Обложка
ищется

Обложка
ищется

XXI Сем. № 4.

# ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
# ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 244.



## Отъ Распорядительнаго Комитета

## ВЫСОЧАЙШЕ разрѣшеннаго Х-го Съѣзда Русскихъ Естествоиспытателей и Врачей.

Съ Высочайшаго Его Императорскаго Величества соизволенія, послѣдовавшаго 12 сентября 1896 года, вслѣдствіе ходатайства г. Министра Народнаго Просвѣщенія графа И. Д. Делянова, имѣетъ быть въ Кіевѣ съ 21 по 30 Августа 1897 г. десятый (X) съѣздъ русскихъ естествоиспытателей и врачей на слѣдующихъ основаніяхъ:

1) X съѣздъ русскихъ естествоиспытателей и врачей въ Кіевѣ имѣетъ цѣлью споспѣшествовать ученой и учебной дѣятельности на поприщѣ естественныхъ наукъ, направлять эту дѣятельность, главнымъ образомъ, на ближайшее изслѣдованіе Россіи и доставлять русскимъ естествоиспытателямъ случай лично знакомиться между собою.

2) X съѣздъ, состоя, по примѣру предшествовавшихъ съѣздовъ, подъ покровительствомъ г. Министра Народнаго Просвѣщенія, находится въ вѣдѣніи г. Попечителя Кіевскаго Учебнаго Округа, отъ котораго зависятъ ближайшія распоряженія по устройству сего съѣзда.

3) Членомъ съѣзда можетъ быть всякій, кто *научно занимается естествознаніемъ; но правами голоса на съѣздѣ пользуются только уче-*

*ные, напечатавшіе самостоятельное сочиненіе или изслѣдованіе по естественнымъ наукамъ*, и преподаватели сихъ наукъ при высшихъ и среднихъ учебныхъ заведеніяхъ. Никакого диплома на званіе члена X съѣзда не выдается.

4) Засѣданія съѣзда бываютъ общія и частныя (или по секціямъ); въ общихъ засѣданіяхъ читаются статьи общеинтересныя и обсуждаются вопросы, касающіеся всего съѣзда; въ частныхъ засѣданіяхъ сообщаются и разбираются изслѣдованія и наблюденія, имѣющія болѣе спеціальное значеніе для одной изъ отраслей естествознанія.

5) Отдѣленія на съѣздѣ полагаются слѣдующія: a) по Математикѣ (чистой и прикладной) и Астрономіи, b) Физикѣ, c) Химіи, d) Минералогіи и Геологіи, e) Ботаникѣ, f) Зоологіи, g) Анатоміи и Физіологіи человѣка и животныхъ, h) Географіи, Этнографіи и Антропологіи, i) Агрономіи, k) Научной (теоретической) Медицинѣ и l) Гигіенѣ.

6) Члены Академіи Наукъ, преподаватели Университетовъ и др. учебныхъ заведеній, желающіе принять участіе въ съѣздѣ, могутъ получать для этой цѣли командировки, срокомъ отъ двухъ до четырехъ недѣль, смотря по разстоянію ихъ мѣстожительства отъ Кіева.

7) Съѣздъ имѣетъ быть съ 21 по 30 Августа 1897 года.

---

Общій распорядокъ X съѣзда предполагается такой: 21 Августа Общее собраніе*), 22, 23 и 24-го засѣданія секцій, 25 Августа второе общее собраніе; 26, 27, 28 и 29 засѣданія секцій; 30 Августа заключительное общее собраніе и закрытіе съѣзда.

По примѣру предшествовавшихъ съѣздовъ каждый членъ X съѣзда вноситъ въ его кассу *три рубля* исключительно для научныхъ цѣлей. Ближайшее назначеніе собранной такимъ образомъ суммы зависитъ отъ самого съѣзда.

---

Для предварительныхъ работъ по устройству X съѣзда Физико-Математическій факультетъ Императорскаго Университета Св. Владиміра избралъ особый Распорядительный Комитетъ, въ составъ котораго вошли слѣдующіе профессора: Предсѣдатель Комитета И. И. Рахманиновъ; члены Комитета: К. М. Феофилактовъ (завѣдующій секціей Геологіи), М. Е. Ващенко-Захарченко, М. Ѳ. Хандриковъ (завѣдующій подсекціей Астрономіи), Н. В. Бобрецкій (завѣдующій секціей Зоологіи), Н. А. Бунге (завѣд. секціей Химіи), О. В. Баранецкій (завѣдующій секціей Ботаники), Н. Н. Шиллеръ (завѣдующій секціей Физики), В. П. Ермаковъ (завѣдующій секціей Математики), А. А. Коротневъ, П. Н. Венюковъ, Б. Я. Букрѣевъ, Г. К. Сусловъ (завѣдующій подсекціей Механики), С. М. Богдановъ (завѣд. секціей Агрономіи), П. М. Покровскій, П. Я. Армашевскій, Я. Н. Барзиловскій,

---

*) 20 Августа предварительное собраніе для разъясненія вопроса о выборѣ (21 Августа) должностныхъ лицъ.

С. Г. Навашинъ, П. И. Броуновъ (завѣд. секціей Метеорологіи) и дѣлопроизводители Комитета профессора: С. Н. Реформатскій и Г. Г. Де-Метцъ.

Въ таковомъ составѣ Распорядительный Комитетъ былъ одобренъ Совѣтомъ Университета Св. Владиміра и утвержденъ г. Министромъ Народнаго Просвѣщенія.

Впослѣдствіи, съ разрѣшенія Господина Попечителя Кіевскаго учебнаго Округа, въ составъ Комитета избраны еще слѣдующія лица: Губернскій Предводитель Дворянства князь Н. В. Репнинъ, Кіевскій Городской Голова профессоръ С. М. Сольскій, Ректоръ Университета Ѳ. Я. Фортинскій и профессора: В. Б. Антоновичъ (завѣдующій секціей Географіи и Антропологіи), М. А. Тихомировъ (завѣд. секціей Анатоміи и Физіологіи), В. В. Подвысоцкій (завѣд. секціей теорет. Медицины) и В. Д. Орловъ (завѣд. секціей Гигіены).

---

Доводя о семъ до всеобщаго свѣдѣнія, члены Комитета обращаются къ каждому изъ своихъ собратій по наукѣ съ покорнѣйшей просьбою почтить X съѣздъ естествоиспытателей и врачей своимъ личнымъ присутствіемъ или присылкою ученыхъ трудовъ.

Для доставленія возможности наибольшему числу иногороднихъ лицъ принять участіе въ съѣздѣ, Комитетъ 1) будетъ ходатайствовать предъ гг. Попечителями Округовъ о возможномъ содѣйствіи лицамъ, пожелавшимъ участвовать въ съѣздѣ; 2) употребитъ все свое стараніе, чтобы приготовить по возможности удешевленное помѣщеніе для членовъ съѣзда въ Кіевѣ и 3) будетъ ходатайствовать предъ Департаментомъ желѣзныхъ дорогъ о предоставленіи тарифныхъ льготъ по проѣзду членовъ съѣзда.

Такъ какъ Комитету необходимо знать заранѣе, на какое число членовъ съѣзда онъ можетъ разсчитывать, то онъ и обращается съ просьбою ко всѣмъ, желающимъ принять участіе въ съѣздѣ, извѣстить Комитетъ *не позднѣе 20 Мая* о своемъ намѣреніи прибыть въ Кіевъ, адресуя письма въ Университетъ въ Комитетъ X съѣзда, а также сообщить свои точные адресы, чтобы дать возможность заблаговременно выслать билеты*) и необходимыя удостовѣренія на право пользованія льготными тарифами, если таковые будутъ разрѣшены. Кромѣ того желательно, чтобы будущіе члены X съѣзда, присылая свои заявленія о желаніи участвовать въ съѣздѣ, вмѣстѣ съ тѣмъ обозначали бы и ту секцію, на которую они намѣрены записаться.

4) Наконецъ, Распорядительный Комитетъ употребитъ все стараніе, чтобы доставить членамъ съѣзда возможность широко воспользоваться пребываніемъ ихъ въ Кіевѣ для осмотра мѣстныхъ достопримѣчательностей, коллекцій, лабораторій, и имѣющей быть въ это время сельскохозяйственной выставки.

---

*) Билеты выдаются лишь по внесеніи членскаго взноса (3 руб.).

Подробныя программы занятій X съѣзда, какъ въ общихъ собраніяхъ, такъ и по секціямъ, будутъ своевременно сообщены членамъ съѣзда.

Весьма желательно, чтобы члены будущаго X съѣзда доставили въ Распорядительный Комитетъ *заглавія* а если можно, то и *краткое содержаніе* тѣхъ научныхъ сообщеній и вообще работъ, съ которыми они думаютъ познакомить съѣздъ; если таковыя заявленія не будутъ доставлены до 1-го Августа, то и самыя сообщенія могутъ быть недопущены (за недостаткомъ времени) къ слушанію на съѣздѣ.

Всѣ сообщенія и заявленія, какъ отдѣльныхъ членовъ съѣзда, такъ и секцій, имѣющія быть внесенными на обсужденіе общихъ собраній съѣзда, должны быть доставляемы въ Распорядительный Комитетъ на предварительное заключеніе.

# ФИЗИЧЕСКАЯ СЕКЦІЯ

## будущаго X съѣзда русскихъ естествоиспытателей въ Кіевѣ.

Въ виду достиженія по возможности большей цѣлесообразности организаціи физической секціи будущаго X съѣзда русскихъ естествоиспытателей проэктируется нижеслѣдующая программа секціонныхъ занятій, выработанная на основаніи заявленій и предложеній участниковъ физической секціи бывшаго IX съѣзда и доставленная редакціи завѣдующимъ физическою секціею будущаго X съѣзда, проф. Н. Н. Шиллеромъ. Проэктированная программа подлежитъ дополненіямъ и измѣненіямъ согласно съ заявленіями будущихъ участниковъ секціи; такого рода заявленія могли-бы быть сдѣланы или путемъ печати, или путемъ частной корреспонденціи съ завѣдующимъ секціею.

Главнымъ образомъ предполагается расширить область секціонныхъ рефератовъ и усилить демонстративную часть сообщеній. Вслѣдствіе такого предположенія характеръ будущихъ рефератовъ могъ-бы быть намѣченъ нижеслѣдующими пунктами.

1. Рефераты о спеціальныхъ самостоятельныхъ изслѣдованіяхъ.

2. На ряду съ предыдущими и даже преимущественно передъ ними—рефераты въ видѣ *обзоровъ* по различнымъ областямъ и вопросамъ физики. Упомянутые обзоры могли-бы быть двоякой формы: или а) объективно-историческаго характера, съ систематическимъ изложеніемъ существующихъ соотвѣтственныхъ изслѣдованій и мнѣній или б) критическаго характера, съ изложеніемъ только основныхъ чертъ даннаго вопроса, взглядовъ на его постановку самого референта, критической оцѣнки степени его разработки и предложеній о дальнѣйшемъ развитіи того-же вопроса.

