Обложка ищется

Обложка
ищется

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ и ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

XV Сем. — № 176. — № 8.

Содержаніе: Свойства поверхностей жидкихъ тѣлъ, (продолженіе). *К. Чернышева.*—По поводу парадоксальной формулы для *π. С. Кричевскаго.*—Къ статьѣ „Новые многоугольники". *И. Износкова.* — Простая задача и отдѣльное дѣйствіе въ ариѳметикѣ. *И. Синскаго.* — Разныя извѣстія. — Задачи №№ 562 — 567. — Рѣшенія задачъ (2 сер.) №№ 75, 128, 129, 147, 200, 219, 360, 369, 385, 387, 432. — Справочная таблица № XXIV. — Библіографическій листокъ новѣйшихъ русскихъ изданій. — Библіографическій листокъ новѣйшихъ нѣмецкихъ изданій.—Объявленія.

СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТЕЙ ЖИДКИХЪ ТѢЛЪ.

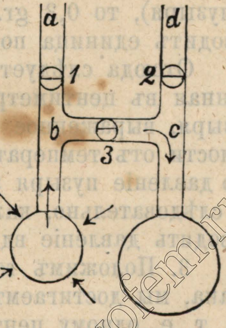
Опыты и наблюденія.

*(Продолженіе *)*

VI. Зависимость давленія пленки отъ кривизны.

1. 2 трубки (фиг. 34), *ab* и *cd* соединены поперечной *bc* и снабжены тремя кранами. При закрытомъ кранѣ (3) выдуваемъ на концахъ трубокъ пузыри неравной величины, и закрывъ краны (1) и (2), открываемъ кранъ (3) **).

Оказывается, что маленькій пузырь сжимается и раздуваетъ большой, перегоняя въ него воздухъ. Это значитъ, что маленькій пузырь сильнѣе сжимаетъ заключающійся въ немъ воздухъ, чѣмъ большой.

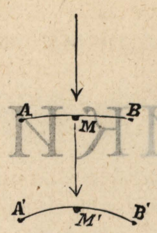


Фиг. 34.

Не трудно найти объясненіе этому явленію, припомнивъ, что жидкая пленка дѣйствуетъ какъ натянутая каучуковая. Представимъ себѣ каучуковую ленту, натянутую между точками A и B и опирающуюся на частицу воздуха M. (фиг. 35). Очевидно, что лента,

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики" №№ 163, 165, 171, 173 и 174.

**) Краны въ описанномъ опытѣ можно замѣнить зажимами для каучуковыхъ трубокъ и сообразно съ этимъ измѣнить приборъ, составивъ его изъ нѣсколькихъ стеклянныхъ и каучуковыхъ трубокъ. На концахъ трубокъ, гдѣ получаемъ пузыри, полезно имѣть мѣдныя оправы; это становится безусловно необходимымъ въ томъ случаѣ, если нужно расширить конецъ трубки въ кольцо, какъ это будетъ имѣть мѣсто въ одномъ изъ слѣдующихъ опытовъ.

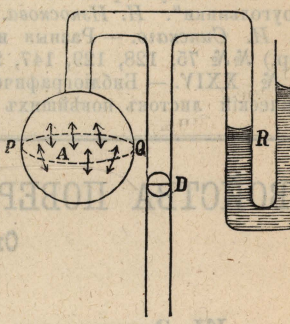


Фиг. 35.

стремясь сократиться до наименьшей величины между точками A и B, должна производить давленіе внизъ на частицу воздуха, подъ ней лежащую. Если лента, закрѣпленная въ A′ и B′ (фиг. 35) и давящая на M′ искривлена гораздо болѣе, то, будучи натянута съ прежней силой, произведетъ гораздо большее давленіе на частицу воздуха M′. Такимъ образомъ давленіе пленки по направленію вертикали къ ея поверхности зависитъ отъ ея кривизны. Чѣмъ эта кривизна больше, т. е. чѣмъ радіусъ пленки *меньше*, тѣмъ большее давленіе она будетъ производить по направленію радіуса.

Очевидно, что если пленка будетъ плоская, то ея натяженіе не произведетъ никакого давленія ни внизъ, ни вверхъ.

2. Величину давленія пузыря можно опредѣлить слѣдующимъ образомъ. Одинъ конецъ T образной трубки снабжается манометромъ, а на другомъ выдувается пузырь (фиг. 36). Закрывъ кранъ (D), опредѣлимъ діаметръ пузыря и разность уровней въ манометрѣ (оба опредѣленія болѣе точно можно сдѣлать съ помощью катетометра). Положимъ, что давленіе пузыря уравновѣшивается столбикомъ воды въ 0,3 цм. высотой. Въ такомъ случаѣ на 1 кв. цм. поверхности стѣнокъ трубки и поверхности воды давленіе, производимое пузыремъ (черезъ посредство воздуха), будетъ равно 0,3 gr (=вѣсу столба воды съ основаніемъ въ 1 кв. цм. и высотой въ 0,3 цм.). А такъ какъ въ закрытомъ сосудѣ единица поверхности стѣнки испытываетъ то давленіе, которое производитъ единица поверхности поршня (въ нашемъ случаѣ —пузыря), то 0,3 gr. есть въ то же время то давленіе, которое производитъ единица поверхности пузыря.



Фиг. 36.

Отсюда слѣдуетъ, что разность уровней водяного манометра, выраженная въ центиметрахъ, покажетъ намъ давленіе единицы поверхности пузыря, выраженное въ граммахъ—(пренебрегаемъ поправками въ зависимости отъ температуры и пр.). Слѣдуетъ обратить вниманіе на то, что давленіе пузыря зависитъ отъ натяженія обѣихъ его поверхностей и, слѣдовательно, каждая его поверхность въ отдѣльности должна производить давленіе вдвое меньшее.

3. Положимъ теперь, что, регулируя величину пузыря съ помощью крана, мы достигаемъ того, что радіусъ его дѣлается равнымъ единицѣ, т. е. одному центиметру. Манометръ покажетъ намъ тогда соотвѣтствующее давленіе обѣихъ поверхностей пленки и пусть оно равняется $2H$ gr. Выпустимъ теперь изъ пузыря немного воздуха, и, снова закрывъ кранъ, измѣримъ радіусъ и соотвѣтствующее давленіе. Пусть первый равняется r_1 цм. и второе p_1 gr. Сравнивая давленіе p_1 съ прежнимъ ($2H$), найдемъ, что оно увеличилось, и при томъ во столько разъ, во сколько уменьшился радіусъ, такъ что

$$p_1 = \frac{2H}{r_1}.$$

Увеличивая или уменьшая пузырь и измѣряя радіусы $r_2, r_3 \ldots\ldots$ и соотвѣтствующія давленія $p_2, p_3 \ldots\ldots$, найдемъ всегда одно и то же соотношеніе между этими величинами;

$$p_2 = \frac{2H}{r_2},\; p_3 = \frac{2H}{r_3}, \ldots\ldots$$

Отсюда дѣлаемъ заключеніе, что *давленіе шаровой пленки обратно пропорціонально радіусу или прямо пропорціонально кривизнѣ* *).

4. Формулу, выражающую зависимость давленія шаровой пленки отъ кривизны, можно получить еще съ помощью слѣдующаго разсужденія. Давленіе пузыря на единицу плоскости должно быть одинаково для всякой плоскости внутри его. Проведемъ какую-нибудь плоскость PQ (фиг. 36) черезъ его центръ. Давленіе на эту плоскость производится натяженіемъ тѣхъ элементовъ обѣихъ его поверхностей, которые параллельны этому давленію (перпендикулярны къ плоскости PQ). Эти элементы расположены по окружности круга PQ. Натяженіе ихъ дѣйствуетъ на длинѣ этой окружности, т. е. на длинѣ $2\pi r$ (цм.); если поверхностное натяженіе будетъ T gr. (натяженіе элементовъ на единицѣ (1 цм.) длины), то натяженіе всѣхъ элементовъ на длинѣ окружности будетъ $2\pi r T$, а для обѣихъ поверхностей пузыря $= 4\pi r T$. Это натяженіе должно равняться давленію на плоскость PQ, а давленіе на единицу (1 □ цм.) площади равно

$$p = \frac{4\pi r T}{\pi r^2} = \frac{4T}{r}.$$

Такимъ образомъ для каждой шаровой пленки будемъ имѣть слѣдующую формулу давленія:

$$p = H/r = 2\,T/r \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Отсюда слѣдуетъ, что $H = 2T$, т. е. *давленіе единицы поверхности шаровой пленки съ радіусомъ = 1, по величинѣ равно двойному поверхностному натяженію*. Такое давленіе устанавливается внутри капли жидкости, ограниченной только одной (внѣшней) пленкой; для пузыря того же діаметра давленіе будетъ вдвое больше, если пренебречь толщиной пузыря и считать обѣ пленки пузыря,—и наружную, и внутреннюю—за сферы съ одинаковымъ радіусомъ.

---

*) За кривизну какой либо поверхности вообще принимается средняя изъ наибольшей k' и наименьшей k'' ея кривизны

$$k = {}^1/_2\,(k' + k'') = {}^1/_2\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}\right),$$

гдѣ r' и r'' суть радіусы наибольшей и наименьшей кривизны. Для шара вокругъ какой-нибудь точки его кривизна одинакова во всѣхъ сѣченіяхъ, проходящихъ черезъ радіусъ въ этой точкѣ; поэтому и k' и k'' равны $1/r$ (если r радіусъ шара), такъ что

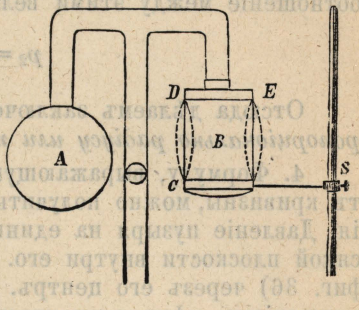
$$K = {}^1/_2\,({}^1/r + {}^1/r) = {}^1/r$$

т. е. кривизна шара есть величина, обратная его радіусу. Для цилиндра радіуса r будемъ имѣть

$$K = {}^1/_2\,({}^1/r + {}^1/\infty) = {}^1/_2 r.$$

т. е. кривизна цилиндра вдвое меньше кривизны шара того же радіуса.

