Обложка
ищется

Обложка
пщется

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ и ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

XIII Сем. № 154. № 10.

Содержаніе: Галилео Галилей, его жизнь и научная дѣятельность. Критико-біографическій очеркъ (Продолженіе), *О. Пергамента*.—Разысканіе условій равенства и подобія съ помощью геометрическихъ задачъ на построеніе, *И. Александрова*.—Рецензія, *В. Г*.—Научная хроника, *Бхм*.—Разныя извѣстія.—Задачи №№ 417 — 422. — Рѣшенія задачъ (2 сер.) №№ 26, 37, 77, 149, 283, 259, 292 и (1 сер.) 468.—Списокъ нерѣшенныхъ задачъ 1-ой серіи.

ГАЛИЛЕО ГАЛИЛЕЙ,

ЕГО ЖИЗНЬ и НАУЧНАЯ ДѢЯТЕЛЬНОСТЬ.

Критико-біографическій очеркъ

О. Пергамента.

(Продолженіе) *).

Побѣжденные на научной почвѣ, враги Галилея, боясь окончательнаго крушенія авторитета ихъ кумира-Аристотеля и связаннаго съ этимъ и собственнаго значенія, пріискивали всевозможные способы, чтобы удалить безпокойнаго коллегу. Судьба пришла имъ вскорѣ на помощь. Джіованни Медичи, родственникъ царствовавшаго герцога Тосканскаго, нашелъ себѣ невинное занятіе въ построеніи машинъ, считая себя искуснымъ механикомъ. Этотъ полупринцъ-полумеханикъ изобрѣлъ машину для очистки Ливорнской гавани и представилъ герцогу Фердинанду модель ея, прося дать ему возможность построить ее въ большихъ размѣрахъ для примѣненія на дѣлѣ. Галилей, къ которому герцогъ обратился съ просьбой дать отзывъ о машинѣ, былъ настолько смѣлъ, что высказалъ откровенно свое мнѣніе о полной непригодности прибора. Несмотря на это, машина все же была построена, но опытъ блестящимъ образомъ подтвердилъ справедливость высказаннаго Галилеемъ мнѣнія. Гнѣвомъ оскорбленнаго въ своемъ самолюбіи изобрѣтателя и происками преданной ему партіи придворныхъ не замедлили воспользоваться враги Галилея. Усилія ихъ на этотъ разъ увѣнчались успѣхомъ, и Галилею пришлось оставить каѳедру въ Пизѣ,

*) См. «Вѣстникъ Оп. Физики» № 153, стр. 177.

дававшую, хотя и жалкій, но все же опредѣленный доходъ. Экономическое положеніе Галилея и семьи его въ эту пору его жизни было къ тому же потрясено смертью его отца, послѣдовавшею 2-го іюля 1591 г. Такимъ образомъ, Галилею пришлось принять на себя обязательство заботиться о судьбѣ матери, сестеръ и брата, не имѣя притомъ возможности пріискать себѣ подходящія занятія въ герцогствѣ Тосканскомъ.

Въ эту критическую пору своей жизни Галилей нашелъ значительную поддержку въ преданномъ ему, благородномъ Гвидобальдо дэль-Монтэ, который какъ въ силу установившейся за нимъ славы хорошаго ученаго, такъ и благодаря своему общественному положенію, пользовался значительнымъ вліяніемъ въ ученомъ мірѣ. Самъ онъ былъ воспитанникомъ Падуанскаго университета и успѣлъ во времена студенчества своего завязать знакомство со многими лицами, въ то время достигшими высокаго служебнаго положенія въ Венеціанской республикѣ. Такъ какъ каѳедра математики въ Падуанскомъ университетѣ, освободившаяся послѣ смерти Молети, продолжала оставаться вакантной, то дэль-Монтэ не замедлилъ воспользоваться своими связями для доставленія Галилею положенія, соотвѣтствующаго его достоинствамъ и научнымъ заслугамъ *). Благодаря его дѣятельному заступничеству, Галилей былъ избранъ профессоромъ 26-го сентября 1592 года срокомъ на 6 лѣтъ съ содержаніемъ на первыхъ порахъ въ 900 венеціанскихъ лиръ, что составляло лишь немного больше того, что онъ получалъ въ Пизѣ. **) Галилей, находившійся въ это время въ Падуѣ, долженъ былъ вернуться на непродолжительный срокъ въ отечество, чтобы испросить у герцога Тосканскаго разрѣшеніе на занятіе новопредложенной каѳедры.

Желая оправдать восторженныя похвалы своихъ покровителей и надежды, возлагавшіяся на него со стороны венеціанскаго правительства, которое назначило его преемникомъ популярнаго Молети, Галилей ревностно принялся за приготовленіе вступительной лекціи. Съ этой цѣлью онъ отсрочилъ начало своего преподаванія и поспѣшилъ воспользоваться любезнымъ приглашеніемъ тосканскаго резидента въ Падуѣ, — Пинэлли, предложившаго ему свою квартиру и пользованіе своей обширной библіотекой.

7-го декабря 1592 года Галилей взошелъ впервые на ту каѳедру, которую ему суждено было прославить на вѣчныя времена. Лекція эта, по свидѣтельству Гассэнди, прочитанная предъ многочисленной аудиторіей, произвела такую сенсацію, что вѣсть о новомъ профессорѣ быстро облетѣла весь городъ. Вскорѣ Галилей получилъ изъ Венеціи цѣлый рядъ поздравленій по поводу блестящаго начала преподавательской дѣятельности своей. Всѣ писатели единогласно утверждаютъ, что стеченіе слушателей на лекціи Галилея было огромное; число ихъ доходило до 2000, и приходилось

*) Относительно участія Сальвіати въ дѣлѣ избранія Галилея ср. Favaro op. cit. vol. I, p. 54.

**) Ср. Favaro, op. cit. vol. I, p. 62.

нѣсколько разъ мѣнять аудиторію, чтобы вмѣстить всѣхъ слушателей, стекавшихся со всѣхъ концовъ Европы поучиться у знаменитаго профессора.

Не безъинтересно дать перечень курсовъ, объявленныхъ Галилеемъ въ теченіе своего знаменитаго пребыванія въ Падуѣ. Въ немногихъ сохранившихся экземплярахъ обозрѣнія преподаванія Падуанскаго университета нѣтъ указаній на то, что именно читалъ Галилей въ первый годъ своего назначенія. Тамъ говорится, что онъ сохранилъ за собой право читать *ad libitum*. Что же касается слѣдующихъ годовъ, то объявленные курсы распредѣлялись въ слѣдующемъ порядкѣ:

1593—94	ак. годъ.		Сфера и Эвклидъ *).
1594—95	»	»	Альмагестъ **) Птоломея.
1597—98	»	»	Элементы Эвклида и вопросы Архимедовой механики.
1599—1600	»	»	Сфера и Эвклидъ.
1603—04	»	»	Сфера и Эвклидъ.
1604—05	»	»	Теорія планетъ.

