Обложка
ищется

Обложка
пщется

XVII Сем. 20-го ноября 1894 г. № 10.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 202.

ОЧЕРКЪ
ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЛОБАЧЕВСКАГО.

(Продолженіе).*

Уравненіе XXVI намъ даетъ

$$\sin\Pi(a) = \frac{\sin B \sin C}{\cos A + \cos B \cos C}, \tag{5}$$

откуда:

$$1 + \sin\Pi(a) = \frac{2\cos\frac{A+B-C}{2}\cos\frac{A+C-B}{2}}{\cos A + \cos B\cos C},$$

$$1 - \sin\Pi(a) = \frac{2\cos\frac{A+B+C}{2}\cos\frac{B+C-A}{2}}{\cos A + \cos B\cos C}.$$

Принимая теперь во вниманіе, что

$$A + B + C = \pi - \Delta,$$

гдѣ Δ означаетъ площадь треугольника, мы представимъ эти два равенства въ слѣдующемъ видѣ:

*) См. „Вѣстн. Оп. Физики" №№ 174, 178, 179, 183, 187, 188, 189, 190, 194, 195 196, 198, 199 и 201.

$$1+\sin\Pi(a)=\frac{2\sin\left(C+\frac{\Delta}{2}\right)\sin\left(B+\frac{\Delta}{2}\right)}{\cos A+\cos B\cos C}\tag{6}$$

$$1-\sin\Pi(a)=\frac{2\sin\frac{\Delta}{2}\sin\left(A+\frac{\Delta}{2}\right)}{\cos A+\cos B\cos C}.\tag{7}$$

Изъ уравненій (5), (6) и (7) на основаніи формулъ XIX, мы найдемъ

$$\sin\Pi\left(\frac{a}{2}\right)=\sqrt{\frac{\sin B\sin C}{\sin\left(B+\frac{\Delta}{2}\right)\sin\left(C+\frac{\Delta}{2}\right)}}\tag{8}$$

$$\operatorname{tg}\Pi\left(\frac{a}{2}\right)=\sqrt{\frac{\sin B\sin C}{\sin\frac{\Delta}{2}\sin\left(A+\frac{\Delta}{2}\right)}}.\ *)\tag{9}$$

При помощи формулъ (8) и (9) и имъ аналогичныхъ мы получаемъ:

$$\operatorname{cotg}\Pi\left(\frac{a}{2}\right)\operatorname{cotg}\Pi\left(\frac{b}{2}\right)\sin\Pi\left(\frac{c}{2}\right)=\frac{\sin\frac{\Delta}{2}}{\sin C}.$$

Обозначая черезъ h_a перпендикуляръ, опущенный изъ вершины A на сторону a, мы имѣемъ (ур. III):

$$\sin C=\frac{\operatorname{cotg}\Pi(h_a)}{\operatorname{cotg}\Pi(b)}.$$

Подставляя же это выраженіе въ предыдущее равенство, мы найдемъ:

$$\sin\frac{\Delta}{2}=\operatorname{cotg}\Pi\left(\frac{a}{2}\right)\operatorname{cotg}\Pi\left(\frac{b}{2}\right)\sin\Pi\left(\frac{c}{2}\right)\operatorname{cotg}\Pi(h_a)\operatorname{tg}\Pi(b).$$

При помощи равенства XVIII (a) не трудно убѣдиться, что

$$\operatorname{cotg}\Pi\left(\frac{b}{2}\right)\operatorname{tg}\Pi(b)=\frac{1}{2}\sin\Pi\left(\frac{b}{2}\right)\tag{10}$$

и потому окончательно:

$$\sin\frac{\Delta}{2}=\frac{1}{2}\sin\Pi\left(\frac{b}{2}\right)\sin\Pi\left(\frac{c}{2}\right)\operatorname{cotg}\Pi\left(\frac{a}{2}\right)\operatorname{cotg}\Pi(h_a).\tag{XXXII}$$

Если нашъ треугольникъ прямоугольный, и c означаетъ гипотенузу, то $h_a=b$; принимая при этомъ во вниманіе уравненіе (10), мы найдемъ:

---

*) Формула эта обраруживаетъ, что любымъ значеніемъ A, B и C, для которыхъ $A+B+C<\pi$, соотвѣтствуютъ дѣйствительныя значенія a, b и c, потому что всѣ аргументы, входящія подъ знакъ радикала, не превышаютъ π и потому имѣютъ положительные sinus'ы.

$$\sin\frac{\Delta}{2} = \operatorname{cotg}\Pi\left(\frac{b}{2}\right)\operatorname{cotg}\Pi\left(\frac{a}{2}\right)\sin\Pi\left(\frac{c}{2}\right).$$

Символъ Δ означаетъ въ этихъ равенствахъ отношенiе площади даннаго треугольника къ площади (δ) такого треугольника, для котораго $F(ABC) = 1$; выражая это явнымъ образомъ и обозначая черезъ Δ' и c' площадь и гипотенузу прямоугольнаго треугольника, два катета котораго равны единицѣ длины, мы получили:

$$\sin\frac{\Delta}{2\delta} = \sin\Pi\left(\frac{b}{2}\right)\sin\Pi\left(\frac{c}{2}\right)\operatorname{cotg}\Pi\left(\frac{a}{2}\right)\operatorname{cotg}\Pi(h_a)$$

$$\sin\frac{\Delta'}{2\delta} = \operatorname{cotg}\Pi\left(\frac{1}{2}\right)\operatorname{cotg}\Pi\left(\frac{1}{2}\right)\sin\Pi\left(\frac{c'}{2}\right).$$

Предположимъ теперь, что величина l неопредѣленно возрастаетъ, такъ что отрѣзки $a, b, c\ldots$ равно какъ и избранная единица мѣры становится чрезвычайно малыми по сравненiю съ l, иными словами отношенiя $\frac{a}{l}, \frac{b}{l}, \frac{c}{l}, \frac{1}{l}\cdots$ стремятся къ нулю, сохраняя въ этомъ случаѣ въ послѣднихъ равенствахъ только безконечно малыя перваго порядка, мы найдемъ: *)

$$\frac{\Delta}{2\delta} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2l}\cdot\frac{h_a}{l} \tag{11}$$

$$\frac{\Delta'}{2\delta} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{l}\cdot\frac{1}{l}. \tag{12}$$

Равенство (11) обнаруживаетъ аналитически справедливость сдѣланнаго нами выше утвержденiя:

$$\lim\frac{\delta}{\Delta'} = \infty_{\,(l=\infty)} \qquad **) \tag{13}$$

---

*) Здѣсь, какъ и во многихъ моментахъ геометрiи Лобачевскаго, чрезвычайно важно слѣдить за тѣмъ, какiя величины приняты за единицы мѣры. Отношенiе $\frac{\Delta}{\delta}$ равняется отношенiю разности $\pi - (A + B + C)$ къ единицѣ угловой мѣры. На этомъ основанъ весь предыдущiй выводъ. Но равенство это не зависитъ отъ выбора единицы угловой мѣры, ибо величина δ пропорцiональна этой единицѣ. Мы можемъ поэтому считать, что всѣ углы выражены въ линейной мѣрѣ, т. е. отношенiемъ дуги къ геодезическому радiусу на предѣльной поверхности (см. предыд. главу стр. 153) и, слѣдовательно, имѣемъ право замѣнить въ лѣвыхъ частяхъ уравненiй (11) и (12) sinus'ы безконечно малыхъ аргументовъ—ихъ аргументами.

**) Можетъ быть ни въ одномъ предложенiи значенiе формальной стороны вопроса не выступаетъ съ такой очевидностью какъ здѣсь. Въ самомъ дѣлѣ, фактически здѣсь утверждается только, что значенiе аналитическаго выраженiя $\frac{\Delta'}{\delta}$ стремится къ безконечности вмѣстѣ съ l. Здѣсь нѣтъ геометрическаго факта, доступнаго экспериментальной повѣркѣ. Въ самомъ дѣлѣ, здѣсь утверждается, что предѣломъ отношенiя площади треугольника съ опредѣленной суммой угловъ къ площади прямоугольнаго треугольника, въ которомъ катеты равны единицѣ длины, служитъ безконеч-

Прибавимъ къ этому еще слѣдующее замѣчаніе:

Дѣля уравненіе (11) на уравненіе (12), мы находимъ, что для площадей треугольниковъ, стороны которыхъ чрезвычайно малы въ сравненіи съ l, какъ и слѣдовало ожидать, имѣетъ мѣсто евклидово соотношеніе:

$$\frac{\triangle}{\triangle'} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{1}\right)\cdot\left(\frac{h_a}{1}\right).$$

Обращаемся теперь къ опредѣленію площади круга. Впишемъ для этого въ кругъ правильный многоугольникъ, имѣющій n сторонъ. Обозначимъ черезъ $\triangle$ площадь равнобедреннаго треугольника, составленнаго двумя радіусами (ϱ) и стороной (a) вписаннаго многоугольника.

