Обложка
ищется

Обложка
ищется

XXI Сем. № 9.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 249.

Построеніе корней тригонометрическихъ уравненій.

Эта замѣтка посвящается вопросу, которымъ рѣдко занимаются, но который въ надлежащей разработкѣ могъ бы доставить превосходный матеріалъ при изученіи элементарной математики. Нѣтъ сомнѣнія, что умѣлыми руками матеріалъ этотъ могъ бы быть предложенъ въ формѣ не менѣе серьезной и не менѣе увлекательной сравнительно съ той, какую даютъ теоріи геометрическихъ построеній. Однако, пока отсутствуютъ такого рода предложенія, до тѣхъ поръ будутъ умѣстны и неполныя изысканія въ области построенія геометрическихъ фигуръ, соотвѣтствующихъ даннымъ тригонометрическимъ уравненіямъ. Мы съ своей стороны предложимъ здѣсь рѣшенія нѣсколькихъ типическихъ уравненій этого рода, исполненныя помощью линейки и циркуля.

Построеніе корней уравненія $a\sin x + b\sin(\omega - x) = c$.

Подъ a, b и c мы будемъ разумѣть абсолютныя величины, а уголъ ω подчинимъ условію $0 < \omega < 2\pi$, или даже болѣе строгому условію $0 < \omega < \pi$, предоставляя себѣ всякій разъ, когда это послѣднее не удовлетворяется, перейти отъ уравненія

$$a\sin x + b\sin(\omega - x) = c$$

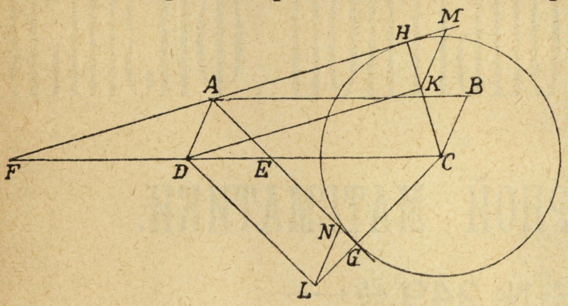
къ уравненію

$$a\sin x - b\sin(\omega' - x) = c,$$

въ которомъ

$$\omega' = \omega - \pi \text{ и } 0 < \omega' < \pi.$$

Итакъ, принявъ условіе $0 < \omega < \pi$, мы видимъ, что всегда можно построить параллелограммъ ABCD со сторонами $AB = a$ и $BC = b$ и съ внутреннимъ угломъ $ABC = \omega$ между ними. Изъ вершины C угла $DCB = \pi - \omega$, какъ изъ центра, опишемъ радіусомъ c окружность, а изъ противоположной вершины параллелограмма A проведемъ къ этой окружности двѣ касательныя. Одна изъ касательныхъ пересѣчется со стороною DC въ точкѣ E, а другая съ продолженіемъ DC въ точкѣ F; точку прикосновенія первой назовемъ черезъ G, точку прикосновенія второй черезъ H. Докажемъ теперь, что значенія искомыхъ угловъ будутъ:



Фиг. 1.

$$\angle DFH = x' \text{ и } \angle DEG = x''.$$

Съ этою цѣлью проведемъ изъ точки D прямыя, параллельныя касательнымъ, до пересѣченія съ CH и CG въ точкахъ K и L, а черезъ эти точки проведемъ прямыя KM и LN равныя и параллельныя $AD = b$. Построеніе доставляетъ:

$$\angle CDK = x', \ \angle KMH = \angle DAF = \omega - x', \ CK + KH = c$$

и въ тоже время

$$\angle CDL = \pi - x'', \ \angle LNG = \angle DAG = x'' - \omega, \ CL - GL = c.$$

Принявъ во вниманіе:

$$CK = CD\,.\,\sin CDK = a\sin x', \ KH = KM\,.\,\sin KMH = b\sin(\omega - x')$$

и

$$CL = CD\sin CDL = a\sin x'', \ GL = LN\sin LNG = -b\sin(\omega - x''),$$

получимъ:

$$a\sin x' + b\sin(\omega - x') = c \text{ и } a\sin x'' + b\sin(\omega - x'') = c,$$

что и требовалось доказать.