Къ преподаванію геометріи Галилей относился чрезвычайно серьезно. Онъ часто высказывалъ мнѣніе, что безъ знанія геометріи нельзя приступить къ рѣшенію ни одного изъ вопросовъ архитектуры, прикладной механики, движенія и астрономіи. Знаніе геометріи, говоритъ онъ въ другомъ мѣстѣ, служитъ къ украшенію души и обогащенію ума. Что касается курса его объ Альмагестѣ Птоломея, то тутъ невольно рождается вопросъ: проповѣдывалъ-ли Галилей на самомъ дѣлѣ воззрѣнія греческаго астронома,—вопросъ, уже затронутый нами выше и находящійся въ связи съ вопросомъ о времени обращенія Галилея къ Коперниковой системѣ міозданья. Герардъ Фоссъ приписываетъ обращеніе Галилея одной публичной лекціи Мэстлина, учителя Кэплера; Лапласъ и др. повторяютъ, это, совершенно бездоказательно приведенное, мнѣніе. Самъ Галилей влагаетъ въ уста Сагрэдо, одного изъ трехъ бесѣдующихъ лицъ въ „Dialogo sopra idue massimi sistemi" ***) разсказъ, который внѣ всякаго сомнѣнія долженъ быть отнесенъ къ нему самому, и изъ котораго можно заключить, что Галилей въ ранней юности еще пришелъ къ убѣжденію въ справедливости Коперниковой системы.

Кромѣ того мы имѣемъ два письма Галилея, одно къ Якову Маццони отъ 30-го мая 1597 года, написанное по поводу сочиненія этого послѣдняго „De comparatione Platonis et Aristotelis", а другое къ Кеплеру отъ 4-го августа того же года по поводу извѣстнаго сочиненія нѣмецкаго астронома „Prodromus dissertationum cosmographicarum", изъ которыхъ явствуетъ, что Галилей уже давно пришелъ къ убѣжденію въ ложности Птоломеевой системы.

---

*) Курсъ состоялъ въ чтеніи и комментированіи извѣстнаго сочиненія *Sacrobosco* († 1256): de sphera mundi и Началъ Эвклида.

**) Альмагестъ (Magna Constructio или Μεγάλη Σύνταξις) — извѣстное сочиненіе по астрономіи, написанное Птоломеемъ.

***) Le Opere di Galileo Galilei ecc., tomo I. Firenze, 1842, pag. 143.

Но система Коперника во время преподавательской дѣятельности Галилея въ Падуѣ нуждалась еще во многихъ доказательствахъ, чтобы сдѣлаться твердо обоснованной научной теоріей; далѣе Галилей, испытавъ уже на опытѣ къ какимъ непріятнымъ послѣдствіямъ повело оспариваніе мнѣнія Аристотеля въ вопросѣ о паденіи тѣлъ, не имѣвшемъ никакого отношенія къ религіи, легко могъ предусмотрѣть къ какимъ гибельнымъ результатамъ поведетъ открытое преподаваніе системы Торнскаго отшельника, считавшейся прямо противной духу священнаго писанія. Поэтому, Галилей и прикрылъ преподаваніе астрономіи благонамѣреннымъ именемъ Птоломея. На самомъ-же дѣлѣ курсъ состоялъ, по всей вѣроятности, изъ безпощаднаго и ѣдкаго уличенія греческаго астронома въ ошибочности его научныхъ воззрѣній.

Что касается преподаванія Архимедовой механики, то оно отличалось чрезвычайной полнотой. Теоретическій курсъ Галилей сопровождалъ демонстраціями рычаговъ, наклонной плоскости и различныхъ моделей, служившихъ для выясненія излагаемыхъ имъ законовъ паденія *). Въ дополненіе къ читаемому курсу и для облегченія своимъ слушателямъ, Галилей написалъ нѣсколько трактатовъ, распространявшихся между учениками его въ рукописяхъ. Сюда относятся курсы гномоники, механики, руководство къ познанію сферы и сочиненія по фортификаціи — объ укрѣпленіяхъ и о военной архитектурѣ. Чтобы закончить картину преподавательской дѣятельности Галилея въ Падуанскомъ университетѣ необходимо сказать еще нѣсколько словъ объ одномъ спорномъ вопросѣ: на какомъ языкѣ читались лекціи Галилеемъ. Вивіани, а съ нимъ и Фаваро, думаетъ, что чтенія происходили на латинскомъ языкѣ, которымъ Галилей владѣлъ въ совершенствѣ и который былъ понятенъ также и слушателямъ его. Что касается частнаго преподаванія Галилея въ Падуѣ, которымъ онъ занимался, подобно многимъ изъ своихъ товарищей, то оно, помимо чисто матеріальной выгоды, служило къ большему общенію его какъ съ учениками, такъ и съ частными лицами. Предметы преподаванія были еще разнообразнѣе, нежели университетскіе курсы. Изъ числа учениковъ его интересно отмѣтить Джіованфранческо Сагрэдо и Филиппо Сальвіати, выведенныхъ имъ въ послѣдствіе въ качествѣ дѣйствующихъ лицъ въ его Діалогахъ.

Относительно дидактической стороны преподаванія Галилея всѣ современники свидѣтельствуютъ, что онъ обладалъ не только замѣчательной красотой и изяществомъ рѣчи, но еще и поразительной способностью уяснять самое трудное и недоступное для пониманія. Не было случая, чтобы лекція Галилея не была понята слушателями, которые широкой рѣкой и стекались къ своему Maestro.

Мы переходимъ къ оцѣнкѣ тѣхъ открытій, которыя связаны съ пребываніемъ Галилея въ Падуѣ.

Галилею совершенно неправильно многіе приписали честь изобрѣтенія пропорціональнаго циркуля. Еще раньше, нежели

*) Ср. Favaro, op. cit. Vol. I, p. 172, 173.

возгорѣлся знаменитый споръ о первенствѣ въ дѣлѣ его изобрѣтенія, самъ Галилей откровенно признавался *), что построеніе прибора есть дѣло рукъ его учениковъ, хотя и оставлялъ за собой честь примѣненія его къ военной практикѣ и измѣренію вообще. Извѣстный архитекторъ Муціо Одди разсказываетъ въ своемъ сочиненіи „Della fabbrica e dell'uso del compasso polimetro“ **), что Коммандино ***) заказалъ у Симона Бароччіо приборъ, состоявшій изъ двухъ линеекъ съ подвижнымъ центромъ и цыфрами, служившими для указанія того, гдѣ слѣдовало закрѣпить центръ, чтобы раздѣлить прямую линію на соотвѣтствующее число частей. Маркизъ Гвидобальдо дэль Монтэ, продолжаетъ Одди, бывшій въ то время въ Урбинѣ у Коммандино и оцѣнившій сразу все значеніе этого прибора, заказалъ у Бароччіо такой-же и для себя, сдѣлавъ въ немъ лишь нѣсколько несущественныхъ измѣненій. Хотя Одди и не указываетъ въ своемъ разсказѣ времени пребыванія дэль Монтэ въ Урбинѣ, тѣмъ не менѣе изъ біографіи маркиза Гвидобальдо нетрудно убѣдиться, что изложенное событіе должно относиться къ юношескимъ годамъ его. Такимъ образомъ циркуль дэль Монтэ несомнѣнно старѣе циркуля Галилея. Въ 1606 году этотъ послѣдній напечаталъ отдѣльную брошюру подъ заглавіемъ „Operazioni del compasso geometrico u militare“, въ которой описалъ теорію устройства и употребленіе этого прибора ****), причемъ, вопреки вѣрности историческихъ фактовъ и своимъ собственнымъ словамъ, которыя мы приводили выше, приписывалъ себѣ честь перваго изобрѣтенія пропорціональнаго циркуля *****).

Въ слѣдующемъ (1607) году нѣкто Вальтасаръ Капра изъ Милана, бывшій нѣкоторое время тому назадъ въ Падуѣ, издалъ брошюру подъ заглавіемъ: „Usus et fabrica circini cujusdam proportionis“, которая представляла собой переводъ Галилеевой книжки на латинскій языкъ. Въ своемъ произведеніи Капра не только приписывалъ себѣ честь изобрѣтенія пропорціональнаго циркуля, но и обвинялъ къ тому-же Галилея въ томъ, что онъ воспользовался его изобрѣтеніемъ. Между обѣими сторонами возгорѣлась жаркая полемика. Галилей написалъ свое замѣчательное по силѣ діалектики и изяществу слога „Difesa contro alle calunnie et imposture di Baldassar Capra“ и добился уличенія Капры въ литературномъ воровствѣ.