По формулѣ XXX имѣемъ:

$$\sin\frac{\triangle}{2} = \frac{1}{2}\sin^2\Pi\left(\frac{\varrho}{2}\right)\operatorname{cotg}\Pi\left(\frac{a}{2}\right)\operatorname{cotg}\Pi(h), \tag{14}$$

гдѣ h апоѳема многоугольника. Когда число сторонъ n неопредѣленно возрастаетъ, длина стороны a становится безконечно малой и въ этомъ предположеніи, пренебрегая безконечно малыми высшихъ порядковъ, мы можемъ замѣнить $\sin\frac{\triangle}{2}$, $\operatorname{cotg}\Pi\left(\frac{a}{2}\right)$ и $\operatorname{cotg}\Pi(h)$ черезъ $\frac{\triangle}{2}$, $\frac{a}{2l}$ и $\operatorname{cotg}\Pi(\varrho)$, —такъ что мы получимъ:

$$\triangle = \frac{a}{2l}\sin^2\Pi\left(\frac{\varrho}{2}\right)\operatorname{cotg}\Pi(\varrho). \tag{15}$$

Отсюда

$$\lim_{(n=\infty)}(n\triangle) = \frac{\lim(na)}{2l}\sin^2\Pi\left(\frac{\varrho}{2}\right)\operatorname{cotg}\Pi(\varrho).$$

Принимая во вниманіе (форм. XXVIII), что

$$\lim_{(n=\infty)}(na) = 2\pi l\operatorname{cotg}\Pi(\varrho),$$

мы получимъ:

$$\text{пл. кр.} = \mathrm{K} = \sin^2\Pi\left(\frac{\varrho}{2}\right)\operatorname{cotg}^2\Pi(\varrho) = 4\operatorname{cotg}^2\Pi\left(\frac{\varrho}{2}\right). \qquad \text{XXXIII}$$

Отсюда слѣдуетъ: что площадь сектора (τ), дуга котораго имѣетъ длину s выражается такимъ образомъ:

ность, когда l неопредѣленно возрастаетъ. Но при этомъ единица длины не должна зависѣть отъ l. Измѣнять l реально значитъ переходить изъ одного трехмѣрнаго пространства въ другое, да еще сохраняя при этомъ одну и ту-же единицу длины. Но мы располагаемъ только однимъ пространствомъ, и слѣдовательно, никакого реальнаго геометрическаго факта здѣсь нѣтъ. Но если мы примѣнимъ нашу формальную систему къ другимъ многообразіямъ, гдѣ переходъ отъ одного многообразія къ другому гозможенъ, то это предложеніе получитъ вполнѣ реальный смыслъ. Такъ въ системѣ Caley'a величина l опредѣляется радіусомъ шара, къ которому примѣняется система Лобачевскаго. Здѣсь возможно сравненіе одного многообразія съ другимъ, и теорема имѣетъ реальный смыслъ. Мы лишены возможности войти здѣсь въ большія подробности по этому вопросу.

$$\tau := \frac{s}{C} 4\pi \operatorname{cotg}^2 \Pi\left(\frac{\varrho}{2}\right) = \frac{2s \operatorname{cotg}^2 \Pi\left(\frac{\varrho}{2}\right)}{l \operatorname{cotg} \Pi(\varrho)} = \frac{s}{l} \sin \Pi\left(\frac{\varrho}{2}\right). \qquad (16)$$

Если s сохраняетъ постоянную величину а ϱ неопредѣленно возрастаетъ, то секторъ приближается къ полосѣ, ограниченной дугой предѣльной линіи и двумя осями кривой.

Выраженіе (16) стремится при этомъ къ опредѣленному предѣлу $\left(\frac{s}{l}\right)$, и *въ этомъ смыслѣ* можно сказать, что площадь полосы, ограниченной предѣльной дугой и двумя осями, равна конечной величинѣ $\frac{s}{l}$ или $\operatorname{cotg} \Pi(\lambda)$, гдѣ 2λ хорда дуги. Съ другой стороны, площадь треугольника стремится при этомъ, какъ мы видѣли выше (ур. XXI), къ величинѣ $\pi - 2\Pi(\lambda)$, поэтому для площади сегмента, ограниченной дугой предѣльной линіи и ея хордой, мы получимъ выраженіе

$$\tau' = 2 \operatorname{cotg} \Pi(\lambda) + 2\Pi(\lambda) - \pi. \qquad \text{XXXIV}$$

Замѣтимъ, что переходъ отъ уравненія (14) къ уравненію (15) предполагаетъ, что въ равенствѣ $\triangle = \pi - (A + B + C)$ углы выражены въ линейной мѣрѣ. Въ этой же мѣрѣ долженъ быть поэтому выраженъ уголъ $\Pi(\lambda)$, а два прямыхъ угла (π) выражаются числомъ π.

Этимъ мы заканчиваемъ элементарную часть геометріи Лобачевскаго.

В. Каганъ (Спб.).

(Продолженіе слѣдуетъ).

О ПОВѢРКАХЪ АРИѲМЕТИЧЕСКИХЪ ДѢЙСТВІЙ.

Безъ повѣрки невозможна серіозная работа. Въ астрономіи, тригонометріи, геометріи стараются придти къ цѣли различными путями и въ тожествѣ результатовъ видятъ подтвержденіе вѣрности разсужденій и вычисленій. Отъ начинающаго занятія математикой нельзя требовать, чтобъ онъ умѣлъ находить различныя рѣшенія поставленнаго вопроса; при простотѣ соображеній, требуемыхъ задачей, достаточно, если будетъ повѣряться каждое дѣйствіе отдѣльно.

Положеніе повѣрокъ въ курсѣ ариѳметики незавидное, въ математической практикѣ—жалкое. Правда, о нихъ говорятъ, за незнаніе караютъ единицами, но потомъ предаютъ забвенію, какъ ненужный хламъ. Думаю, что такимъ небрежнымъ отношеніемъ къ повѣркамъ вредятъ всему курсу ариѳметики больше, чѣмъ это кажется съ перваго взгляда. Нѣтъ увѣренности въ вычисленіяхъ! Загляните въ черновую средняго ученика,—и вы будете поражены путаницей, пачкотней, которыя въ ней безраздѣльно царствуютъ. Ученикъ видитъ, что у него не выходитъ, и онъ рѣшительно не знаетъ, чему это приписать,—ошибкамъ вычисленія или неправильности въ разсужденіяхъ. Снова и снова повторяетъ онъ тѣ же вычисленія и... тѣ же ошибки: такъ мы склонны ходить по проторенной дорожкѣ! Мнѣ кажется, эта психологическая черта не достаточно принимается во вниманіе при выборѣ пріемовъ повѣрки.

Возьмемъ примѣры.

793. 648	648. 793	793	648
6344	1944	513864:648	513864:793
3172	5832	4536	4758
4758	4536	6026	3806
513864	513864	5832	3172
		1944	6344
		1944	6344

Каждый изъ примѣровъ можетъ быть провѣренъ любымъ изъ остальныхъ. Какой богатый выборъ! Но всмотритесь попристальнѣе: четвертый то-же, что первый, третій то же, что второй,—только съ усложненіями (вычитанія!),—и во всѣхъ „семью восемь..., шестью девять...“ Разъ мы ошиблись, сказавъ „семью восемь пятьдесятъ четыре и шестью девять пятьдесятъ шесть“, мы ничѣмъ не ограждены отъ повторенія ошибки, и повѣрка наша, основанная на перемѣстительномъ законѣ, безполезна. А какъ ученику провѣрить 489703.5 или 375.375? Гораздо лучше при повѣркѣ произведенія опираться на распредѣлительный и сочетательный законы. Тогда для способнаго ученика—широкое поле искусныхъ соображеній, а для слабаго—шаблонъ, который его не подведетъ, какъ это можетъ случиться при пользованіи перемѣстительнымъ закономъ.

Шаблонъ $N . 648 + N(1000 - 648) = N . 1000$. Особый пріемъ повѣрки $N . 648 = N . 600 + (N . 6) . 8 = N . 8 + (N . 8) . 80$.

793.648	793.352	793.648	793.648
6344	1586	4758	6344
3172	3965	38064	50752
4758	2379	513864	513864
513864	513864		
	793000		

Можно воспользоваться тѣмъ, что $N . 6 + N . 4 = N . 10$ $(4758 + 3172 = 7930)$ и $(N . 4) . 2 = N . 8$ $(3172 . 2 = 6344)$. Само собой разумѣется, не нужно выписывать частныя произведенія: нужно производить повѣрку на мѣстѣ (складывая, напр., вторую и третью строчку по діагонали и свѣряя съ множимымъ; умножая вторую строчку на 2, сравнивать получаемый результатъ—цифра за цифрой—съ первой строчкой).

Для нашего произведенія возможны еще пріемы: $N . 6 + N . 8 - N . 4 = N . 10$ или $N . 4 + N . 8 = (N . 6) . 2$.

На основаніи опыта могу утверждать, что большинство учениковъ приготовительнаго класса можетъ хорошо освоиться съ сочетательнымъ закономъ, а распредѣлительный доступенъ всѣмъ. Особые пріемы для провѣрки произведенія придумываются классомъ охотно, даже съ увлеченіемъ.

Для провѣрки частнаго считаю цѣлесообразнымъ предложить подобный же пріемъ: если $N = n.q + r$, то $q(10^k - n) + N = q.10^k + r$ *).

557 487563:875 500 631 *188*	875.443 3500 3500 2625 487563 875*188*	Особый пріемъ $N:875 = (N + N:7):1000$ 487563:875 188 487375:7 69625 557

Повѣрку вычитанія (сложеніемъ) можно считать достаточной; а то прибѣгать къ ариѳметическому дополненію.

$$\begin{array}{r} 348073 \\ 97978 \\ \hline 250095 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \dot{3}48073 \\ 2022 \\ \hline 250095 \end{array}$$

Повѣрка сложенія (перестановкой слагаемыхъ) удовлетворительна, если прикладывать цифру за цифрой. Но такой пріемъ сложенія нельзя рекомендовать, такъ какъ онъ мѣшаетъ быстротѣ вычисленія; предпочтительнѣе складывать группами. Примѣръ:

$$\begin{array}{r} 2486 \\ 378 \\ 1044 \\ 982 \\ \hline 4890 \end{array}$$

$6 + 4 = 10$, $8 + 2 = 10$, пишемъ нуль, запоминаемъ 2; $8 + 4 + 8 = 20$, $7 + 2 = 9$, пишемъ 9, запоминаемъ 2; $4 + 3 + 2 = 9$, $9 + 9 = 18$, пишемъ 8; 4.

Тогда перестановка слагаемыхъ не создастъ новыхъ комбинацій: будетъ безполезна.

Cauchy (Comptes rendus, t. XI, p. 789) предложилъ своеобразную повѣрку.

$$\begin{array}{r} 2486 \\ 378 \\ 1044 \\ 982 \\ \hline 122 \\ \hline 4890 \end{array}$$

$6 + 8 + 4 + 2 = 20$, записываемъ 20 (двойку между чертами); $8 + 7 + 4 + 8 + 2 = 29$, записываемъ 29; $4 + 3 + 9 + 2 = 18$, записываемъ 18; $2 + 1 + 1 = 4$.

