. Пусть эти кружки суть A и B а ихъ радіусы a и b. Если укладывать эти кружки въ сосудъ отдѣльно, то они занимаютъ въ немъ протяженіе, равное очевидно ихъ діаметру, т. е. кружокъ A занимаетъ протяженіе $2a$, кружокъ B протяженіе $2b$, а въ суммѣ $2a+2b$. Уложимъ теперь эти два кружка рядомъ, какъ показано на фиг. 14. Тогда вся ширина, занимаемая ими MM_1 состоитъ изъ слѣдующихъ частей. Части ME, равной радіусу большого круга OP, части HM_1, равной радіусу меньшаго круга CK и части EH, равной BC, длина которой получится изъ треугольника OBC, изъ котораго имѣемъ:

Фиг. 14.



$$BC^2=EH^2=OC^2-OB^2.$$

Но изъ чертежа явствуетъ, что OC равно суммѣ радіусовъ обоихъ заданныхъ круговъ, а OB равно разности этихъ радіаусовъ. Такимъ образомъ имѣемъ

$$EH^2=(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$$

или

$$EH=2\sqrt{ab}.$$

Такимъ образомъ окончательно протяженіе, занимаемое обоими кругами вмѣстѣ, есть

$$MM_1=a+2\sqrt{ab}+b=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=2a+2b-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2. \qquad (1)$$

Прибавимъ теперь еще одинъ кругъ радіуса a къ нашимъ двумъ кругамъ. Теперь мы можемъ расположить наши три круга нѣсколькими различными способами. Называя заданные круги буквами A_1, A_2, B, имѣемъ слѣдующія возможныя комбинаціи

$$A_1A_2B,\quad A_2A_1B,\quad A_1BA_2,\quad A_2BA_1,\quad BA_1A_2,\quad BA_2A_1.$$

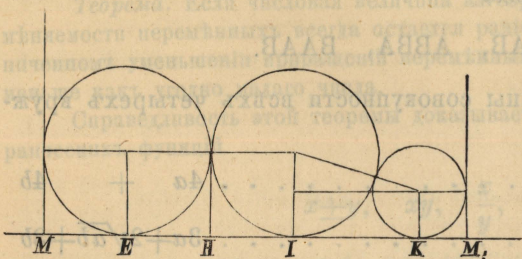
Изъ этихъ шести комбинацій существеннымъ образомъ для насъ различаются только двѣ, а именно

$$AAB,\quad ABA,$$

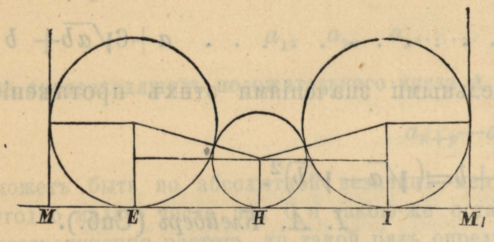
такъ какъ остальныя суть только повторенія этихъ въ иномъ порядкѣ, безъ измѣненія протяженія, занимаемаго кругами.

Обращаясь къ фиг. 15 и 16, на которыхъ представлены оба рас-

Фиг. 15.



Фиг. 16.



предѣленія круговъ, мы видимъ, что полная длина, занимаемая кругами въ комбинаціи AAB есть

$$ME+EH+HI+IK+KM;$$

эти длины равны соотвѣтственно

$$a+a+a+2\sqrt{ab}+b,$$

такъ что имѣемъ

$$MM_1=3a+2\sqrt{ab}+b \quad (2)$$

и точно также во второмъ случаѣ полная длина MM_1 составляется изъ частей

$$ME+EH+HI+IM,$$

которыя соотвѣтственно равны

$$a+2\sqrt{ab}+2\sqrt{ab}+a$$

такъ что мы имѣемъ

$$MM_1=2a+4\sqrt{ab}. \qquad (3)$$

Сравнивая длины (2) и (3), замѣчаемъ, что первая больше второй. Въ самомъ дѣлѣ разность между ними

$$[\,3a+2\sqrt{ab}+b\,]-[\,2a+4\sqrt{ab}\,]=[\,a-2\sqrt{ab}+b\,]=[\,\sqrt{a}-\sqrt{b}\,]^2$$

т. е. положительная величина. Итакъ наибольшее сжатіе достигается при комбинаціи ABA.