3. Рефераты *лекціоннаго характера* въ видѣ образцоваго изложенія авторитетными въ наукѣ лицами наиболѣе интересныхъ вопросовъ физики, поясненія способовъ группировки положеній въ тѣхъ или дру-

тихъ областяхъ физики и формы вывода заключенiй изъ наличныхъ фактовъ и гипотезъ. Такiя изложенiя могли-бы имѣть свое значенiе въ виду существующей неизбѣжной розни во взглядахъ на систематику вопросовъ физики.

4. Къ вышеупомянутымъ образцовымъ изложенiямъ могли-бы примкнуть *образцовыя демонстрацiи* наиболѣе интересныхъ физическихъ опытовъ, трудно выполнимыхъ внѣ болѣе или менѣе благоустроенныхъ физическихъ институтовъ. Вслѣдствiе скудости средствъ такихъ учрежденiй при отдѣльныхъ провинцiальныхъ университетахъ упомянутыя демонстрацiи могли-бы осуществиться только совокупными силами всѣхъ институтовъ (а въ особенности—столичныхъ). Расходы по перевозкѣ нужныхъ снарядовъ и по обстановкѣ опытовъ могли-бы быть покрыты изъ суммъ, находящихся въ распоряженiи комитета съѣзда. При этомъ конечно потребны предварительныя сношенiя о томъ, какiя подготовки требуются отъ мѣстнаго физическаго института и какихъ размѣровъ могутъ быть ожидаемые расходы по организацiи той или другой демонстрацiи.

5. Могли-бы быть, по образцу, практикуемому Британскою Ассоцiацiею, нѣкоторыми учеными заранѣе намѣчены *научныя темы для обсужденiя* на секцiонныхъ собранiяхъ. Такiя темы касались-бы положенiй автора, защищаемыхъ имъ въ какомъ либо ученомъ рефератѣ, заранѣе опубликованномъ для этой цѣли, или въ одномъ изъ такихъ-же научныхъ обзоровъ, или въ краткомъ конспектѣ, указывающемъ на матерiалъ и источники для ознакомленiя съ подлежащимъ обсужденiю вопросомъ.

# НОВАЯ ГЕОМЕТРIЯ
## ТРЕУГОЛЬНИКА.

*(Géométrie récente du triangle).*

*(Продолженiе*).*

### VII. Окружность и треугольники Брокара.

1. Окружность Брокара (*Brocard*). Пусть K и O суть точка Лемуана тр-ка ABC и центръ круга, описаннаго около этого тр-ка (фиг. 22).

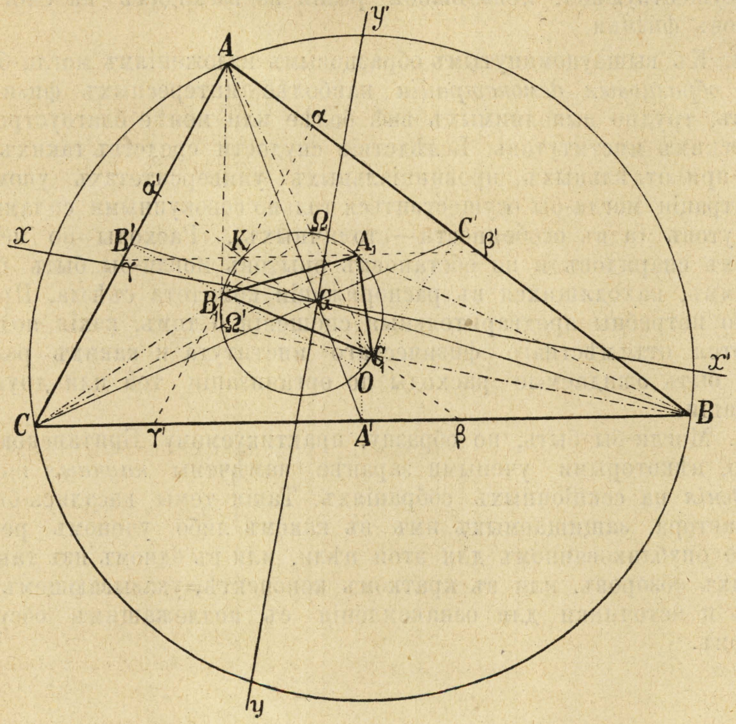
Окружность, имѣющая дiаметромъ прямую KO наз. *окружностью Брокара* для тр-ка ABC.

Изъ этого опредѣленiя слѣдуетъ, что *окружность Брокара концентрична съ окружностью Лемуана* (VI,10).

2. Обозначимъ чрезъ A′, B′, C′ средины сторонъ BC, CA, AB тр-ка ABC и положимъ, что перпендикуляры въ A′, B′, C′ къ сторонамъ этого

*) См. „Вѣстника Оп. Физики" №№ 230, 231, 232, 234, 236, 239 и 240.

тр-ка пересѣкаются съ окружностью Брокара въ $A_1$, $B_1$, $C_1$. Такъ какъ углы $KA_1A'$, $KB_1B'$, $KC_1C'$ суть прямые, то $KA_1 \| BC$, $KB_1 \| AC$ и $KC_1 \| AB$.




Фиг. 22.

т. е. прямыя $KA_1$, $KB_1$, $KC_1$ суть отрѣзки параллелей Лемуана (VI,7). Такимъ образомъ, *перпендикуляры, возставленные въ срединахъ сторонъ тр-ка, пересѣкаются съ соотвѣтственными параллелями Лемуана на окружности Брокара.* (Фиг. 22).

3. Если точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ соединить прямыми съ точками B и C, C и A, A и B, то получатся *равнобедренные* тр-ки $BA_1C$, $CB_1A$, $AC_1B$, *подобные* между собой.

Дѣйствительно, обозначивъ стороны BC, CA и AB чрезъ $a$, $b$ и $c$, а разстоянія точки Лемуана K отъ этихъ сторонъ чрезъ $x$, $y$, $z$, получимъ (V,17):

$$x = A_1A',\ y = B_1B',\ z = C_1C',$$

а потому

$$\frac{A_1A'}{a} = \frac{B_1B'}{b} = \frac{C_1C'}{c}.$$

Изъ подобія тр-въ $BA_1C$, $CB_1A$ и $AC_1B$ слѣдуетъ, что углы при основаніяхъ (BC, CA и AB) этихъ тр-въ равны.

4. Теорема. *Точки Брокара тр-ка* ABC *находятся на окружности Брокара этого тр-ка.*

Обозначимъ чрезъ $\Omega$ пересѣченіе прямыхъ $BA_1$ и $CB_1$.

Такъ какъ $\angle CB_1B' = \angle BA_1A'$, то въ четыреугольникѣ $\Omega A_1OB_1$:

$$\angle\Omega B_1O = \angle BA_1O, \text{ т. е. } \angle\Omega B_1O + \angle\Omega A_1O = 180^0;$$

поэтому

$$\angle B_1\Omega A_1 + \angle A_1OB_1 = 180^0,$$

слѣдовательно $BA_1$ и $CB_1$ пересѣкаются на окружности Брокара. Подобнымъ-же образомъ убѣдимся, что $BA_1$ и $AC_1$ пересѣкаются на той-же окружности. Слѣдовательно, прямыя $AC_1$, $BA_1$ и $CB_1$ пересѣкаются въ одной точкѣ $\Omega$ на окружности Брокара.

Аналогичныя разсужденія приводятъ къ заключенію, что прямыя $AB_1$, $BC_1$ и $CA_1$ также пересѣкаются въ одной точкѣ $\Omega'$ на окружности Брокара.

Но $A_1O \perp BC$ и $B_1O \perp AC$; поэтому $\angle A_1OB_1 = \angle C$ и $\angle B\Omega C = 180^0 - C$; подобнымъ-же образомъ $\angle C\Omega A = 180^0 - A$ и $\angle A\Omega B = 180 - B$; значитъ (III,6) точка $\Omega$ и изогонально сопряженная съ ней точка $\Omega'$ суть точки Брокара тр-ка ABC.

Слѣдствіе. Углы при основаніяхъ равнобедренныхъ тр-въ $BA_1C$, $CB_1A$, $AC_1B$ суть *углы Брокара* тр-ка ABC (III, 8).

Въ этомъ можно убѣдиться непосредственно; опредѣляя, напр., $\cot g \angle A_1BC = ctg \angle \Omega BC$, получимъ:

$$ctg\Omega BC = \cot gA + \cot gB + \cot gC = \cot g\omega.$$

4. Первый треугольникъ Брокара. Тр-къ $A_1B_1C_1$, вершины котораго суть пересѣченія параллелей Лемуана съ окружностью Брокара тр-ка ABC, наз. *первымъ треугольникомъ Брокара* для этого тр-ка. (фиг. 22).

Теорема. *Первый тр-къ Брокара* $A_1B_1C_1$ *обратно**) *подобенъ основному тр-ку* ABC.

Извѣстно, что если чрезъ произвольную точку произвольной окружности провести прямыя, параллельныя сторонамъ даннаго тр-ка, то точки пересѣченія этихъ прямыхъ съ окружностью суть вершины тр-ка, обратно подобнаго данному. Слѣдовательно, тр-ки $A_1B_1C_1$ и ABC обратно подобны.

Отношеніе подобія ихъ равно

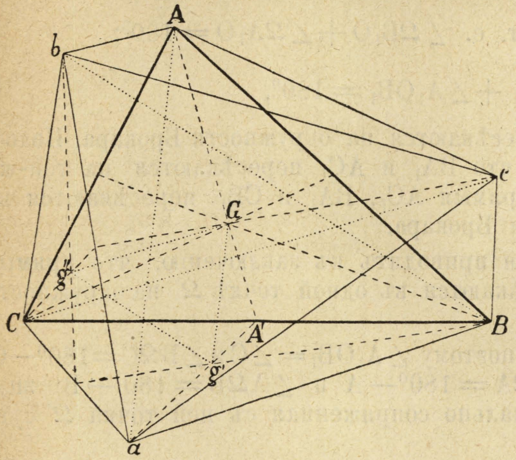
$$\frac{A_1B_1}{AB} = {}^1/_2 \sqrt{1 - 3tg^2\omega},$$

гдѣ $\omega$—уголъ Брокара тр-ка ABC.

6. Если на сторонахъ тр-ка ABC построить подобные между собою и одинаково расположенные тр-ки $ABc$, $BCa$, $CAb$, то тр-ки ABC и $abc$ имѣютъ общій центръ тяжести. Дѣйствительно, обозначивъ чрезъ $G$, $g'$, $g''$, $g'''$ центры тяжести тр-въ ABC, $a$BC, $ab$C, $abc$ и припомнивъ, что центръ тяжести тр-ка дѣлитъ его медіаны въ отношеніи 2 : 1, най-

*) т. е. тр-ки $A_1B_1C_1$ и ABC подобны, но не одинаково расположены.

демъ, что $Gg' \parallel Aa$ и $= 1/3\ Aa$, $g'g'' \parallel Bb$ и $= 1/3\ Bb$, $g''g''' \parallel Cc$ и $= 1/3\ Cc$; отсюда легко видѣть, что $g'''$ совпадаетъ съ G (фиг. 23).




Фиг. 23.

7. Теорема. *Центромъ подобія перваго тр-ка Брокара* $A_1B_1C_1$ *и основного тр-ка* ABC *служитъ ихъ общій центръ тяжести* G. (Фиг 22).