Повѣрка очевидна: сумма всѣхъ *цифръ* надъ нижнею чертою дастъ $20+29+18+4=(1+2+2).10+4+8+9=71$. Провѣрка производится быстро, потому что въ массѣ цифръ легко подыскиваются составляющія группу: $2+8=10$, $4+6=10$, (20), $3+7 = 10$, (30), $8 + 2 = 10$, (40), $1 + 9 = 10$, (50), $4 + 4 + 2 = 10$, (60), $8 + 2 = 10$, (70), *71*.

Начинающимъ для облегченія позволяютъ записывать цифры, которыя впослѣдствіи удерживаются памятью (въ нашемъ примѣрѣ 2,2,1). Было бы грѣшно не воспользоваться этими цифрами для изящной повѣрки Cauchy.

До тѣхъ поръ, пока вычисленія въ приготовительномъ и первомъ классахъ не станутъ на серіозную почву, съ расширеніемъ предѣла въ

*) Недавно въ Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht 1894,3 я встрѣтилъ указаніе, что подобный пріемъ былъ рекомендованъ въ Crelle's Journal, B. XIII (1835) s. 209.

устныхъ вычисленіяхъ до тысячи, пока ученикъ не сроднится съ приближенными вычисленіями, не нужно удивляться тѣмъ ошибкамъ, которымъ изумляются рецензенты въ выпускныхъ экзаменнаціонныхъ работахъ: что сѣемъ, то и жнемъ.

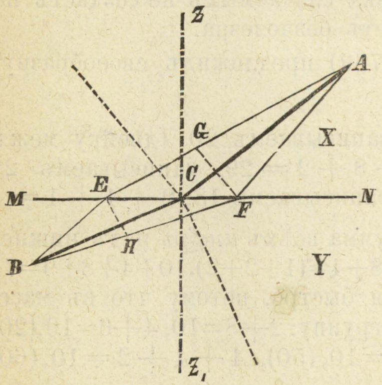
П. Долгушинъ (Умань).

ПРОСТѢЙШАЯ БРАХИСТОХРОНИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА.

Задачи о брахистохронахъ, общій смыслъ которыхъ заключается въ нахожденіи вида кривой, по которой должна слѣдовать точка, движущаяся по даннымъ законамъ, чтобы пройти въ кратчайшее время изъ даннаго положенія въ нѣкоторое другое, тоже заданное положеніе, представляются весьма интересными, но вмѣстѣ съ тѣмъ малодоступными незнакомымъ съ варіаціоннымъ исчисленіемъ лицамъ. Только весьма немногія изъ брахистохроническихъ задачъ могутъ быть рѣшены при помощи элементарной математики.

Простѣйшая и интереснѣйшая изъ этого рода задачъ составляетъ предметъ настоящей замѣтки.

Пусть на чертежѣ (фиг. 43) MN представляетъ сѣченіе плоскости чертежа съ плоскостью раздѣла двухъ однородныхъ срединъ X и Y.



Фиг. 43.

Пусть нѣкоторая точка, движущаяся прямолинейно, обладаетъ въ срединѣ X постоянною скоростью v, которую она мѣняетъ на плоскости раздѣла, такъ что, по переходѣ въ средину Y, наша точка продолжаетъ двигаться въ этой срединѣ прямолинейно но съ другою постоянною скоростью v_1.

Спрашивается, по какому пути должна слѣдовать наша точка, чтобы въ кратчайшее время пройти изъ точки A въ срединѣ X въ точку B въ срединѣ Y, при чемъ предполагается, что движеніе нашей точки совершается въ плоскости чертежа. Очевидно, что наша точка можетъ, вообще говоря, перейти изъ A въ B по различнымъ путямъ; всѣ они будутъ представлять ломанныя линіи съ точками перегиба на линіи MN. Пусть ломанная ACB будетъ искомая, то есть время t, потребное для прохожденія нашею точкою линіи ACB, менѣе времени движенія нашей точки по всякой другой траекторіи, по какой могла бы она двигаться при условіяхъ задачи для того, чтобы перейти изъ A въ B.

Между разными траекторіями движенія нашей точки всегда однако можно выбрать такія двѣ, что, слѣдуя по нимъ, точка пройдетъ изъ A въ B въ одинаковое время, весьма мало разнящееся отъ t. Пусть AEB и AFB будутъ двѣ такія траекторіи, причемъ согласно условію, ломанныя AEB и AFB таковы, что имѣетъ мѣсто равенство

$$\frac{AE}{v}+\frac{EB}{v_1}=\frac{AF}{v}+\frac{FB}{v_1}, \text{ или}$$

$$\frac{AE-AF}{v}=\frac{FB-EB}{v_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I.}$$

Отложивъ на AE отъ A до G часть, равную AF, и на BF отъ B до H часть, равную BE, очевидно имѣемъ на основаніи I:

$$\frac{EG}{v}=\frac{HF}{v_1}, \text{ или}$$

$$\frac{EG}{HF}=\frac{v}{v_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II.}$$

Треугольники EGF и EHF даютъ:

$$\frac{EG}{EF}=\frac{\sin EFG}{\sin EGF} \text{ и } \frac{HF}{EF}=\frac{\sin FEH}{\sin EHF},$$

что, по раздѣленіи перваго на второе, даетъ:

$$\frac{EG}{HF}=\frac{\sin EFG}{\sin FEH}\times\frac{\sin EHF}{\sin EGF}=\frac{v}{v_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{III.}$$

Равенство III остается справедливымъ, какую бы мы пару ломанныхъ между A и B ни разсматривали, лишь бы онѣ удовлетворяли условію, что движущаяся точка проходитъ ихъ въ одинаковое время, мало отличающееся отъ t.

Но чѣмъ менѣе будетъ эта разница во времени, тѣмъ ближе будутъ наши ломанныя другъ къ другу и къ ломанной ACB; наконецъ, когда эта разница сдѣлается менѣе всякой данной величины, эти три ломанныя сольются. Тогда точки G и H перейдутъ въ C, а углы EGF и EHF въ прямые углы JCA и BCK, ибо линіи GF и EH, какъ основанія равнобедренныхъ треугольниковъ, всегда перпендикулярны къ биссекторамъ угловъ при вершинѣ этихъ треугольниковъ, а съ этими биссекторами сливаются въ предѣлѣ такія ломанныя, какъ AFB и AEB. Въ послѣднемъ случаѣ уравненіе III принимаетъ видъ:

$$\frac{v}{v_1}=\frac{\sin JCM}{\sin KCN} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{IV.}$$

На углы JCM и KCN соотвѣтственно равны угламъ ACZ и BCZ_1, какъ углы со взаимно перпендикулярными сторонами, а потому окончательно равенство IV даетъ:

$$\frac{v}{v_1}=\frac{\sin ACZ}{\sin BCZ_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{V.}$$

Такимъ образомъ, при условіяхъ данной задачи, *брахистохрона есть такая ломанная линія съ одною точкою перелома, что части ея составляютъ съ перпендикуляромъ* ZZ_1 *къ линіи раздѣла* MN, *возставленнымъ въ точкѣ перелома, углы, коихъ синусы пропорціональны скоростямъ точки въ данныхъ срединахъ.*

С. Стемпневскій (Пермь).

Примѣчаніе. Если углы ACZ и BCZ_1 соотвѣтственно равны углу паденія луча AC и углу преломленія этого же луча въ средину, то равенство V даетъ: $^v/_{v_1} = n$, гдѣ n показатель преломленія средины У по отношенію къ срединѣ X. Этотъ выводъ подтвержденъ опытными изслѣдованіями Фуко въ 1850 году.

ПО ПОВОДУ РЕЦЕНЗІИ МОЕГО „ВВЕДЕНІЯ ВЪ МЕТОДИКУ ФИЗИКИ".

Ѳ. Шведовъ.

Въ №№ 199 и 200 „Вѣстника Опытной Физики" помѣщена анонимная статья, направленная противъ моего „Введенія въ методику физики". Рѣзкій тонъ статьи, доходящій иногда до глумленія, неправильность полемическихъ пріемовъ, выразившаяся въ очевидномъ искаженіи нѣкоторыхъ изъ моихъ мыслей, — отнимаютъ у возраженій рецензента убѣдительность, а сокрытіе авторомъ своего имени лишаетъ статью и авторитетности. Въ этомъ отношеніи рецензія могла бы быть оставлена мною безъ отвѣта. Но съ другой стороны рецензентъ обнаруживаетъ въ своихъ сужденіяхъ такое глубокое невѣдѣніе успѣховъ современнаго естествознанія, такое неслыханное легкомысліе въ разрѣшеніи вопросовъ высшаго порядка, что съ этой стороны не представляется возможности оставить безъ всякаго вниманія рецензію, тѣмъ болѣе, что она напечатана въ журналѣ педагогическомъ.

Первый вопросъ—о происхожденіи понятія о *силѣ*, какъ физическомъ дѣятелѣ.

Въ своемъ Введеніи я причисляю силу къ *дѣятелямъ* природы и опредѣляю ее такъ: силой называется все то и только то, что̀ способно вызвать въ насъ ощущеніе усилія.

Рецензентъ только *мирится* съ выраженіемъ *дѣятель* природы, но не находитъ правильнымъ причислить силу къ этимъ дѣятелямъ. Между тѣмъ этотъ терминъ общепринятъ въ иностранной литературѣ (напр., l'électricité est un *agent* de la nature). Но затѣмъ онъ совершенно отрицаетъ правильность вышеуказаннаго опредѣленія силы, и приводитъ слѣдующее соображеніе. „Значитъ, тяжесть моего тѣла, для меня лично, не есть сила, потому что не ощущаю отъ нея *никакого* усилія, а за то напр. книжка проф. Шведова — сила, потому что она есть тотъ внѣшній дѣятель, который вызвалъ во мнѣ „усиліе" понять, что за охота была автору гоняться за такою оригинальностью".

Рецензентъ до того не привыченъ къ расчлененію понятій, что не знаетъ разницы между усиліемъ мускульнымъ или мышечнымъ, о которомъ рѣчь въ моемъ Введеніи, и усиліемъ мозговымъ или умственнымъ, необходимымъ для пониманія книжки. Онъ не успѣлъ еще замѣтить того мускульнаго усилія, которое чувствуетъ каждый при поднятіи своего собственнаго тѣла, напр. на второй этажъ, или отдѣльно частей тѣла, напр. руки. Затѣмъ, онъ думаетъ, что вышеизложенная связь между усиліемъ и силой придумана *мной*, изъ-за оригинальничанья. Этимъ онъ доказываетъ, что никогда не читалъ такой общедоступной книги какъ популярныя лекціи В. Томсона (Лорда Кельвина) „О строеніи матеріи", книги, которая издана пять лѣтъ назадъ, содержитъ рѣчи, произнесенныя одиннадцать лѣтъ назадъ и которая переведена на языки нѣмецкій, французскій и русскій.