Прежде, чѣмъ перейти къ общему случаю, разсмотримъ еще одинъ частный примѣръ. Возьмемъ четыре кружка, изъ коихъ два большихъ A_1 и A_2 и два меньшихъ B_1 и B_2. Тогда совокупность всѣхъ комбинацій, которыя могутъ быть составлены изъ этихъ кружковъ, представляется въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{array}{llll}
A_1A_2B_1B_2, & A_1A_2B_2B_1, & A_2A_1B_1B_2, & A_2A_1B_2B_1, \\
A_1B_2A_2B_1, & A_1B_1A_2B_2, & A_2B_1A_1B_2, & A_2B_2A_1B_1, \\
A_1B_2B_1A_2, & A_1B_1B_2A_2, & A_2B_1B_2A_1, & A_2B_2B_1A_1, \\
B_1A_1B_2A_2, & B_1A_2B_2A_1, & B_2A_1B_1A_2, & B_2A_2B_1A_1, \\
B_1B_2A_1A_2, & B_1B_2A_2A_1, & B_2B_1A_1A_2, & B_2B_1A_2A_1, \\
B_1A_1A_2B_2, & B_1A_2A_1B_2, & B_2A_1A_2B_1, & B_2A_2A_1B_1.
\end{array}$$

Изъ этихъ 24 комбинацій существеннымъ образомъ для насъ различаются только слѣдующіе 4 вида

AABB, ABAB, ABBA, BAAB.

Онѣ даютъ для полной длины совокупности всѣхъ четырехъ кружковъ слѣдующія выраженія:

Въ отдѣльности. . . . . $4a + 4b$

Въ комбинаціи AABB . . . . $3a+2\sqrt{ab}+3b$

ABBA или BAAB . . . . $2a+4\sqrt{ab}+2b$

ABAB . . . . $a+6\sqrt{ab}+b$

Разности между послѣдовательными значеніями этихъ протяженій постоянны и равны

$$a-2\sqrt{ab}+b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2.$$

I. A. Клейберъ (Спб.).

(Продолженіе слѣдуетъ).

Отчеты о засѣданіяхъ ученыхъ обществъ.

Кіевское Физ.-Мат. Общество 11-ое очередное засѣданіе 11-го октября. Предсѣдательствовалъ проф. Н. Н. Шиллеръ; присутствовало 36 чл. Были сдѣланы сообщенія:

1) *А. Л. Корольковъ* показалъ рядъ опытовъ по статическому электричеству, служащихъ для выясненія понятій и для измѣренія зарядовъ и потенціаловъ. А именно были демонстрированы опыты съ сосудомъ Фарадея, калиброваніе электрометра при помощи электрофора, измѣреніе плотностей въ разныхъ точкахъ тѣла. Исходя изъ опредѣленія потенціала, какъ числа, характеризующаго способность тѣла отдавать свой зарядъ другому, соединенному съ нимъ проводникомъ, была показана зависимость потенціала отъ формы, заряда и положенія тѣла, а также отъ присутствія и заряда другихъ тѣлъ и отъ діэлектрика, окружающаго тѣла. При демонстраціи референтъ пользовался весьма практичнымъ электрометромъ Кольбе.

2) *В. В. Игнатовичъ-Завилейскій:* „По поводу новыхъ программъ физики въ реальныхъ училищахъ". Въ своей рѣчи референтъ указалъ на нѣкоторыя неудобства, связанныя съ начинаніемъ курса физики въ 4-омъ классѣ, гдѣ ученики почти вовсе еще не ознакомлены съ геометріей, и вообще пригласилъ членовъ Общества включить въ программу своей дѣятельности обстоятельную разработку вопроса о правильной постановкѣ преподаванія физики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ *).