Ибо, было доказано (3), что тр-ки $BA_1C$, $CB_1A$, $AC_1B$ подобны; стало быть, по предыдущему, тр-ки ABC и $A_1B_1C_1$ имѣютъ общій центръ тяжести G. Но центры тяжести подобныхъ тр-въ суть соотвѣтственныя точки; поэтому G есть двойная точка, т. е. центръ подобія тр-въ ABC и $A_1B_1C_1$.

8. Оси Штейнера (*Steiner*). Прямая, проходящая чрезъ общую точку двухъ подобныхъ фигуръ и составляющая равные углы съ соотвѣтственными прямыми этихъ фигуръ, есть *общая прямая* разсматриваемыхъ фигуръ; такая прямая наз. *двойною прямою* или *осью подобія* подобныхъ фигуръ.

Общія прямыя для тр-ка ABC и для сооовѣтственнаго ему перваго тр-ка Брокара $A_1B_1C_1$ наз. *осями Штейнера.*

Оси Штейнера суть прямыя $xx'$ и $yy'$, дѣлящія пополамъ углы $A'GA_1$ и $AGA_1$ (фиг. 22).

9. Углы Штейнера. Положимъ, что ось Штейнера $xx'$ пересѣкается съ перпендикулярами $OA'$, $OB'$, $OC'$ въ точкахъ $A_3$, $B_3$, $C_3$.

Такъ какъ $GA_1$ и GA суть соотвѣтственныя прямыя подобныхъ тр-въ ABC и $A_1B_1C_1$, то (5):

$$1/2\sqrt{1-3\operatorname{tg}^2\omega}=\frac{GA_1}{GA},$$

или

$$\sqrt{1-3\operatorname{tg}^2\omega}=\frac{GA_1}{GA'}=\frac{A_1A_3}{A_3A'}=\frac{1/2 a\operatorname{tg}\omega-A_3A'}{A_3A'};$$

отсюда

$$A_3'A=\frac{a\,.\operatorname{tg}\omega}{2(1+\sqrt{1-3\operatorname{tg}^2\omega})}.$$

Опредѣливъ такимъ же образомъ $B_3B'$ и $C_3C'$, найдемъ, что

$$\frac{A_3A'}{a}=\frac{B_3B'}{b}=\frac{C_3C'}{c};$$

слѣдовательно равнобедренные тр-ки $BA_3C$, $CB_3A$, $AC_3B$ подобны и углы при основаніяхъ ихъ равны.

Каждый изъ угловъ при основаніяхъ тр-въ $BA_3C$, $CB_3A$, $AC_3B$ наз. *первымъ угломъ Штейнера.* Обозначивъ этотъ уголъ чрезъ $\omega_1$, получимъ

$$\cot g\omega_1 = \mathrm{ctg}\,\omega + \sqrt{\mathrm{ctg}^2\omega - 3},$$

гдѣ $\omega$ — уголъ Брокара тр-ка ABC.

10. Обозначивъ чрезъ $A_4$, $B_4$, $C_4$ пересѣченія второй оси Штейнера $yy'$ съ перпендикулярами $OA'$, $OB'$, $OC'$, подобно предыдущему убѣдимся, что равнобедренные тр-ки $BA_4C$, $CB_4A$, $AC_4B$ подобны. Каждый изъ равныхъ угловъ при основаніяхъ этихъ тр-въ, наз. *вторымъ угломъ Штейнера.* Величина этого угла опредѣляется формулой

$$\mathrm{ctg}\,\omega_2 = \mathrm{ctg}\,\omega - \sqrt{\mathrm{ctg}^2\omega - 3}.$$

Обозначая углы Штейнера вообще чрезъ $(\omega)$, изъ полученныхъ формулъ найдемъ, что углы эти связаны съ угломъ Брокара уравненіемъ:

$$\mathrm{ctg}^2(\omega) - 2\,\mathrm{ctg}\,\omega\,.\,\mathrm{ctg}(\omega) + 3 = 0.$$

*Д. Е.* (Иваново-Вознесенскъ).

*(Продолженіе слѣдуетъ).*

# ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРІЯ ЭЛЛИПСА.

(Отвѣтъ на тему, предложенную профессоромъ Ермаковымъ въ № 110 „Вѣстника").

*(Продолженіе*).*

33. **Задача.** *Изъ данной точки* E (черт. 24), *лежащей внѣ эллипса, провести къ нему касательную.*

Соединивъ внѣшнюю точку E съ однимъ изъ фокусовъ, напримѣръ F, строимъ на прямой EF окружность, какъ на діаметрѣ. Пусть $O'$—средина прямой EF—будетъ (черт. 24) ея центръ. Окружность $O'$ непремѣнно встрѣтитъ окружность, построенную на большой оси, какъ на діаметрѣ, въ двухъ различныхъ точкахъ, такъ какъ разстояніе центровъ этихъ двухъ окружностей менѣе суммы и болѣе абсолютной величины разности ихъ радіусовъ.

Дѣйствительно, изъ треугольника $O'OF$ слѣдуетъ, что

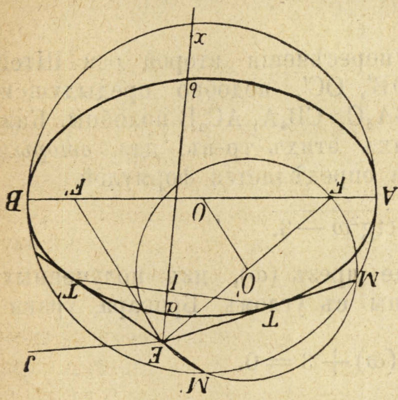
$$O'O < O'F + OF,$$

*) См. „Вѣстника Оп. Физики" №№ 239, 240, 242 и 243.

а слѣдовательно тѣмъ болѣе

$$OO' < O'F + OA,$$

откуда видно, что разстояніе центровъ окружностей O и O′ менѣе суммы ихъ радіусовъ. При доказательствѣ же того, что разстояніе центровъ окружностей O и O′ болѣе абсолютной величины разности ихъ радіусовъ, будемъ различать два случая; случай, когда $OA > O'F$, и случай, когда $OA \leqslant O'F$. Разберемъ первый случай, когда $OA > O'F$.



Фиг. 24.

Такъ какъ

$$\frac{F'F}{OF} = \frac{EF}{O'F} = 2,$$

и такъ какъ уголъ F у треугольниковъ EFF′ и O′OF общій, то треугольники эти подобны, а потому

$$\frac{EF'}{OO'} = 2,$$

откуда

$$OO' = \frac{EF'}{2}.$$

Такъ какъ точка E, по предположенію, лежитъ внѣ эллипса, то

$$EF + EF' > 2a,$$

откуда

$$\frac{EF}{2} + \frac{EF'}{2} > a,$$

или

$$O'F + OO' > OA.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$OO' > OA - O'F.$$

Пусть теперь $OA \leqslant O'F$. Въ этомъ случаѣ изъ треугольника O′FO имѣемъ:

$$OO' > O'F - OF,$$

а тѣмъ болѣе

$$OO' > O'F - OA.$$

Пусть M и M′ — точки встрѣчи окружностей O и O′; углы EMF и EM′F, какъ опирающіеся на діаметръ EF окружности O′, — прямые, а потому прямыя (теорема 32 обратная) EM и EM′ касаются эллипса въ нѣкоторыхъ точкахъ его T и T′. Кромѣ этихъ двухъ касательныхъ къ эллипсу изъ точки E нельзя провести никакой третьей. Дѣйствительно, если бы была еще третья касательная, проведенная изъ точки E къ эллипсу, то, опустивъ на нее перпендикуляръ изъ фокуса F, мы получили бы въ пересѣченіи этого перпендикуляра съ третьею касательною нѣкоторую точку $M''$, лежащую, по теоремѣ 32, на окружности $O$. Но, по построенію, уголъ $FM''E$ былъ бы тогда прямой, а потому точка $M''$ лежала бы и на окружности $O'$. Такимъ образомъ окружности $O$ и $O'$ имѣли бы три общія точки $M$, $M'$ и $M''$, а потому онѣ должны были бы совпадать, что невозможно, такъ какъ окружность $O'$ проходитъ черезъ точку $F$, а окружность $O$ не проходитъ.

Итакъ изъ точки, лежащей внѣ эллипса, къ нему можно провести двѣ и только двѣ касательныя.

*Примѣчаніе.* Два луча $ET$ и $ET'$ никогда не могутъ составить одной прямой; въ самомъ дѣлѣ, если бы эти лучи составляли одну прямую, то одна изъ двухъ касательныхъ $EM$ и $EM'$, напримѣръ, $EM$ — встрѣчала бы эллипсъ еще въ одной точкѣ $M'$, что невозможно. Значитъ точки $E$, $T$ и $T'$ не могутъ лежать на одной прямой, а потому, соединяя прямыми эти три точки мы всегда получимъ нѣкоторый треугольникъ.

34. Изъ точки, лежащей внутри эллипса, нельзя провести къ нему ни одной касательной, такъ какъ, по теоремѣ 12, всякая прямая, проходящая черезъ такую точку, встрѣчаетъ эллипсъ въ двухъ точкахъ. Кромѣ того, мы уже знаемъ (теорема 26, сл. 1), что въ точкѣ эллппса къ нему можно провести лишь одну касательную. Такъ какъ (§ 5) всякая точка, находящаяся въ плоскости эллипса, лежитъ либо на немъ, либо внутри, либо внѣ его, то изъ всякой точки этой плоскости къ эллипсу можно провести либо одну, либо ни одной, либо (теор. 35) двѣ касетельныхъ.

Наибольшее число касательныхъ, которыя можно провести къ плоской кривой изъ точки, лежащей въ плоскости этой кривой, называется *классомъ кривой*.

Согласно съ этимъ опредѣленіемъ эллипсъ оказывается кривой *второго класса*.

35. **Теорема.** *Пусть изъ точки* $E$ (черт. 24), *лежащей внѣ эллипса, проведены къ нему двѣ касательныя, точки прикосновенія которыхъ пусть будутъ* $T$ и $T'$. *Всѣ точки эллипса, кромѣ точекъ* $T$ и $T'$, *лежатъ внутри угла* $TET'$ *).

Дѣйствительно, всякая точка эллипса, отличная отъ точекъ $T$ и $T'$, можетъ вообще лежать лишь либо на прямыхъ $ET$ и $ET'$, либо внутри одного изъ трехъ угловъ: — $TEM'$, развернутаго угла $M'ET'$ и $TET'$. Но ни на одной изъ прямыхъ $ET$ и $ET'$ она не можетъ лежать, такъ какъ эти прямыя суть касательныя. Точно также точка эллипса не можетъ лежать внутри угла $M'ET'$, такъ какъ тогда эта точка и другая точка эллипса $T$ лежали бы по разныя стороны касательной $ET'$, что невозможно (§ 24, слѣд. 4). Подобнымъ же образомъ докажемъ, что никакая точка эллипса не можетъ быть внутри угловъ $TEM'$. Остается поэтому допустить, что всѣ точки эллипса, кромѣ точекъ $T$ и $T'$, лежатъ внутри угла $TET'$.

*) Подъ угломъ условимся подразумѣвать меньшій $180^0$ уголъ.