Если бы онъ имѣлъ привычку интересоваться естествознаніемъ даже только въ качествѣ любителя, то нашелъ бы въ книгѣ Томсона слѣдующія слова*).

„Наконецъ, остается... *чувство силы*. На меня сильно нападали за провозглашеніе этого шестого чувства... Что же такое это *мускульное чувство?*... Какимъ образомъ и гдѣ я воспринимаю это ощущеніе? Анатомы скажутъ, что оно чувствуется въ мускулахъ руки, и соотвѣтствующая воспринимательная способность довольно подходящимъ образомъ названа мускульнымъ чувствомъ".

Итакъ первый, кто ввелъ въ физическую терминологію *мускульное чувство*, какъ субъективный реактивъ на внѣшняго дѣятеля—силу, былъ *не я*, а В. Томсонъ. По Томсону, это чувство и сила—понятія, относящіяся другъ къ другу такъ, какъ зрѣніе къ свѣту, слухъ къ звуку. M. Brillouin, переводчикъ В. Томсона, замѣчаетъ, что выраженіе *le sens musculaire* есть ничто иное, какъ *effort*, т. е. *усиліе*, и этотъ терминъ употребленъ мной во Введеніи.

Нужно однако замѣтить, что В. Томсонъ, отдѣливъ отъ осязанія чувство теплоты, не отчленяетъ усиліе отъ осязанія собственно, разсматривая ихъ какъ два вида одного и того же ощущенія. Я же иду далѣе, отдѣляю осязательное ощущеніе отъ мускульнаго чувства, какъ того требуютъ факты, заимствованные изъ анатоміи и физіологіи и провѣренные анализомъ моихъ собственныхъ ощущеній.

Второй вопросъ—происхожденіе идеи о пространствѣ.

Въ своемъ Введеніи я ставлю слѣдующее положеніе: „мускулъ есть единственный источникъ понятія о пространствѣ, а элементарная форма этого понятія есть перемѣщеніе".

Рецензентъ оцѣниваетъ это положеніе такъ: „авторъ (методики) возвращается къ столь понравившемуся ему *усилію* и самъ дѣлаетъ безполезное усиліе создать новую теорію эмпиризма о пространствѣ".

Этими словами рецензентъ обнаруживаетъ невѣроятно низкій уровень своего научнаго образованія. Онъ приписываетъ эту теорію мнѣ,

---

*) Цитирую по русск. переводу В. П. Вейнберга, 1895: Лордъ Кельвинъ (Сэръ В. Томсонъ) Строеніе матеріи. Рѣчь: Шесть вратъ познанія. Стр. 207—209.

не подозрѣвая, что надъ разработкой ея трудились до меня Гельмгольцъ, Спенсеръ, Вундтъ, Сѣченовъ и многіе другіе. Онъ даже не интересуется заглянуть иногда въ Труды Съѣздовъ русскихъ естествоиспытателей и прочесть тѣ популярныя рѣчи, въ которыхъ резюмируются окончательные выводы естествознанія.

4-го января 1894 г., на IX съѣздѣ естествоиспытателей въ Москвѣ И. М. Сѣченовъ произнесъ въ Общемъ Собраніи рѣчь „О предметномъ мышленіи съ физіологической точки зрѣнія". Въ этой рѣчи мы читаемъ слѣдующее:

„Со временъ Канта было сильно распространено мнѣніе, что для воспріятія пространственныхъ и преемственныхъ отношеній у человѣка есть особый органъ, вродѣ внутренняго зрѣнія, дающій сознанію непосредственно свѣдѣнія объ отношеніяхъ того и другого рода. Мысль эта оказалась до извѣстной степени справедливой, потому что такой органъ дѣйствительно существуетъ и долженъ былъ бы носить имя органа *мышечнаго чувства.*

„Выяснить дѣятельность этого органа будетъ всего удобнѣе на примѣрѣ.

„Когда человѣкъ разсматриваетъ окружающую его группу предметовъ, или присматривается къ подробностямъ одного сложнаго предмета, глаза его перебѣгаютъ поочередно съ одной точки на другую. Вслѣдствіе этого человѣкъ получаетъ раздѣльный рядъ зрительныхъ впечатлѣній отъ отдѣльныхъ частей предмета, въ промежутки между которыми вставлены повороты глазъ и головы, т. е. *сокращеніе* нѣкоторыхъ изъ глазныхъ или головныхъ *мышцъ*, съ сопровождающимъ ихъ мышечнымъ чувствомъ... Значитъ благодаря поворотамъ глазъ и головы сложный зрительный образъ распадается на части, связанныя между собой пространственными отношеніями и *факторомъ* связующимъ зрительныя звенья въ пространственную группу, *является мышечное чувство*".

Сравнивая эту цитату съ соотвѣтственнымъ мѣстомъ моего Введенія, находимъ разницу только въ способѣ выраженій. Я говорю: мускульное ощущеніе; Сѣченовъ—мышечное чувство. У меня это ощущеніе названо источникомъ понятія о пространствѣ; у него—факторомъ, связующимъ отдѣльныя впечатлѣнія въ пространственную группу. Затѣмъ и я и Сѣченовъ, мы говоримъ объ эмпирическомъ происхожденіи пространственныхъ идей не какъ о гипотезѣ, подлежащей доказательству, а какъ о чемъ-то несомнѣнномъ, не требующемъ ни цитатъ, ни ссылокъ на литературу предмета. [Замѣчу кстати, что заимствовать другъ у друга мы не могли, такъ какъ я на съѣздѣ не былъ и занятъ былъ приготовленіемъ Введенія къ печати].

Впрочемъ, мнѣ могутъ возразить, что вопросъ о происхожденіи идеи о пространствѣ входитъ скорѣе въ область общей философіи, чѣмъ естествовѣдѣнія и что поэтому рецензентъ, если только онъ философъ, могъ не придавать особеннаго вѣса мнѣнію спеціалистовъ по физикѣ или физіологіи. Чтобы предупредить подобное возраженіе, я уступаю на нѣкоторое время слово спеціалисту по философіи, проф. Н. Н. Ланге*).

*) Мнѣніе, высказанное въ засѣданіи педагогическаго отдѣленія Новороссійскаго общества естествоиспытателей 16-го декабря 1894, по поводу разбираемой рецензіи.

Эмпирическая теорія образованія идеи о пространствѣ отнюдь не нова. Она была уже разработана въ цѣлое ученіе шотландскимъ врачемъ-философомъ. Т. Броуномъ (Philosophy of the Human Mind, 1820), Джемсомъ Миллемъ (Analysis of Human Mind, 1829) Джономъ Стуартомъ Миллемъ, Бэномъ (The senses and the intelect, 1855), Г. Спенсеромъ (Principles of psychologiy, 1855), Гельмгольцемъ (Handbuch der phys. Optik), Вундтомъ (Grundzüge der physiol. Psychologie) и мн. др.

Рецензентъ требуетъ неоспоримыхъ фактовъ въ защиту того, что понятіе о перемѣщеніи примитивнѣе понятія о пространствѣ; въ противномъ случаѣ онъ будетъ считать понятіе о пространствѣ *основнымъ*, а понятіе о перемѣщеніи производнымъ.

Первичность идеи пространства сравнительно съ идеей перемѣщенія можетъ быть понимаема или въ смыслѣ *прирожденности* идеи пространства или въ смыслѣ того, что эта идея пріобрѣтается ощущеніями зрѣнія и осязанія ранѣе или помимо всякаго *относительнаго* перемѣщенія частей организма. Первое мнѣніе есть чисто метафизическое, опровергнуто еще Локкомъ и не заслуживаетъ критики. Что же касается втораго предположенія, то ему противорѣчитъ громадное число фактовъ. Сюда принадлежатъ: *а*) опыты надъ зрительнымъ пространствомъ оперированныхъ слѣпорожденныхъ (опыты Чесельдена, Уартропа, Франца и др.); *б*) всѣ зрительныя иллюзіи относительнаго движенія; *в*) факты зависимости зрительныхъ пространственныхъ представленій отъ мышечнаго направленія зрительныхъ осей, аккомодаціи, и конвергенціи; *г*) иллюзіи паралитическаго косоглазія и проч. Изъ всѣхъ подобныхъ фактовъ я укажу на одинъ, явно доказывающій, что осязательное пространство не можетъ быть всецѣло объясняемо изъ одниxъ осязательныхъ ощущеній, безъ ощущеній относительнаго перемѣщенія. Какъ извѣстно В. Веберъ показалъ существованіе особыхъ круговъ осязанія, т. е. тѣхъ участковъ кожи, въ которыхъ осязательныя раздраженія не различаются отдѣльно, но совпадаютъ въ одно ощущеніе. Эти круги оказались разной величины на разныхъ частяхъ тѣла (т. е. тонкость пространственнаго чувства разныхъ частей кожи различна). Какъ указалъ Вундтъ, размѣры этихъ круговъ тѣмъ меньше (чуткость осязанія къ представленію о пространствѣ тѣмъ больше), чѣмъ больше относительная подвижность соотвѣтственной части тѣла. Слѣдовательно осязательная локализація явно зависитъ отъ опыта, доставляемаго перемѣщеніемъ. Далѣе, Чермакъ показалъ, что, несмотря на отсутсвіе локализаціи въ предѣлахъ круга осязанія, перемѣщеніе точки раздраженія въ предѣлахъ того же круга сознается нами какъ перемѣщеніе. Отсюда слѣдуетъ, что чувствительность къ перемѣщенію тоньше чувствительности осязательной локализаціи. Поэтому *не перемѣщеніе* должно быть выводимо *изъ представленія о пространствѣ* вообще, *а наоборотъ*.