Постановлено въ одномъ изъ слѣдующихъ собраній предложить членамъ образовать особую Коммисію для выработанія нормальнаго плана преподаванія физики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ.

---

*) Этому вопросу будетъ посвящена въ „Вѣстникѣ" особая статья.

3) *Зонненштраль.* „Теорія несоизмѣримаго числа".

Теорема. Если числовая величина алгебраической функціи въ предѣлахъ измѣняемости перемѣнныхъ всегда остается раціональной и конечной, то при неограниченномъ уменьшеніи приращеній перемѣнныхъ, приращеніе функціи можетъ быть меньше какъ угодно малаго числа.

Справедливость этой теоремы доказывается сначала для простѣйшихъ алгебраическихъ функцій

$$x \pm y, \quad xy, \quad \frac{x}{y}, \quad x^m, \quad \sqrt[m]{x},$$

а затѣмъ и для какой угодно функціи, удовлетворяющей условіямъ теоремы.

Опредѣленія. Если въ неограниченномъ рядѣ чиселъ

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \ldots\ldots \; a_n, \ldots\ldots a_{n+p},$$

не превосходящихъ положительнаго числа A, разность

$$a_{n+p} - a_n$$

можетъ быть по абсолютной величинѣ менѣе всякаго напередъ заданнаго какъ угодно малаго числа или 0 и такою-же остается при всякомъ значеніи p, если n неограниченно растетъ, то такой рядъ опредѣляетъ собою *число*

$$\lim a_n$$

называемое предѣломъ этого ряда.

Если всѣ члены ряда равны между собою, то предѣломъ ряда называется любой изъ членовъ его.

$$\lim a_n = \lim b_n,$$

если разность

$$a_n - b_n$$

съ неограниченнымъ возрастаніемъ n можетъ быть 0 или по абсолютной величинѣ менѣе какъ угодно малаго числа.

$$\lim a_n > \lim b_n,$$

если разность

$$a_n - b_n$$

съ неораниченнымъ возрастаніемъ n всегда остается больше нѣкотораго положительнаго числа.

Слѣдствіе I. Числа могутъ быть двухъ родовъ—*соизмѣримыя* и *несоизмѣримыя* съ единицей; тѣ и другія составляютъ систему дѣйствительныхъ чиселъ.

Слѣдствіе II. Можно составить такой рядъ, члены котораго будутъ точныя m-ыя степени, и предѣлъ котораго будетъ равенъ заданному числу

$$\lim a_n.$$

Опредѣленіе

$$f(\lim a_n, \; \lim b_n, \ldots\ldots) = \lim f(a_n, \; b_n, \ldots\ldots),$$

если

$$f(a_n, b_n \ldots\ldots),$$

есть величина конечная при всякомъ n. Такое опредѣленіе имѣетъ вполнѣ опредѣленный смыслъ, такъ какъ перемѣнная

$$f(a_n, b_n, \ldots\ldots)$$

на основаніи первой теоремы дѣйствительно имѣемъ нѣкоторый предѣлъ.

Теорема. Всѣ алгебраическія тождественныя преобразованія для раціональныхъ чиселъ справедливы и для дѣйствительныхъ чиселъ вообще. Дѣйствительно, обѣ части всякаго алгебраическаго тождества

$$F(a_n, b_n, \ldots\ldots) = f(a_n, b_n, \ldots\ldots).$$

при неограниченномъ возрастаніи n будутъ имѣть соотвѣтственнно равные предѣлы

$$F(\lim a_n, \lim b_n, \ldots\ldots) = f(\lim a_n, \lim b_n, \ldots\ldots).$$

Теорема. Всѣ теоремы неравенствъ въ теоріи раціональныхъ чиселъ справедливы и для дѣйствительныхъ чиселъ вообще, такъ какъ, вопервыхъ, если

$$\lim a_n > \lim b_n,$$

то

$$\lim a_n - \lim b_n$$

есть положительное число

$$\lim (a_n - b_n),$$

а вовторыхъ, всѣ алгебраическія тождественныя преобразованія для дѣйствительныхъ чиселъ тѣ-же, что и для раціональныхъ.