Изслѣдованіе. Возможность задачи обусловливается возможностью проведенія касательныхъ къ кругу изъ точки A и выражается формулой:

$$c \leqq \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega}.$$

Когда имѣетъ мѣсто знакъ неравенства, задача допускаетъ два рѣшенія, когда знакъ равенства—только одно.

Примѣчаніе. Изложенныя построенія содержатъ въ себѣ рессурсы къ рѣшенію уравненія

$$a\sin x - b\sin(\omega + x) = c.$$

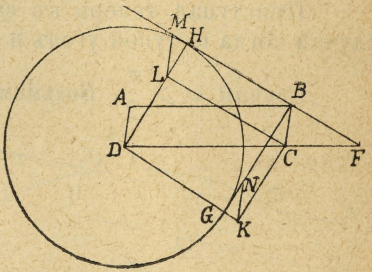
Въ самомъ дѣлѣ, легко убѣдиться, что корни его суть углы KDF и LOF.

Построеніе корней уравненія $a\sin x - b\sin(\omega - x) = c$.

Нужно считать, что аргументъ ω подчиненъ условію $0 < \omega < \pi$, въ противномъ случаѣ мы были бы возвращены къ уравненію изученнаго типа. Но если такъ, то снова можно построить параллелограммъ ABCD со сторонами $AB = a$ и $BC = b$ и съ внутреннимъ угломъ $ABC = \omega$ между ними. Изъ точки D вершины угла ω, какъ изъ центра, опишемъ окружность радіусомъ c и изъ противоположной вершины параллелограмма B проведемъ къ этой окружности касательныя BG и BH, пересѣкающіяся съ прямою DC и ея продолженіемъ въ точкахъ E и F. Докажемъ, что значенія искомыхъ угловъ будутъ:

$$\angle DCK = x' \text{ и } \angle LCF = x''.$$

Съ этою цѣлью черезъ точку C проведемъ прямыя, параллельныя касательнымъ до пересѣченія съ DG и DH въ точкахъ K и L и черезъ эти точки проведемъ прямыя KN и LM, равныя и параллельныя $CB = b$. Построеніе доставляетъ:



Фиг. 2.

$$\angle GNK = \angle EBC = \omega - x',\ DK - GK = c$$

и

$$\angle ADL = \frac{\pi}{2} + \omega - x'',\ \angle HML = x'' - \omega,\ DL + HL = c.$$

Принявъ во вниманіе:

$$DK = DC\sin DCK = a\sin x',\ GK = KN\sin GNK = b\sin(\omega - x')$$

и

$$DL = DC\sin LDC = a\sin x'',\ HL = ML\sin HML = b\sin(x'' - \omega),$$

получимъ:

$$a\sin x' - b\sin(\omega - x') = c \text{ и } a\sin x'' - b\sin(\omega - x'') = c,$$

что и требовалось доказать.

Изслѣдованіе. Задача имѣетъ два рѣшенія, когда діагональ DB больше радіуса круга; одно, когда эти величины равны между собою и ни одного въ томъ случаѣ, если діагональ меньше радіуса. Слѣдовательно условія возможности задачи можно выразить формулой:

$$c \leqq \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\omega}$$

Примѣчаніе. Изложенныя построенія даютъ простое средство отыскать корни уравненія

$$a\sin x + b\sin(\omega + x) = c.$$

Въ самомъ дѣлѣ, легко убѣдиться, что корни эти суть углы GEF и HFE.

Построеніе корней уравненія $a\operatorname{tg}x + b\operatorname{tg}(\omega - x) = c$.