Далѣе, рецензентъ говоритъ: „если бы сознаніе перемѣщенія могло быть намъ доступно помимо ранѣе составившагося представленія о пространствѣ, то какимъ необъяснимымъ противорѣчіемъ законовъ природы казалось бы намъ то, что, сознавая будто бы (по мнѣнію проф. Шведова) перемѣщеніе частей внутреннихъ*) своихъ мышцъ, мы вмѣстѣ съ

*) Раздѣленіе мышцъ на внутреннія и, надо думать, внѣшнія принадлежитъ рецензенту.

тѣмъ лишены вовсе возможности сознавать перемѣщеніе всего своего тѣла, когда внѣшнія чувства бездѣйствуютъ?"

Эти слова рецензента обнаруживаютъ полное непониманіе того предмета, о которомъ онъ взялся разсуждать. Рецензентъ думаетъ, что проф. Шведовъ, или кто другой, могъ когда либо утверждать, что самое перемѣщеніе вмѣстѣ съ тѣломъ *всей* мышцы (безъ всякаго измѣненія въ ней самой) можетъ быть нами ощущаемо и служить для составленія идеи о пространствѣ. Онъ даже не подозрѣваетъ, что рѣчь идетъ *не* о *перенесеніи* мышцы вмѣстѣ со всѣмъ тѣломъ, а о ея *сокращеніи* и одновременномъ утолщеніи, что и является физіологическимъ раздражителемъ. Подобный взглядъ на значеніе словъ „перемѣщеніе мышцъ", могъ явиться только у человѣка, незнакомаго съ азбукой физіологіи.

Далѣе рецензентъ говоритъ: „можетъ быть есть животныя, надѣленныя отъ природы особымъ органомъ воспріятія перемѣщенія, но проф. Шведовъ напрасно старается надѣлить такимъ органомъ и человѣка".

А эти слова доказываютъ, что рецензентъ — рѣшительный игнорантъ въ естествовѣдѣніи. Онъ, значитъ, никогда не слыхалъ, ни о полукружныхъ каналахъ внутренняго уха, ни о ихъ функціи, состоящей (по мнѣнію Гольца, Маха, Брейера) въ воспріятіи перемѣщеній, соотвѣтствующихъ общему перенесенію тѣла.

Этого отзыва профессора философіи болѣе чѣмъ достаточно для выясненія научнаго ценза автора рецензіи, какъ философа и біолога. Поэтому оставляя въ сторонѣ разсужденія рецензента о моихъ опредѣленіяхъ *времени*, *явленія* и *тѣла*, перехожу къ анализу его міровоззрѣнія въ области физики.

Въ своемъ Введеніи я говорю: все, что дѣйствуетъ или предполагается способнымъ дѣйствовать на осязаніе, называется веществомъ или матеріей. Рецензентъ возражаетъ:

„Легко ли будетъ втолковать учащимся, что хотя они могутъ только осязать *вѣтеръ*, а не самый воздухъ, надо однако говорить, что не вѣтеръ есть вещество а воздухъ; а то хоть первое и логичнѣе съ точки зрѣнія даннаго опредѣленія вещества, но за такую логику можно схватить двойку на экзаменахъ".

Итакъ, по мнѣнію рецензента, мы осязаемъ не воздухъ во время вѣтра, а вѣтеръ; таково по крайней мѣрѣ, будто бы, воззрѣніе учениковъ, котораго при преподаваніи физики разрушать не слѣдуетъ. Въ тѣхъ же современныхъ учебникахъ сказано, что вѣтеръ есть движеніе воздуха; откуда слѣдуетъ, что рецензентъ можетъ осязать движеніе, можетъ осязать полетъ ядра, ходъ поѣзда. Такъ выходитъ по его логикѣ. Изъ того обстоятельства, что кольцо, которое мы постоянно носимъ на рукѣ, не дѣйствуетъ на осязаніе (мы не замѣчаемъ его присутствія или отсутствія) той части кожи, къ которой оно постоянно прикасается, рецензентъ долженъ заключить, что не кольцо вещественно, а перемѣщеніе кольца вокругъ пальца.

Каждому, кто прошелъ краткій учебникъ физики, знакомы и понятны слѣдующіе опыты.

Если произвести давленіе на поршень цилиндра, наполненнаго водой, то давленіе, которое есть ничто иное, какъ сила, *передается* равномѣрно всѣмъ стѣнкамъ и дну цилиндра.

Если произвести быстрое сжатіе воздуха въ одномъ концѣ трубки наполненной воздухомъ, то это сжатіе, а также соотвѣтствующая ему сила упругости, *передаются* отъ слоя къ слою, пока не достигнутъ другого конца трубки.

Если потянуть за одинъ конецъ очень длинную проволоку или нитку, висящую свободно, то сила натяженія *передается* отъ одного мѣста проволоки сосѣднему до тѣхъ поръ, пока натяженіе не дойдетъ до другого ея конца.

Но рецензентъ не слыхалъ словъ *передача силы* на разстояніе. „Завидую, говоритъ онъ, тѣмъ, которые поймутъ цѣль автора этихъ опредѣленій, надѣлившаго не только свѣтъ, звукъ, и теплоту, но даже силу свойствомъ занимать и мѣнять мѣсто въ пространствѣ". Онъ очевидно и не подозрѣваетъ, что при распространеніи волнъ свѣта, теплоты, звука въ непрерывной упругой средѣ передача энергіи была бы невозможна, если бы при этомъ передача силы упругости отсутствовала.

Во Введеніи въ методику физики я указываю на тѣ четыре формы или принципа, въ которые можетъ и должно укладываться изученіе соотношеній между физическими дѣятелями.

Рецензентъ утверждаетъ, что эти принципы мною „выдуманы". При этомъ однако остается неяснымъ, что собственно выдумано мною— всѣ ли четыре принципа, а въ томъ числѣ и принципъ превращенія энергіи, или же только нѣкоторые. Въ своей рѣчи, которую я цитировалъ выше, И. М. Сѣченовъ приходитъ, съ своей стороны, къ слѣдующему заключенію: „всѣ *мыслимыя* отношенія между предметами внѣшняго міра подводятся въ настоящее время подъ три категоріи: *совмѣстное существованіе, послѣдованіе* и *сходство*... Какъ частный случай послѣдованія, приводится еще причинная зависимость". На долю другого частнаго случая остается зависимость не причинная, формальная. Такимъ образомъ, получаются три формы, изъ которыхъ одна распадается на два случая, а всего — четыре мыслимыхъ формы, соотношеній между предметами внѣшняго міра, а въ томъ числѣ между физическими дѣятелями.

Взглядъ рецензента на назначеніе методики физики тоже своеобразенъ. Я причисляю *вещество* къ дѣятелямъ природы. Но рецензентъ находитъ это неправильнымъ, потому, что „въ современныхъ учебникахъ физики на первыхъ страницахъ физики говорилось обыкновенно объ инертности вещества, объ его самонедѣятельности". Къ этому критеріуму рецензентъ постоянно прибѣгаетъ въ своихъ разсужденіяхъ о недостаткахъ моей методики (достоинства онъ не усматриваетъ ни одного). *Тѣло* въ моей методикѣ опредѣлено не такъ, какъ въ современныхъ учебникахъ, *сила* тоже не такъ, вещество тоже не такъ и т. д. „И это Методика физики!" восклицаетъ рецензентъ въ изумленіи.

Такъ, вотъ та причина, по которой моя Методика „не выдерживаетъ критики". Не учебники должны подчиняться требованіямъ методики, а наоборотъ: методика должна повторять буквально то, что прописано въ учебникахъ, для того, чтобы выдержать критику рецензента.

Если въ учебникѣ сказано, что „осязаніе не имѣетъ особаго органа", что „масса есть количество вещества", что „теплоемкость есть количество тепла" и т. д., то все это нужно воспроизвести автору методики, иначе его твореніе будетъ „никому не нужная игра словъ".

Методика обязана копировать фразы учебниковъ даже и тогда, если они, по смыслу, противорѣчатъ другъ другу. Рецензентъ не сообразилъ, что судьи, предъ которыми должна предстать методика физики, суть педагогія и философія физики, но ни въ какомъ случаѣ не учебники.

Мнѣ остается предположить, что рецензентъ, не будучи ни философомъ, ни біологомъ, ни физикомъ, рѣшился возвысить свой голосъ въ вопросѣ о преподаваніи физики въ качествѣ педагога. Познакомимся съ его познаніями въ этой области.

Педагогическій опытъ, говоритъ онъ, показываетъ, что дѣти не только младшаго, но и старшаго возраста „интересуются сами по себѣ *менѣе всего* именно природою и ея законами".

Не смотря на то, что педагогическій опытъ привелъ рецензента къ такому результату, который противорѣчитъ всему, что̀ говорятъ педагогія и психологія, рецензентъ не описываетъ подлинныхъ условій своего оригинальнаго опыта. Какія онъ предоставлялъ дѣтямъ средства, способы прикосновенія съ природой? Это очень важно для анализа результатовъ опыта. Потому что, если его опытъ производился при обыкновенныхъ классныхъ условіяхъ преподаванія физики, то не удивительно, что онъ привелъ къ указанному результату. Извѣстно, что та *природа*, которую видятъ передъ собой воспитанники среднихъ учебныхъ заведеній, есть очень толстая книга, отъ 400 до 600 страницъ in 8°, которая называется „современный учебникъ физики", и которую нужно выучить наизусть, подъ опасеніемъ „схватить двойку на экзаменахъ". Не удивительно, что дѣти, даже старшаго возраста, ничего къ этой природѣ не чувствуютъ, кромѣ отвращенія. Что касается настоящей природы,—физическихъ опытовъ, то (оставляя въ сторонѣ немногія исключенія), таковые аккумулируются большею частью къ концу отдѣловъ физики и показываются въ качествѣ „бенефиса", если только когда нибудь показываются и если при томъ удаются.

Взамѣнъ искусства экспериментированья, составился среди педагоговъ культъ *черченія на доскѣ* рисунковъ, долженствующихъ выразить эфекты природы. Въ такомъ видѣ природа запечатлѣвается въ умахъ питомцевъ.