5. По концамъ T—образной трубки, имѣющей на одномъ концѣ мѣдную оправу DE (фиг. 37) выдуваемъ два пузыря и, закрывши кранъ, будемъ растягивать или сжимать пузырь B съ помощью кольца C, передвигающагося на стойкѣ S. Тогда пленка образуетъ кривыя поверхности различной формы. Сферическій пузырь A служитъ манометромъ: всякая кривая поверхность B должна производить такое же давленіе, какъ пузырь A, чтобы пленки обоихъ пузырей были въ равновѣсіи. Понижая кольцо и въ заключеніе регулируя посредствомъ крана величину пузыря A, придадимъ пузырю B цилиндрическую форму (цилиндръ не долженъ быть длиннымъ по причинамъ, которыя выяснятся впослѣдствіи).



Фиг. 37.

Измѣривъ радіусы шара (r) и цилиндра, найдемъ, что послѣдній ровно вдвое меньше радіуса шара. Но въ такомъ случаѣ кривизна цилиндрической пленки, согласно предыдущему

$$k = {}^1\!/\!_2(k' + k'') = {}^1\!/\!_2 \left(\frac{1}{r/_2} + \frac{1}{\infty}\right) = \frac{1}{r},$$

т. е. одинакова съ кривизной шара.

6. Кривизна цилиндра одна и та же во всякой точкѣ его и легко можетъ быть измѣрена. Если опредѣлить кривизну какой-либо другой формы пленки въ нѣсколькихъ точкахъ ея, то окажется, что кривизна ея также во всякой точкѣ одинакова и при томъ опять равна кривизнѣ шара, служащаго манометромъ.

Однако кривизна разнообразныхъ поверхностей не опредѣляется непосредственно. Но, изучая геометрическія формы пленокъ, можно придти къ заключенію, что *замкнутая* (непосредственно, или какой-либо стѣнкой) *пленка всегда представляетъ поверхность одинаковой кривизны*:

$$K = \text{const} \ldots \ldots \ldots \ldots (2).$$

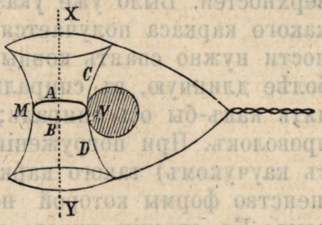
Геометрическое изученіе этихъ поверхностей облегчается, если выдувать затвердѣвающія пленки.

Plateau предложилъ для этого смѣсь изъ 5 частей канифоли и 1 части гуттаперчи (которая употребляется для гальванопластическихъ матрицъ). Пузырь выдувается изъ расплавленной смѣси на какомъ-нибудь каркасѣ. Такъ какъ давленіе любой пленки всякій разъ уравновѣшивается давленіемъ шаровой одинаковой съ нею кривизны, то *всякая пленка производитъ давленіе*, какъ и шаровая одинаковой съ нею кривизны, *т. е. пропорціонально кривизнѣ и пропорціонально поверхностному натяженію:*

$$p = Hk = 2T \cdot k \ldots \ldots \ldots \ldots (3).$$

7. Въ предыдущемъ опытѣ съ цилиндрической пленкой можно было замѣтить, что кольцо все время оставалось замкнутымъ поверхно-

стью сегмента шара, подъ который мы первоначально подвели это кольцо. Если проколемъ эту пленку внутри кольца, то пузырь A (фиг. 37) сокращается и вскорѣ отъ него остается только плоская пленка, закрывающая конецъ трубки. Не то будетъ съ пузыремъ B онъ быстро принимаетъ сѣдлообразную форму между кольцомъ и трубкой. Изъ смѣси канифоли съ гуттаперчей не трудно приготовить твердую пленку такого вида. Для этого стоитъ только въ расплавленную смѣсь обмакнуть каркасъ, состоящій изъ двухъ колецъ (фиг. 38).



Фиг. 38.

Разсмотримъ кривизну такой поверхности въ точкѣ N. Представимъ себѣ черезъ эту точку продольное и поперечное (MN.) сѣченія и вырѣжемъ изъ картона кружокъ, равный поперечному сѣченію. Если приложить этотъ кружокъ къ продольному сѣченію въ точкѣ N, то онъ совпадетъ нѣкоторой частью своей окружности съ кривой продольнаго сѣченія (см. фиг. 38). Изъ этого совпаденія можно заключить, что оба сѣченія имѣютъ одинаковую кривизну. Но продольная кривизна тѣмъ отличается отъ поперечной, что направлена наружу, т. е. въ противоположную сторону; поэтому она должна быть взята съ обратнымъ знакомъ. Если радіусъ поперечнаго сѣченія будетъ r, то кривизна его $k' = 1/r$, а кривизна продольнаго сѣченія будетъ $k'' = -1/r$. Это будетъ наибольшая и наименьшая кривизны поверхности въ точкѣ N, а потому средняя кривизна

$$k = 1/2\ (k' + k'') = 0.$$

Тоже будетъ и во всякой другой точкѣ: наименьшая кривизна будетъ направлена въ противоположную сторону и по абсолютной величинѣ равна наибольшей.

Легко понять, что такая поверхность не должна производить давленія. Въ самомъ дѣлѣ, представимъ себѣ двѣ каучуковыя ленты AB и CD (см. фиг. 38), проходящія черезъ точку N, одинаково натянутыя и одинаково искривленныя въ противоположныя стороны. Первая будетъ производить давленіе внутрь, а вторая наружу; такъ какъ кривизна ихъ одинаково и натяженіе одинаково, то давленія внутрь и наружу должны быть равны и, какъ противоположно направленныя, будутъ взаимно уравновѣшиваться.

Итакъ, *если пленка не образуетъ замкнутой поверхности*, (и не замыкается стѣнкой), *то она представляетъ поверхность нулевой кривизны и потому не производитъ давленія:*

$$k = 0,\ p = 0 \text{. . . . .} (4).$$

8. Кромѣ плоскости и сѣдлообразной поверхности существуетъ еще множество видовъ поверхностей нулевой кривизны. Къ числу ихъ принадлежитъ напр. винтовая поверхность. Сѣдлообразная поверхность нулевой кривизны называется цѣпной поверхностью, потому что кривая линія ея продольнаго сѣченія (профиль) имѣетъ форму цѣпи, подвѣшенной въ двухъ точкахъ. Поверхность эта образуется вращеніемъ этой линіи вокругъ оси XY. (см. фиг. 38).

Полученіе различныхъ формъ поверхностей нулевой кививзны очень легко и чрезвычайно интересно, потому что образующіяся пленки представляютъ въ совершенствѣ всѣ геометрическія особенности такихъ поверхностей. Было уже указано въ предыдущемъ опытѣ, съ помощью какого каркаса получается цѣпная поверхность. Для винтовой поверхности нужно спаять концы двухъ проволокъ и согнуть одну изъ нихъ, болѣе длинную, въ спираль вокругъ другой, которая должна представлять какъ-бы ось спирали; послѣ этого спаиваются и вторые концы проволокъ. При погруженіи въ мыльную воду (или въ смѣсь канифоли съ каучукомъ) такого каркаса, получается винтовая поверхность, совершенство формы которой не можетъ быть передано никакимъ рисункомъ. Къ счастію ничего не можетъ быть легче, какъ получить такую поверхность съ помощью двухъ кусочковъ проволокъ и раствора мыльной воды.

9. Система трубокъ, (фиг. 34) служившая для перваго опыта, снабжается болѣе широкими мѣдными наконечниками, съ тою цѣлью, чтобы можно было получить болѣе широкіе цилиндры.

Постараемся получить сначала короткіе цилиндры такъ, чтобы длина ихъ была менѣе полуокружности ихъ основаній. Закрывъ кранъ (3), (фиг. 34) выдуваемъ два небольшихъ пузыря и, закрывъ всѣ краны, растягиваемъ ихъ въ цилиндры одинаковой длины съ помощью мѣдныхъ колецъ, двигающихся по стойкамъ и имѣющихъ тотъ же діаметръ, какъ и мѣдныя оправы трубокъ. (Когда достигнута приблизительная форма цилиндра, то кольцо укрѣпляется на стойкѣ въ требуемомъ мѣстѣ, и пузырю придается окончательно цилиндрическая форма выпусканіемъ малыхъ количествъ воздуха, если онъ выпуклый, и легкимъ вдуваніемъ, если онъ вогнутый). Открывъ кранъ (3), мы убѣждаемся въ одинаковомъ давленіи пузырей. Закроемъ теперь этотъ кранъ и придадимъ пузырю A сѣдлообразную поверхность (выпустивъ немного воздуха), а пузырю B—выпуклую (вгоняя воздухъ). Посмотримъ теперь, какъ измѣнится давленіе обѣихъ пленокъ. Если открыть кранъ (3), то оказывается, что выпуклый пузырь сокращается и перегоняетъ воздухъ въ вогнутый, и если изъ одного цилиндра было выпущено столько же воздуха, сколько прибавлено въ другой, то возстановляется цилиндрическая форма обоихъ пузырей. Согласно съ предыдущимъ, отсюда выводимъ заключеніе, что, *если на цилиндрѣ образуется выпуклость, кривизна и давленіе его увеличиваются, а въ случаѣ вогнутости—уменьшаются,—въ томъ только однако случаѣ, если длина цилиндра меньше половины его окружности.*

10. Повторимъ тотъ же опытъ съ болѣе длинными цилиндрами (длиннѣе $1/2$ и меньше цѣлой окружности). Теперь оказывается, что суженный цилиндръ при открытомъ кранѣ (3) продолжаетъ суживаться и перегоняетъ воздухъ въ раздутый до тѣхъ поръ, пока стѣнки перваго не прійдутъ въ соприкосновеніе. Въ этотъ моментъ цилиндръ раздѣляется на два пузыря при обоихъ кольцахъ.