Это уравненіе путемъ преобразованія $\omega - y = x$ приводитси къ виду

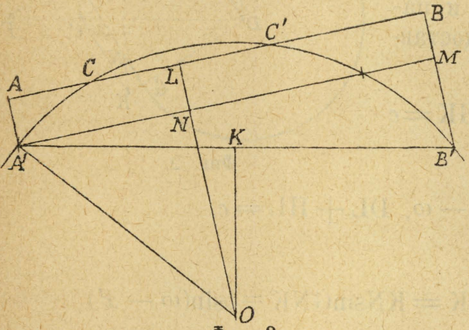
$$b\operatorname{tg}y + a\operatorname{tg}(\omega - y) = c.$$

Отсюда слѣдуетъ, что изъ двухъ случаевъ $a \leqq b$ и $a > b$, нисколько не нарушая общности задачи, можно ограничиться разсмотрѣніемъ только одного перваго. Что касается угла ω, то его, по причинѣ періодичности тангенса, можно считать большимъ нуля и меньшимъ двухъ прямыхъ. Слѣдовательно

$$a \leqq b \text{ и } 0 < \omega < \pi.$$

Приступая теперь къ самымъ построеніямъ, различимъ два случая: случай когда ω тупой уголъ и случай, когда ω прямой или острый уголъ.

Случай $\omega > \frac{\pi}{2}\cdot$ Возьмемъ $AB = c$. Черезъ точки A и B проведемъ прямыя, перпендикулярныя къ AB въ одномъ и томъ же направленіи и отложимъ на нихъ отрѣзки $AA' = a$ и $BB' = b$. На прямой $A'B'$, какъ на хордѣ, опишемъ дугу, вмѣщающую уголъ ω и лежащую въ той же части плоскости, гдѣ находятся точки A и B. Пусть AB пересѣкается съ дугою въ точкахъ C и C'. Значенія угла x будутъ:



Фиг. 3.

$$\angle AA'C = x' \text{ и } \angle AA'C' = x''.$$

Въ самомъ дѣлѣ, построеніе доставляетъ:

$$\angle BB'C = \omega - x' \text{ и } \angle BB'C' = \omega - x''.$$

Затѣмъ изъ прямоугольныхъ треугольниковъ $AA'C$, $BB'C$, $AA'C'$ и $BB'C'$ находимъ:

$$AC = a\operatorname{tg}x',\ BC = b\operatorname{tg}(\omega - x'),\ AC' = a\operatorname{tg}x'',\ BC' = b\operatorname{tg}(\omega - x'').$$

Отсюда, принимая во вниманіе,

$$AC + BC = c \text{ и } AC' + BC' = c,$$

получаемъ:

$$a\operatorname{tg}x' + b\operatorname{tg}(\omega - x') = c \text{ и } a\operatorname{tg}x'' + b\operatorname{tg}(\omega - x'') = c.$$

Это и значитъ, что x' и x'' суть дѣйствительно корни предложеннаго уравненія.

Дадимъ здѣсь аналитическій признакъ, по которому узнается исполненное построеніе въ случаѣ возможности задачи. Проведемъ прямую A′M параллельную CC′ и пересѣкающую BB′ въ точкѣ M. Очевидно, что всякій разъ, когда построеніе имѣетъ мѣсто уголъ $MA'B = \theta$ будетъ меньше острого угла, составляемаго прямою A′B′ съ касательною къ кругу въ точкѣ A′ или $\theta < \pi - \omega$.

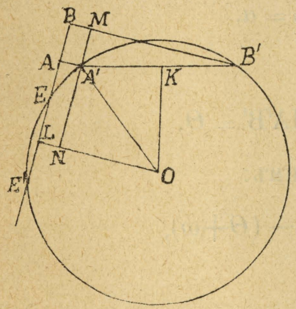
Принявъ во вниманіе

$$MA' = c,\ MB' = b - a,\ \operatorname{tg}\theta = \frac{b-a}{c},$$

получимъ искомый признакъ въ видѣ

$$\operatorname{tg}\omega < \frac{a-b}{c}.$$

Можетъ случиться, что прямая AB не пересѣкается съ упомянутою выше дугою, но въ замѣнъ этого пересѣкается съ дополнительною дугою, т. е. такою, которая вмѣщаетъ уголъ $\pi - \omega$ и лежитъ относительно A′B′ въ части плоскости, противоположной той, гдѣ находятся точки A и B. Если точки пересѣченія назовемъ черезъ E и E′, то обозначивъ



Фиг. 4.