Не я одинъ такого мнѣнія о постановкѣ экспериментальной части въ преподаваніи физики. Я ссылаюсь на мнѣніе спеціалиста, имѣющаго право оффиціально подавать рѣшающій голосъ въ вопросахъ о преподаваніи физики, а именно—на мнѣніе проф. Хвольсона. „Снаровка производить тѣ главнѣйшіе опыты, говоритъ онъ, которые должны входить въ курсъ физики среднихъ учебныхъ заведеній,—это *больное мѣсто* преподаванія физики" *).

*) Циркуляръ г. Попечителя Одесск. уч. округа. 1893. № 5, стр. 233.

Второй педагогическій опытъ, (или, можетъ быть, наблюденіе) рецензента состоитъ въ слѣдующемъ.

Въ своей Методикѣ я говорю, что методы преподаванія должны оцѣниваться съ точки зрѣнія ихъ содѣйствія къ наиболѣе легкому и прочному усвоенію предмета учащимися. Рецензентъ возражаетъ: *легкое* и *прочное* усвоеніе—„развѣ это совмѣстимо? На мой взглядъ — нѣтъ. Что либо одно изъ двухъ—или будемъ имѣть въ виду *легкость* усвоенія, или прочность. Наименѣе надежныя знанія суть тѣ, которыя легко даются. Это педагогическая аксіома".

Такъ вотъ съ какого рода педагогомъ имѣемъ дѣло. Подъ легкостью въ педагогіи разумѣется приспособленность какъ новаго курса, такъ и способовъ обученія къ уровню прежнихъ познаній ученика, къ степени его умственной подготовки. Такъ, по крайней мѣрѣ, изобразилъ я, въ своей Методикѣ, условія *легкости*. Рецензентъ думаетъ, что не нужно этой легкости, нѣтъ надобности наблюдать, чтобы размѣры и характеръ работы, возлагаемой на ученика, соотвѣтствовали силамъ послѣдняго. Чѣмъ труднѣе для ученика понять смыслъ урока, тѣмъ лучше, прочнѣе. „Это педагогическая аксіома", заключаетъ онъ безъ всякаго смущенія.

Нѣтъ, рецензентъ, очевидно и не педагогъ. Что же онъ такое?

Для разрѣшенія этого вопроса, рецензентъ представляетъ читателю слѣдующія данныя.

Рецензентъ утверждаетъ, что я пропустилъ въ своей Методикѣ электричество и магнитизмъ, и это обстоятельство даетъ обильную пищу его юмору. Но эти дѣятели природы, по моему плану, включены въ физику, начиная съ пропедевтическаго курса. (См. стр. 27 отдѣльнаго оттиска Введенія).

Въ своей Методикѣ я говорю: хотя зародыши памяти, воображенія и соображенія присущи человѣку *одновременно*, но въ своемъ развитіи и укрѣпленіи они слѣдуютъ опредѣленной преемственности".

Рецензентъ передѣлываетъ мою мысль такъ: „методъ эвристическій рекомендуется для перваго концентра, соотвѣтствующаго тому возрасту, когда *соображенія* еще *нѣтъ*, а есть *лишь* память (при чемъ *лишь* рецензентъ подчеркиваетъ). Конечно, въ такой маскировкѣ моя мысль выходитъ очень смѣшною, что̀ рецензенту и нужно.

Во Введеніи я развиваю мысль: жизнь *не* есть физическій дѣятель. Рецензентъ переворачиваетъ фразу такъ: „жизнь есть физическій дѣятель". При этомъ онъ устраиваетъ шутовской форумъ изъ четырехъ восклицательныхъ знаковъ и зазываетъ къ себѣ публику: „Господа!..."

Мысль, что подобные пріемы полемики возможны въ русской педагогической литературѣ, производитъ удручающее впечатлѣніе.

Считаю не лишнимъ заявить, что анонимныя рецензіи, запросы, а также заявленія о солидарности съ ними, будутъ впредь оставляемы мной безъ всякаго отвѣта.

Ѳ. Шведовъ.

ПИСЬМО ВЪ РЕДАКЦІЮ.

Милостивый Государь

Господинъ Редакторъ!

Покорнѣйше прошу Васъ удѣлить мѣсто въ издаваемомъ Вами журналѣ нижеслѣдующему заявленію pro domo mea.

Я узналъ отъ моихъ одесскихъ друзей, что нѣкоторыя лица приписываютъ мнѣ авторство рецензіи „Методика физики, введеніе", появившейся въ „В. О. Ф. и Э. М.". Я до сихъ поръ не обращалъ на это никакого вниманія, увѣренный, что авторъ „Методики", Ѳ. Н. Шведовъ не замедлитъ опровергнуть этотъ слухъ и вотъ на какомъ основаніи:

I. Я никогда ни единой строчки не печаталъ анонимно и никогда не напечатаю (рецензіи отъ Ученаго Комитета въ Ж. Мин. Нар. Просв. всѣ печатаются безъ подписей, но вѣдь ни для кого не тайна, кто ихъ пишетъ).

II. Слогъ рецензіи весьма далекъ отъ моего.

III. Я вообще не понимаю, какъ можно писать рецензію на введеніе, въ которомъ намѣчены лишь самые общіе контуры методики физики и въ концѣ которой прямо сказано, что „развитіе концентровъ... должно составлятя предметъ самой *методики физики* (курсивъ въ оригиналѣ)". Я и всѣ интересующіеся преподаваніемъ физики съ нетерпѣніемъ ждемъ самой методики, т. е. подробнаго развитія мыслей, высказанныхъ во введеніи и указанія на планъ ихъ осуществленія. Только когда все это появится, можно будетъ дать себѣ ясный отчетъ о предлагаемой методикѣ и приступить къ ея критическому разбору. Посему я и не одобряю мысли о конкурсѣ, о которомъ было упомянуто въ Вашемъ журналѣ. По моему, автору „введенія" принадлежитъ неотъемлемое право сохранить за собою развитіе принадлежащихъ ему мыслей.

IV. Ѳ. Н. Шведовъ, конечно, не забылъ, какія добрыя отношенія установились между нами, когда весною 1891 г. намъ пришлось въ Одессѣ поработать вмѣстѣ въ теченіе цѣлаго мѣсяца. Мои чувства горячей благодарности ему извѣстны, ибо еще не такъ давно они нашли себѣ искреннія выраженія по поводу одного весьма грустнаго событія.

Итакъ—я не сомнѣвался, что самъ Ѳ. Н. Шведовъ опровергнетъ упомянутый слухъ. Однако, на дняхъ я узналъ, что кѣмъ-то публично было произнесено мое имя въ связи съ рецензіей. Это уже ни на что не похоже и мнѣ ужасно досадно, что мнѣ не хотятъ сообщить, кто это рѣшился публично упомянуть непровѣренный слухъ, обвиняя меня такимъ образомъ въ авторствѣ анонимнаго нападка, что я считаю *неприличнымъ* въ моемъ положеніи, какимъ бы оно ни было скромнымъ.

Покорнѣйше прошу васъ подтвердить, что я никакого отношенія къ упомянутой рецензіи не имѣю*).

Примите и проч.

Спб. 26 дек. 1894 г. Проф. *О. Хвольсонъ* (Спб.).

*) Проф. Хвольсонъ никакого отношенія къ рецензіи „Безличнаго" не имѣетъ, о чемъ мною было уже заявлено публично въ томъ засѣданіи Од. Физ.-Мат. Общ. (16 дек.), посвященномъ разбору этой рецензіи, въ которомъ фамилія проф. Хвольсона была произнесена, вѣроятно, нечаянно. Редакторъ *Эр. Шпачинскій*.

ЗАДАЧИ.

№ 132. Даны двѣ параллели и точки A и B. Провести сѣкущую AXY такъ, чтобы ея отрѣзокъ XY между параллелями былъ видѣнъ изъ B подъ даннымъ угломъ.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 133. Даны три прямыя, а на нихъ по точкѣ A, B и C такъ, что линія ABC прямая. Провести къ этимъ прямымъ сѣкущую XYZ такъ, чтобъ отношенія между отрѣзками AX, BY и CZ имѣли данную величину.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 134. Рѣшить систему:

$$x^{-1}+(y-z)^{-1}=a^{-1},$$
$$y^{-1}+(z-x)^{-1}=b^{-1},$$
$$z^{-1}+(x-y)^{-1}=(a+b)^{-1}.$$

А. Гольденбергъ (Спб.).

№ 135. Рѣшить безъ помощи тригонометріи слѣдующую задачу (взятую изъ „Собранія вопросовъ и задачъ прямолинейной тригонометріи“ Верещагина, изд. 2, № 652).

„Вычислить острые углы такого прямоугольнаго треугольника, площадь котораго составляетъ $1/8$ площади квадрата, построеннаго на гипотенузѣ“.

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 136. На данной прямой найти точку, разстояніе которой отъ данной точки относилось бы къ разстоянію ея отъ другой данной прямой, какъ $m:n$, гдѣ m и n два данные прямолинейные отрѣзка.

С. Гирманъ (Варшава).

№ 137. Въ кругъ радіуса R вписанъ четыреугольникъ, у котораго одна изъ сторонъ проходитъ черезъ центръ. Опредѣлить стороны четыреугольника при условіи, что онѣ составляютъ геометрическую прогрессію.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 2 (3 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ уравненіе

$$x^{y-x}=y^x.$$

Очевидно, что данное уравненіе удовлетворяется при $x=y=0$ и $x=y=1$. Поэтому будемъ искать рѣшенія, удовлетворяющія условію $y \gtrless x$.

Такъ какъ x и y суть числа цѣлыя и положительныя, то $y>x$, а потому показатель при x больше показателя при y, т. е. $y-x>x$, откуда $y>2x$. Полагая $y=2x+z$, изъ даннаго уравненія получимъ:

$$x^{x+z}=(2x+z)^x, \text{ откуда } x^z=\left(2+\frac{z}{x}\right)^x,$$

откуда слѣдуетъ, что z/x есть цѣлое число. Пусть $z=mx$. Тогда изъ послѣдняго уравненія найдемъ:

$$x^{mx}=(2+m)^x, \text{ откуда } x^m=2+m.$$

Положивъ $x=1+v$ и развернувъ $(1+v)^m$ въ строку, получимъ:

$$1+mv+\frac{m(m-1)}{1.2}v^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}v^3+\cdots=2+m.$$

Изъ этого равенства слѣдуетъ, что $m<3$ и $v<3$, ибо при $m>2$ и $v>1$ уже первые три члена разложенія всегда больше, чѣмъ $m+2$, при $v>2$ и $m>1$ — первые два члена разложенія всегда больше, чѣмъ $m+2$. Полагая $m=1$, найдемъ $v=2$, $x=3$, $y=9$; полагая же $m=2$, найдемъ $v=1$, $x=2$, $y=8$.