Наконецъ, расширивъ понятіе о предѣлѣ допущеніемъ въ опредѣляющемъ его рядѣ не только раціональныхъ чиселъ, но и несоизмѣримыхъ, лишь-бы послѣднія удовлетворяли тѣмъ-же самымъ условіямъ существованія предѣла, легко доказать, что теорема первая будетъ имѣть мѣсто и въ томъ случаѣ, когда ея перемѣнныя будутъ входить и въ качествѣ показателей. Слѣдовательно, *всѣ* тождественныя преобразованія (со включеніемъ правилъ показателей), справедливыя для раціональныхъ чиселъ, справедливы и для дѣйствительныхъ чиселъ вообще.

4) *И. И. Чирьевъ:* „Объ ирраціональныхъ числахъ" *).

Закр. балл. избранъ въ дѣйств. члены Общества Н. П. Соколовъ.

Кіевск. Физ.-Мат. Общ. 12-ое очер. засѣданіе 25-го октября. Председ. проф. Н. Н. Шиллеръ; 29 чл. Были сдѣланы сообщенія:

1) *Ю. Ѳ. Маакъ* предложилъ нѣкоторыя измѣненія и дополненія въ классномъ преподаваніи ученія о рычагѣ и наклонной плоскости.

2) *Н. А. Сорокинъ*: „О суммѣ цыфръ при различныхъ системахъ счисленія" **).

---

*) Будетъ напечатано послѣ доставленія въ редакцію реферата.
**) Будетъ напечатано.

3) *Э. К. Шпачинскій:* „Веньяминъ Франклинъ“ (ист. воспоминаніе по случаю столѣтія смерти) *).

Закр. балл. избраны въ дѣйств. члены: Б. Н. Семека, А. Н. Протопоповъ и С. А. Эрдели.

Кіевск. Физ.-Мат. Общ. 13-ое очер. засѣданіе 9-го ноября. Предсѣд. проф. Н. Н. Шиллеръ; присутств. 34 чл. Были сдѣланы сообщенія.

1) *А. Л. Корольковъ* показалъ опыты съ электрическимъ токомъ (отъ лейденской банки и гальв. батареи) для уясненія понятія объ электровозб. силѣ и силѣ тока при помощи разряднаго электрометра.

2) *Б. Я. Букрѣевъ*: „О составныхъ количествахъ по Вейерштрассу“.

Обсуждался вопросъ о программахъ физики. По предложенію г. предсѣдателя образовалась коммисія для выработки нормальнаго плана преподаванія физики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ. Изъявили желаніе войти въ составъ коммисіи: гг. Заіончевскій, Игнатовичъ-Завилейскій, Корольковъ, Мацонъ, Сусловъ, Турчаниновъ, Шиллеръ и Юскевичъ-Красковскій.

Закр. балл. избранъ въ дѣйств. чл. баронъ Р. В. Штейнгель **). *Ш.*

Письмо въ редакцію.

М. Г., г. Редакторъ.

Въ № 89 „Вѣстника“ была продложена г. Гольденбергомъ задача (№ 28): „Двѣ окружности касаются извнѣ въ точкѣ K. На ихъ общей касательной взяты, по обѣ стороны отъ K, двѣ точки A и B, изъ которыхъ проведены касательныя къ окружностямъ; двѣ изъ нихъ встрѣчаются въ точкѣ C, двѣ другія—въ точкѣ D. Показать, что точки A, B, C и D лежатъ на одной окружности и выразить радіусъ этой окружности въ зависимости отъ радіусовъ данныхъ окружностей и отъ разстояній KA и KB“.

Мнѣ кажется, что нельзя доказать этой теоремы, потому что она справедлива *только* въ частномъ случаѣ когда $KA=KB$.

Помѣщенное въ № 97 „Вѣстника“ выраженіе для π проф. Ромера не ново; оно встрѣчается, напримѣръ, въ геометріи Невенгловскаго въ задачѣ подъ № 620.