36. **Теорема.** *Пусть изъ точки* E (черт. 24), *лежащей внѣ эллипса, проведены къ нему двѣ касательныя, точки прикосновенія которыхъ суть* T *и* T′. *Всякій лучъ, исходящій изъ точки* E *и лежащій внутри угла* TET′ *встрѣчаетъ эллипсъ въ двухъ точкахъ, лежащихъ по разныя стороны прямой* TT′. *Всѣ же остальные лучи, исходящіе изъ точки* E, *вовсе не встрѣчаютъ эллипса.*

Въ самомъ дѣлѣ, лучъ, исходящій изъ точки E и лежащій внутри угла TET′, встрѣтитъ хорду TT′ въ нѣкоторой ея промежуточной точкѣ J; такимъ образомъ на разсматриваемомъ лучѣ лежитъ отрѣзокъ EJ, соединяющій лежащую, по предположенію, внѣ эллипса точку E съ точкой J, лежащей (теор. 9) внутри эллипса. Отрѣзокъ этотъ (теор. 12, сл. 3) непремѣнно встрѣтитъ эллипсъ въ нѣкоторой точкѣ его $a$. Возьмемъ теперь на части разсматриваемаго луча, служащей продолженіемъ отрѣзка EJ, нѣкоторую точку $x$. Тогда на лучѣ J$x$ (теор. 12, сл. 3) также лежитъ нѣкоторая точка эллипса $b$, отличная отъ точки $a$, такъ какъ всѣ точки луча J$x$, по построенію, лежатъ внѣ отрѣзка EJ. Точки $a$ и $b$ обѣ принадлежатъ разсматриваемому лучу, такъ какъ ему принадлежатъ всѣ точки отрѣзка EJ и луча J$x$. Кромѣ того, никакая третья точка эллипса не лежитъ на разсматриваемомъ лучѣ, такъ какъ эллипсъ есть кривая второго порядка. Точки $a$ и $b$ лежатъ съ разныхъ сторонъ прямой TT′, такъ какъ отрѣзокъ $ab$ встрѣчаетъ прямую TT′ въ точкѣ J.

Разсмотримъ теперь лучъ E$j$, исходящій изъ точки E, но лежащій внѣ угла TET′. Если бы хоть одна точка этого луча принадлежала эллипсу, то мы имѣли бы точку эллипса, отличную отъ точекъ T и T′, но не лежащую внутри угла TET′, что противорѣчитъ теоремѣ 35. Поэтому лучъ E$j$ вовсе не встрѣчаетъ эллипса.

**Слѣдствіе.** *Всякая точка, лежащая внутри эллипса, лежитъ также внутри угла* TET′.

Дѣйствительно, предположимъ, что нѣкоторая точка $j$, лежащая внутри эллипса, лежитъ внѣ угла TET′. Соединяя эту точку съ точкой E прямою, разсмотримъ лучъ E$j$, который, по только что доказанной теоремѣ, вовсе не встрѣтитъ эллипса. Возьмемъ на части этого луча, составляющей продолженіе отрѣзка E$j$, нѣкоторую точку $y$. Такъ какъ всѣ точки луча $jy$ принадлежатъ лучу E$j$, то лучъ $jy$ также не встрѣчаетъ эллипса; но это неправильно, такъ какъ лучъ $jy$ исходитъ изъ точки $j$, лежащей внутри эллипса, а потому долженъ встрѣтить эллипсъ въ одной точкѣ (§ 12, сл. 1).

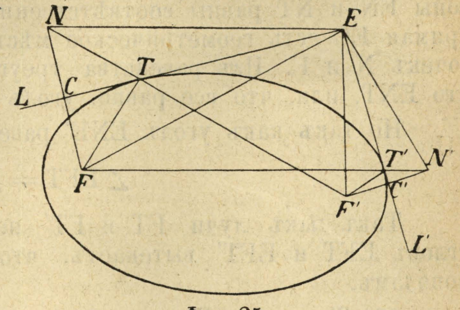
Изъ указаннаго противорѣчія слѣдуетъ, что точка $j$ не можетъ лежать внѣ угла TET′; точно также точка $j$ не можетъ лежать на лучахъ ET и ET′, такъ какъ всѣ точки этихъ лучей, кромѣ точекъ T и T′, лежатъ внѣ эллипса (§ 24, сл. 3). Остается допустить, что точка $j$ лежитъ внутри угла TET′.

37. **Теорема.** *Касательныя, проведенныя къ эллипсу изъ внѣшней точки, одинаково наклонены къ прямымъ, соединяющимъ эту точку съ фокусами.*

Пусть изъ внѣшней точки E проведены (черт. 25) касательныя EL и EL′. Изъ фокуса F опустимъ перпендикуляръ FC на касательную

EL и на продолженiи его отложимъ $CN = FC$. Точка пересѣченiя прямыхъ EL и NF′ есть (§ 24, сл. 2) точка прикосновенiя T касательной EL.

Точно также изъ фокуса F′ опустимъ перпендикуляръ на касательную EL′ и на его продолженiи отложимъ $C'N' = F'C'$. Тогда точка пересѣченiя прямыхъ FN′ и EL′ окажется точкой прикосновенiя T′ касательной EL′.




Фиг. 25.

Соединимъ точки N, F, N′ и F′ съ точкой E. Тогда по § 11 имѣемъ:

$$NF' = FN' = 2a.$$

Кромѣ того, такъ какъ, по построенiю, касательная EC есть геометрическое мѣсто точекъ, равно удаленныхъ отъ точекъ N и F, а касательная EC′, есть геометрическое мѣсто точекъ, равно удаленныхъ отъ точекъ N′ и F′, то прямыя EF и EF′ равны соотвѣтственно прямымъ EN и EN′.

Отсюда слѣдуетъ, что треугольники ENF′ и EN′F равны по тремъ сторонамъ. Изъ равенства этихъ треугольниковъ слѣдуетъ, что

$$\angle NEF' = \angle N'EF.$$

Вычитая изъ обѣихъ частей этого равенства—въ томъ случаѣ, конечно, когда точки E, F и F′ не лежатъ на одной прямой, по углу FEF′, получимъ, что $\angle NEF$ равенъ углу N′EF′.

Такъ какъ

$$\angle TEF = 1/2 \angle NEF \text{ и } \angle T'EF' = 1/2 \angle N'EF',$$

то

$$\angle TEF = \angle T'EF'.$$

Въ случаѣ, если точки E, F и F′ лежатъ на одной прямой, доказательство упрощается, такъ какъ тогда

$$\angle TEF = 1/2 \angle NEF' \text{ и } \angle T'EF' = 1/2 \angle N'EF,$$

углы же NEF′ и N′EF равны, какъ это доказано выше.

38. **Теорема.** *Прямая, соединяющая точку встрѣчи двухъ пересѣкающихся касательныхъ съ фокусомъ, дѣлитъ пополамъ уголъ между прямыми, соединяющими этотъ фокусъ съ точками касанiя.*

Пусть E (черт. 25)—точка встрѣчи двухъ пересѣкающихся касательныхъ LE и L′E.

Сдѣлавъ такое же построенiе, какъ и въ предыдущей теоремѣ, изъ равенства тѣхъ же треугольниковъ NEF′ и N′EF мы найдемъ, что

$$\angle ENF' = \angle EFN',$$

или, что одно и то же.

$$\angle ENF' = \angle EFT'.$$

Соединимъ точку T съ фокусомъ F. Треугольники ENT и EFT равны между собою; дѣйствительно, сторона ET у нихъ общая, а стороны EN и NT равны соотвѣтственно сторонамъ EF и FT, такъ какъ прямая EC есть геометрическое мѣсто точекъ, равно удаленныхъ отъ точекъ N и F. Изъ равенства треугольниковъ ENT и EFT слѣдуетъ, что ENT, или, что все равно, уголъ ENF′, равенъ углу EFT.

Но такъ какъ уголъ ENF′ равенъ углу EFT′, то

$$\angle EFT = \angle EFT'.$$

Такъ какъ лучи FT и FT′ не совпадаютъ*), то изъ равенства угловъ EFT и EFT′ вытекаетъ, что прямая EF дѣлитъ уголъ TFT′ пополамъ.

39. **Теорема.** *Четыре фокусныхъ радіуса, проведенныхъ къ точкамъ прикосновенія двухъ касательныхъ, исходящихъ изъ нѣкоторой точки E, лежащей внѣ эллипса, касаются одной окружности, центръ которой совпадаетъ съ точкой* E.

Пусть ET и ET′ — двѣ касательныя, (черт. 25) проведенныя изъ внѣшней относительно эллипса точки E; пусть FT, F′T, FT′, F′T′—четыре фокусныхъ радіуса, проведенныхъ къ точкамъ прикосновенія касательныхъ ET и ET′.

По теоремѣ 38 прямая EF есть биссекторъ угла TFT′, а потому точка E одинаково отстоитъ отъ фокусныхъ радіусовъ TF и T′F. По той же теоремѣ прямая EF′ есть биссекторъ угла TF′T′, а потому точка E одинаково удалена отъ прямыхъ TF′ и T′F′.

Прямая ET, какъ касательная, есть (§ 26) биссекторъ угла FTN; отсюда слѣдуетъ, что точка E одинаково отстоитъ также и отъ прямыхъ TF′ и TF.

Отстоя одинаково отъ каждой изъ паръ прямыхъ T′F и TF, TF и TF′, TF′ и T′F—точка E одинаково отстоитъ отъ всѣхъ четырехъ прямыхъ TF, TF′, T′F и T′F′, откуда и вытекаетъ справедливость указанной теоремы.

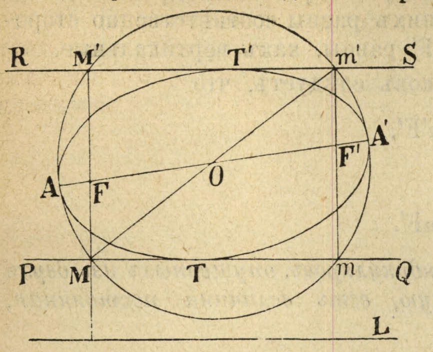
40. **Задача.** *Провести къ эллипсу касательную, параллельную данной прямой* L.

Изъ одного изъ фокусовъ F опустимъ перпендикуляръ на данную прямую L. Пусть M и M′ (черт. 26) суть точки встрѣчи этого перпендикуляра съ окружностью, построенной на большой оси, какъ на діаметрѣ. Прямыя MT и M′T′, проведенныя перпендикулярно къ прямой MM′, суть касательныя къ эллипсу, параллельныя данной прямой. Дѣйствительно, по теоремѣ 32 прямыя MT и M′T′ касаются эллипса, кромѣ того, прямыя эти параллельны данной прямой, такъ какъ онѣ, вмѣстѣ съ данной прямой, перпендикулярны къ одной и той же прямой MM′. Кромѣ этихъ двухъ касательныхъ никакая третья не удовлетворяетъ требованіямъ задачи. Дѣйствительно, если бы кромѣ двухъ касатель-

---

*) Дѣйствительно, если бы эти лучи совпадали, то фокусъ F лежалъ бы на продолженіе хорды TT′ и потому находился бы внѣ эллипса, что невозможно (§ 5).