---

*) Le Opere di Galileo Galilei ecc., tomo XI, Firenze, 1854, p. 221.

**) Milano, MDCXXXIII, p. 3—4.

***) Фредерико Коммандино — извѣстный переводчикъ Архимеда, Аполлонія, Эвклида и выдающійся математикъ своего времени (1509—1575).

****) Циркуль этотъ, иначе называемый секторомъ, состоялъ изъ двухъ равныхъ мѣдныхъ линеекъ, соединенныхъ помощью шарнира. На линейкахъ были начерчены различные масштабы, служившіе для опредѣленія линій, угловъ, частей пропорціональныхъ даннымъ линіямъ, тригонометрическихъ линій по даннымъ угловымъ градусамъ и пр. Приборъ этотъ до сихъ поръ употребляется при преподаваніи геометрическаго черченія.

*****) Фаваро допускаетъ возможность, что Галилей имѣлъ случай видѣть у дэль Монтэ раньше этотъ циркуль. Ср. Favaro, op. cit, vol. I. Cap. VII.

Многіе писатели, между прочимъ Монтюкла *), удивляются той энергіи, съ которой Галилей взялся за это сравнительно пустое дѣло. Для объясненія такого способа дѣйствія нужно съ одной стороны помнить, что изобрѣтеніе пропорціональнаго циркуля въ то время не казалось столь мелкимъ событіемъ, а съ другой, что затѣянный Галилеемъ споръ имѣлъ для него помимо принципіальнаго еще и чисто практическое, весьма существенное значеніе. Всѣ произведенія Галилея были распространены въ рукописяхъ и могли сдѣлаться достояніемъ каждаго. Важно было поэтому разъ навсегда выступить энергично и проявить настойчивость въ защитѣ своихъ правъ.

Что касается изобрѣтенія термометра, то пальма первенства принадлежитъ въ этомъ отношеніи безспорно Галилею. Ни одинъ изъ оспаривающихъ эту честь у Галилея, — Паоло Сарпи, Джіамбатиста Порта, Санторо Санторіо, Корнеліо Дрэббель, Роберто Флуддъ, Францискъ Баконъ,—не могутъ привести въ доказательство справедливости своихъ притязаній ни одного вѣскаго довода **). Термометръ Галилея состоялъ изъ трубки, оканчивающейся шарикомъ величиною въ куриное яйцо. Наливъ въ него воды, онъ переворачивалъ приборъ трубкою внизъ, погрузивъ ее въ сосудъ съ водою; воздухъ, оставшійся въ приборѣ, не давалъ водѣ подниматься высоко, такъ что только часть трубы наполнялась водою, остальная-же часть и шарикъ—воздухомъ. Послѣдній, нагрѣваясь, расширялся и понижалъ воду въ трубкѣ; охлаждаясь и сжимаясь, давалъ ей возможность подниматься. Недостатокъ этого прибора,—помимо неудобства его употребленія,—заключался главнымъ образомъ въ томъ, что поднятіе и опусканіе жидкости могло происходить не только вслѣдствіе охлажденія и нагрѣванія воздуха, находившагося въ верхней части прибора, но и вслѣдствіе увеличенія и уменьшенія давленія на поверхность жидкости, такъ что приборъ этотъ справедливѣе-бы назвать термобароскопомъ. Несмотря на всѣ свои неудобства, приборъ этотъ пользовался однако широкимъ распространеніемъ; Галилеева-же заслуга заключалась въ томъ, что онъ далъ первое воплощеніе принципа; оставалось только технически усовершенствовать приборъ; основаніе-же для изслѣдованія явленій тепла было уже положено.

Когда въ 1599 году минулъ шестилѣтній срокъ его профессорской дѣятельности, венеціанскій сенатъ поспѣшилъ возобновить его еще на 6 лѣтъ, увеличивъ содержаніе почти вдвое, желая удержать столь выдающуюся научную силу.

Вскорѣ Галилею представился случай стать по отношенію къ лагерю перипатетиковъ въ окончательно враждебныя отношенія. 10-го октября 1604 года въ созвѣздіи Офіуха или Змѣеносца неожиданно появилась новая звѣзда съ необыкновеннымъ блескомъ, превосходившимъ блескъ Марса, Юпитера и Сатурна. Ее видѣлъ

*) Montucla. Histoire des mathématiques. Paris, an VII. Tome II, p. 13.

**) Cp. *Renou.* Histoire du thermométre, Paris 1876; *Burckhardt.* Die Erfindung des Thermometers & seine Gestaltung im XVII Jahrhundert, Basel 1867. *Favaro*, op. cit. Vol. 1. Capitolo Ottavo, p. 265 — 273.

Кеплеръ 16-го ноября, когда свѣтъ ея уже ослабѣвалъ, и между октябремъ 1605 года и половиною марта 1606 года новая звѣзда совершенно исчезла изъ глазъ наблюдателей, проблиставъ на небѣ около пятнадцати мѣсяцевъ. Извѣстіе объ этомъ астрономическомъ событіи распрсстранило тревогу въ лагерѣ перипатетиковъ, придерживавшихся мнѣнія Пурбаха *) о кристальныхъ сферахъ и вѣрившихъ въ простоту, совершенство, неизмѣнность и нетлѣнность сферы небесной. Для примиренія этого явленія съ своими воззрѣніями, они предположили, что звѣзда эта — земнаго происхожденія и явилась въ предѣлахъ земной атмосферы. Посвятивъ этому явленію свое вниманіе, Галилей не замедлилъ убѣдиться, что это дѣйствительно новая звѣзда; изложенію своихъ взглядовъ на этотъ предметъ онъ посвятилъ три лекціи (читанныхъ въ декабрѣ 1604 г.), привлекшихъ значительное количество слушателей, и указывалъ на то, что мгновенно явившаяся звѣзда находится гораздо далѣе того мѣста, которое послѣдователи Аристотеля называли царствомъ стихій, и что слѣдовательно она находится не по близости нашей планеты, а на неизмѣримомъ отъ насъ разстояніи, въ міровомъ пространствѣ; что она есть такая-же звѣзда, какъ и всѣ другія, образовавшаяся, по его мнѣнію, отъ встрѣчи Марса съ Юпитеромъ, находящихся въ соединеніи недалеко отъ мѣста появленія этой звѣзды. Это неправильное объясненіе тѣмъ болѣе извинительно, что знаменитый Лапласъ, при болѣе удовлетворительномъ состояніи звѣздной астрономіи, полагалъ, что внезапное появленіе звѣздъ происходитъ „отъ великихъ пожаровъ, произведенныхъ чрезвычайными причинами на ихъ поверхности". Значеніе лекцій Галилея для его современниковъ заключалось въ томъ, что онъ ими сильно поколебалъ въ самыхъ основахъ вѣру въ неизмѣняемость небесной сферы и тѣмъ подготовилъ почву для насажденія системы Коперника **).

Между тѣмъ окончилось второе шестилѣтіе профессорской дѣятельности Галилея въ Падуанскомъ университетѣ, и венеціанскій сенатъ вновь пригласилъ его на слѣдующее шестилѣтіе, увеличивъ его содержаніе снова вдвое противъ прежняго.