И такъ, *если длина цилиндра болѣе полуокружности его сѣченія, то выпуклость на немъ уменьшаетъ давленіе и кривизну, а вогнутость—увеличиваетъ ихъ.*

11. Если дѣлать наблюденія надъ цилиндрами различной длины, то можно замѣтить, что цилиндръ при длинѣ большей, чѣмъ его окружность, пріобрѣтаетъ особое свойство — неустойчивость: при малѣйшемъ нарушеніи его формы (напр. отъ движенія воздуха) онъ раздѣляется на два неравныхъ пузыря. Это явленіе легко объяснить. Положимъ, что вверху цилиндра образовалось небольшое суженіе; тогда внизу цилиндръ долженъ одновременно расшириться (ибо объемъ остается неизмѣннымъ). Каждая половина, расширенная и суженная, представляетъ нарушенную форму цилиндра, длина котораго *больше* $1/2$ его окружности (ибо весь цилиндръ длиннѣе окружности). Поэтому верхняя часть цилиндра при такихъ условіяхъ должна производить большее давленіе и въ этомъ мѣстѣ цилиндръ будетъ сокращаться, расширяя внизу пленку съ меньшимъ давленіемъ.

Если въ цилиндрѣ, длина котораго меньше его окружности, образуется выпуклость, то она будетъ производить большее давленіе, чѣмъ суженная часть, такъ какъ каждая половина есть нарушенная форма цилиндра, длина котораго *меньше* половины его окружности. Поэтому расширенная часть перегонитъ воздухъ въ суженную и цилиндрическая форма такимъ образомъ возстановляется.

Итакъ, *цилиндръ, длина котораго меньше его окружности — есть устойчивая форма пленки; болѣе длинный цилиндръ — неустойчивая форма.*

К. Чернышевъ (Юрьевъ).

(Продолженіе слѣдуетъ).

По поводу парадоксальной формулы для π проф. Никольсона*).

1. Примѣняя къ строкѣ Ньютона извѣстную теорему о сходимости рядовъ, приходятъ къ заключенію, что эта строка сходится для *всякаго* показателя m, если только $1 > x > -1$. Теорема, о которой идетъ рѣчь, дѣлается недостаточной, когда $x = \pm 1$, такъ какъ въ этомъ случаѣ

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}\bigg|_{n=\infty} = 1,$$

независимо отъ показателя m. На основаніи другихъ соображеній можно показать, что строка Ньютона сходится и при $x = \pm 1$, если только m удовлетворяетъ извѣстнымъ условіямъ.

2. Строка Ньютона

*) I. К. Клейберъ, „Парадоксальная формула для π“. „Вѣстникъ“ сем. V, стр. 196

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\ldots\ldots\ldots$$

приводится къ ряду

$$1+\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}+\ldots\ldots,\ (1)$$

если въ ней положить $x=+1$, и къ ряду

$$1-\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2),$$

если въ ней положить $x=-1$.

Намъ, значитъ, нужно заняться отысканіемъ условій сходимости рядовъ (1) и (2). Для этого введемъ слѣдующія двѣ леммы.

3. *Лемма I.* Если $a>0$, то

$$a-a^2<\lg(1+a)<a.$$

Дѣйствительно, если $p>q$ и n число цѣлое, то

$$p^n-q^n>n(p-q)q^{n-1},$$

что справедливо и для n безконечно большого.

Принявъ здѣсь $q=1$ и $p=1+\dfrac{a}{n}$, будемъ имѣть

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n-1>a,$$

а заставляя n стремиться къ безконечности, получимъ въ предѣлѣ

$$e^a-1>a \text{ или } \lg(1+a)<a.\ldots\ldots\ldots\ (\alpha)$$

Дальше, при тѣхъ же условіяхъ, что и прежде,

$$p^n-q^n<n(p-q)p^{n-1}.$$

Если здѣсь $p=1$ и $q=1-\dfrac{b}{n}$, гдѣ $b>0$, то

$$1-\left(1-\frac{b}{n}\right)^n<b,$$

откуда, переходя къ предѣлу, получимъ

$$1-e^{-b}<b \text{ или } b<\lg\left(\frac{1}{1-b}\right).$$

Чтобы послѣднее неравенство имѣло мѣсто, необходимо, чтобы b было меньше 1—цы, ибо въ противномъ случаѣ $\lg\left(\dfrac{1}{1-b}\right)$ будетъ величина мнимая. Поэтому можно положить въ этомъ неравенствѣ

$$b=\frac{a}{1+a}.$$

Сдѣлавъ это, получимъ

$$\frac{a}{1+a} < \lg(1+a);$$

а такъ какъ $\frac{a}{1+a} > a-a^2$, то подавно

$$a-a^2 < \lg(1+a).$$

Написавъ это неравенство совмѣстно съ нер. (α), получимъ окончательно

$$a-a^2 < \lg(1+a) < a.$$

4. *Лемма II.* Если m какое угодно конечное положительное число, соизмѣримое или несоизмѣримое, то произведенiе

$$P_n = \left(1+\frac{m+1}{p+1-m}\right)\left(1+\frac{m+1}{p+2-m}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{m+1}{p+n-m}\right)$$

при n безконечно большомъ имѣетъ предѣломъ ∞. Дѣйствительно, p можно всегда найти такимъ, чтобы $p+1>m>p$ и чтобы оно было цѣлое.

По предыдущей леммѣ

$$\frac{m+1}{p+1-m}-\frac{(m+1)^2}{(p+1-m)^2} < \lg\left(1+\frac{m+1}{p+1-m}\right) < \frac{m+1}{p+1-m},$$

$$\frac{m+1}{p+2-m}-\frac{(m+1)^2}{(p+2-m)^2} < \lg\left(1+\frac{m+1}{p+2-m}\right) < \frac{m+1}{p+2-m}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{m+1}{p+n-m}-\frac{(m+1)^2}{(p+n-m)^2} < \lg\left(1+\frac{m+1}{p+n-m}\right) < \frac{m+1}{p+n-m}.$$

Сложивъ эти неравенства и замѣтивъ, что

$$\lg\left(1+\frac{m+1}{p+1-m}\right)+\cdots\cdots+\lg\left(1+\frac{m+1}{p+n-m}\right)=\lg P_n,$$

получимъ

$$(m+1)\left\{\frac{1}{p+1-m}+\cdots\cdots+\frac{1}{p+n-m}\right\}-(m+1)^2\left\{\frac{1}{(p+1-m)^2}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(p+n-m)^2}\right\} < \lg P_n < (m+1)\left\{\frac{1}{p+1-m}+\cdots\cdots+\frac{1}{p+n-m}\right\}.$$

Такъ какъ $p<m$, то

$$p+1-m<1,\ p+1-m<2,\ldots\ldots\ p+n-m<n,$$

и

$$p+2-m>1,\ p+3-m>2,\ldots\ldots\ p+n-m>n-1,$$

почему

$$\frac{1}{p+1-m}>\frac{1}{1},\frac{1}{p+2-m}>\frac{1}{2},\ldots\ldots\frac{1}{p+n-m}>\frac{1}{n}$$

и

$$\frac{1}{(p+2-m)^2}<\frac{1}{1^2},\frac{1}{(p+3-m)^2}<\frac{1}{2^2},\ldots\frac{1}{(p+n-m)^2}<\frac{1}{(n-1)^2}.$$

Но рядъ

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n},$$

носящій названіе гармоническаго, есть расходящійся; его сумма растетъ вмѣстѣ съ n; рядъ же

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$$

есть сходящійся; поэтому изъ двухъ слѣдующихъ рядовъ:

$$\frac{1}{p+1-m}+\frac{1}{p+2-m}+\ldots+\frac{1}{p+n-m}$$

и

$$\frac{1}{(p+1-m)^2}+\frac{1}{(p+2-m)^2}+\ldots+\frac{1}{(p+n-m)^2}$$

первый есть расходящійся, второй—сходящійся, отсюда слѣдуетъ, что

$$\lim\lg P_n=\infty,\ \lg\lim P_n=\infty,$$

$$\lim P_n=e^{\infty}=\infty,\text{ ч. и т. д.}$$

5. *Теорема. Рядъ* (1) *сходится для* m, *удовлетворяющаго условію*

$$+\infty>\mathrm{m}>0.$$

Пусть въ ряду (1) m—положительная величина, соизмѣримая или несоизмѣримая, т. е.

$$p+1>m>p,$$

гдѣ p число цѣлое. Тогда рядъ этотъ можно представить въ видѣ $S_{p+1}+S_n$, гдѣ

$$S_{p+1}=1+\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}+\ldots\ldots+\frac{m.(m-1)\ldots.(m-p)}{(p+1)!},$$

$$S_n=-\frac{m(m-1)\ldots..(p+1-m)}{(p+2)!}+\frac{m(m-1)\ldots..(p+1-m)(p+2-m)}{(p+3)!}+\ldots..$$

$$+(-1)^n.\frac{m(m-1)\ldots(m-p)\ldots..(p+n-m)}{(p+1)!\,(p+2)\ldots.(p+n+1)}+\ldots\ldots\ldots\ldots..(n)$$

Сумма S_{p+1}, состоящая изъ конечнаго числа конечныхъ и опредѣленныхъ членовъ, есть сама величина конечная и опредѣленная.