$$\angle AA'E = \pi - x' \text{ и } \angle AA'E' = \pi - x'',$$

найдемъ:

$$\angle BB'E = \omega - x' \text{ и } \angle BB'E' = \omega - x'',$$

и затѣмъ легко убѣдимся, что x' и x'' суть корни уравненія:

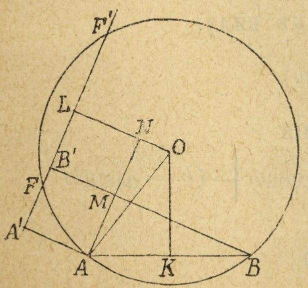
$$a\operatorname{tg}x + b\operatorname{tg}(\omega - x) = c.$$

Дадимъ здѣсь аналитическій признакъ существованія исполненнаго построенія въ случаѣ возможности задачи.

Проведемъ прямую A′M параллельную EE′ и пересѣкающую BB′ въ точкѣ M. Очевидно, что всякій разъ, когда построеніе имѣетъ мѣсто, уголъ $MA'B' = \theta$ будетъ больше остраго угла, составляемаго прямою A′B′ съ касательною къ кругу въ точкѣ A′. Слѣдовательно искомый признакъ есть

$$\theta > \pi - \omega \text{ или } \operatorname{tg}\omega > \frac{a-b}{c}.$$

Случай $\omega \leqq \frac{\pi}{2}$. Здѣсь придется отъ слова до слова повторить предыдущія построенія, но разница будетъ въ томъ, что теперь прямая AB ни въ какомъ случаѣ не пересѣчется съ дополнительною дугою круга. Поэтому если точки пересѣченія F и F′ прямой AB съ кругомъ и существуютъ, то онѣ лежатъ относительно A′B′ въ той же части плоскости, гдѣ находятся A и B.



Фиг. 5.

Предположивъ существованіе точекъ F и F′, легко убѣдиться, что корнями уравненія

$$a\operatorname{tg}x + b\operatorname{tg}(\omega - x) = c$$

будутъ углы:

$$\angle AA'F = x' \text{ и } \angle AA'F' = x''.$$

Изслѣдованіе. Задача имѣетъ два рѣшенія, когда удовлетворяется неравенство

$$(a+b)\sin\omega - c\cos\omega < \sqrt{(a-b)^2 + c^2}$$

и одно, если оно обращается въ равенство. Во всѣхъ другихъ случаяхъ задача невозможна. Для доказательства опустимъ изъ центра O перпендикуляры OL и OK на прямыя AB и A′B′ и черезъ точку A′ проведемъ прямую, параллельную AB и пересѣкающую BB′ и OL въ точкахъ M и N. Мы имѣемъ:

$$MA' = c,\ MB' = b - a,\ NL = a.$$

Если присоединимъ сюда обозначенія

$$A'B' = d,\ ON = h,\ OA' = r,\ \angle MA'B' = \Theta,$$

то для перваго изъ нашихъ построеній получимъ:

$$\angle A'OK = \pi - \omega \text{ и } \angle NOA' = \pi - (\Theta + \omega),$$

для второго найдемъ:

$$\angle A'OK = \pi - \omega \text{ и } \angle NOA' = (\Theta + \omega) - \pi,$$

для третьяго будемъ имѣть:

$$\angle A'OK = \omega \text{ и } \angle NOA' = \pi - (\Theta + \omega),$$

и вслѣдъ затѣмъ изъ треугольниковъ A′MB′, OA′K и OA′N во всѣхъ трехъ случаяхъ извлечемъ:

$$d^2 = (a-b)^2 + c^2,\ d = 2r\sin\omega,\ h = -r\cos(\Theta + \omega).$$

Условіе возможности задачи

$$a + h \leqq r$$

по замѣнѣ h и r ихъ значеніями приводится къ виду:

$$d \geqq 2a\sin\omega - d\cos(\Theta + \omega).$$

Отсюда помощью тождественнаго преобразованія

$$d\cos(\Theta + \omega) = d\cos\Theta\cos\omega - d\sin\Theta\sin\omega = c\cos\omega - (b - a)\sin\omega$$

получимъ:

$$d \geqq (a+b)\sin\omega - c\cos\omega,$$

что и требовалось доказать.