Я. Полушкинъ (с. Знаменка); *С. Копровскій* (с. Дяткевичи); *С. Адамовичъ* (с. Спасское); *С. Окуличъ* (Варшава); *А.Варенцовъ* (Рост. н. Д.); *П. Ивановъ* (Одесса); *О. Ривошъ* (Вильна); *К.* и *Ѳ.* (Тамбовъ); *А. Рѣзновъ*, $\sqrt{-1}$ (Спб.); *Я. Блюмбергъ* (Рига).

№ 10 (3 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ уравненіе

$$x^{y-10x}=y^x.$$

Очевидно, что уравненіе удовлетворяется при $x=y=0$. Такъ какъ x и y суть числа цѣлыя и положительныя, то $y-10x>0$, откуда $y>10x$, а потому показатель при x долженъ быть больше показателя при y, т. е. $y-10x>x$, откуда $y>11x$. Полагая $y=11x+z$, представимъ данное уравненіе въ видѣ:

$$x^{x+z}=(11x+z)^x, \text{ откуда } x^z=\left(11+\frac{z}{x}\right)^x.$$

Пусть $z=mx$, гдѣ m есть цѣлое и положительное число. Тогда

$$x^{xm}=(11+m)^x, \text{ откуда } x^m=11+m.$$

Полагая $x=1+v$ и разлагая $(1+v)^m$ по биному Ньютона, получимъ

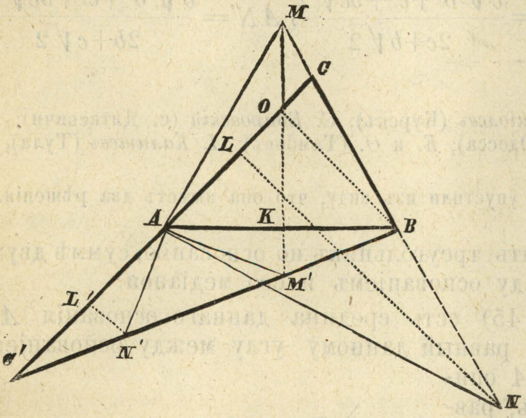
$$1+mv+\frac{m(m-1)}{1.2}v^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}v^3+\cdots=11+m.$$

Разсматривая это равенство, легко найдемъ, что $m<4$. Давая m значенія 1,2,3 и опредѣляя изъ послѣдняго равенства v, увидимъ, что лишь значенію $m=1$ соотвѣтствуетъ цѣлое значеніе $v=11$. Тогда $x=12$, $y=144$.

П. Бѣловъ (с. Знаменка); *Я Тепляковъ* (Радомысль); *К.* и *Ѳ.* (Тамбовъ); *П. Ивановъ* (Одесса); *С. Адамовичъ* (с. Спасское); *О. Ривошъ* (Вильна); *А. Варенцовъ* (Ростовъ н. Д.); *С. Окуличъ* (Варшава).

№ 25 (3 сер.). Рѣшить безъ помощи тригонометріи слѣдующую задачу.—Въ треугольникѣ даны $AB=c$ и $AC=b$. Если въ серединахъ BA и AC возставить къ нимъ перпендикуляры, которые пересѣкутъ сторону BC соотвѣтственно въ точкахъ M и N, то уголъ $MAN=90^0$. По этимъ даннымъ 1) построить треугольникъ и 2) вычислить сторону BC и стороны треугольника AMN.

1) Отложивъ на произвольной прямой отрѣзокъ $AB=c$, (фиг. 44) проводимъ черезъ точку A прямую, составляющую съ AB уголъ въ 45^0 и откладываемъ на ней $AC=AC'=b$. Треугольники ABC и ABC' суть искомые, ибо, возставивъ въ серединахъ сторонъ AB и AC перпендикуляры KM и LN и продоливъ ихъ до встрѣчи съ BC въ M и N, найдемъ:



Фиг. 44.

$$\angle MAB=\angle ABM,$$

$$\angle NAC=\angle ACN,$$

откуда

$$\angle MAB+\angle NAC=$$

$$=\angle ABM+\angle ACN=180^0-\angle BAC=135^0.$$

Отнимая же отъ обѣихъ частей этого равенства по углу $ABC=45^0$, найдемъ:

$$\angle MAB+\angle NAC-\angle BAC=\angle MAN=90^0.$$

Сдѣлавъ тѣ-же построенія для треугольника ABC', найдемъ

$$\angle AN'B=2\angle AC'B,\ \angle AM'C'=2\angle ABC',$$

откуда $\angle ANB+\angle AM'C'=2(180^0-\angle BAC')=2(180^0-135^0)=90^0$, а потому $\angle M'AN'=90^0$.

2) Проведя $BO\perp AC$ и замѣтивъ, что $AO={}^c/_2\sqrt{2}$, изъ треугольника ABC находимъ:

$$BC=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2AC.AO}=\sqrt{c^2+b^2-bc\sqrt{2}}\ldots(1)$$

Такъ какъ $CO=AC-AO=b-{}^c/_2\sqrt{2}$, изъ подобія треугольниковъ CLN и COB находимъ:

$$\frac{CN}{CL}=\frac{BC}{CO}, \text{т. е. } \frac{2CN}{b}=\frac{\sqrt{b^2+c^2-bc\sqrt{2}}}{b-\frac{c}{2}\sqrt{2}},$$

откуда

$$AN=CN=\frac{b\sqrt{b^2+c^2-bc\sqrt{2}}}{2b-c\sqrt{2}}\ldots\ldots\ldots(2)$$

Точно такъ же найдемъ

$$AM=BM=\frac{c\sqrt{b^2+c^2-bc\sqrt{2}}}{2c-b\sqrt{2}}.$$

Очевидно, что

$$MN=BM+CN-BC.$$

Произведя подобныя вычисленія для треугольника ABC', найдемъ

$$BC'=\sqrt{b^2+c^2+bc\sqrt{2}}, AM'=\frac{c\sqrt{b^2+c^2+bc\sqrt{2}}}{2c+b\sqrt{2}}, AN'=\frac{b\sqrt{b^2+c^2+bc\sqrt{2}}}{2b+c\sqrt{2}}$$

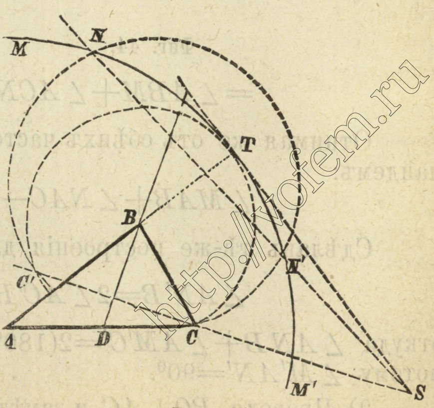
и $M'N'=BC'-(AM'+AN')$.

Я. Блюмбергъ (Рига); *К. Щиголевъ* (Курскъ); *С. Копровскій* (с. Дяткевичи); *М. Селиховъ* (Полтава); *П. Ивановъ* (Одесса); *К.* и *Θ.* (Тамбовъ); *Л. Калишевъ* (Тула); *О. Ривошъ* (Вильна).

NB. Всѣ, рѣшившіе задачу, упустили изъ виду, что она имѣетъ два рѣшенія.

№ 35 (3 сер.). Построить треугольникъ по основанію, суммѣ двухъ другихъ сторонъ и углу между основаніемъ и его медіаной.

Пусть точка D (фиг. 45) есть средина даннаго основанія AC. Строимъ при D уголъ BDC, равный данному углу между основаніемъ и его медіаной и изъ точки A описываемъ окружность радіусомъ, равнымъ данной суммѣ. Остается найти точку касанія этой окружности съ окружностью, центръ которой лежитъ на линіи BD и которая проходитъ черезъ точку C.



Фиг. 45.

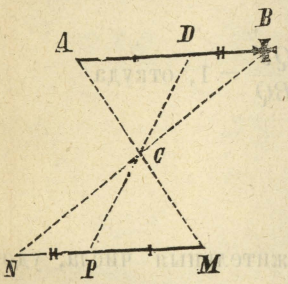
Для этого, найдя точку C', симметричную C относительно BD, проводимъ черезъ точки C и C' такую окружность, чтобы она пересѣкла описанную пзъ точки A въ двухъ чочкахъ N и N. Проведя изъ точки S пересѣченія прямыхъ CC' и NN' прямую, касательную къ окружности MM', найдемъ искомую точку касанія T, а затѣмъ и центръ B окружности, проходящей черезъ T, C и C'. Задача имѣетъ очевидно два рѣшенія.

П. Хлѣбниковъ (Тула); *К.* и *Θ.* (Тамбовъ).

№ 48 (3 сер.). Провести черезъ неприступную точку линію, параллельную данной.

NB. При рѣшеніи этой задачи можно пользоваться лишь цѣпью и кольями.

Пусть B неприступная точка и MN данная прямая (фиг. 46). Черезъ B провѣшиваемъ произвольную прямую, пересѣкающую MN въ точкѣ N. Измѣривъ разстояніе BN (см. „Вѣстникъ Оп. Физики“ за XVI сем., № 187, стр. 156), откладываемъ по линіи BN отъ точки N отрѣзокъ NC, равный половинѣ NB. Провѣсивъ черезъ точку C произвольную прямую, пересѣкающую MN въ точкѣ P, отложимъ на ней $PC=DC$. Точка D принадлежитъ, очевидно, искомой параллели.



Фиг. 46.

А. Варенцовъ (Ростовъ н. Д.); *Г. Легошинъ* (с. Знаменка); *П. Хлѣбниковъ* (Тула).

№ 49 (3 сер.). Найти на мѣстности равнодѣлящую угла, вершина котораго недоступна.

NB. При рѣшеніи этой задачи можно пользоваться лишь цѣпью и кольями.