Къ этому времени дѣятельности Галилея относится изученіе имъ дѣйствія магнитовъ. Чтеніе сочиненія Джильберта о магнитѣ и магнитныхъ свойствахъ ***) крайне заинтересовало Галилея какъ по новизнѣ предмета, такъ и опытному пріему изслѣдованія, въ которомъ опровергался цѣлый рядъ ложныхъ положеній Аристотеля. Тотчасъ-же онъ обратилъ свое вниманіе на вопросъ о магнит-

---

*) Георгъ Пурбахъ (1423 — 1461), нѣмецкій математикъ, занимавшійся объясненіемъ твореній греческихъ астрономовъ.

**) Размѣры настоящаго очерка не позволяютъ намъ вдаваться въ разборъ интереснаго вопроса объ участіи Галилея въ сочиненіи *Ronchitti de Bruzene*, Dialogo in perpuosito della nuova stella. (1605?), которое приписывается перу Галилея. Ср. *Favaro*, op. cit. Vol. I, Cap. nono, p. 286 ecc.

***) Вотъ полное заглавіе этого интереснаго сочиненія: *Guilielmi Gilberti Colcestrensis Medici Londinensis*, De Magnete, Magneticisque corporibus, et de Magno Magnete tellure Physiologia nova, plurimis argumentis, et experimentis, demonstrata. Londini, excudebat Petrus Short, anno 1600.

ныхъ свойствахъ и, хотя постороннія занятія сильно отвлекали его, тѣмъ не менѣе успѣлъ сдѣлать кое-что и въ этой области. Онъ придумалъ новый способъ оправы, дававшій возможность значительно увеличить силу магнита. Магнитъ, бывшій у него въ распоряженіи, обладалъ оригинальнымъ свойствомъ: притяженіе. обнаруживаемое имъ на нѣкоторый предметъ, находившійся на разстояніи 4 — 5 футовъ, переходило въ отталкиваніе при уменьшеніи разстоянія до 1-го фута. Побуждаемые имъ, ученики его Сагрэдо и Кастелли стали заниматься изслѣдованіемъ измѣненій склоненія магнитной стрѣлки.

Одновременно съ этими изслѣдованіями Галилей продолжалъ заниматься вопросами динамики, окончательное развитіе положеній которой относится именно къ этому времени. Въ письмѣ своемъ къ Велисарію Винта отъ 7-го мая 1610 года *), Галилей, по привычкѣ своей оповѣщать даже впередъ о трудахъ своихъ, перечисляетъ рядъ задуманныхъ работъ, публикованіемъ которыхъ онъ намѣренъ заняться: „двѣ книги *de systemate seu constitutione universi*,— обширная работа, полная философіи, астрономіи и геометріи; три книги *de motu locali*, — сочиненіе, въ которомъ я устанавливаю начальныя положенія совершенно новой науки... Кромѣ того, я имѣю въ виду еще цѣлый рядъ маленькихъ работъ по естественнымъ вопросамъ, какъ то *de sono et voce*, *de visu et coloribus*, *de maris aestu*, *de compositione continui* **), *de animalium motibus* и многимъ другимъ. Я имѣю намѣреніе, продолжаетъ онъ, написать еще нѣсколько трактатовъ для военнаго сословія, въ которыхъ заключалось-бы все то, что необходимо знать и что основано на математикѣ: напримѣръ, свѣдѣнія о способахъ укрѣпленія лагеря, защиты и осады крѣпостей, съемки плановъ, артиллеріи, употребленія различныхъ приборовъ и т. д.“. Благодаря однако печально сложившимся обстоятельствамъ жизни, отъ этихъ и другихъ задуманныхъ работъ дошли до насъ одни только заглавія!

(Продолженіе слѣдуетъ).

РАЗЫСКАНІЕ УСЛОВІЙ РАВЕНСТВА И ПОДОБІЯ

СЪ ПОМОЩЬЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ ЗАДАЧЪ НА ПОСТРОЕНІЕ.

И. И. Александрова.

Если построеніе фигуры по какимъ нибудь даннымъ частямъ даетъ одно или нѣсколько совпадающихъ рѣшеній, то эти данныя опредѣляютъ фигуру вполнѣ; слѣд. равенство тѣхъ же частей въ

*) Le Opere di Galileo Galilei ecc, tomo VI. Firenze, 1847, pag. 97—98.

**) Либри полагаетъ (Journal des Savants, 1840, p. 598, note 5), что это сочиненіе представляло опытъ изложенія теоріи недѣлимыхъ, которой Галилей много занимался, не рѣшившись ни разу опубликовать результатовъ своихъ изслѣдованій.

нѣсколькихъ фигурахъ влечетъ за собой равенство этихъ фигуръ. Изъ всякаго условія равенства фигуръ можно затѣмъ извлечь условія подобія фигуръ; для этого надо сдѣлать отношеніе подобія произвольнымъ (вмѣсто единицы), т. е. сохранить равенство соотвѣтственныхъ угловъ, если это равенство входитъ въ условіе, и замѣнить затѣмъ равенство соотвѣтственныхъ линейныхъ частей ихъ пропорціональностью.

Такъ, напримѣръ, построеніе треугольника по даннымъ a, b и A—B, даетъ два совпадающихъ рѣшенія *); изъ этого выводимъ:

1. Если двѣ стороны и разность противолежащихъ этимъ сторонамъ угловъ одного треугольника равны соотвѣтственно такимъ же частямъ другого треугольника, то эти треугольники равны.

2. Если разность двухъ угловъ одного треугольника равна разности двухъ угловъ другого треугольника и противолежащія этимъ угламъ стороны пропорціональны, то треугольники подобны.

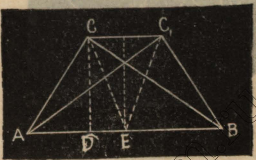
Подобнымъ образомъ построеніе треугольника по даннымъ A—B, h_c и m_c (см. примѣч. 1) даетъ 4 совпадающихъ рѣшенія. Изъ этого выводимъ, что треугольники, у которыхъ разность двухъ угловъ одинаковая, а высоты и медіаны изъ третьяго угла равны (или пропорціональны), будутъ равны (или подобны).

Такимъ образомъ всякая задача на построеніе фигуры даетъ не только указаніе на условія равенства и подобія фигуръ, но вмѣстѣ съ тѣмъ и доказательство справедливости этихъ условій.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ сужденіе о равенствѣ и подобіи фигуръ можетъ быть облегчено тѣмъ, что достаточно замѣтить равенство не искомыхъ фигуръ (т. е. о которыхъ говоритъ самая теорема о подобіи), а только тѣхъ фигуръ, къ построенію которыхъ приводится построеніе искомыхъ фигуръ; необходимо только, чтобы искомой фигурѣ соотвѣтствовала одна новая фигура, къ построенію которой приводится построеніе искомой фигуры. Такъ, напримѣръ, построеніе треугольника по даннымъ $2p$, h_a и A приводится **) къ

---

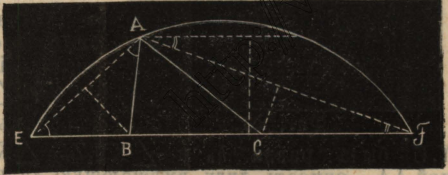
*) **Рѣш.** (фиг. 49). Повернемъ $\triangle$ ACB въ положеніе AC_1B. Тогда можно построить $\triangle CAC_1$ (по двумъ сторонамъ и углу между ними). Точка B опредѣлится, такъ какъ $AC_1 = CB$. Два совпадающихъ рѣшенія ($\triangle ACB = \triangle AC_1B$).



Фиг. 49.