Эту же формулу можно вывести и аналитически. Въ самомъ дѣлѣ уравненіе

$$a\operatorname{tg}x + b\operatorname{tg}(\omega - x) = c,$$

будучи представлено въ видѣ

$$a\operatorname{tg}\omega \,.\, \operatorname{tg}x + (b\operatorname{tg}\omega - c)\operatorname{cotg}x = c \,.\, \operatorname{tg}\omega + b - a,$$

на основаніи тождествъ:

$$\operatorname{tg}x = \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}, \quad \operatorname{cotg}2x = \frac{1 + \cos 2x}{\sin 2x},$$

преобразуется къ уравненію

$$(a - b)\sin(\omega - 2x) + c\cos(\omega - 2x) = (a + b)\sin\omega - c\cos\omega.$$

Условіе возможности этого уравненія выражается формулой

$$d^2 \geqq \Big((a + b)\sin\omega - c\cos\omega\Big)^2$$

Отсюда, принявъ во вниманіе

$$d - c\cos\omega + (a + b)\sin\omega > 0,$$

неизбѣжно получимъ:

$$d \geqq (a + b)\sin\omega - c\cos\omega.$$

Примѣчаніе. На прямой A′B′, какъ на хордѣ, можно описать другой кругъ, равный тому, который уже построенъ. Если черезъ G и G′ назовемъ точки пересѣченія этого круга съ прямою AB, то легко убѣдимся, что углы AA′G и AA′G′ или ихъ дополненія до двухъ прямыхъ будутъ корнями уравненія

$$a\operatorname{tg}x + b\operatorname{tg}(\pi - \omega - x) = c \quad \text{или} \quad a\operatorname{tg}x - b\operatorname{tg}(\omega + x) = c.$$

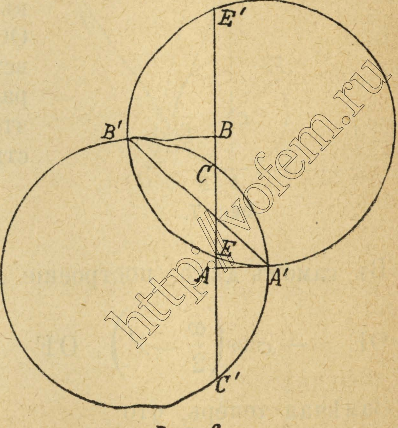
Построеніе корней уравненія $a\operatorname{tg}x - b\operatorname{tg}(\omega - x) = c$.

Возьмемъ прямую $AB = c$ и проведемъ къ ней во взаимно противоположныхъ направленіяхъ перпендикуляры $AA' = a$ и $BB' = b$. На прямой A′B′, какъ на хордѣ, опишемъ дугу, вмѣщающую уголъ ω и имѣющую свой центръ въ той сторонѣ относительно A′B′, въ которой находится точка A. Пусть C и C′ будутъ точки пересѣченія прямой AB съ этою дугою и ея дополненіемъ до окружности и пусть:

$$\angle AA'C = x', \quad \angle AA'C' = \pi - x''.$$

На основаніи построенія легко получаемъ:

$$\angle BB'C = x' - \omega, \quad \angle BB'C' = x'' - \omega.$$



Фиг. 6.

Если теперь въ равенствахъ

$$BC + AC = c \text{ и } BC' - AC' = c$$

лѣвыя части замѣнимъ тождественными имъ на основаніи формулъ:

$$AC = a\operatorname{tg}x',\ BC = b\operatorname{tg}(x' - \omega),\ AC' = -a\operatorname{tg}x'',\ BC = b\operatorname{tg}(x'' - \omega),$$

то получимъ:

$$a\operatorname{tg}x' - b\operatorname{tg}(\omega - x') = c \text{ и } a\operatorname{tg}x'' - b\operatorname{tg}(\omega - x'') = c.$$

Это показываетъ, что x' и x'' суть искомые корни. Вмѣстѣ съ тѣмъ видимъ, что задача всегда имѣетъ два рѣшенія, такъ какъ прямая AB, пересѣкая хорду $A'B'$, неизбѣжно пересѣкается и съ кругомъ въ двухъ точкахъ.