Что же касается рав. (n), то вторая часть его есть знакопеременный рядъ, отъ сходимости или расходимости котораго зависитъ сходим. или расходим. ряда (1).

Для сходимости же ряда (n) необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim\left[\frac{m(m-1)\ldots(m-p)}{(p+1)!}\cdot\frac{(p+1-m)\ldots\ldots(p+n-m)}{(p+2)\ldots\ldots(p+n+1)}\right]_{n=\infty}=0,$$

или чтобы

$$\lim\frac{(p+1-m)\ldots\ldots(p+n-m)}{(p+2)\ldots\ldots(p+n+1)}\Bigg|_{n=\infty}=0,\ \ldots\ldots\ldots(\beta)$$

такъ какъ C_m^{p+1}, при нашихъ условiяхъ, есть величина конечная и опредѣленная.

Но (Лема II)

$$\lim\left|\frac{p+2}{p+1-m}\cdots\cdots\frac{p+n+1}{p+n-m}\right|_{n=\infty}=\lim\left(1+\frac{m+1}{p+1-m}\right)\cdots\left(1+\frac{m+1}{p+n-m}\right)_{n=\infty}=\infty.$$

Откуда и слѣдуетъ рав. (β), и, слѣдов., поставленная нами теорема справедлива.

6. *Теорема. Рядъ* (1) *сходится и для отрицательныхъ* m, *если только* $m>-1$.

Пусть въ ряду (1) $m=-k$, гдѣ $k>0$.

Въ такомъ случаѣ будемъ имѣть рядъ

$$1-\frac{k}{1}+\frac{k(k+1)}{1.2}-\ldots\ldots\ldots+(-1)^n\frac{k(k+1)\ldots(k+n-1)}{n!}+\cdots$$

Этотъ рядъ имѣетъ сумму, если $\lim u_n\Big|_{n=\infty}=0$; но $u_n=\frac{1}{P_n}$, гдѣ

$$P_n=\frac{1.2\ldots.n}{k(k+1)\ldots(k+n-1)}=\left(1+\frac{1-k}{k}\right)\left(1+\frac{1-k}{k+1}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{1-k}{k+n-1}\right),$$

и, если $k<1$, или, что то же, $m>-1$, $\lim P_n\Big|_{n=\infty}=\infty$ (лемма II): слѣдов.

$$\lim u_n\Big|_{n=\infty}=0.$$

Итакъ, рядъ первый сходится, если только $+\infty>m>-1$.

7. Положивъ въ ряду (1) $m=-1$, получимъ рядъ

$$1-1+1-1\ldots\ldots-(-1)^n,$$

который, на основанiи предыдущаго, не можетъ быть сходящимся. Поэтому встрѣчающiяся рав.

$$1-1+1-1+\cdots\cdots=\frac{1}{2}\ *)$$

---

*) Эйлеръ „Алгебра“ Т. I. фр. изд., стр. 231. Лакруа, „Traité de calcul dif. et de calc. int.“ Т. III, стр. 346.

$$1-1+1-1+\ldots\ldots=\frac{2}{3}\text{*)}$$

нелѣпы.

Обращаемся теперь къ ряду (2).

Студ.-техн. *С. Кричевскій* (Харьковъ).

(*Окончаніе слѣдуетъ*).

КЪ СТАТЬѢ „НОВЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ“ **).

Такъ какъ во всякомъ „новомъ“ многоугольникѣ сумма угловъ:

$$\alpha/_2+\beta/_2+\gamma/_2+\delta/_2+\varepsilon/_2+\ldots\ldots=2d,$$

то, точно такъ же, какъ для вывода формулъ, относящихся къ треугольникамъ, служитъ равенство:

$$\operatorname{tg}\alpha/_2+\operatorname{tg}\beta/_2+\operatorname{tg}\gamma/_2=\operatorname{tg}\alpha/_2\ \operatorname{tg}\beta/_2\ \operatorname{tg}\gamma/_2,$$

для четыреугольниковъ такое равенство будетъ:

$$\operatorname{tg}\alpha/_2+\operatorname{tg}\beta/_2+\operatorname{tg}\gamma/_2+\operatorname{tg}\delta/_2=\operatorname{tg}\alpha/_2\ \operatorname{tg}\beta/_2\ \operatorname{tg}\gamma/_2+\operatorname{tg}\alpha/_2\ \operatorname{tg}\beta/_2\ \operatorname{tg}\delta/_2+$$
$$+\operatorname{tg}\alpha/_2\ \operatorname{tg}\gamma/_2\ \operatorname{tg}\delta/_2+\operatorname{tg}\beta/_2\ \operatorname{tg}\gamma/_2\ \operatorname{tg}\delta/_2;$$

для пятиугольниковъ:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\alpha/_2+\operatorname{tg}\beta/_2+\operatorname{tg}\gamma/_2+\operatorname{tg}\delta/_2+\operatorname{tg}\varepsilon/_2=\ &\operatorname{tg}\alpha/_2\operatorname{tg}\beta/_2\operatorname{tg}\gamma/_2-\operatorname{tg}\alpha/_2\operatorname{tg}\beta/_2\operatorname{tg}\gamma/_2\operatorname{tg}\delta/_2\operatorname{tg}\varepsilon/_2\\ &+\operatorname{tg}\alpha/_2\ \operatorname{tg}\beta/_2\ \operatorname{tg}\delta/_2\\ &+\operatorname{tg}\alpha/_2\ \operatorname{tg}\beta/_2\ \operatorname{tg}\varepsilon/_2\\ &+\operatorname{tg}\alpha/_2\ \operatorname{tg}\gamma/_2\ \operatorname{tg}\delta/_2+\operatorname{tg}\alpha/_2\ \operatorname{tg}\gamma/_2\ \operatorname{tg}\varepsilon/_2+\\ &+\operatorname{tg}\alpha/_2\ \operatorname{tg}\delta/_2\ \operatorname{tg}\varepsilon/_2+\operatorname{tg}\beta/_2\ \operatorname{tg}\gamma/_2\ \operatorname{tg}\delta/_2+\\ &+\operatorname{tg}\beta/_2\ \operatorname{tg}\gamma/_2\ \operatorname{tg}\varepsilon/_2+\operatorname{tg}\gamma/_2\ \operatorname{tg}\delta/_2\ \operatorname{tg}\varepsilon/_2+\\ &+\operatorname{tg}\beta/_2\ \operatorname{tg}\delta/_2\ \operatorname{tg}\varepsilon/_2.\end{aligned}$$

И вообще, если означимъ сумму тангенсовъ через $\sum\operatorname{tg}\alpha/_2$; сумму различныхъ соединеній изъ нихъ по три:

$$\sum\operatorname{tg}\alpha/_2\ \operatorname{tg}\beta/_2\ \operatorname{tg}\gamma/_2,$$

по пяти:

$$\sum\operatorname{tg}\alpha/_2\ \operatorname{tg}\beta/_2\ \operatorname{tg}\gamma/_2\ \operatorname{tg}\delta/_2\ \operatorname{tg}\varepsilon/_2,$$

и т. д., то для многоугольника, имѣющаго $2n$ угловъ, можно пользоваться равенствомъ:

---

*) Prehn, журн. Crelle'я T. XLI.

**) См. „Вѣстникъ Оп. Физики“ № 172 стр. 84.

$$\Sigma \operatorname{tg} \alpha/2 = \Sigma \operatorname{tg} \alpha/2 \operatorname{tg} \beta/2 \operatorname{tg} \gamma/2 - \Sigma \operatorname{tg} \alpha/2 \operatorname{tg} \beta/2 \operatorname{tg} \gamma/2 \operatorname{tg} \delta/2 \operatorname{tg} \varepsilon/2 + \ldots .$$

и для многоугольника съ $2n+1$ углами:

$$\Sigma \operatorname{tg} \alpha/2 = \Sigma \operatorname{tg} \alpha/2 \operatorname{tg} \beta/2 \operatorname{tg} \gamma/2 - \Sigma \operatorname{tg} \alpha/2 \operatorname{tg} \beta/2 \operatorname{tg} \gamma/2 \operatorname{tg} \delta/2 \operatorname{tg} \varepsilon/2 + \ldots \pm$$

произв. tg.

Если „новые" многоугольники будутъ имѣть равные углы, то эти формулы обратятся въ приведенныя уже нами въ № 172 „Вѣстн. Оп. Физики" стр. 93.

Такимъ образомъ приведенныя нами формулы, вѣроятно, могутъ найти примѣненіе при разработкѣ вопросовъ, относящихся къ новымъ многоугольникамъ.

И. Износковъ (Казань).

ПРОСТАЯ ЗАДАЧА
и отдѣльное дѣйствіе въ ариѳметикѣ.