ныхъ, параллельныхъ данной прямой, существовала бы еще и третья, то тогда прямая MM′, перпендикулярная къ двумъ параллельнымъ касательнымъ, была бы перпендикулярна и къ этой третьей касательной. Поэтому прямая MM′ встрѣтила бы эту касательную въ точкѣ M″, принадлежащей, по теоремѣ 32, окружности O, построенной на большой оси, какъ на діаметрѣ. Но тогда прямая MM′ встрѣтила бы окружность O въ трехъ точкахъ M, M′ и M″, что невозможно.




Фиг. 26.

**Слѣдствіе.** *Всякая третья касательная встрѣчаетъ двѣ параллельныя касательныя къ эллипсу.*

Это предложеніе безъ труда можно доказать способомъ отъ противнаго.

41. **Теорема.** *Произведеніе перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ одного и того же фокуса на двѣ параллельныя касательныя, есть величина постоянная, равная квадрату малой полуоси.*

Пусть PQ и RS (черт. 26)—двѣ параллельныя касательныя. Проведемъ черезъ фокусъ F прямую, перпендикулярную къ касательной PQ, которая будетъ перпендикулярна и къ касательной RS, такъ какъ послѣдняя параллельна касательной PQ. Пусть M и M′ будутъ точки встрѣчи этой прямой съ касательными PQ и RS. Тогда FM и FM′ суть перпендикуляры, опущенные изъ фокуса F на данныя параллельныя касательныя PQ и RS.

Такъ какъ точки M и M′ (§ 32) лежитъ на окружности, описанной на большой оси какъ на діаметрѣ, то:

$$FM \, . \, FM' = FA \, . \, FA', \text{ или (см. § 2)}$$

$$FM \, . \, FM' = (a-c)(a+c) = a^2 - c^2.$$

Но

$$a^2 - c^2 = b^2 \text{ (см. § 22).}$$

Поэтому

$$FM \, . \, FM' = b^2.$$

42. **Теорема.** *Перпендикуляры, опущенные изъ разныхъ фокусовъ на параллельныя касательныя, равны.*

Пусть PQ и RS—двѣ параллельныя касательныя (черт. 26). Чрезъ фокусы F и F′ проведемъ прямыя, перпендикулярныя къ касательной PQ. Эти прямыя будутъ перпендикулярны и къ касательной RS, такъ какъ послѣдняя, по предположенію, параллельна касательной PQ. Пусть эти прямыя встрѣчаютъ касательную PQ въ точкахъ M и $m$, а касательную RS—въ точкахъ M′ и $m'$. Точки M, M′, $m$, $m'$, по теоремѣ 32, лежатъ на окружности O, описанной на большой оси, какъ на діаметрѣ. Такимъ образомъ фигура MM′ $m'm$ есть прямоугольникъ, вписанный въ кругъ O, а потому діагональ его M$m'$ проходитъ черезъ центръ O.

Разсмотримъ треугольники MOF и $m'OF'$; они равны между собою, такъ какъ стороны MO и OF перваго изъ нихъ равны соотвѣтственно сторонамъ $m'O$ и $OF'$, а углы MOF и $m'OF'$ равны, какъ вертикальные.

Изъ равенства этихъ треугольниковъ слѣдуетъ, что

$$MF = m'F'.$$

Точно также докажемъ, что

$$M'F = mF'.$$

43. **Теорема.** *Произведеніе перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ двухъ фокусовъ на одну и ту же касательную, есть величина постоянная, равная квадрату малой полуоси.*

Пусть PQ и RS—двѣ параллельныя касательныя (черт. 26).

По теоремѣ 38 имѣемъ:

$$FM . FM' = b^2.$$

Такъ какъ (теор. 42) $M'F = mF'$, то

$$FM . FM' = FM . F'm.$$

Поэтому

$$FM . F'm = b^2.$$

(*Продолженіе слѣдуетъ*).

# МАТЕМАТИЧЕСКІЯ МЕЛОЧИ.

## Прямое доказательство равенства предѣловъ равныхъ перемѣнныхъ величинъ.

Проф. Давидовъ[1]) и г. Киселевъ[2]) въ своихъ учебникахъ „Элементарной геометріи“ доказываютъ относительно предѣловъ перемѣнныхъ величинъ только двѣ теоремы, изъ которыхъ первую г. Киселевъ высказываетъ такъ:

„*Если двѣ перемѣнныя величины, стремящіяся къ предѣламъ, при „всѣхъ своихъ измѣненіяхъ остаются равными между собою, то равны „и ихъ предѣлы*“.

Теорему эту и проф. Давидовъ и г. Киселевъ доказываютъ способомъ отъ противнаго. Доказательства ихъ, какъ показалъ мнѣ опытъ, для большинства учащихся остаются неясными, чего и слѣдовало ожидать, ибо доказательства эти основаны неявно на теоремѣ, не высказы-



[1]) А. Давидовъ. Элементарная геометрія. Изд. 15-ое. М. 1888. Стран.: 175—176; §§ 172—173.

[2]) А. Киселевъ. Элементарная геометрія. М. 1892. Стран.: 161—162, §§ 242—249.

ваемой и не доказываемой ни проф. Давидовымъ ни г. Киселевымъ въ ихъ учебникахъ „Элементарной геометріи“, именно на теоремѣ:

*Разность двухъ безконечно малыхъ величинъ есть величина безконечно малая.*

Между тѣмъ существуетъ весьма простое прямое доказательство приведенной выше теоремы о предѣлахъ, помѣщенное между прочимъ въ „Курсѣ дополнительныхъ статей алгебры“ П. С. Флорова[3]) и не требующее знанія никакой теоремы о безконечно малыхъ величинахъ. На это доказательство слѣдовало бы составителямъ учебниковъ геометріи обратить свое вниманіе, и я совѣтую излагать его слѣдующимъ образомъ:

Пусть $x$ и $y$ обозначаютъ двѣ перемѣнныя величины, стремящіяся къ нѣкоторымъ предѣламъ.

*По условію*

$$x = y. \qquad (1).$$

*Требуется доказать, что*

$$\text{пред. } x = \text{пред. } y. \qquad (2).$$

Пусть

$$\text{пред. } x = a \qquad (3).$$

и

$$x - a = \alpha. \qquad (4).$$

Въ такомъ случаѣ $\alpha$ будетъ величина безконечно малая, ибо обозначаетъ разность между нѣкоторой перемѣнной величиной $x$ и ея предѣломъ $a$.

Такъ какъ по условію

$$x = y,$$

то въ равенствѣ (4) можно подставить $y$ вмѣсто $x$, и тогда получимъ:

$$y - a = \alpha, \qquad (5),$$

откуда видно, что разность между перемѣнной величиной $y$ и постоянной величиной $a$ равна нѣкоторой безконечно малой величинѣ $\alpha$; слѣдовательно

$$\text{пред. } y = a. \qquad (6).$$

Но по положенію

$$\text{пред. } x = a;$$

слѣдовательно

$$\text{пред. } x = \text{пред. } y, \text{ ч. и т. д.}$$

Этимъ доказательствомъ слѣдовало бы замѣнить упомянутыя доказательства отъ противнаго.

*С. Гирманъ* (Варшава).



---

[3]) П. С. Флоровъ. Курсъ дополнительныхъ статей алгебры. М. 1893. Стран.: 52, § 42.

# НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

**Новая теорія сѣверныхъ сіяній.**—Адамъ Паульсенъ, директоръ метеорологическаго института въ Копенгагенѣ, года два тому назадъ предложилъ новую теорію сѣверныхъ сіяній, сущность которой заключается въ слѣдующемъ: земля представляетъ анодъ, верхніе слои атмосферы—катодъ; отъ катода спускаются внизъ катодные лучи, которые, проникая въ болѣе плотные слои воздуха, дѣлаютъ ихъ свѣтящимися; вслѣдствіе прохожденія катодныхъ лучей воздухъ, согласно изслѣдованіямъ Ленарда дѣлается хорошимъ проводникомъ электричества, почему и возникаютъ электрическіе токи *снизу вверхъ*; эти-то токи и дѣйствуютъ на магнитную стрѣлку; они постепенно сглаживаютъ разность потенціаловъ между верхними и нижними слоями атмосферы и явленіе прекращается или передвигается далѣе. Источникомъ энергіи, проявляющейся въ этомъ явленіи, служитъ запасъ энергіи, полученной днемъ отъ солнца; такой взглядъ согласуется съ тѣмъ обстоятельствомъ, что maximum напряженности сіяній падаетъ на первую половину ночи.—Можно бы возразить, что катодные лучи получаются при прерывистомъ или альтернативномъ токахъ и что ихъ не удалось получить при постоянныхъ статическихъ зарядахъ, но вѣдь, и молнія, являющаяся результатомъ разницы статическихъ зарядовъ, имѣетъ обыкновенно сходство съ колеблющимся разрядомъ (Révue Scient.).

*К. Смоличъ.*

**Электрическіе трамваи.**—За 1895 г. число линій съ электрической тягой въ Европѣ возрасло съ 70 до 111, протяженіе же съ 700 до 902 кил. Онѣ распредѣляются между государствами слѣдующимъ образомъ:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Въ Германіи . . . . . | 406 | кил. | съ 857 | вагонами |
| „ Франціи . . . . . | 132 | „ | „ 225 | „ |
| „ Англіи . . . . . | 107 | „ | „ 168 | „ |
| „ Швейцаріи . . . . | 47 | „ | „ 86 | „ |

Только въ Болгаріи и Даніи совсѣмъ нѣтъ электрическихъ дорогъ. Наиболѣе распространена система съ воздушными проводниками съ каткомъ, которая встрѣчается на 91 линіи; на 3 линіяхъ употребляется подземный провозъ, на 9—центральный рельсъ, 8 дѣйствуютъ при помощи аккумуляторовъ (R. Scient.).

*К. Смоличъ.*

**Измѣреніе высокихъ температуръ.** — Для измѣренія высокихъ температуръ пользуются тремя способами: воздушнымъ термометромъ изъ огнеупорнаго вещества, измѣненіемъ сопротивленія платиновой проволоки при измѣненіи температуры и термоэлектрической парой изъ трудноплавкихъ металловъ. Лучшимъ считается послѣдній способъ; пара состоитъ изъ платины и сплава изъ платины съ родіемъ, содержащаго

10% послѣдняго; измѣненіе электровозбудительной силы такой пары строго пропорціонально температурѣ; этимъ способомъ можно измѣрять температуры до 1600°С (R. Scient.).

*К. Смоличъ.*

**Статистика телефоновъ.** — На одну телефонную станцію приходится:

| | | |
|---|---|---|
| Въ Норвегіи . . . . . . . . . . . | 144 | чел. |
| „ Швеціи . . . . . . . . . . . | 147 | „ |
| „ Люксембургѣ . . . . . . . . . | 160 | „ |
| „ Швейцаріи . . . . . . . . . . | 172 | „ |
| „ Даніи . . . . . . . . . . . . | 211 | „ |
| „ Финляндіи . . . . . . . . . . | 328 | „ |

Въ этой группѣ телефонъ не составляетъ предмета роскоши и пользованіе имъ доступно по цѣнѣ даже въ деревняхъ.