Примѣчаніе. Если на прямой $A'B'$, какъ на хордѣ, построимъ другой кругъ, вмѣщающій уголъ ω, и отыщемъ точки E и E' его пересѣченія съ прямою AB, то легко найдемъ корни уравненія

$$a\operatorname{tg}x - b\operatorname{tg}(\pi - \omega - x) = c \text{ или } a\operatorname{tg}x + b\operatorname{tg}(\omega + x) = c.$$

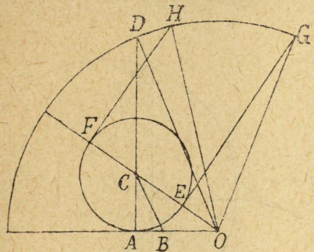
Дѣйствительно, можно убѣдиться, что эти корни суть углы:

$$\angle AA'E = x' \text{ и } \angle AA'E' = x''$$

и что ихъ всегда два.

Построеніе корней уравненія $\dfrac{a}{\sin x} + \dfrac{a}{\sin(\omega - x)} = c$.

Разумѣя подъ ω уголъ, меньшій двухъ прямыхъ, построимъ прямоугольный треугольникъ ABC по гипотенузѣ $BC = a$ и углу $ABC = \dfrac{\omega}{2}$. Затѣмъ проведемъ прямую OD параллельную BC такъ, чтобы часть ея, заключенная между сторонами прямого угла BAC равнялась c, именно $OD = c$. Пусть кругъ, описанный изъ центра C радіусомъ CA, пересѣкаетъ прямую OC въ точкахъ E и F, а перпендикуляры къ OC, проведенные чрезъ эти точки, пусть встрѣчаютъ кругъ, описанный изъ центра O радіусомъ c, въ точкахъ G и H. Докажемъ, что искомые углы x' и x'' обладаютъ свойствомъ:



Фиг. 7.

$$\angle EOG = \pi - \frac{\omega}{2} + x',\ \angle FOH = \frac{\omega}{2} - x''.$$

Въ самомъ дѣлѣ, построеніе доставляетъ:

$$OE = -c\cos\left(\frac{\omega}{2} - x'\right),\ OF = c\cos\left(\frac{\omega}{2} - x''\right),\ OA = c\cos\frac{\omega}{2},\ CA = a\sin\frac{\omega}{2}.$$

Замѣчая теперь, что

$$OE + CA = OC \text{ и } OE - CA = OC,$$

получимъ:

$$-c\cos\left(\frac{\omega}{2}-x'\right)+a\sin\frac{\omega}{2}=\sqrt{a^2\sin^2\frac{\omega}{2}+c^2\cos^2\frac{\omega}{2}},$$

$$c\cos\left(\frac{\omega}{2}-x''\right)-a\sin\frac{\omega}{2}=\sqrt{a^2\sin^2\frac{\omega}{2}+c^2\cos^2\frac{\omega}{2}},$$

и затѣмъ для обоихъ корней x' и x'' находимъ:

$$c\cos^2\left(\frac{\omega}{2}-x\right)-c\cos^2\frac{\omega}{2}=2a\cos\left(\frac{\omega}{2}-x\right)\sin\frac{\omega}{2}.$$

Это уравненіе посредствомъ тождествъ:

$$\cos^2\left(\frac{\omega}{2}-x\right)-\cos^2\frac{\omega}{2}=\sin x\sin(\omega-x),$$

$$2\cos\left(\frac{\omega}{2}-x\right)\sin\frac{\omega}{2}=\sin x+\sin(\omega-x),$$

приводится къ виду

$$\frac{a}{\sin x}+\frac{a}{\sin(\omega-x)}=c.$$

Изслѣдованіе. Существованіе угловъ x' и x'' обусловливается существованіемъ неравенствъ:

$$OE \leqq OG \text{ и } OF \leqq OH,$$

которыя могутъ быть представлены въ видѣ:

$$c+a\sin\frac{\omega}{2}\geqq\sqrt{a^2\sin^2\frac{\omega}{2}+c^2\cos^2\frac{\omega}{2}} \text{ и } c-a\sin\frac{\omega}{2}\geqq\sqrt{a^2\sin^2\frac{\omega}{2}+c^2\cos^2\frac{\omega}{2}}.$$

Первое изъ нихъ всегда справедливо, а второе равносильно условію

$$2a\leqq c\sin\frac{\omega}{2}.$$

Очевидно, что если это условіе удовлетворяется, то задача имѣетъ два рѣшенія, а если не удовлетворяется, то только одно.