Какъ въ систематическомъ изложеніи различныхъ наукъ, даже наукъ строго-точныхъ по своему методу, такъ въ особенности въ элементарныхъ курсахъ учебныхъ предметовъ, нерѣдко допускаются—въ методологическихъ и дидактическихъ цѣляхъ—условныя и предварительныя обобщенія и понятія. Такого рода понятій, обобщеній и просто выраженій съ условнымъ значеніемъ довольно много въ ариѳметикѣ. Сюда относятся, напримѣръ, опредѣленія дѣйствій въ большинствѣ учебниковъ, правила умноженія и дѣленія цѣлыхъ чиселъ и десятичныхъ дробей на одну изъ степеней десяти, представленіе цѣлаго числа, какъ дроби, числитель которой равенъ этому числу, а знаменатель—единицѣ, понятіе объ уменьшеніи, увеличеніи, повтореніи числа, о дѣленіи его на само себя и мн. др. Значеніе ихъ разнородно. Иногда эти обобщенія позволяютъ распространить на тотъ или другой рядъ ариѳметическихъ понятій опредѣленія и выводы, извлеченныя изъ другой области; иногда же цѣль ихъ чисто практическая и заключается въ ясной и наглядной формулировкѣ тѣхъ ариѳметическихъ истинъ, которыя, по бѣдности научнаго языка,—вообще или только на данной ступени курса—не имѣютъ точнаго и вмѣстѣ краткаго словеснаго выраженія. Хотя, такимъ образомъ, существованіе подобныхъ соглашеній полезно и даже необходимо въ наукѣ и педагогической практикѣ, однако лишь до тѣхъ поръ, пока сознается ихъ условность. Въ противномъ же случаѣ они вносятъ въ мышленіе учащихся ложныя представленія о сущности предмета, пріучаютъ къ неосновательности въ заключеніяхъ, и наконецъ, при забвеніи границъ, въ которыхъ они имѣютъ raison d'être, ведутъ къ ошибочному приложенію ихъ къ вовсе неподлежащимъ понятіямъ. Поэтому является далеко нелишнимъ выяснить условность того или другого распространеннаго въ литературѣ предмета и школьной практикѣ допущенія, если имъ могутъ злоупотребить или уже злоупотребляютъ. Такова именно цѣль предлагаемой вниманію читателя замѣтки, содержаніе которой составляетъ пересмотръ установившихся взглядовъ на связь между сложностью задачи и сложностью дѣйствія.

По обычной терминологіи всякая задача есть или простая или сложная. При этомъ простою называется такая задача, рѣшеніе которой требуетъ выполненія одного ариѳметическаго дѣйствія, а сложною—требующая совершенія ряда дѣйствій. Въ приведенной классификаціи основное различіе есть различіе отдѣльнаго ариѳметическаго дѣйствія отъ ряда таковыхъ, а различеніе простыхъ и сложныхъ задачъ имѣетъ производный характеръ. Между тѣмъ дѣленіе ариѳметическихъ вычисленій на два указанные класса, если ихъ разсматривать независимо отъ примѣненія дѣйствій къ рѣшенію задачъ, едва-ли можетъ выдержать строгую критику и во всякомъ случаѣ есть не болѣе, какъ условное соглашеніе. Въ самомъ дѣлѣ, съ одной стороны въ отдѣльныхъ дѣйствіяхъ не трудно замѣтить признаки сложности, дѣлающей ихъ въ различныхъ отношеніяхъ аналогичными соединеніямъ нѣсколькихъ дѣйствій; съ другой стороны, по крайней мѣрѣ нѣкоторые ряды дѣйствій, при внимательномъ разсмотрѣніи, обнаруживаютъ способность сливаться въ одно сложное вычисленіе по тѣмъ же законамъ, на какихъ основаны общепринятые и сокращенные пріемы производства четырехъ дѣйствій надъ числами.

Собственно говоря, всѣ ариѳметическія дѣйствія, очевидно, въ высокой степени сложны, если стать на ту точку зрѣнія, что существуютъ только два первоначальныхъ ариѳметическихъ акта, къ которымъ въ концѣ концовъ могутъ быть сведены всѣ вычисленія, именнно—прибавленіе и отниманіе единицы ($a+1$ и $a-1$). Съ этой точки зрѣнія даже счетъ отдѣльныхъ предметовъ является сложнымъ дѣйствіемъ, потому что представляетъ собою рядъ актовъ прибавленія по единицѣ: $1+1=2$; $2+1=3$; $3+1=4$; $4+1=5$; ... $n+1$. Далѣе, присчитываніе и отсчитываніе, при помощи которыхъ могутъ быть рѣшены всѣ задачи на сложеніе и вычитаніе, еще очевиднѣе сводятся къ упомянутымъ первичнымъ актамъ; задачи же на умноженіе и дѣленіе въ свою очередь могутъ быть рѣшаемы сложеніемъ и вычитаніемъ равныхъ чиселъ *). Однако, не говоря уже объ отвлеченности такого понятія объ отдѣльномъ, не сложномъ дѣйствіи, оно всецѣло игнорируетъ тотъ фактъ въ развитіи ариѳметическихъ дѣйствій, что наряду съ усложненіемъ вычисленій идутъ упрощенія при помощи таблицъ дѣйствій и нумераціи, основанныя на принятіи равныхъ группъ за единицы (хотя отсюда же, съ другой стороны, вытекаетъ, что всѣ упрощенія по самому смыслу ихъ основаны на соглашеніи, расширяющемъ понятіе единицы).

Несравненно краснорѣчивѣе говорятъ въ пользу условности различія между дѣйствіемъ и рядомъ дѣйствій особенности производства сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія цѣлыхъ чиселъ, являющіяся результатомъ приложенія законовъ распредѣлительнаго и сочетательнаго. При десятичной системѣ счисленія (какъ и при всякой системѣ съ инымъ основаніемъ, но съ тѣми же принципами построенія) многозначное число легко распадается на группы составныхъ единицъ и столь же легко составляется изъ нихъ. Такъ, чтобы разложить число 5702 на слагаемыя 5000, 700 и 2, достаточно знать только нумерацію; того же условія вполнѣ достаточно и для полученія суммы этихъ десятичныхъ группъ. Поэтому является не только возможнымъ, но и удобнымъ,—дѣйствія надъ многозначными числами свести къ ряду дѣйствій надъ ихъ десятичными частями.

Дѣйствительно, обычный пріемъ сложенія чиселъ, состоящихъ изъ нѣсколькихъ разрядовъ, есть въ сущности длинная цѣпь отдѣльныхъ актовъ, имѣющихъ, правда, общую цѣль, но въ то же время—особыя данныя и особое значеніе. Возьмемъ примѣръ:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}4387\\5195\end{array} \\ \hline 9582 \end{array}$$

Производство дѣйствія въ данномъ случаѣ совершается согласно равенству $(4000+300+80+7)+(5000+100+90+5)=(4000+5000)+(300+100)+(80+90)+$ $+(7+5)$ и состоитъ *а*) въ послѣдовательномъ выдѣленіи десятичныхъ группъ изъ состава чиселъ (6 актовъ), *б*) въ сложеніи однородныхъ группъ (4 акта) и *в*) въ послѣдовательномъ составленіи изъ полученныхъ разрядныхъ суммъ общей суммы (3 акта), причемъ изъ нихъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ выдѣляются единицы слѣдующихъ высшихъ разрядовъ, прибавляемыя затѣмъ къ этимъ разрядамъ. Но всякое „выдѣленіе“ той или другой части числа есть, вѣдь, ни что иное, какъ вычитаніе данной части изъ этого числа, а всякое составленіе числа изъ разрядныхъ суммъ еще болѣе очевиднымъ образомъ сводится къ сложенію. Слѣдовательно, процессъ

*) Онѣ такъ и рѣшались въ ту эпоху развитія математическихъ знаній, когда не были изобрѣтены современные способы производства умноженія и дѣленія.

сложенія данныхъ чиселъ представляется рядомъ такихъ дѣйствій: 1) вычитаніе, 2) вычитаніе, 3) сложеніе и т. д.

$$\begin{array}{r} \text{Вычитаніе} \;\; -\,7213 \\ 3574 \\ \hline 3639, \end{array}$$

выполняемое на основаніи равенства $(6000+1100+100+13)-(3000+500+70+4)=$ $=(6000-3000)+(1100-500)+(100-70)+(13-4)$, представляетъ, какъ легко видѣть, не менѣе длинный рядъ дѣйствій, такъ какъ выдѣленіе потребныхъ для дѣйствія группъ уменьшаемаго осложняется заниманіемъ единицъ непосредственно высшаго разряда (вычитаніе) и прибавленіемъ ихъ къ слѣдующему нисшему разряду (сложеніе).

Производство умноженія многозначнаго числа на однозначное, общая формула котораго есть $(a+b+\ldots+n)r=ar+br+\ldots+nr$, состоитъ въ послѣдовательности дѣйствій, аналогичной производству сложенія; но число дѣйствій надъ разрядами въ первомъ случаѣ меньше, потому что при однозначномъ множителѣ нѣтъ разложенія одного изъ двухъ данныхъ на десятичныя группы. Уже нѣсколько большую сложность обнаруживаетъ умноженіе въ случаѣ, когда множитель есть группа единицъ одного изъ высшихъ разрядовъ. Такъ, если дано 28×400, то въ основѣ вычисленія будетъ формула $(20+8)(100\times4)=[(20+8)100]4=(100\times20+100\times8)4=$ $=100\times20\times4+100\times8\times4$, приводящая къ слѣдующему ряду дѣйствій: изъ состава множимаго одинъ за другимъ выдѣляются разряды (вычитаніе); множитель разлагается на производители 4 и 100 (дѣленіе); выдѣленная десятичная группа умножается на одинъ изъ этихъ производителей,—произведеніе умножается на другой и т. д. Нѣкоторые изъ этихъ элементарныхъ актовъ настолько рѣзко выдѣляются изъ общаго процесса умноженія, что въ задачахъ съ конкретными данными къ нимъ легко подобрать отдѣльные вопросы. Такимъ образомъ, напримѣръ, задача: — „Помѣщикъ купилъ 700 десятинъ земли. Сколько заплатилъ онъ за купленный участокъ, если каждая десятина обошлась ему въ 65 рублей?“—превращается въ сложную чрезъ приведеніе ея рѣшенія къ рѣшенію слѣдующихъ вопросовъ:

1) „Сколько стоили 100 десятинъ земли?“ $(65\times100=6500)$.