Въ слѣдующей группѣ 1 телефонъ приходится:

| | | |
|---|---|---|
| въ Баваріи . . . . . . . . . | на 451 | чел. |
| „ Вюртембергѣ . . . . . . . | „ 459 | „ |
| „ Великобританіи . . . . . . | „ 636 | „ |
| „ Голландіи . . . . . . . . . | „ 643 | „ |
| „ Бельгіи . . . . . . . . . . | „ 700 | „ |

Здѣсь, благодаря сравнительно высокому тарифу, пользованіе телефономъ доступно только въ городахъ.

Въ третьей группѣ 1 телефонъ:

| | | |
|---|---|---|
| во Франціи . . . . . . . . . . | на 1432 | чел. |
| „ Испаніи . . . . . . . . . . | „ 1618 | „ |
| „ Австріи . . . . . . . . . . | „ 1640 | „ |
| „ Италіи . . . . . . . . . . | „ 2530 | „ |
| „ Венгріи . . . . . . . . . . | „ 3139 | „ |
| „ Португаліи . . . . . . . . | „ 3371 | „ |
| „ Россіи . . . . . . . . . . | „ 13102 | „ |

(R. Scient.).

*К. Смоличъ.*

# РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Въ настоящее время можно считать почти рѣшеннымъ, что *первый международный математическій конгрессъ* соберется въ 1897 году въ Цюрихѣ около 10 авг. (н. с.) и будетъ продолжаться 3—4 дня. Въ Цюрихѣ образовался съ этой цѣлью комитетъ, состоящій изъ проф. Гейзера, Гурвица, Рудіо, Ф. Вебера и Франеля, который по соглашеніи съ математиками, принимающими участіе въ дѣлѣ конгресса, выработаетъ программу его занятій. На съѣздѣ нѣмецкой ассоціаціи математиковъ, который происходилъ въ сентябрѣ въ Франкфуртѣ на Майнѣ, проф. Рудіо передалъ приглашеніе участвовать въ конгрессѣ нѣмецкой ассоціаціи; при обсужденіи этого приглашенія было высказано желаніе, чтобы сообщенія, дѣлаемыя на съѣздѣ, носили по возможности общій характеръ и были избѣгаемы сообщенія излишне спеціальныя. Можно надѣяться также, что со съѣздомъ будетъ соединено чтеніе рефератовъ лекціоннаго характера въ видѣ образцоваго изложенія наиболѣе интересныхъ вопросовъ математики. Такіе рефераты имѣли мѣсто на послѣднемъ конгрессѣ Американской Ассоціаціи въ Буфало, гдѣ пр. Боше читалъ курсъ въ 6 лекцій по теоріи Галуа. (Изв. Физ.-Мат. Общ. при Каз. Ун.).

Лондонское Королевское Общество избрало въ члены профессора *G. Lippmann*'а (Парижъ), проф. *G. Schiaparelli* (Миланъ), проф. *Gösta Mittag-Leffer'а* (Стокгольмъ) и проф. *Albert'а Heim'а* (Цюрихъ).

Скончались: 28-го октября преподаватель математики въ мужской и женской гимназіяхъ въ Каменецъ-Подольскѣ, сотрудникъ „Вѣстника Оп. Физики" *Н. Ад. Конопацкій*; 22-го ноября профессоръ математики въ Шарлоттенбургѣ *Felix Вика*.

На сооруженіе памятника Лавуазье въ редакцію „Вѣстника" поступили еще слѣдующія пожертвованія: отъ *Е. Буницкаго*—1 р., а съ прежде поступившими 20 р. 10 к.

# ЗАСѢДАНІЯ УЧЕНЫХЪ ОБЩЕСТВЪ.

## Математическое Отдѣленіе Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей.

### *Засѣданіе 1 ноября 1896 г.*

Проф. *В. В. Преображенскій* сдѣлалъ сообщеніе: „Явленіе ореола на морскихъ волнахъ". Содержаніе этого сообщенія будетъ изложено въ одномъ изъ слѣдующихъ номеровъ „Вѣстника".

Проф. *И. Ю. Тимченко* сдѣлалъ сообщеніе: „Къ Эйлеровой теоріи безконечныхъ величинъ".

### *Засѣданіе 15 ноября.*

Проф. *И. Ю. Тимченко* сдѣлалъ сообщеніе: „Элементарная геометрическая теорія логариѳмовъ".

Проф. *И. М. Занчевскій* сдѣлалъ сообщеніе: „Къ вопросу о движеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки".

### *Засѣданіе 29 ноября.*

Студ. *М. П. Зейлигеръ* сдѣлалъ сообщеніе: „Maxima и minima функціи двухъ перемѣнныхъ".

Проф. *Х. І. Гохманъ* сдѣлалъ сообщеніе: „О преподаваніи элементарной алгебры". Сообщеніе это представляетъ непосредственное продолженіе доклада, сдѣланнаго проф. Х. І. Гохманомъ въ засѣданіи 18-го октября *). Докладчикъ изложилъ въ этомъ сообщеніи ту программу, которой онъ успѣшно пользуется при преподаваніи элементарной алгебры. Для того чтобы ученикъ, усвоивъ опредѣленіе дѣйствія, самъ вывелъ всѣ слѣдствіе изъ этого опредѣленія, необходимо, по мнѣнію докладчика, разсматривать всѣ дѣйствія въ ихъ взаимной связи. Опредѣливъ сложеніе, какъ упрощенный счетъ, т. е. такой, гдѣ сразу присчитывается нѣсколько единицъ, и указавъ на перемѣстительное свойство суммы, докладчикъ разсматриваетъ умноженіе, какъ частный случай сложенія и доказываетъ перемѣстительность произведенія, разсматривая три случая:

*) См. „В. О. Ф." № 242, стр. 48.

$$ab = ba,\ (ab)c = (ac)b,\ a(bc) = (ab)c.$$

Возвышеніе въ степень разсматривается, какъ частный случай умноженія.

Обратныя дѣйствія разсматриваются, какъ задачи на прямыя дѣйствія. Такъ какъ сумма и произведеніе обладаютъ свойствомъ перемѣстительности, то двѣ возможныя задачи на сложеніе или умноженіе приводятся къ одной, тогда какъ возвышенію въ степень соотвѣтствуютъ два обратныхъ дѣйствія: извлеченіе корня и нахожденіе логариѳма.

Затѣмъ нокладчикъ упражняетъ учениковъ въ дѣйствіяхъ надъ одночленами, обращая вниманіе учениковъ на то, что дѣйствія надъ степенями *низводятся* къ дѣйствіямъ надъ показателями, т. е. что

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},\ a^m : a^n = a^{m-n},\ (a^m)^n = a^{mn},\ \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}},\ \lg_{a^n} a^m = \frac{m}{n}.$$

При этомъ указываются слѣдующія *общія свойства* дѣйствій.

1) Результаты прямыхъ дѣйствій, обладающихъ свойствомъ перемѣстительности, не измѣняются, если надъ обоими членами произвести противоположныя дѣйствія:

$$a + b = (a \pm c) + (b \mp c);\ a \cdot b = (a \cdot c)\frac{b}{c}.$$

2) Для результатовъ прямыхъ дѣйствій, не обладающихъ свойствомъ перемѣстительности, предыдущее правило относится къ показателямъ:

$$(a^p)^q = (a^{p/n})^{q/n}.$$

3) Результаты обратныхъ дѣйствій, происходяшихъ отъ прямыхъ, обладающихъ свойствомъ перемѣстительности, не измѣняются, если надъ обоими членами произвести одинаковыя дѣйствія:

$$a - b = (a \pm c) - (b \pm c);\ \frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} = \frac{a:c}{b:c}.$$

4) Для результатовъ обратныхъ дѣйствій, происходящихъ отъ прямыхъ, не обладающихъ свойствомъ перемѣстительности, предыдущее правило относится къ показателямъ:

$$\sqrt[p]{a^q} = \sqrt[pn]{a^{qn}} = \sqrt[p'n]{a^{q\,n}}.$$

Все изложенное иллюстрируется задачами, при которыхъ ученикамъ приходится имѣть дѣло со всѣми дѣйствіями и которыя рѣшаются учениками въ умѣ.

Когда ученики усвоятъ все изложенное, докладчикъ знакомитъ ихъ съ результатами обратныхъ дѣйствій. Чтобы обратныя дѣйствія были всегда возможны, необходимо расширить понятіе о числѣ: такимъ образомъ вводятся въ разсмотрѣніе числа отрицательныя, дробныя, ирраціональныя и мнимыя.

Докладъ этотъ вызвалъ оживленныя пренія, въ которыхъ приняли участіе гг. *И. В. Слешинскій*, *К. В. Май*, *В. А. Циммерманъ*, *Ө. Н. Милятицкій*, *В. В. Преображенскій*, *Е. Л. Буницкій*, *И. М. Занчевскій* и *С. В. Житковъ*.

**Засѣданіе 13 декабря 1896 г.**

*С. О. Шатуновскій* сдѣлалъ сообщеніе: „О пропорціональности прямолинейныхъ отрѣзковъ“. Сообщеніе это представляетъ непосредственное продолженіе статьи, напечатанной въ № 241 „Вѣстника“ и будетъ цѣликомъ помѣщено въ одномъ изъ слѣдующихъ номеровъ.

*И. В. Слешинскій* сообщилъ нѣсколько соображеній, направленныхъ къ тому, чтобы сдѣлать статью о дѣлимости чиселъ возможно доступной для учащихся низшихъ классовъ. Съ этой цѣлью референтъ совѣтуетъ разсматривать дѣлителя, какъ число, изъ котораго другое составляется, и держаться при объясненіи нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя формы изложенія 3-го предложенія X-ой книги элементовъ Эвклида.

# ЗАДАЧИ.

**№ 385.** Пусть $R_1$, $R_2$, $R_3$ суть радіусы трехъ круговъ, находящихся во внѣшнемъ соприкосновеніи. Обозначивъ чрезъ $r$ радіусъ круга, вписаннаго въ треугольникъ, составленный общими внѣшними касательными къ этимъ кругамъ, показать, что

$$r=\frac{\sqrt{R_1}+\sqrt{R_2}+\sqrt{R_3}+\sqrt{R_1+R_2+R_3}}{\frac{1}{\sqrt{R_1}}+\frac{1}{\sqrt{R_2}}+\frac{1}{\sqrt{R_3}}}$$

*Д. Е.* (Иваново-Вознесенскъ).

**№ 386.** Данъ уголъ $XOY$ и внутри его точка $M$. Провести черезъ точки $M$ и $O$ окружность, пересѣкающую стороны угла въ точкахъ $A$ и $B$, такъ чтобы площадь треугольника $AOB$ равнялась данной величинѣ.

*П. Свѣшниковъ* (Уральскъ).

**№ 387.** Рѣшить уравненіе

$$x^{2q}-x^q-2\sqrt{x^q}+2=0.$$

*Ю. Идельсонъ* (Одесса).

**№ 388.** Построить треугольникъ, зная его основаніе, разность угловъ, прилежащихъ основанію, и разность квадратовъ двухъ прочихъ сторонъ.

*В. Сахаровъ* (Тамбовъ).

**№ 389.** На основаніи $AC$ треугольника $ABC$ дана точка $D$. Черезъ эту точку провести прямую, дѣлящую треугольникъ на двѣ равновеликія части.