1. Пусть MN и MP суть стороны угла, вершина коего M недоступна. Выбравъ на сторонѣ MN произвольную точку A, на сторонѣ MP—произвольную точку B, проводимъ биссекторы угловъ MAB и MBA. Точка C ихъ пересѣченія принадлежитъ, очевидно, искомому биссектору.

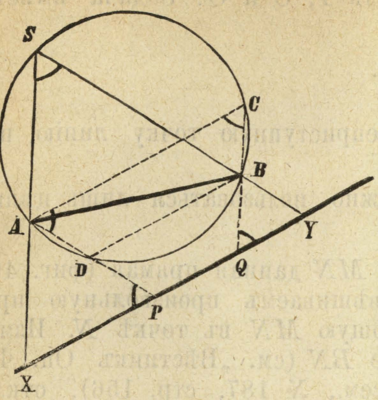
2. Проводимъ двѣ линіи, параллельныя сторонамъ угла и находящіяся отъ нихъ на одномъ и томъ же, достаточно большомъ разстояніи. Пересѣченіе этихъ параллелей принадлежитъ, очевидно, искомому биссектору.

А. Варенцовъ (Рост. н. Д.); *Г. Легошинъ* (с. Знаменка); *П. Хлѣбниковъ* (Тула); *Ученикъ Кіево-Печерской гимназіи.*

№ 532 (2 сер.). Дана окружность, проведенная въ ней хорда AB и какая нибудь прямая MN въ той же плоскости. По окружности движется точка S. Прямыя, соединяющія эту точку съ концами хорды AB, пересѣкаютъ прямую MN въ точкахъ X и Y. Найти на прямой такія двѣ постоянныя точки P и Q, чтобы

$$PX.QY=\text{const}.$$

Изъ концовъ хорды AB проводимъ хорды AC и BD, параллель-



Фиг. 47.

ныя MN (фиг. 47). Прямыя AD и BC пересѣкаютъ MN въ искомыхъ точкахъ P и Q, ибо изъ подобныхъ треугольниковъ SXY, PXA и QBY имѣемъ:

$$\frac{PX}{AP}=\frac{SX}{SY} \text{ и } \frac{QY}{BQ}=\frac{SY}{SX};$$

перемноживъ эти двѣ пропорціи, получимъ

$$\frac{PX.QY}{AP.BQ}=1, \text{ откуда}$$

$$PX.QY=AP.BQ=\text{const}.$$

А. Варенцовъ (Рост. н. Д.); *Л. Заржецкій* (Спб.).

№ 564 (2 сер.). Найти всѣ цѣлыя и положительныя числа, удовлетворяющія уравненію

$$x^y=y^x.$$

Очевидно, что при $x=y$ уравненію удовлетворяютъ всѣ цѣлыя и положительныя числа. Остается, слѣдовательно, найти рѣшенія при $x \gtrless y$.

Полагая $y=x+z$, получимъ:

$$x^{x+z}=(x+z)^x, \text{ откуда } x^z=\left(1+\frac{z}{x}\right)^x.$$

Такъ какъ x и z суть числа цѣлыя, то z должно нацѣло дѣлиться на x. Полагая $z=mx$, изъ послѣдняго уравненія получимъ:

$$x^{mx}=(1+m)^x, \text{ откуда } x^m=1+m.$$

Пусть $x=1+v$; тогда изъ послѣдняго уравненія найдемъ:

$$(1+v)^m=1+mv+\frac{m(m-1)}{1.2}v^2+\cdots=1+m.$$

Отсюда очевидно, что $m=1$, $v=1$. Тогда $x=2$, $y=4$.

П. Бѣловъ (с. Знаменка); *П. Ивановъ* (Одесса); *С. Адамовичъ* (с. Спасское); *А. Варенцовъ* (Ростовъ н. Д.); *С. Окуличъ* (Варшава).

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Одесса, 10-го Января 1895 г.

„Центральная типо-литографія“, уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. Болгарова.

ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

JOURNAL

de mathématiques élémentaires.

1894.—№ 7.

Note sur le dodécaèdre et l'icosaèdre réguliers convexes. Par M. *Joseph Cernesson.* (Suite et fin). II. Икосаэдръ. Правильный икосаэдръ, какъ извѣстно, состоитъ изъ двухъ правильныхъ 5-тиугольныхъ пирамидъ, соединенныхъ поясомъ изъ 10 правильныхъ треугольниковъ; основанія пирамидъ параллельны и расположены такъ, что вершины одного изъ нихъ проэктируются на средины дугъ окружности, описанной около другого, стягиваемыхъ сторонами этого послѣдняго. Изъ равенства $a_5^2 - a_{10}^2 = R^2$ слѣдуетъ, что высота каждой пирамиды $h = a_{10}$, а разстояніе между основаніями пирамидъ $d = R$, гдѣ R есть радіусъ круга, описаннаго около основанія пирамиды; вслѣдствіе этого построеніе проэкцій икосаэдра выполняется безъ совмѣщенія его граней съ плоскостью проэкцій.

Обозначимъ черезъ a и ϱ ребро икосаэдра и радіусъ описаннаго около него шара; тогда $2h + d = 2\varrho$; но

$$h = R\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ d = R;\ \text{поэтому}\ R\sqrt{5} = 2\varrho;$$

съ другой стороны $a = R\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$; исключивъ R изъ послѣдняго равенства, найдемъ:

$$a = \varrho\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}.$$

Recherche de l'équation d'un lieu géométrique dans le plan. Par *S. Zaremba.* Геометрическимъ мѣстомъ точекъ наз. совокупность точекъ, обладающихъ какимъ-либо общимъ свойствомъ относительно другой данной системы точекъ. Пусть задана система точекъ S; предположимъ, что нѣкоторая фигура F можетъ быть построена при помощи этихъ точекъ и произвольно взятой точки P. Обозначимъ черезъ $u_1, u_2, \ldots, u_n$ (1) различные элементы этой фигуры (отрѣзки, углы, площади и пр.) и предположимъ, что точка P выбрана такъ, что элементы эти удовлетворяютъ ур-нію

$$\psi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0; \qquad (2)$$

при сказанныхъ условіяхъ ур-ніе это выражаетъ аналитически свойства точки P относительно системы S. Обозначимъ черезъ x и y координаты точки P и выразимъ ур-ями соотношенія между x и y и элементами (1) фигуры F; такія ур-нія будутъ имѣть видъ

$$\psi_k(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0,\ (k = 1, 2, \ldots, p); \qquad (3)$$

исключеніе $u_1, u_2, \ldots, u_n$ изъ ур-ній (2) и (3) приводитъ къ ур-нію

$$F(x,y) = 0 \qquad (4)$$

искомаго геометрическаго мѣста, если оно существуетъ.

Можетъ случиться, что ур-нія (3) будутъ имѣть видъ:

$$f_i(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_m),\ (i = 1, 2, \ldots, p), \qquad (5)$$

гдѣ $v_1, v_2, \ldots, v_m$ суть другіе элементы фигуры F, не входящіе въ опредѣленіе искомаго геометрическаго мѣста. Исключеніе $u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_m$ изъ ур-ній (2) и (5) приводитъ также къ ур-нію (4) искомаго геометрическаго мѣста. Иногда заданная система S дѣлитъ плоскость на нѣсколько частей $R_1, R_2, \ldots, R_v$, такъ что ур-нія (3), или (5), для каждой изъ этихъ частей имѣютъ особый видъ; въ этомъ случаѣ для каждой части плоскости получится особое ур-ніе вида (4) и искомое геометрическое мѣсто, если оно существуетъ, представится контуромъ, или частью его; составленнымъ изъ линій

$$F_i(x,y) = 0, \ (i = 1, 2, \ldots, v). \tag{6}$$

Чтобы убѣдиться, что какая нибудь точка x', y' въ дѣйствительности принадлежитъ искомому геометрическому мѣсту, должно имѣть въ виду, что фигура F можетъ быть построена при помощи этой точки; рѣшеніе вопроса, кромѣ того, зависитъ отъ тѣхъ особенностей, которыя могутъ встрѣтиться при исключеніи $u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_m$ изъ ур-ній (6) и (2).

Разсматривая подробно эти особенности, авторъ поясняетъ свои соображенія на двухъ примѣрахъ.

Exercices divers. Par M. *Boutin* (Suite). №№ 327—333.

327. *Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ ур-ніе*

$$6x^2 + 1 = k^2.$$

Рѣш.
$$x_n = 10x_{n-1} - x_{n-2}, \ x_0 = 0, \ x_1 = 2;$$
$$k_n = 10k_{n-1} - k_{n-2}, \ k_0 = 1, \ k_1 = 5.$$

328. *Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ ур-ніе*

$$7x^2 + 1 = k^2.$$

Рѣш.
$$x_n = 16x_{n-1} - x_{n-2}, \ x_0 = 0, \ x_1 = 3;$$

329. *Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ ур-нія:*

$$2x^2 + 7 = k^2, \tag{1}$$
$$2x^2 - 7 = k^2. \tag{2}$$

Рѣш. Положимъ $x_1 = 1, \ x_2 = 2, \ x_3 = 3, \ x_4 = 4, \ x_5 = 8, \ x_6 = 9, \ x_7 = 19;$
$$k_1 = 3, k_2 = 1, k_3 = 5, k_4 = 5, k_5 = 11, k_6 = 13, k_7 = 27;$$
члены каждаго изъ этихъ рядовъ, начиная съ 7-го, получаются по формулѣ:

$$u_n = 2u_{n-2} + u_{n-4};$$

рѣшеніе данныхъ ур-ній выражается системой

$$(x_{4n+2}, \ k_{4n+2}), \ (x_{4n+3}, \ k_{4n+3}); \tag{1}$$
$$(x_{4n}, \ k_{4n}), \ (x_{4n+1}, \ k_{4n+1}). \tag{2}$$

330. *Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ ур-ніе*

$$2x^2 \pm 9 = k^2.$$

Рѣш. Задача приводится къ рѣшенію ур-нія

$$2x^2 \pm 1 = k^2. \text{ (См. № 323).}$$

331. *Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ ур-ніе*

$$3x^2 - 2 = k^2.$$

Обложка
ищется

Обложка
пщется