2) „Во сколько разъ 700 десятинъ стоили дороже, чѣмъ 100?“ $(700:100=7)$.

3) „Сколько стоилъ весь участокъ земли?“ $(6500\times7=45500)$.

Такая особенность умноженія числа на значущую цыфру, сопровождаемую однимъ или нѣсколькими нулями, довольно важна, кстати сказать, и въ методическомъ отношеніи, такъ какъ позволяетъ при объясненіи производства дѣйствія обойтись безъ неуклюже-длинныхъ, якобы наглядныхъ, а въ сущности — спутывающихъ дѣтей изображеній сложной группировки равныхъ слагаемыхъ, и притомъ дѣлаетъ возможнымъ объясненіе на задачахъ, въ тѣсной связи съ ихъ предметнымъ содержаніемъ, а не на отвлеченныхъ числовыхъ примѣрахъ. Наконецъ, въ случаѣ многозначнаго множителя нужное вычисленіе разлагается въ еще болѣе длинный рядъ дѣйствій съ отдѣльными разрядами. Положимъ, въ самомъ дѣлѣ, что требуется $a+b+c\ldots+m$ умножить на $\alpha\times e+\beta\times f+\gamma\times g+\ldots\ldots+\mu\times o$, причемъ a, b, $c\ldots m$ означаютъ разрядныя числа множимаго, — α, β, $\gamma\ldots\mu$ — отношеніе отдѣльныхъ единицъ различныхъ разрядовъ множителя къ простой единицѣ, наконецъ, e, f, $g\ldots o$ — числа единицъ соотвѣтствующихъ разрядовъ множителя. Въ такомъ случаѣ окончательный результатъ дѣйствія выразится слѣдующимъ знакоположеніемъ:

$$\begin{array}{l} a\times\alpha\times e+b\times\alpha\times e+c\times\alpha\times e+\ldots+m\times\alpha\times e+ \\ +a\times\beta\times f+b\times\beta\times f+c\times\beta\times f+\ldots+m\times\beta\times f+ \\ +a\times\gamma\times g+b\times\gamma\times g+c\times\gamma\times g+\ldots+m\times\gamma\times g+ \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+ \\ +a\times\mu\times o+b\times\mu\times o+c\times\mu\times o+\ldots+m\times\mu\times o. \end{array}$$

При такой сложности формулы дѣйствія, для умноженія, напримѣръ, четырехзначнаго числа на четырехзначное же, потребуется выполнить около 90 отдѣльныхъ дѣйствій надъ разрядными числами, если какъ множитель, такъ и множимое имѣютъ всѣ цыфры значущія. Всѣ эти вычисленія распадаются на отчетливо разграниченныя группы, имѣющія цѣлью опредѣленіе разрядныхъ или частныхъ произведеній и затѣмъ—общаго. Поэтому простую задачу:

„Поѣздъ желѣзной дороги прошелъ разстояніе между двумя станціями въ 45 минутъ, дѣлая по 275 саж. въ минуту. Какъ велико разстояніе между станціями?"—можно представить, какъ сложную, которую легко разложить на вопросы:

1) „Какое разстояніе прошелъ поѣздъ желѣзной дороги въ 5 минутъ?" ($275 \times 5 = 1375$).

2) „Какое разстояніе прошелъ онъ въ 40 минутъ?" ($275 \times 40 = 11000$).

3) „Какъ велико было разстояніе между станціями?" ($11000 + 1375 = 12375$).

Въ этомъ случаѣ, такъ же какъ и при умноженіи на значущую цыфру съ нулями, разсматривать простую задачу какъ сложную удобно въ видахъ уясненія ученикамъ основаній пріема умноженія.

Формула дѣленія отличается, повидимому, крайней несложностью. Такъ, если намъ даны a, b, $c \ldots n$ — части дѣлимаго $a + b + c + \ldots + n$, дающія въ результатѣ дѣленія всѣ единицы соотвѣтствующихъ разрядовъ частнаго, то $(a + b + c + \ldots n):d = a:d + b:d + c:d + \ldots + n:d$, гдѣ d есть дѣлитель. Простота этого знакоположенія зависитъ отъ того обстоятельства, что въ примѣненіи къ разрядамъ дѣлителя не имѣютъ силы законы распредѣлительный и сочетательный. Тѣмъ не менѣе, именно это дѣйствіе наиболѣе ясно представляется какъ рядъ нѣсколькихъ дѣйствій, условно принимаемыхъ за одно. Прежде всего дѣйствія надъ разрядными дѣлимыми состоятъ a) въ опредѣленіи цыфры частнаго (пробное дѣленіе, которому часто предшествуетъ отдѣленіе нисшихъ разрядовъ неполнаго дѣлимаго и дѣлителя для ихъ закругленія), b) въ умноженіи дѣлителя для опредѣленія точно раздѣленнаго числа и c) въ вычитаніи раздѣленнаго числа изъ дѣлимаго для повѣрки дѣйствія. Затѣмъ составленіе неполныхъ дѣлимыхъ само по себѣ есть цѣпь дѣйствій, хотя чрезвычайно простыхъ по выполненію, но по смыслу совершенно раздѣльныхъ.

Излишне было бы говорить здѣсь о возвышеніи въ степень и извлеченіи корней, такъ какъ дѣйствія эти не входятъ въ программу начальной ариѳметики. Извѣстно, впрочемъ, что, обладая весьма сложными формулами, они могутъ быть разложены въ длинные ряды элементарныхъ дѣйствій. Зато совершенно необходимо упомянуть объ умноженіи и дѣленіи на дробь. Въ томъ и другомъ случаѣ условность признанія за вычисленіемъ права на имя „дѣйствія", настолько очевидна, что въ литературѣ по методикѣ начальной ариѳметики задачи на отысканіе нѣсколькихъ равныхъ частей числа и на отысканіе числа по величинѣ нѣсколькихъ его долей нерѣдко, по крайней мѣрѣ на нисшихъ ступеняхъ курса, разсматриваются, какъ сложныя, рѣшаемыя чрезъ умноженіе и дѣленіе на цѣлыя числа. Напротивъ, самое это право настолько неочевидно, что нуждается въ особыхъ доказательствахъ, которыя, будучи въ сущности просты, съ трудомъ, однако, оцѣниваются дѣтскимъ мышленіемъ.

И. Синскій (Орша).

(*Продолженіе слѣдуетъ*).

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Преміи за изслѣдованія атмосферы. Американецъ Ходжкинсъ завѣщалъ Смитсонову Институту въ Вашингтонѣ 200000 долларовъ съ тѣмъ, чтобы проценты съ половины этой суммы были посвящены „увеличенію и распространенію знаній, касающихся свойствъ атмосфернаго воздуха въ связи съ благосостоянiемъ человѣка". На первый разъ Смитсоновъ Институтъ назначилъ слѣдующiя три премiи:

1) Премiя въ 10000 долларовъ за новое и важное открытiе, касающееся свойствъ атмосфернаго воздуха.

2) Премiя въ 2000 долларовъ за лучшее сочиненiе объ извѣстныхъ уже свойствахъ атмосфернаго воздуха по отношенiю къ которой либо изъ физико-математическихъ наукъ, или же за сочиненiе, указывающее на направленiе, въ которомъ должны быть сдѣланы будущiя изслѣдованiя воздуха въ виду несовершенства нашихъ знанiй объ атмосферѣ.

3) Премiя въ 1000 долларовъ за лучшее популярное сочиненiе объ атмосферѣ.

Присужденiе премiй произойдетъ 1 iюля 1894 года.

Кромѣ того Ходжкинсъ завѣщалъ весь остатокъ своего состоянiя Смитсонову Институту.

Крупный подарокъ получила парижская Академiя Наукъ отъ своего члена и бывшаго президента Аббади (Abbadie) и его жены. Подарокъ этотъ состоитъ:

1) изъ имѣнiя Abbadia въ нижнихъ Пиринеяхъ, приносящаго ежегодный доходъ въ 20000 франковъ, и

2) изъ 100 акцiй Французскаго Банка, представляющихъ капиталъ въ 400000 франковъ и ежегодный доходъ въ 15000 фр.

Г-да Аббади сохраняютъ за собою до своей смерти лишь право пользованiя этимъ имуществомъ, перешедшимъ нынѣ въ собственность Академiи, которая, въ свою очередь, обязывается:

1) никогда не производить въ имѣнiи Abbadia вивисекцiй,

2) сохранить наслѣдственное право найма имѣнiя за 35-ю фермерами, между которыми оно нынѣ распредѣлено, а въ случаѣ прекращенiя ихъ потомства—за туземцами басками, и

3) устроить въ имѣнiи обсерваторiю, въ которой до 1950 года долженъ быть составленъ каталогъ 500000 звѣздъ.

ЗАДАЧИ.

№ 562. Въ 1892—93 году запасной темой по ариѳметикѣ въ Варшавскомъ реальномъ училищѣ служила слѣдующая задача*):

„Нѣкто продалъ вексель въ 742,5 руб. съ математ. учетомъ за 2,0833.... года до срока по стольку процентовъ, по скольку надо отдать 3200 рублей, чтобы имѣть черезъ 3 года 4 мѣсяца 24 дня при-

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики" № 170, стр. 43.