*Л. Магазаникъ* (Бердичевъ).

**№ 390.** На плоскости начерчена окружность и прямая $P$, проходящая черезъ центръ этой окружности. Не пользуясь циркулемъ, при помощи линейки опустить изъ данной въ той же плоскости точки $A$ перпендикуляръ на прямую $P$.

(Заимств.) *М. Григорьевъ* (Иваново-Вознесенскъ).

# РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

**№ 313** (3 сер.).—Доказать, что

$$n+3(n-1)+5(n-2)+\ldots+[2(n-2)-1]3+[2(n-1)-1]2+(2n-1)=$$
$$=1+2^2+3^2+\ldots+n^2.$$

1. Лѣвую часть даннаго равенства можно представить въ видѣ:

$$(2n-1)+(2n-3)+(2n-5)+\ldots\ldots+3+1$$
$$+(2n-3)+(2n-5)+\ldots\ldots+3+1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+3+1$$
$$+1$$

а такъ какъ верхняя изъ этихъ строкъ даетъ $n^2$, вторая $(n-1)^2$ и т. д. то справедливость даннаго равенства очевидна.

*Я. Полушкинъ* (с. Знаменка); *Э. Заторскій* (Москва).

2. Замѣтивъ, что

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=1+2^2+\ldots.+n^2$$

и

$$\frac{n(n+1)}{2}=1+2+\ldots.+n,$$

легко получимъ требуемое равенство изъ тожества:

$$-2\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}(2n+3)-n(n+1)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

*М. Зиминъ* (Елецъ).

**№ 314** (3 сер.).—Доказать, что если $a$ есть простое число вида $4m+1$, то $a^2$ можетъ быть представлено въ видѣ $24n+1$.

По условію задачи

$$a^2=16m^2+8m+1,$$

но такъ какъ произведеніе

$$4m(4m+1)(4m+2)$$

дѣлится на 3 и такъ какъ $4m+1$ есть простое число, то произведеніе

$$4m(4m+2)$$

кратно трехъ, а потому можно положить

$$4m(4m+2)=16m^2+8m=24n,$$

гдѣ $n$ есть цѣлое число; отсюда

$$16m^2+8m+1=a^2=24n+1.$$

*Я. Полушкинъ* (с. Знаменка); *Д. Цельмеръ* (Тамбовъ).



**№ 315** (3 сер.).—Рѣшить безъ помощи тригонометріи слѣдующую задачу (изъ „Собранія стереометрическихъ задачъ, требующихъ примѣненія тригонометріи“ Рыбкина, стр. 36, № 145):

„Круговой секторъ вращается около діаметра, параллельнаго его хордѣ. Поверхность, образованная вращеніемъ хорды, дѣлитъ объемъ, полученный отъ вращенія сектора, пополамъ. Опредѣлить центральный уголъ сектора“.

Пусть хорда сектора $= x$, разстояніе ея отъ центра $= y$, а радіусъ круга $= R$. Имѣемъ:

Объемъ, описанный секторомъ $AOB = \dfrac{2\pi R^2 x}{3}$,

Объемъ, описанный треугольник. $AOB = \dfrac{2\pi y^2 x}{3}$.

По условію задачи

$$\frac{2\pi R^2 x}{3} = \frac{4\pi y^2 x}{3},$$

или

$$R^2 = 2y^2, \text{ откуда } \frac{x}{2} = y,$$

т. е. искомый центральный уголъ сектора равенъ $90^0$.

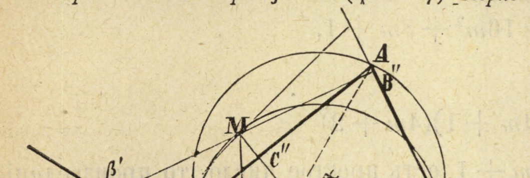
*Э. Заторскій* (Вильно); *М. Зиминъ* (Орелъ); *Д. Цельмеръ* (Тамбовъ); *Лежебокъ* (Ярославль).

# ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

## MATHESIS.

### 1896.—№ 3.

**Théorème de géométrie.** Par *M. Soons. Пусть* A′, B′, C′ *суть проэкціи вершинъ тр-ка* ABC *на прямую* m. (фиг. 27). *Перпендикуляры* A′A″, B′B″, C′C″ *изъ точекъ* A′, B′, C′ *на стороны тр-ка* BC, CA, AB *пересѣкаются въ одной точкѣ* M.




Фиг. 27.

*Если прямая* m *проходитъ чрезъ центръ* O *круга* ABC, *то точка* M *находится на окружности девяти точекъ тр-ка* ABC. (Фигура соотвѣтствуетъ именно этому случаю).

Допустимъ, что A′A″ пересѣкается съ B′B″ и C′C″ въ точкахъ M и M′. Обозначивъ чрезъ K пересѣченіе AA′ съ BC, получимъ двѣ пары подобныхъ тр-въ B′A′M и AKC, C′A′M′ и AKB (сходственныя стороны этихъ тр-въ перпендикулярны); поэтому:

$$\frac{A'M}{KC} = \frac{A'B'}{AK}, \quad \frac{A'M'}{KB} = \frac{C'A'}{AK};$$

отсюда:

$$\frac{A'M \,.\, KB}{A'M' \,.\, KC'} = \frac{A'B'}{A'C} \text{ или } \frac{A'M}{A'M'} = \frac{A'B'}{A'C'} : \frac{KB}{KC'}$$

но

$$\frac{KB}{KC}=\frac{A'B'}{A'C'},\ \text{слѣдов.}\ \frac{A'M}{A'M'}=1,$$

т. е. точка M′ совпадаетъ съ точкой M.

Вторую часть теоремы авторъ доказываетъ сначала аналитически, а потомъ синтетически. Опуская первое доказательство, приводимъ второе, какъ вполнѣ элементарное.

Пусть $\alpha$, $\beta$, $\gamma$—суть центры окружностей, имѣющихъ діаметрами OA, OB и OC; окружности эти проходятъ соотвѣтственно чрезъ точки A′, B′, C′. Такъ какъ AA′ и BB′ перпендикулярны къ A′B′, то перпендикуляръ, возставленный въ срединѣ L этого отрѣзка, пройдетъ чрезъ средину F стороны AB. Кромѣ того,

$$FB'A'=\angle FBO=90^0-\angle BOF=90^0-\angle C=90^0-\angle B'MA',$$

поэтому

$$\angle B'FL=\angle B'MA',$$

слѣдовательно, F есть центръ круга MA′B′ и прямыя EF и DF, соотвѣтственно перпендикулярныя къ MA′ и MB′, дѣлятъ эти отрѣзки пополамъ. Такимъ образомъ, проэкціи точки M на стороны тр-ка DEF находятся на параллели къ $m$ (равноотстоящей отъ этой прямой и точки M), а потому точка M находится на окружности DEF, т. е. на окружности девяти точекъ тр-ка ABC.

Обратно, если M есть одна изъ точекъ окружности девяти точекъ тр-ка ABC, то точки A′, B′, C симметричныя съ M относительно прямыхъ, соединяющихъ средины сторонъ этого тр-ка, находятся на одной прямой, проходящей чрезъ центръ круга ABC, а перпендикуляры въ A′, B′, C′ къ этой прямой проходятъ чрезъ вершины тр-ка A, B, C.

**Sur les triangles formés par les tangentes communes à trois cercles donnés.** Par M. *E.-N. Barisien* (Suite). Если $a$, $b$, $c$ суть стороны тр-ка, составленнаго внутренними касательными $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, къ окружностямъ $O_1$, $O_2$, $O_3$, радіусы которыхъ суть $R_1$, $R_2$, $R_3$, то

$$a=\alpha_1+R_2\operatorname{tg}{}^1/{}_2B-R_3\operatorname{tg}{}^1/{}_2C,$$

$$b=\beta_1+R_3\operatorname{tg}{}^1/{}_2C-R_1\operatorname{tg}{}^1/{}_2A,$$

$$c=\gamma_1+R_1\operatorname{tg}{}^1/{}_2A-R_2\operatorname{tg}{}^1/{}_2B.$$

Положивъ

$$a+b+c=2p,\ -a+b+c=2p_1,\ \ldots\ldots$$

$$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=2t,\ -\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=2t_1,\ \ldots\ldots$$

легко выразить $\operatorname{tg}{}^1/{}_2A$, $\operatorname{tg}{}^1/{}_2B$, $\operatorname{tg}{}^1/{}_2C$ чрезъ $p_1$, $p_2$, $p_3$ и радіусы $r_1$, $r_2$, $r_3$ круговъ внѣвписанныхъ въ тр-къ ABC, откуда, въ свою очередь, $p_1$, $p_2$, $p_3$ выразятся чрезъ $t$, $t_1$, $t_2$, $t_3$ и $R_1$, $R_2$, $R_3$; подставивъ затѣмъ найденныя выраженія для $p_1$, $p_2$, $p_3$ въ равенство

$$p_1r_1=\sqrt{pp_1p_2p_3},$$

получимъ ур-ніе, изъ котораго найдемъ

$$r_1=(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)\frac{\beta_1(R_1+R_2)-\gamma_1(R_1+R_3)\pm 2U}{(\beta_1+\gamma_1)^2-\alpha_1{}^2+4R_1(R_1+R_2+R_3)},$$

гдѣ U—площадь тр-ка $O_1O_2O_3$. Точно такъ же найдутся $r_2$ и $r_3$.

Подобнымъ-же образомъ рѣшается задача для тр-въ, составленныхъ внутренними и внѣшними касательными. Напр. для тр-ка $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma$:

$$a=\alpha_1+R_2\operatorname{tg}{}^1/{}_2B-R_3\operatorname{tg}{}^1/{}_2C$$

$$b=\beta_1+R\operatorname{ctg}{}^1/{}_2A+R_3\operatorname{tg}{}^1/{}_2C,$$

$$c=\gamma+R\operatorname{ctg}{}^1/{}_2A-R_2\operatorname{tg}{}^1/{}_2B,$$

причемъ $\operatorname{tg}{}^1/{}_2A$, $\operatorname{tg}{}^1/{}_2B$, $\operatorname{tg}{}^1/{}_2C$ выражаются чрезъ

$$2u = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma,\ 2u_1 = -\alpha_1 + \beta_1 + \gamma,\ \ldots\ldots$$

$$r_1 = \frac{-\alpha_1 R_1 + \beta_1 R_2 - \gamma R_3 + 2U}{\beta_1 + \gamma - \alpha_1}$$

Для тр-ка $\alpha\beta\gamma_1$:

$$a = \alpha + R_2 \mathrm{ctg}\,{}^1/_2 B + R_3 \mathrm{ctg}\,{}^1/_2 C,$$

$$b = \beta + R_3 \mathrm{ctg}\,{}^1/_2 C - R_1 \mathrm{tg}\,{}^1/_2 A,$$

$$c = \gamma_1 + R_2 \mathrm{ctg}\,{}^1/_2 B + R_1 \mathrm{tg}\,{}^1/_2 A,$$

здѣсь $\mathrm{tg}\,{}^1/_2 A$, $\mathrm{tg}\,{}^1/_2 B$, $\mathrm{tg}\,{}^1/_2 C$ выражаются чрезъ

$$2v = \alpha + \beta + \gamma_1,\ 2v_1 = -\alpha + \beta + \gamma_1,\ \ldots$$

и

$$r = (\beta + \gamma_1 + \alpha)\,\frac{\beta(R_1 + R_2) - \gamma_1(R_1 - R_3) + 2U}{(\beta + \gamma_1)^2 - \alpha^2 + 4R_1(R_1 + R_2 - R_3)}$$