Если вмѣсто a и b дана медіана EC и высота CD, то рѣшеніе сходно съ указаннымъ; придется построить $\triangle CEC_1$ и описать на CC_1 дугу, вмѣщающую уголъ A—B (четыре равныхъ рѣшенія).

) **Рѣш. (фиг. 50) Выпрямимъ ломаную BAC въ прямую EBCF. Тогда $\angle EAF = A + 90 - \frac{A}{2} = 90 + \frac{A}{2}$. Описывая на $EF = 2p$ дугу, вмѣщающую этотъ уголъ, и проводя параллель EF на разстояніи h_a отъ BC, получимъ точку A. Тоже относится къ построенію треугольника по даннымъ $2p$, h_a и B—C. См. «Вѣст. Оп. Физики» VIII сем., стр. 144, 1890 г. «Значеніе геометрич. построеній въ три гонометріи» И. Александрова.



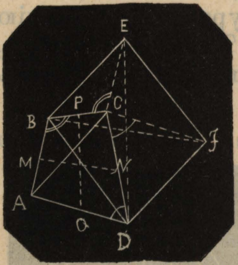
Фиг. 50.

построенію треугольника по даннымъ a, h_a и A; послѣдняя задача имѣетъ 4 совпадающихъ рѣшенія и всѣмъ четыремъ рѣшеніямъ соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленный треугольникъ первой задачи (т. е. треугольникъ, имѣющій данные $2p$, h_a и A). Поэтому, треугольники, имѣющіе равные (или пропорціональные) периметры и высоту, опущенную изъ равнаго общаго угла, равны (или подобны). Не легко доказать эту теорему обычнымъ способомъ.

Переходъ отъ условій равенства къ условіямъ подобія требуетъ иногда осмотрительности. Такъ, напримѣръ, построеніе треугольника по даннымъ h_a, bc и B—C даетъ два (или четыре) совпадающихъ рѣшенія *).

Съ измѣненіемъ отношеній подобія произведеніе bc будетъ мѣняться пропорціонально квадрату отношенія подобія. Поэтому получаемъ слѣдующую теорему: *„если два треугольника имѣютъ одинаковую разность двухъ угловъ и произведенія сторонъ, противолежащихъ тѣмъ же угламъ, относятся какъ квадраты высотъ, опущенныхъ на третьи стороны, то эти треугольники подобны.“* Вообще, если въ условіяхъ равенства линейныя части фигуръ входятъ въ различныхъ измѣреніяхъ, то при переходѣ отъ равенства къ подобію фигуръ надо вмѣсто равенства взять пропорціональность частей второго и третьяго измѣреній квадратамъ и кубамъ частей перваго измѣренія. Разсматривая съ указанной точки зрѣнія геометрическія задачи на построеніе, мы найдемъ въ нихъ весьма богатый матеріалъ для разысканія условій равенства и подобія фигуръ. Особенно интересно приложеніе проводимой идеи къ подобію четыреугольниковъ.

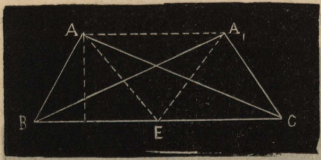
Такъ построеніе фигуры ABCD по даннымъ діагоналямъ и углу между ними (или по даннымъ медіанамъ MN и PQ и углу между ними) приводится (фиг. 52) къ построенію параллелограмма BEFD, въ которомъ BE⫩AC и EF⫩BD и въ которомъ положеніе точки C опредѣляется двумя добавочными данными **). Если эти добавочныя условія выбраны такъ, что точка C получится въ одномъ опредѣленномъ положеніи, то рѣшеніе выйдетъ одно. Изъ этого слѣдуетъ, что четыреугольники ABCD и $A_1B_1C_1D_1$ равны, если имѣютъ равными:



Фиг. 52.

---

*) Рѣш. (фиг. 51). Строимъ $\triangle ABA_1$ по данной высотѣ и площади. Послѣдняя опредѣлится слѣдующимъ образомъ (фиг. 53). На сторонахъ даннаго $\angle XYZ = B - C$ отложимъ части $XY = YZ = \sqrt{bc}$; площади треугольниковъ съ общимъ угломъ пропорціональны произведеніямъ сторонъ, обнимающихъ общій уголъ; слѣд., $\triangle XYZ = \triangle ABA_1$. Затѣмъ $\triangle XYZ$ превратимъ въ $\triangle XY_1Z_1$ такъ, чтобъ высота его Y_1U была равна h_a и $\angle XY_1Z_1 = \angle XYZ$. Тогда $XZ_1 = AA_1$. Остается на прямой AA_1, описать дугу, вмѣщающую данный уголъ B − C. Вмѣсто высоты h_a могла быть дана m_a; рѣшеніе существенно не измѣняется.



Фиг. 51.

**) Параллелограмъ BEFD имѣетъ слѣд. свойства: 1) стороны его равны

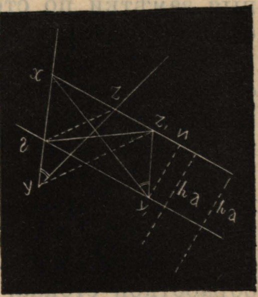
1. двѣ діагонали, уголъ между ними и еще пару слѣдующихъ частей: *a)* $D=D_1$ и $\angle BDC=\angle B_1D_1C_1$, *b)* $D=D_1, C=C_1$, *c)* $BC:CD:AD==B_1C_1:C_1D_1:A_1D_1$, *d)* $A=A_1$, $\angle BDA=\angle B_1D_1A_1$ и т. д.

2. двѣ медіаны противоположныхъ сторонъ, уголъ между ними и еще пару частей *a), b), c), d)* и т. д.

3. двѣ такія же медіаны, уголъ между діагоналями и еще пару частей *a), b), c), d)* и т. д.

4. двѣ діагонали, уголъ между медіанами и пару частей *a), b), c)* и т. д.

5. одна діагональ, уголъ между діагоналями, площади и одно изъ данныхъ *a), b), c)* и т. д.


Фиг. 53.

Взявъ отношеніе подобія произвольнымъ, получимъ 20 случаевъ подобія четыреугольниковъ, изъ которыхъ каждый съ трудомъ поддается обычнаго рода доказательству.

Если построеніе фигуры по нѣкоторымъ даннымъ дастъ два или болѣе несовпадающихъ рѣшенія, то для равенства и подобія этихъ фигуръ требуются добавочныя условія; эти послѣднія болѣе или менѣе легко можно извлечь изъ самаго построенія. Въ этомъ случаѣ данныя опредѣляютъ форму фигуръ двухъ или четырехъ классовъ. Авторъ надѣется посвятить этому предмету слѣдующій свой рефератъ.

И. Александровъ (Тамбовъ).

РЕЦЕНЗІИ.

Руководство къ обработкѣ стекла на паяльномъ столѣ. Для студентовъ, изучающихъ искусство производить научные опыты. Составили лаборанты Имп. Спб. Университета Д. И. Дьяконовъ и В. В. Лермантовъ. Спб. 1892. XII+162. Ц. 1 р.