были 652 руб. 80 коп. Вырученныя отъ продажи деньги были раздѣлены на 3 части, изъ которыхъ первая относилась ко второй, какъ $^{13}/_{44}$:0,(81), а вторая къ третьей, какъ $^{1}/_{17}$:0,02(7). На первую изъ этихъ частей былъ купленъ чай въ 52 руб. пудъ, а на вторую—въ 1,6 руб. фунтъ, и весь этотъ чай былъ смѣшанъ. Спрашивается, за сколько рублей должно продавать фунтъ смѣси, чтобы получить на затраченныя на всю эту покупку деньги 30% прибыли. Проценты простые. Годъ принимать въ 360 дней, мѣсяцъ—въ 30 дней".

Показать, какія условія въ этой задачѣ лишнія.

В. Макашовъ (Ив.-Вознес.)

№ 563. Прямою, проходящею черезъ середину D дуги ADC, раздѣлить на двѣ равновеликія части фигуру $ABCD$, составленную двумя прямыми AB и BC и дугою ADC.

NB. Задача эта рѣшена въ приписываемой Евклиду книгѣ „О дѣленіи фигуръ" (*περὶ διαιρέσεων βιβλίον*), подлинный текстъ которой утраченъ и которая дошла до насъ въ арабской обработкѣ.

В. Г. (Одесса).

№ 564. Найти всѣ цѣлыя и положительныя числа, удовлетворяющія уравненію

$$x^y = y^x.$$

Е. Буницкій (Одесса).

№ 565. Рѣшить уравненіе

$$x^3+3ax+a^3=1.$$

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 566. Вывести извѣстное соотношеніе между сторонами треугольника ABC:—$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2\mp 2AB.AM$ (гдѣ AM есть отрѣзокъ AB отъ A до основанія M высоты CM), не пользуясь теоремой Пиѳагора.

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 567. Слабо наэлектризованный металлическій шарикъ находится при потенціалѣ v; мы вводимъ его (черезъ отверстіе) внутрь большого металлическаго сосуда, доведеннаго до высокаго потенціала V, гдѣ $V > v$. Когда шарикъ коснется внутренней поверхности сосуда, то весь его зарядъ перейдетъ къ сосуду. Разъяснить, почему это не противорѣчитъ положенію, что электричество всегда переходитъ отъ мѣстъ большаго къ мѣстамъ меньшаго потенціала.

Проф. *О. Хвольсонъ* (Спб.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 75 (2 сер.). Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC высота AD дѣлитъ гипотенузу BC на два отрѣзка BD и DC. На катетахъ и ихъ продолженіяхъ найти точки, изъ которыхъ эти отрѣзки видны подъ равными углами и опредѣлить разстояніе этихъ точекъ отъ вершины прямого угла A.

1. Пусть $AB=c$, $AC=b$ и $b>c$. Изъ точки D радіусомъ DC описываемъ дугу, пересѣкающую продолженія катета AB въ точкахъ E и F. Перпендикуляры, возставленные изъ серединъ прямыхъ FC и EC, пересѣкаютъ катетъ AB въ искомыхъ точкахъ M и M'. Доказательство очевидно.

2. Описываемъ изъ D окружность, касательную къ AB. Касательныя, проведенныя къ ней изъ точки C, встрѣчаютъ AB въ искомыхъ точкахъ.

Обозначимъ MB черезъ x. Очевидно имѣемъ

$$\frac{MC}{x}=\frac{DC}{BD}=\frac{b^2}{c^2},\text{ откуда } MC=x\frac{b^2}{c^2}.$$

Изъ тупоугольнаго треугольника BMC имѣемъ:

$$\overline{BC}^2=\overline{MB}^2+\overline{MC}^2+2BM.AM,$$

или

$$b^2+c^2=x^2+x^2\frac{b^4}{c^4}+2(c-x)x,$$

откуда опредѣлимъ x, а затѣмъ найдемъ и $c-x=AM$:

$$AM=\frac{a^4b-ab^2\sqrt{a^4+a^2b^2-b^4}}{a^4-b^4}.$$

При $a=b$ выраженіе это обращается въ $0/0$. Истинную величину $(=0)$ найдемъ, умноживъ числителя и знаменателя на

$$a^4b+ab^2\sqrt{a^4+a^2b^2-b^4}.$$

К. Щиголевъ, Я. Ястржембовскій (Курскъ); *И. Бискъ, А. Рубиновскій* (Кіевъ); *И. Шамаевъ* (Новочеркасскъ).

№ 128 (2 сер.). Построить прямую, разстоянія которой отъ вершинъ A,B,C треугольника ABC пропорціональны соотвѣтственно сторонамъ BC, CA, AB.

На сторонѣ AB находимъ такую точку K, чтобы $AK{:}BK=BC{:}AC$, а на AC—такую точку L, чтобы $AL{:}CL=BC{:}AB$. Прямая KL, какъ нетрудно доказать, есть искомая. Такъ какъ на каждой сторонѣ треугольника существуютъ двѣ точки, разстоянія которыхъ отъ вершинъ обратно пропорціональны остальнымъ двумъ сторонамъ (одна—на сторонѣ, другая—на ея продолженіи), то задача имѣетъ 12 рѣшеній.

И. Бискъ (Кіевъ); *В. Россовская* (Курскъ).

№ 129 (2 сер.). Показать, что разстояніе центра тяжести усѣченной пирамиды отъ верхняго и нижняго основаній относятся какъ

$$(3B+2\sqrt{Bb}+b):(B+2\sqrt{Bb}+3b),$$

гдѣ черезъ b и B обозначены площади этихъ основаній.

Очевидно, что центръ тяжести усѣченной пирамиды лежитъ на линіи, соединяющей центры тяжести верхняго и нижняго основаній (прямая A). Дополнивъ усѣченную пирамиду до полной, обозначимъ разстояніе центра тяжести нижняго основанія отъ вершины пирамиды черезъ L, верхняго—черезъ l, высоту всей пирамиды — черезъ H, верхней отсѣченной части—черезъ h, разстояніе центра тяжести усѣченной пирамиды отъ центра тяжести нижняго основанія—черезъ x. Проведя черезъ центръ тяжести нижняго основанія плоскость, перпендикулярную къ прямой A, и замѣтивъ, что разстояніе центра тяжести полной пирамиды отъ центра тяжести нижняго ея основанія равно $L{:}4$, а разстояніе центра тяжести отсѣченной части отъ центра тяжести верхняго основанія равно $l{:}4$, возьмемъ моменты частей пирамиды относительно этой плоскости. Принимая единицу объема за единицу вѣса, и обозначая объемъ всей пирамиды черезъ V, отсѣченной — черезъ v, будемъ имѣть:

$$\frac{VL}{4}=(V-v)\,x+v\left(L-l+\frac{l}{4}\right),$$

откуда

$$x=\frac{VL-v(4L-3l)}{4(V-v)}.$$

Но

$$V=\frac{BH}{3},\ v=\frac{bh}{3},$$

поэтому

$$x=\frac{BHL-4bhL+3bhl}{4(BH-bh)}.$$

Разстояніе же центра тяжести усѣченной пирамиды отъ верхняго основанія равно $L-l-x$, поэтому искомое отношеніе

$$m=\frac{L-l-x}{x}=\frac{3BHL-4BHl+bhl}{BHL-4bhL+3bhl}\ldots\ldots(1)$$

Такъ какъ

$$L=\frac{Hl}{h},\ H^2=\frac{Bh^2}{b},$$

то, подставляя вмѣсто L и H эти выраженія въ (1) и произведя сокращенія, получимъ

$$m=\frac{3B^2+b^2-4B\sqrt{Bb}}{3b^2+B^2-4b\sqrt{Bb}}=\frac{(\sqrt{B}-\sqrt{b})^2(3B+b+2\sqrt{Bb})}{(\sqrt{B}-\sqrt{b})^2(3b+B+2\sqrt{Bb})}=\frac{3B+2\sqrt{Bb}+b}{B+2\sqrt{Bb}+3b}.$$

С. Вологдинъ (Пермь).

№ 147 (2 сер.). По даннымъ разстояніямъ основаній трехъ биссекторовъ внутреннихъ угловъ треугольника (отъ его сторонъ) вычислить его площадь и стороны.

Обозначимъ разстояніе основанія биссектора угла A отъ сторонъ b и c черезъ ϱ,—биссектора угла B отъ a и c—черезъ ϱ_1 и биссектора $\angle C$ отъ a и b — черезъ ϱ_2, а площадь треугольника черезъ $\triangle$. Имѣемъ:

$$\varrho(b+c)=\varrho_1(a+c)=\varrho_2(a+b=2\triangle, \ldots\ldots\ (1)$$

откуда легко получимъ

$$a+b+c=\triangle\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)\ldots\ldots\ (2),$$

а вычитая послѣдовательно (1) изъ (2), найдемъ

$$a=\triangle\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}-\frac{1}{\varrho}\right);\ b=\triangle\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right);\ c=\triangle\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_2}\right)\ (3).$$

Подставляя эти значенія въ извѣстное выраженіе площади треугольника по его сторонамъ, легко найдемъ

$$\triangle=\frac{4}{\sqrt{\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)\left(\frac{3}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_2}\right)\left(\frac{3}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_2}\right)\left(\frac{3}{\varrho_2}-\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_1}\right)}}.$$

Стороны опредѣлимъ, вставляя это выраженіе для $\triangle$ въ формулы (3).

NB. На эту задачу не было получено ни одного удовлетворительнаго рѣшенія.