Пріимите и пр. *А. Бобятинскій* (Барнаулъ).

ЗАДАЧИ.

№ 111. Въ Руководствѣ Космографіи А. Малинина и К. Буренина, въ главѣ „Измѣреніе времени“ и въ § „Календарь“ находимъ слѣдующее:

„Если отбросить доли сутокъ и считать годъ ровно въ 365 сутокъ, то каждый годъ будетъ короче истиннаго почти на $^1/_4$ сутокъ, такъ что будетъ считаться начало новаго года, хотя еще осталось почти 6 часовъ стараго; въ 100 лѣтъ эта ошибка возрастетъ до 25 дней, и весеннее

*) Было помѣщено въ № 101 „Вѣстника“.

**) Всѣхъ членовъ въ Кіевскомъ Физ.-Мат. Обществѣ состоитъ 101.

равноденствіе, которое бываетъ въ мартѣ, черезъ 100 лѣтъ придется уже въ февралѣ; черезъ 500 лѣтъ оно пришлось бы въ октябрѣ".

Указать, объяснить и исправить ошибку, заключающуюся въ этихъ словахъ. *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ).

№ 112. Внутри угла α° взята точка М въ разстояніяхъ m и n отъ сторонъ угла. Черезъ эту точку проведена окружность касательная къ сторонамъ угла. Найти радіусъ этой окружности.

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 113. Въ кругѣ радіуса R вписанъ четыреугольникъ, діагонали котораго взаимно перпендикулярны, и точка ихъ пересѣченія находится въ разстояніи a отъ центра. Показать, что середины сторонъ такого четыреугольника лежатъ на окружности опредѣленнаго центра и радіуса.

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 114. Рѣшить безъ помощи тригонометріи слѣдующую задачу (предл. въ Харьк. Учебн. Округѣ въ 1878 г. на испыт. зрѣлости):

„Видны двѣ равновысокія заводскія трубы. Наблюдатель, стоящій между ними на прямой, соединяющей ихъ основанія, видитъ высоту ближайшей къ нему трубы подъ угломъ въ 60°; отойдя на 80 фут. по направленію перпендикулярному къ прямой, соединяющей основанія, онъ видитъ высоту одной изъ нихъ подъ угломъ въ 45°, а другой—подъ угломъ въ 30°. Опредѣлить высоту и разстояніе трубъ".

Н. Карповъ (Златополь).

№ 115. Рѣшить уравненія:

$$x^6 = mx + ny$$

$$y^6 = my + nx.$$

И. Ивановъ (Спб.).

№ 116. Передъ вращающимся круглымъ цилиндромъ, на которомъ натянута бумага, помѣщена вертикальная трубка не круглаго сѣченія. Изъ нея безъ шатаній поднимается и опускается прямой стержень. Къ его концу надо прикрѣпить вставку съ обыкновеннымъ перомъ, которое бы писало въ слѣдующихъ условіяхъ, возможно близкихъ къ нормальнымъ. Уголъ направленія пера, какъ съ горизонтомъ, такъ и съ поверхностью бумаги, долженъ равняться 41°48′40″. Опредѣлить положеніе пера. Кн. *А. Гагаринъ* (Спб.)

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 516. По данной площади k^2 построить треугольникъ, коего стороны относятся какъ $m:n:p$.

Строимъ какой нибудь треугольникъ $A'B'C'$, въ которомъ

$$B'C' : A'C' : A'B' = m:n:p.$$

Очевидно, что $\triangle$-къ $A'B'C'$ подобенъ искомому. Затѣмъ находимъ, по извѣстному способу, квадратъ, равномѣрный треугольнику $A'B'C'$. Если высота, соотвѣтствующая $B'C'$ есть $A'D'$, то сторона квадрата есть средняя пропорціональная между $B'C'$ и $\frac{A'D'}{2}$. Пусть сторона этого квадрата $=q$. Площади подобныхъ $\triangle$-ковъ относятся какъ квадраты сходственныхъ сторонъ, слѣд.

$$a^2:B'C'^2=b^2:A'C'^2=c^2:A'B'^2=k^2:q^2,$$

отсюда

$$a=B'C'\frac{k}{q},\quad b=A'C'\frac{k}{q},\quad c=A'B'\frac{k}{q},$$

т. е. стороны найдутся какъ четвертыя пропорціональныя k и q и сходственныхъ сторонъ построеннаго $\triangle$-ка.