Въ нашей учебной физической литературѣ такъ мало чисто практическихъ руководствъ, что появленіе всякой новой толковой книжки не можетъ пройти незамѣченнымъ. Къ такимъ „толковымъ" книжкамъ можно отнести и руководство, заглавіе котораго выписано выше. Руководство это тѣмъ болѣе цѣнно, что авторы его — сами практики, а это весьма важное обстоятельство, ибо, — какъ совершенно справедливо замѣчаетъ г. Лермантовъ въ предисловіи — „искусные работники очень рѣдко принимаются за писаніе

діагоналямъ фигуры ABCD, 2) діагонали его вдвое болѣе медіанъ четыреугольника ABCD (BG=2MN), 3) углы параллелограмма BEFD и уголъ между діагоналями равны углу между діагоналями и углу между медіанами ABCD, 4) углы при точкѣ C равны угламъ ABCD и 5) площадь BEFD вдвое болѣе площади ABCD. Если данныя части фигуры ABCD позволяютъ построить BEFD и опредѣлить точку C, то можно построить и ABCD.

руководствъ...., а писатели по профессіи не умѣютъ сами работать“.

Покойный Д. И. Дьяконовъ оставилъ послѣ себя лишь отдѣльныя замѣтки по стеклодувному искусству, которыя были введены безъ измѣненій въ связное изложеніе В. В. Лермантовымъ.

Книжка содержитъ много тѣхъ цѣнныхъ чисто практическихъ совѣтовъ, которые вырабатываются только многолѣтнимъ упражненіемъ, и, кромѣ того, вездѣ, гдѣ возможно, приводится ихъ теоретическое основаніе. Много помогаютъ изложенію и весьма хорошіе чертежи и рисунки, сдѣланные по большей части съ натуры. Съ интересомъ прочтется и статья о термометрахъ, ихъ изготовленіи и провѣркѣ, которою заканчивается книга. Поэтому мы смѣло рекомендуемъ это руководство всѣмъ, кому приходится имѣть дѣло съ обработкой стекла, и желаемъ новой книжкѣ полнаго успѣха.

В. Г. (Одесса).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Опыты съ **электрическими волнами**, послѣ открытія послѣднихъ *Герцомъ*, производились исключительно въ воздухѣ. *Саразенъ* и *Де-ля-Ривъ* въ Женевѣ измѣнили этотъ опытъ, помѣстивъ шарики, между которыми перескакивали первичныя искры, въ *изолирующую жидкость* и получили при этомъ сильныя вторичныя разряженія. Сначала они произвели свои опыты съ деревяннымъ масломъ, причемъ искры отъ румкорфовой спирали были въ немъ 1 см. длины. Дѣйствіе на резонаторъ значительно увеличилось; даже на разстояніи 10 метровъ большіе резонаторы (0,75 и 1 м.) давали довольно свѣтлыя искры. Однако скоро масло обуглилось и стало непрозрачнымъ, но напряженіе искръ не измѣнилось даже въ теченіи 20 минутъ. Какъ извѣстно, въ воздухѣ въ этомъ случаѣ вторичныя искры сильно ослабѣваютъ и шарики приходится часто чистить. Терпентинное масло и керосинъ дали подобные-же результаты, однако здѣсь происходитъ легко кипѣніе. (Comp. rend. 95. p. 439. 1892).

Бхм.

— Послѣ того какъ **Элстеръ** и **Гептель** открыли, что чистые щелочные металлы суть въ высшей степени чувствительныя свѣтоэлектрическія тѣла, т. е. что они способствуютъ подъ вліяніемъ свѣта истеченію отрицательнаго электричества, помянутые авторы могли доказать съ помощію этихъ тѣлъ (*K* или **Na** или ихъ сплава), употребляя ихъ какъ катодъ, что сопротивленіе Гейслеровской трубки, особенно при маломъ давленіи (0,1 до 0,01 м.м.) уменьшается для свѣтлыхъ разряженій Румкорфовой спирали, если только поверхность катода, сдѣланнаго изъ щелочного металла, подвергнуть дѣйствію свѣта. Это измѣненіе сопротивленія можно было измѣрять гальванометрически, а не только электрометрически, какъ до сихъ поръ (Wied. Ann. 46. p. 281. 1892.). *Бхм.*

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Количество осадковъ, выпавшихъ въ Парижѣ въ октябрѣ 1892 г., почти втрое превосходитъ нормальное количество за октябрь. Установленные въ различныхъ мѣстахъ дождемѣры дали слѣдующіе результаты:

Паркъ Saint-Maur	149,8 мм.
Обсерваторія въ Montsouris	149,8 »
Франц. Астрон. Общество	147,1 »
Метеор. Обсерв. d'Auteuil	227,4 »

Такой массы осадковъ не выпадало еще въ Парижѣ съ тѣхъ поръ какъ тамъ производятся правильныя наблюденія, т. е. съ 1769 года. Наибольшее число за октябрь было до сихъ поръ 134 мм. въ 1805 г.

Лунная радуга наблюдалась 4-го сентября 1892 г. (н. с.) въ $9^1/_2$ час. вечера въ окрестностяхъ Ерзерума. Цвѣта были весьма отчетливы.

Спаиваніе металловъ давленіемъ. По опытамъ Обена желѣзные опилки подъ давленіемъ въ 2000 атмосферъ превращаются въ сплошной кусокъ желѣза; свинецъ плявится при 5000 атм.; жесть можно спаивать давленіемъ въ 3500 атм., мѣдь—5000 атм., а цинкъ, алюминій и висмутъ—6000 атм.

ЗАДАЧИ.

№ 417. Въ данный кругъ вписать трапецію по данной длинѣ бока a такъ, чтобы:

1) одна изъ параллельныхъ сторонъ была вдвое больше другой;

2) дуга, соотвѣтствующая одной изъ параллельныхъ сторонъ, была вдвое больше дуги, соотвѣтствующей другой параллельной сторонѣ.

К. Щ. (Курскъ).

№ 418. Рѣшить систему

$$x=yz+a\sqrt{(1-y^2)(1-z^2)}$$

$$y=xz+b\sqrt{(1-z^2)(1-x^2)}$$

$$z=xy+c\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}.$$

Н. Платовъ (Спб.).

№ 419. Построить треугольникъ ABC, зная основаніе AC и радіусы круговъ, описанныхъ около △△ ABD и DBC, гдѣ D есть лежащая на основанiи AC точка, изъ которой высота BE видна подъ даннымъ угломъ. *И. Александровъ* (Тамбовъ).

№ 420. Называя черезъ t и τ линiи, соединяющiя вершину угла въ треугольникѣ съ точками, дѣлящими противоположную сторону на три равныя части *), показать, что

$$t_a{}^2+t_b{}^2+t_c{}^2=\tau_a{}^2+\tau_b{}^2+\tau_c{}^2.$$

И. Вонсикъ (Спб.).

№ 421. Даны двѣ окружности O и O_1 и прямая линiя MN. На разстоянiи x отъ центра окружности O проведена прямая PQ, параллельная MN и пересѣкающая окружность O въ точкахъ A и B, а окружность O_1—въ точкахъ C и D.

Найти значенiе x, при которомъ сумма квадратовъ, построенныхъ на хордахъ AB и CD, относится къ квадрату, построенному на OO_1, какъ $m:n$.

Опредѣлить *maximum* этого отношенiя и вывести условiе возможности задачи. *I. Каменскiй* (Пермь).

№ 422. Опредѣлить площадь вписаннаго въ кругъ четыреугольника ABCD, если его дiагональ $AC=a$, сумма сторонъ $CD+CB=s$ и стороны AD и AB равны между собою.

Н. Николаевъ (Пенза).

РѢШЕНIЯ ЗАДАЧЪ.