№ 200 (2 сер.). Дана точка O и прямая MN. На прямой взяты точки $A, B, C, D, \ldots$ въ четномъ числѣ. Около треугольниковъ AOB, BOC, $COD, \ldots$ описаны окружности. Показать, что произведеніе діаметровъ четныхъ окружностей равно произведенію діаметровъ нечетныхъ.

Проведя $OP \perp MN$, найдемъ:

$$d_1=\frac{AO.BO}{OP},\ d_2=\frac{BO.CO}{OP},\ d_3=\frac{CO.DO}{OP},\ d_4=\frac{DO.EO}{OP}, \ldots\ d_n=\frac{AO.XO}{OP}.$$

Составивъ произведенія четныхъ и нечетныхъ діаметровъ, легко найдемъ требуемое доказательство.

В. Россовская, К. Щиголевъ, П. Писаревъ (Курскъ).

№ 219 (2 сер.). Показать, что мнимая единица $(\sqrt{-1})$ можетъ быть символически представлена въ видѣ непрерывной дроби

$$\sqrt{-1}=1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2-\dots}}}} \quad \text{или} \quad \sqrt{-1}=\cfrac{1}{0-\cfrac{1}{0-\cfrac{1}{0-\dots}}}$$

1). $\sqrt{-1}=1-\frac{1}{x_1}$, откуда $x_1=\frac{1+\sqrt{-1}}{2}$

$x_1=1-\frac{1}{x_2}$, откуда $x_2=1+\sqrt{-1}=2-\frac{1}{x_1}$,

слѣдовательно

$$\sqrt{-1}=1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{x_1}}}=1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2-\dots}}}}$$

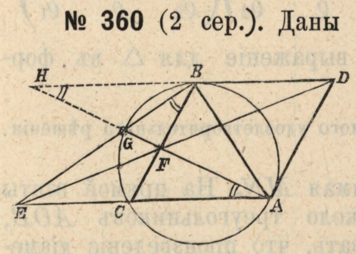
2). $\sqrt{-1}=\frac{1}{0+x_1}$, откуда $x_1=-\sqrt{-1}=-\frac{1}{0+x_1}$,

поэтому

$$\sqrt{-1}=\cfrac{1}{0-\cfrac{1}{0+x_1}}=\cfrac{1}{0-\cfrac{1}{0-\cfrac{1}{0-\dots}}}$$

И. Качановскій (Пермь); *И. Вонсикъ* (Воронежъ); *В. Тюнинъ* (Казань); *А. Рѣзновъ* (Самара).

№ 360 (2 сер.). Даны два равносторонніе треугольника ABC и ABD, имѣющіе одну сторону общую. Черезъ D проводимъ сѣкущую, которая пересѣкаетъ сторону AC въ E и сторону BC—въ F.



Фиг. 39.

Найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія прямыхъ BE и AF.

Пусть точка пересѣченія прямыхъ BE и AF будетъ G (фиг. 39). Продолжимъ BD и AG до пересѣченія въ точкѣ H. Такъ какъ $\triangle ACF \infty \triangle HBF$ и $\triangle BDE \infty \triangle CEF$, то

$$\frac{BH}{AC}=\frac{BF}{CF},\ \frac{BD}{CE}=\frac{BF}{CF},\ \frac{BH}{AC}=\frac{BD}{CE} \text{ или } \frac{BH}{AB}=\frac{BC}{CE},$$

а такъ какъ $\angle ABH=\angle BCE$, то $\triangle ABH \infty \triangle ECB$. Слѣдовательно $\angle AHB=\angle CBE=\angle EAH$. А такъ какъ въ треугольникахъ AFC и BFG $\angle BFG=\angle AFC$, то

$$\angle BGF = \angle BCA = 60^0,$$

т. е. геометрическимъ мѣстомъ точки G служитъ окружность, описанная около треугольника ABC.

К. Щиголевъ (Курскъ); *В. Буханцевъ* (Борисоглѣбскъ); *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ).

№ 369 (2 сер.). Разстояніе между двумя параллельными стѣнами было a. Онѣ покосились, такъ что одна изъ нихъ повернулась на уголъ α_1, а другая на уголъ α_2. На высотѣ h черезъ эти стѣны продѣтъ желѣзный стержень съ винтовыми нарѣзками и гайками. Когда стержень былъ нагрѣтъ до нѣкоторой температуры, гайки были подвинчены къ стѣнамъ. При охлажденіи стержня стѣны выпрямились. Опредѣлить, до какой температуры былъ нагрѣтъ стержень, предполагая, что онъ не растягивался и былъ нагрѣтъ равномѣрно.

Изъ условій задачи очевидно имѣемъ:

$$a+h(\operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\alpha_2)=a[1+k(x-t)],$$

гдѣ x—искомая температура, а t—температура стержня по охлажденіи. Отсюда

$$x=\frac{h(\operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\alpha_2)+akt}{ak}.$$

А. Рѣзновъ (Самара); *К. Щиголевъ* (Курскъ); *А. П.* (Пенза).

NB. Во всѣхъ трехъ рѣшеніяхъ $t=0^0$.

№ 385 (2 сер.). Даны два подобные треугольника. Стороны одного треугольника пусть будутъ a, b и c, стороны другого—m, n и q, причемъ a и m, b и n, c и q суть сходственныя стороны, а p и p_1—полупериметры треугольниковъ. Доказать справедливость равенства

$$\sqrt[4]{p(p-a)(p-b)(p-c)}+\sqrt[4]{p_1(p_1-m)(p_1-n)(p_1-q)}=$$
$$=\sqrt[4]{(p+p_1)(p-a+p_1-m)(p-b+p_1-n)(p-c+p_1-q)}.$$

Пусть $a{:}m=b{:}n=c{:}q=p{:}p_1=r$. Тогда

$$p=rp_1,\ a=rm,\ p-a=r(p_1-m),\ p-b=r(p_1-n),\ p-c=r(p_1-q).$$

Подставляя эти величины въ первую часть предложеннаго равенства, получимъ:

$$r\sqrt[4]{p_1(p_1-m)(p_1-n)(p_1-q)}+\sqrt[4]{p_1(p_1-m)(p_1-n)(p_1-q)}=$$
$$=(r+1)\sqrt[4]{p_1(p_1-m)(p_1-n)(p_1-q)}=\sqrt[4]{p_1(r+1)(p_1-m)(r+1)(p_1-n)(r+1)(p_1-q)(r+1)}$$

Но такъ какъ

$$p_1(r+1)=p_1r+p_1=p+p_1,$$

$$(p_1-m)(r+1)=p_1r-mr+p_1-m=p-a+p_1-m,\ \text{и т. д.},$$

то

$$\sqrt[4]{p_1(r+1)(p_1-m)(r+1)(p_1-n)(r+1)(p_1-q)(r+1)}=$$
$$=\sqrt[4]{(p+p_1)(p-a+p_1-m)(p-b+p_1-n)(p-c+p_1-q)}.$$

Очевидно, что предложенное равенство есть аналитическое выраженіе теоремы: *сумма сторонъ квадратовъ, равновеликихъ двумъ даннымъ подобнымъ треугольникамъ, равна сторонѣ квадрата, равновеликаго треугольнику, подобному даннымъ, периметръ котораго равенъ суммѣ периметровъ данныхъ треугольниковъ.*

К. Щиголевъ (Курскъ); *В. Шишаловъ* (Ив.-Вознес.); *К. Капріелли*, *П. Ивановъ* (Одесса); *В. Буханцевъ* (Борисоглѣбскъ); *С. Бабанская* (Тифлисъ); *П. Хлѣбниковъ* (Тула); *А. П.* (Пенза).

№ 387 (2 сер.). Вычислить площадь треугольника, если извѣстно, что

$$r:\varrho_a:\varrho_b:\varrho_c=k:l:m:n \text{ и } \varrho_a+\varrho_b+\varrho_c=t,$$

гдѣ r — радіусъ внутренняго вписаннаго въ треугольникъ круга, а ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c — радіусы трехъ внѣшнихъ вписанныхъ круговъ.

Изъ данныхъ уравненій легко получимъ:

$$\varrho_a=\frac{rl}{k},\ \varrho_b=\frac{rm}{k},\ \varrho_c=\frac{rn}{k};\ \ldots\ldots\ (1),$$

$$\varrho_a+\varrho_b+\varrho_c=r\frac{l+m+n}{k}=t, \text{ откуда } r=\frac{tk}{l+m+n}.$$

Подставляя это значеніе r въ ур. (1), опредѣлимъ ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c. Остается найденныя значенія подставить въ извѣстную формулу

$$\Delta=\sqrt{r\varrho_a\varrho_b\varrho_c};$$

тогда найдемъ:

$$\Delta=\left[\frac{t}{l+m+n}\right]\sqrt{klmn}.$$

А. Васильева, *К. Исаковъ* (Тифлисъ); *А. Рѣзновъ* (Самара); *К. Щиголевъ*, (Курскъ); *А. П.* (Пенза); *К. Капріелли* (Одесса); *В. Шишаловъ* (Ив.-Вознес.).

№ 432 (2 сер.). Разложить на множители

$$a^3+b^3-c^3+3abc.$$

Прибавивъ къ данному выраженію и отнявъ отъ него $3a^2b+3ab^2$, получимъ:

$$(a+b)^3-3ab(a+b-c)-c^3=(a+b-c)(a^2+b^2+c^2-ab+ac+bc).$$

О. Озаровская (Спб.); *Я. Тепляковъ* (Радомысль); *П. Ивановъ* (Одесса); *К. Исаковъ* (Манглисъ).

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Одесса, 24-го Ноября 1893 г.

„Центральная типо-литографія“, уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. Болгарова

Обложка
пщется

Обложка
ищется