Задача Паппуса. Наше уравненіе представляетъ собою частный случай уравненія

$$\frac{a}{\sin x}+\frac{b}{\sin(\omega-x)}=c,$$

выражающаго требованіе провести черезъ точку, отстоящую отъ сторонъ угла $\pi-\omega$ на разстоянія a и b, прямую такъ, чтобы часть ея, заключенная между сторонами угла, имѣла данную величину c. Эта задача помощью линейки и циркуля рѣшается только въ частныхъ случаяхъ. Случай $a=b$, когда данная точка лежитъ на биссектрисѣ даннаго угла $(\pi-\omega)$, извѣстенъ подъ названіемъ задачи *Паппуса*. Изложенныя выше построенія цѣликомъ могутъ быть отнесены къ этому случаю. Въ самомъ дѣлѣ, легко убѣдиться, что углы EOG и FOH суть именно тѣ, подъ которыми искомая прямая встрѣчаетъ биссектриссу даннаго угла. При этомъ очевидно, что задача будетъ имѣть два рѣшенія, когда

$$2a > c\sin\frac{\omega}{2}$$

три, когда

$$2a = c\sin\frac{\omega}{2}$$

и четыре, когда

$$2a < c\sin\frac{\omega}{2}\cdot$$

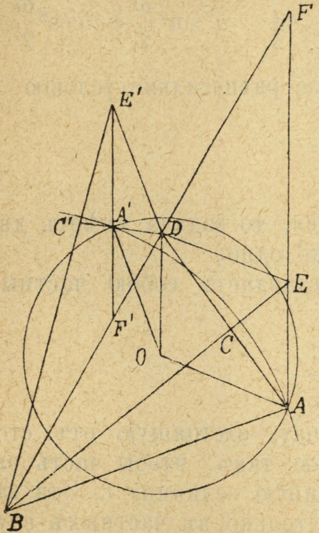
Задача. *По основанію* c *и по двумъ прилежащимъ сторонамъ* a *и* b *построить четыреугольникъ такъ, чтобы діагонали его были взаимно перпендикулярны и чтобы стороны* a *и* b *пересѣкались подъ даннымъ угломъ* θ.

Въ частномъ случаѣ, когда одновременно $c = a$ и $c = b$ необходимо дать $\theta = 0$ и искомымъ четыреугольникомъ будетъ ромбъ. Исключая этотъ случай, усматриваемъ возможность предположенія, что по крайней мѣрѣ одно изъ двухъ равенствъ $c = a$ и $c = b$ не имѣетъ мѣста. Пусть же будетъ $c \gtrless a$. Обращаясь къ рѣшенію задачи, прежде всего присоединимъ къ числу данныхъ линію d, опредѣляемую условіемъ:

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2,$$

и затѣмъ произведемъ слѣдующія построенія. Построимъ треугольникъ OBD по сторонамъ $BD = a$ и $OD = b$ и углу $OBD = \theta$ между ними. Изъ точекъ B и O, какъ изъ центровъ, опишемъ круги радіусами c и d, пересѣкающіеся между собою въ точкахъ A и A'. Черезъ A и A' проведемъ прямыя AE и A'E' равныя и параллельныя DO, такъ что фигуры DOAE и DOA'E' будутъ параллелограммы. Докажемъ, что искомые четыреугольники суть ABDE и A'BDE'. Въ самомъ дѣлѣ, ихъ противоположныя стороны a и b, пересѣкающіяся между собою въ точкахъ F и F', дѣйствительно образуютъ уголъ θ, именно:

$$\angle BFE = \theta \text{ и } \angle DF'E' = \theta.$$



Фиг. 8.