№ 26 (2 сер.). Опредѣлить сумму n членовъ ряда

$$1.2.3\ldots.k+2.3.4\ldots.(k+1)+3.4.5\ldots.(k+2)+\ldots.$$

Такъ какъ $k+n-(n-1)=k+1$, то

$$n(n+1)(n+2)\ldots.(k+n-1)(k+n)-(n-1)n(n+1)\ldots.(k+n-1)=$$
$$=(k+1).n.(n+1)(n+2)\ldots.(k+n-1).$$

Давая n всѣ значенiя отъ 1 до n, получимъ:

$$1.2.3\ldots.(k+1)-0.1.2.3\ldots\ldots k=(k+1).1.2.3\ldots.k$$
$$2.3.4\ldots(k+2)-1.2.3.4\ldots(k+1)=(k+1).2.3.4\ldots.(k+1)$$
$$3.4.5\ldots(k+3)-2.3.4.5\ldots(k+2)=(k+1).3.4.5\ldots.(k+2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n(n+1)(n+2)\ldots.(k+n)-(n-1)n(n+1)\ldots.(k+n-1)=$$
$$=(k+1)n(n+1)\ldots.(k+n-1).$$

---

*) Такiя двѣ прямыя, по аналогiи съ медiаной, можно назвать для краткости *терцiанами*.

Почленное сложеніе этихъ равенствъ даетъ

$$S=\frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+k)}{k+1}.$$

И. Вонсикъ (Воронежъ); *І. Теплицкій* (Кременчугъ); *Я. Марморъ* (Кам.-Подольскъ).

№ 37 (2 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}&=\frac{c}{z}\\ \frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}&=\frac{a}{x}\\ \frac{z^2+x^2-y^2}{2xz}&=\frac{b}{y}\end{aligned}\right\}\dots\dots\dots (1)$$

Данная система легко приводится сложеніемъ къ слѣдующей:

$$2y^2=\frac{2cxy}{z}+\frac{2ayz}{x}$$

$$2x^2=\frac{2cxy}{z}+\frac{2bxz}{y}$$

$$2z^2=\frac{2ayz}{x}+\frac{2bxz}{y}$$

или

$$\left.\begin{aligned}xyz&=cx^2+az^2\\ xyz&=cy^2+bz^2\\ xyz&=ay^2+bx^2\end{aligned}\right\}\dots\dots\dots (2)$$

сравнивая первое и второе, первое и третье изъ ур-ій (2), находимъ

$$cx^2+az^2=cy^2+bz^2$$

$$cx^2+az^2=ay^2+bx^2,$$

откуда, исключивъ y^2, находимъ

$$x^2=\frac{az^2(c-a+b)}{c(a-c+b)} \text{ и } x=z\sqrt{\frac{a(c-a+b)}{c(a-c+b)}}.$$

Первое и второе, второе и третье изъ (2) даютъ

$$cx^2+az^2=cy^2+bz^2;$$

$$cy^2+bz^2=ay^2+bx^2;$$

откуда, исключивъ x^2, получимъ

$$y^2=\frac{bz^2(a+c-b)}{c(a+b-c)} \text{ и } y=z\sqrt{\frac{b(a+c-b)}{c(a-c+b)}}.$$

Подставивъ эти выраженія y и x черезъ z въ первое изъ ур-ій (2), найдемъ

$$z=\frac{2abc}{\sqrt{ab(a+c-b)(c+b-a)}},$$

а слѣдовательно

$$x=\frac{2abc}{\sqrt{bc(a+c-b)(a+b-c)}} \text{ и } y=\frac{2abc}{\sqrt{ac(b+c-a)(a+b-c)}}.$$

А. Даниловъ (Уфа); *К. Щиголевъ* (Курскъ).

№ 77 (2 сер.). Показать, что діагональ гармоническаго четыреугольника служитъ симедіаной въ каждомъ изъ треугольниковъ, на которые четыреугольникъ дѣлится другой діагональю.

Пусть данъ гармоническій четыреугольникъ ABCD и пусть M средина діагонали AC. Нужно доказать, что $\angle ADM=\angle CDB$.

Такъ какъ

$$AC.BD=BC.AD+AB.CD$$

или

$$2AM.BD=2BC.AD$$

то

$$AM:AD=BC:BD;$$

Кромѣ того

$$\angle CBD=\angle CAD$$

слѣдовательно $\triangle\triangle$ BCD и AMD подобны, откуда

$$\angle ADM=\angle BDC.$$

Такимъ же образомъ доказывается равенство угловъ ABM и DBC.

Н. Волковъ (Спб.); *В. Россовская, Я. Ястржембовскій* (Курскъ); *И. Вонсикъ* (Воронежъ); *И. Бискъ* (Кіевъ); *А. Витковскій* (Великіе-Луки); *В. Тюнинъ* (Уфа).

№ 149 (2 сер.). Черезъ двѣ данныя точки въ пространствѣ провести плоскость такъ, чтобы она дѣлила данный двугранный уголъ на два равные трегранные угла.

Проведемъ внутри двуграннаго угла плоскость, дѣлящую его пополамъ, соединимъ двѣ данныя точки и изъ пересѣченія полученной линіи съ проведенной плоскостью опустимъ перпендикуляръ на ребро даннаго двуграннаго угла. Плоскость, проведенная черезъ этотъ перпендикуляръ и черезъ линію, соединяющую данныя точки и будетъ искомой. Доказательство очевидно.

И. Бискъ, И. Бѣлянкинъ (Кіевъ).

№ 283 (2 сер.). Показать, что

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)^2+\ldots+(\sin n\alpha+\cos n\alpha)^2=$$

$$=n+\frac{\sin n\alpha \sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}.$$

Развернувъ квадраты, находимъ

$$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2 2\alpha+2\sin 2\alpha\cos 2\alpha+\cos^2 2\alpha+\ldots.$$

$$\ldots.+\sin^2 n\alpha+2\sin n\alpha\cos n\alpha+\cos^2 n\alpha=$$

$$n+\sin 2\alpha+\sin 4\alpha+\sin 6\alpha+\ldots.+\sin 2n\alpha.$$

Пусть

$$\sin 2\alpha+\sin 4\alpha+\sin 6\alpha+\ldots.+\sin 2n\alpha=S.$$

Умноживъ обѣ части на $2\sin\alpha$, получимъ

$$2\sin\alpha\sin 2\alpha+2\sin\alpha\sin 4\alpha+2\sin\alpha\sin 6\alpha+\ldots.+2\sin\alpha\sin 2n\alpha=2S.\sin\alpha,$$

но

$$2\sin\alpha\sin 2\alpha=\cos\alpha-\cos 3\alpha$$

$$2\sin\alpha\sin 4\alpha=\cos 3\alpha-\cos 5\alpha$$

$$2\sin\alpha\sin 6\alpha=\cos 5\alpha-\cos 7\alpha$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2\sin\alpha\sin 2n\alpha=\cos(2n-1)\alpha-\cos(2n+1)\alpha.$$

Сложивъ, получимъ

$$2S.\sin\alpha=\cos\alpha-\cos(2n+1)\alpha=2\sin n\alpha.\sin(n+1)\alpha,$$

откуда

$$S=\frac{\sin n\alpha\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}.$$

слѣдовательно

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)^2+\ldots.+(\sin n\alpha+\cos n\alpha)^2=$$

$$=n+\frac{\sin n\alpha\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}.$$

И. Вонсикъ (Воронежъ); *А. П.* (Пенза); *В. Россовская* (Курскъ); *В. Костинъ* (Симбирскъ); *О. Озаровская* (Спб.).

№ 259 (2 сер.). Къ окружности радіуса r проведена въ М касательная, на которой взяты точки А и В въ разстояніяхъ a и b отъ М. Вычислить радіусъ окружности, проходящей черезъ точки А и В и касающейся данной окружности.