**Sur le calcul des annuités viagères.** Par *M. E. Fagnart.*

**Bibliographie.** Compte rendu du bureau local du Comité Lobatchefsky (1893—1895). Kazan. 1895.

**Etude sur l'éspace et le temps.** Par. *G. Lechalas.* Paris. 1896.

**Répertoire bibliographique des sciences mathématiques.** Paris. 1894.

**Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.** Von. *M. Cantor.* Leipzig.

**A Primer of the History of mathematics.** By. *W. Ronse Balt.* London. 1895.

**Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes.** Par *E. Goursat.* Paris. 1896.

**Solutions de questions proposées** №№ 960, 970, 974, 995, CCCXIV.

**Questions d'examen** №№ 725—733.

**Questions proposées.** №№ 1060—1063.

*Д. Е.*

---

# Bulletin de la Société Astronomique de France.

## 1896 г. № 9.

---

**L' éclipse totale du Soleil du 9 Août.**—Погода вообще не благопріятствовала наблюденію послѣдняго солнечнаго затменія. Экспедиція въ Японію съ Деляндромъ во главѣ и въ Лапландію (Vadsö), гдѣ собралось много астрономовъ изъ разныхъ странъ, не увѣнчались успѣхомъ благодаря дурной погодѣ. Замѣчательно, что въ Bodö, недалеко отъ Vadsö, затменіе было видно прекрасно, но къ сожалѣнію большинство наблюдателей забраковало этотъ пунктъ вслѣдствіе того, что солнце въ моментъ затменія должно было находиться очень низко надъ горизонтомъ. Вся надежда на экспедиціи, избравшія новую землю, Амуръ и вообще С. Россію.

**Voyage en Laponie pour l'éclipse de Soleil.** *E. Antoniadi.*

**Sur les positions des petites planètes.** *Parmentier.*—Annuaire du Bureau des longitudes за 1895 г. даетъ элементы 390 малыхъ планетъ и неполные элементы еще 8 подъ цифрами I—VII и IX, тотъ же ежегодникъ за 1896 г. даетъ элементы 406 пл. и неполные для I—VII и VIII—девятая же утеряна; изъ этихъ 16 новыхъ планетъ 15 открыто при помощи фотографіи (5—Вольфомъ и 10 Charlois). По группамъ онѣ распредѣляются слѣдующимъ образомъ: въ поясѣ, которому соотвѣтствуютъ разстоянія отъ солнца 2,16—2,48—одна, въ поясѣ 2,52—2,82—9 планетъ, въ поясѣ 2,85—3,25—пять пл. Одна планета 401 заполняетъ нѣсколько пробѣлъ 3,25—3,33, соотвѣтствующій періоду обращенія, равному половинѣ Юпитеровскаго.

**Le monde de Saturne.**—Періодъ вращенія Сатурна около оси былъ найденъ впервые В. Гершелемъ въ 1793 г. на основаніи наблюденія измѣненій въ видѣ „пятерной“ полосы въ Южномъ полушаріи; на основаніи наблюденія 154 оборотовъ Гершель далъ цыфру 10 ч. 16 м. 0,4 с. съ точностью до 2 мин. Въ 1876 г. Hall далъ цифру 10 ч. 14 м. 20,8 с. ± 2,30 с. Въ 1891 г. Stanley Williams—10 ч. 13 м. 38,4 с. Послѣднія наблюденія Antoniadi истекшимъ лѣтомъ изъ наблюденія 19 оборотовъ дали цифру 10 ч. 13 м. 57 с.

**Retour de la planète Mars.** — Лѣтомъ начались наблюденія надъ Марсомъ. Видно много старыхъ каналовъ. Гангъ кажется двойнымъ.

**Halo lunaire en forme de croix.** *Th. Moreux.* — 26 мая въ 10 ч. вечера въ Буржѣ былъ виденъ маленькій кругъ около луны; въ 11 ч. 50 м. кругъ исчезъ и вмѣсто него появился крестъ, центромъ котораго служила луна; вышина и ширина креста приблизительно равнялись пятерному діаметру луны; въ 12 ч. 20 м. крестъ исчезъ и снова появился halo.

Подобное явленіе можно воспроизвести искусственно. Если подышать на стекло и затѣмъ проведя нѣсколько разъ пальцемъ, чертя всякій разъ полосы параллельныя другъ другу, посмотрѣть чрезъ это стекло на свѣчу, то увидимъ снопъ свѣта перпендикулярный полосамъ. Поэтому, если на обѣихъ сторонахъ запотѣвшаго стекла начертить полосы такъ, чтобъ одна система полосъ была перпендикулярна другой, то чрезъ такое стекло увидимъ около свѣтящейся точки крестъ. Опытъ лучше удается, если смочить палецъ жирной или сиропообразной жидкостью. Отсюда вытекаетъ объясненіе этого явленія если предположить, что кристалы льда въ cirrus, имѣющіе видъ шестиугольныхъ призмъ, оріентированы одинаково, т. е. ребра ихъ параллельны, то получимъ двѣ системы параллельныхъ линій: систему боковыхъ реберъ и сторонъ основаній; причемъ одна система перпендикулярна другой; такимъ образомъ въ облакѣ будутъ тѣ же условія, что и въ указанномъ опытѣ.

По мнѣнію Moreux подобнымъ же образомъ можно объяснить происхожденіе лучей солнечной короны: если представимъ себѣ космическія облака, скорость движенія которыхъ близъ солнца должна быть очень велика, то при прохожденіи такого облака между глазомъ наблюдателя и солнцемъ мы должны-бы увидѣть снопъ свѣта перпендикулярный къ орбитѣ облака,

**Etoiles variables des Pléiades.** *A. Chevremont.* — Сравненіе клише, полученныхъ бр. Генри въ Парижѣ въ 1886—89 гг. съ картой Вольфа 1874 г. показываетъ, что весьма многія звѣзды въ Плеядахъ принадлежатъ къ числу перемѣнныхъ.

**Les taches solaires.** *H. Bruguière.*—Наблюденія надъ солнечными пятнами съ 1 января. Резюме:

| | | | |
|---|---|---|---|
| пятенъ, видимыхъ | невооруженнымъ | глазомъ, | въ февралѣ — одно |
| „ „ | въ бинокль | „ | въ февралѣ . . 2 |
| | | | въ мартѣ . . . 1 |
| | | | въ маѣ . . . . 1 |
| | | | въ іюнѣ . . . . 4 |
| | | | въ іюлѣ . . . . 2 |

Солнце безъ пятенъ въ январѣ 3 дня, въ апрѣлѣ—6 дней, въ маѣ—4 дня.

**Nouvelles de la Science. Varietés.**

**Le ciel en Septembre.**

# ПРИСЛАНЫ ВЪ РЕДАКЦІЮ КНИГИ и БРОШЮРЫ:

65. **Ариѳметика цѣлыхъ чиселъ.** Составилъ *В. И. Васильевъ*, преподаватель Московской 2-й Прогимназіи и Мѣщанскихъ Училищъ Московскаго Купеческаго Общества. Москва, 1895. Ц. 25 к.

66. **Ариѳметика дробныхъ чиселъ.** Составилъ *В. И. Васильевъ*, преподаватель Московской 2-й Прогимназіи и Мѣщанскихъ Училищъ Московскаго Купеческаго Общества. Москва, 1896. Ц. 25 к.

67. **Ариѳметика. Отношенія, пропорціи и способы рѣшенія задачъ на правила: тройныя, процентовъ, учета векселей и пр.** Составилъ *В. И. Васильевъ*, преподаватель Московской Прогимназіи и Мѣщанскихъ Училищъ Московскаго Купеческаго Общества. Изданіе 2-ое, исправленное. Москва, 1897. Ц. 25 к.

68. **Д-ръ Л. Грецъ**, Профессоръ физики Мюнхенскаго Университета. **Электричество и его примѣненія.** Книга для изученія и для чтенія. Перевели съ 5-го нѣмецкаго изданія *А. Л. Гершунъ* и *В. К. Лебединскій*. Съ 377 рисунками. Изданіе Ф. В. Щепанскаго (Невскій, 34). С.-Петербургъ. Вып. I, II, III и IV. Цѣна за все сочиненіе (6 вып.) 3 руб.

69. **Эрикъ Жераръ**, Директоръ Электротехническаго Института Montefiore. **Электрическія измѣренія.** (Лекціи, читанныя въ Электротехническомъ Институтѣ Montefiore при университетѣ въ Лютихѣ). Перевелъ и дополнилъ *П. Д. Войнаровскій*, преподаватель С.-Петербургскаго Электротехническаго Института, Телеграфный Инженеръ, Инженеръ-Электрикъ Института Montefiore. Съ 220 рис. въ текстѣ. Принято какъ пособіе въ Электротехническомъ Институтѣ. С.-Петербургъ. Изданіе Ф. В. Щепанскаго, Невскій 34, 1897. Цѣна (за 3 выпуска) 3 р.

70. **Эрикъ Жераръ**, Директоръ Электротехническаго Института Монтефіоре при Университетѣ въ Лютихѣ. **Курсъ Электричества.** Томъ I. Теорія электричества и магнетизма. Электрометрія. Теорія и устройство производителей и преобразователей электрической энергіи. 266 рисунковъ нъ текстѣ. Переводъ съ четвертаго французскаго изданія (исправленнаго и дополненнаго) *М. А. Шателена*. Русское изданіе второе. С.-Петербургъ. Изданіе Ф. В. Щепанскаго, Невскій, 34. 1896. Цѣна за два тома 8 р., въ переплетѣ 9 р. 50 к.

71. **Профессоръ В. Вейлеръ. „Практическій Электрикъ“.** Общедоступное руководство къ изготовленію электрическихъ приборовъ и къ производству съ ними опытовъ, дающихъ возможность изучить и провѣрить важнѣйшіе законы, касающіеся электрическихъ явленій. Со второго нѣмецкаго изданія (дополненнаго и улучшеннаго) перевелъ *В. И. Святскій*. Съ 417-ю рис. С.-Петербургъ. Изданіе Ф. В. Щепанскаго, Невскій, 34. Цѣна всему сочиненію 3 р.

72. **С. Христіансенъ**, Профессоръ физики въ Копенгагенскомъ Университетѣ. **Основы теоретической физики.** Переводъ *С. Т. Егорова* подъ редакціей профессора физики въ С.-Петербургскомъ Технологическомъ Институтѣ Н. А. Гезехуса. Съ 143 рис. Первая половина. С.-Петербургъ. Изданіе Ф. В. Щепанскаго, Невскій, 34. 1895. Подписная цѣна 3 руб.



Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Одесса, 29-го Января 1896 г.
„Центральная типо-литографія“, уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. № 39.

Обложка
ищется

Обложка
ищется