С. Кричевскій (Ромны), *А. Тульженко* (Кіевъ). Ученики: Мог.-Под. г. (6) *С. И.*, Пинск. р. уч. (6) *С. Т.*, Курск. г. (6) *Л. Л.* и (7) *В. Х.*

№ 518. Доказать, что при цѣлыхъ и положительныхъ значеніяхъ a и b сумма всѣхъ дробей вида

$$\frac{1}{(a+1)^{b+1}}$$

имѣетъ предѣломъ 1. (Теорема Гольдбаха).

Будемъ давать b разныя значенія, начиная съ единицы. Тогда искомая сумма представится въ видѣ

$$\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(a+1)^3}+\frac{1}{(a+1)^4}+\ldots\ldots\ldots$$

Давая a всѣ возможныя значенія, начиная съ единицы, мы представимъ эту сумму въ такомъ видѣ:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\ldots+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots\ldots+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots\ldots\ldots$$

Такимъ образомъ весь рядъ состоитъ изъ безчисленнаго множества безконечно убывающихъ геометрическихъ прогрессій; сумма членовъ первой прогрессіи равна $\frac{1}{1.2}$, второй—равна $\frac{1}{2.3}$ и т. д. Слѣдовательно весь рядъ будетъ такой:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots\ldots$$

А сумма членовъ этого ряда выражается такъ (см. рѣшеніе задачи № 458 въ № 102 „Вѣстника" на стр. 120).

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots\ldots\ldots=1-\frac{1}{n+1},$$

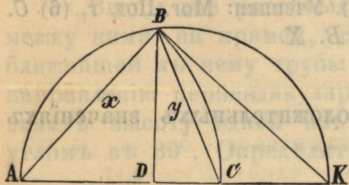
откуда видимъ, что весь рядъ, при $n=\infty$, стремится къ единицѣ.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ). Ученики: Пинск. р. уч. (6) *С. Т.*, Курск. г. (7) *В. Х.* и Могил. г. (8) *Я. Э.*

№ 552. Какой изъ всѣхъ равнобедренныхъ треугольниковъ, вписанныхъ въ данный полукругъ такъ, чтобы одна изъ равныхъ сторонъ лежала на діаметрѣ, имѣетъ наибольшее основаніе?

Пусть искомый $\triangle$-къ будетъ ABC (фиг. 17). Тогда, проведя $BD \perp AC$, найдемъ что

Фиг. 17.



$$y^2=2x^2-2x.AD.$$

Но

$$AD=\frac{x^2}{2R},$$

гдѣ R есть радіусъ даннаго полукруга, слѣдовательно

$$y^2=\frac{x^2(2R-x)}{R}.$$

Здѣсь мы имѣемъ произведеніе цѣлыхъ, положительныхъ степеней двухъ количествъ x и $2R-x$, сумма которыхъ постоянна и равна $2R$. Maximum такого произведенія будетъ въ томъ случаѣ, когда эти количества относятся между собою какъ ихъ степени, т. е. если

$$\frac{x}{2R-x}=2.$$

Значитъ наибольшее основаніе будетъ у того равнобедреннаго $\triangle$-ка, сторона котораго$={}^4/_3R$.

С. Ржаницынъ (Троицкъ). Ученики: Тверск. р. уч. (7) *М. Н.*, Курск. г. (7) *К. П.*, Спб. Ек. ц. уч. (7) *В. М.* и Урюп. р. уч. (7) *П. У—ъ.*

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Кіевъ, 7 Декабря 1890 г.
Типо-литографія Высочайше утвержд. Товарищества И. Н. Кушнеревъ и К°.

Обложка
ищется

Обложка
пщется