Центръ О′ искомой окружности лежитъ на линіи СО′, проведенной $\perp$ АВ въ срединѣ ея. Изъ О — центра даннаго круга проводимъ OD $\perp$ O′C. Такъ какъ $AM=a$ и $BM=b$, то $AC=BC=\frac{a+b}{2}$; $MC=OD=\frac{a-b}{2}$ и $OO'=x-r$, такъ какъ оба центра и точка касанія лежатъ на одной прямой (радіусъ искомой окружности обозначимъ черезъ x). Изъ прямоугольнаго $\triangle AO'C$ получимъ:

$$CO' = \sqrt{x^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2};$$

а изъ $\triangle ODO'$

$$O'D = \sqrt{(x-r)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}.$$

Замѣтивъ, что $O'D = CD \pm O'C$, получимъ ур-іе:

$$r \pm \sqrt{x^2 - \frac{(a+b)^2}{4}} = \sqrt{(x-r)^2 - \frac{(a-b)^2}{4}}.$$

Возвысивъ его въ квадратъ послѣ приведенія получимъ:

$$\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4} - 2r\sqrt{x^2 - \frac{(a+b)^2}{4}} = 2rx$$

или

$$2rx - ab = 2r\sqrt{x^2 - \frac{(a+b)^2}{4}};$$

возвышая и это ур-іе въ квадратъ, получимъ:

$$(ab)^2 + r^2(a-b)^2 = 4abrx,$$

откуда найдемъ:

$$x = \frac{ab}{4r} + \frac{r(a-b)^2}{4ab}.$$

С. Окольскій (Варшава); *В. Россовская, К. Щиголевъ* (Курскъ); *В. Костинъ* (Симбирскъ); *А. Семеновъ, И. Вонсикъ* (Воронежъ); *Ч. Рыбинскій* (Скопинъ); *А. Байковъ, П. Андреяновъ* (Москва); *И. Качановскій* (Пермъ).

№ 292 (2 сер.). Не находя корней x_1 и x_2 уравненія $9x^2 - 24x - 20 = 0$, составить такое уравненіе 4-ой степени, которое имѣло-бы корни $x_1, x_2, \frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$.

Такъ какъ всякое ур-іе 4-ой степени имѣетъ 4 корня и можетъ быть разложено на 4 множителя, то искомое ур-іе будетъ имѣть видъ:

$$(y-x_1)(y-x_2)\left(y-\frac{1}{x_1}\right)\left(y-\frac{1}{x_2}\right) = 0,$$

откуда

$$y^4 - \left(x_1+x_2+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)y^3 + \left(x_1x_2+1+\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}+1+\frac{1}{x_1x_2}\right)y^2 -$$

$$-\left(x_1+x_2+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)y + 1 = 0.$$

Пользуясь извѣстными свойствами корней квадратнаго ур-iя, находимъ:

$$x_1+x_2+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{264}{180},$$

$$x_1x_2+1+\frac{x_1}{x_2}+1+\frac{1}{x_1x_2}=-\frac{1057}{180},$$

и потому искомое ур-iе будетъ

$$180y^4-264y^3-1057y^2-264y+180=0.$$

А. Кохтянцъ (Харьковъ); *В. Костинъ* (Симбирскъ); *В. Россовская, П. Писаревъ, К. Александровъ, К. Щиголевъ* (Курскъ); *В. Буханцевъ* (Борисоглѣбскъ); *А. Охитовичъ* (Сарапуль); *И. Бѣлянкинъ* (Кіевъ); *В. Перельцвейгъ* (Полтава).

№ 468 (1 сер.). Предполагая $m>0$, доказать неравенства

$$\frac{n^{m+1}-1}{m+1}>1^m+2^m+3^m+\ldots+(n-1)^m>\frac{(n-1)^{m+1}}{m+1}.$$

Изъ формулы для возведенія бинома въ дробную степень слѣдуетъ

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{m+1}=1+\frac{m+1}{n}+\frac{(m+1)m}{2n^2}+\frac{(m+1)m(m-1)}{2.3.n^3}+\ldots\ldots$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}=1-\frac{m+1}{n}+\frac{(m+1)m}{2n^2}-\frac{(m+1)m(m-1)}{2.3.n^3}+\ldots.$$

Такъ какъ $m>0$, то изъ перваго разложенія заключаемъ, что

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{m+1}>1+\frac{m+1}{n}.$$

Если $m+1<n$, то члены обоихъ разложеній уменьшаются и, группируя члены второго разложенія попарно, видимъ, что

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}>1-\frac{m+1}{n}.$$

Если-же $m+1>n$, то это неравенство очевидно, такъ какъ вторая часть его отрицательна. Основываясь на этихъ двухъ выведенныхъ нами неравенствахъ, докажемъ предложенныя неравенства.

$$n^{m+1}-(n-1)^{m+1}=(n-1)^{m+1}\left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{m+1}-1\right]>(n-1)^{m+1}\frac{m+1}{n-1}$$

или

$$n^{m+1}-(n-1)^{m+1}>(m+1)(n-1)^m,$$

точно также

$$(n-1)^{m+1}-(n-2)^{m+1}>(m+1)(n-2)^m$$

. . . .

$$3^{m+1}-2^{m+1}>(m+1)\,2^m$$

$$2^{m+1}-1^{m+1}>(m+1)\,1^m.$$

Сложивъ почленно эти неравенства и затѣмъ раздѣливъ на $m+1$, находимъ

$$\frac{n^{m+1}-1}{m+1}>1^m+2^m+3^m+\ldots+(n-1)^m.$$

Далѣе

$$n^{m+1}-(n-1)^{m+1}=n^{m+1}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}\right]<n^{m+1}\frac{m+1}{n}<(m+1)n^m.$$

Такимъ образомъ

$$(n-1)^{m+1}-(n-2)^{m+1}<(m+1)(n-1)^m$$

$$(n-2)^{m+1}-(n-3)^{m+1}<(m+1)(n-2)^m$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$3^{m+1}-2^{m+1}<(m+1)\,3^m$$

$$1<m+1.$$

Сложивъ эти неравенства и раздѣливъ на $m+1$, находимъ

$$\frac{(n-1)^{m+1}}{m+1}<1^m+2^m+3^m+\ldots+(n-1)^m.$$

С. Кричевскій (Харьковъ); *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ).

Списокъ задачъ 1-й серіи, на которыя не было получено ни одного удовлетворительнаго рѣшенія *).

№ 173. Вычислить стороны треугольника, зная стороны вписанныхъ въ него квадратовъ. *А. Гольденбергъ.*

№ 206. Примѣнить изслѣдованіе извѣстной задачи о курьерахъ къ двумъ падающимъ тѣламъ, расположеннымъ по одной вертикальной линіи.

№ 252. Данный треугольникъ раздѣлить на четыре равныя части двумя взаимно перпендикулярными прямыми.

№ 266. Показать, что, зная пару цѣлыхъ рѣшеній, отличную отъ $x=\pm1$, $y=0$, уравненія

$$x^2-(8p-1)y^2=1, \quad\ldots\ldots\ldots(1)$$

въ которомъ $8p-1$ есть простое число, будемъ знать пару цѣлыхъ рѣшеній уравненія

$$x^2-(8p-1)y^2=2, \quad\ldots\ldots\ldots(2)$$

и обратно, зная пару цѣлыхъ рѣшеній уравненія (2), найдемъ неограниченное число паръ цѣлыхъ рѣшеній уравненія (1). *С. Шатуновскій.*

*) См. В. О. Ф. № 150.

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Одесса 13 Февраля 1893 г.
Типо-литографія „Одесскихъ Новостей". Пушкинская, д. № 11.

Обложка
ищется

Обложка
ищется