Слѣдовательно нужно только доказать, что ихъ діагонали взаимно перпендикулярны. Пусть діагонали AD и BE пересѣкаются въ точкѣ C, а діагонали A'D и BE' въ точкѣ C'. Изъ треугольниковъ BCD, ECA, BCA и DCE находимъ:

$$a^2 = BC^2 + DC^2 - 2BC \,.\, DC \,.\, \cos BCD$$

$$b^2 = AC^2 + EC^2 - 2AC \,.\, EC \,.\, \cos BCD$$

$$c^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \,.\, AC \,.\, \cos BCD$$

$$d^2 = DC^2 + EC^2 + 2DC \,.\, EC \,.\, \cos BCD.$$

Отсюда по причинѣ равенства

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

получаемъ:

$$(AC + DC)(BC + EC) \cos BCD = 0 \text{ или } \cos BCD = 0,$$

а это и значитъ, что уголъ BCD прямой. Подобнымъ же образомъ изъ треугольниковъ BC′D, E′C′A′, BC′A′ и DC′E′ по причинѣ равенства

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

найдемъ:

$$(A'C' - DC')(BC' + E'C') \cos BC'D = 0.$$

Этому требованію можно было бы удовлетворить, положивъ $A'C' = DC'$, но тогда получился бы случай $a = c$, который исключенъ. Отсюда слѣдуетъ, что уголъ BC′D есть прямой. Это и нужно было доказать.

П. Флоровъ (Ст. Урюпинская).

(*Окончаніе слѣдуетъ*).

НОВАЯ ГЕОМЕТРІЯ

ТРЕУГОЛЬНИКА.

(*Géométrie récente du triangle*).

(*Продолженіе**).

VIII. Круги Нейберга, Кэя, Schoute'a и Лоншана.

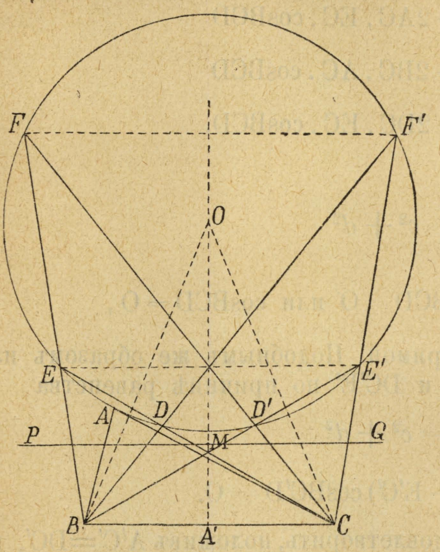
1. Теорема. *Вершины шести подобныхъ треугольниковъ, имѣющихъ общее основаніе и расположенныхъ по одну сторону отъ него, находятся на одной окружности.*

Пусть FBC, CBE и CDB суть подобные тр-ки съ общимъ основаніемъ BC (фиг. 1). Построивъ тр-ки F′BC, CBE′ и CD′B, симметричные съ FBC, CBE и CDB относительно перпендикуляра въ срединѣ BC, получимъ шесть подобныхъ тр-ковъ съ общимъ основаніемъ BC. Требуется доказать, что вершины этихъ тр-въ D, E, F и D′, E′, F′ находятся на одной окружности.

---

*) См. „Вѣстника Оп. Физики“ №№ 230, 231, 232, 234, 236, 239, 240, 244 и 246

Опишемъ окружность около равнобочной трапеціи FEE'F'.



Фиг. 1.

Такъ какъ

$$\angle FF'C + \angle FBC = 180^0$$

и

$$\angle FBC = \angle BDC = \angle EDF',$$

то

$$\angle FF'C + \angle EDF' = 180^0;$$

но

$$\angle FF'C = \angle F'FE,$$

поэтому

$$\angle F'FE + \angle EDF' = 180^0;$$

слѣдовательно окружность FEE'F' проходитъ чрезъ точку D; а такъ какъ точка D' симметрична съ D относительно діаметра этой окружности, то окружность FEE'F' проходитъ и чрезъ точку D', что и требуется доказать.

2. Окружность Нейберга (*Neuberg*). Если общее основаніе BC шести подобныхъ тр-въ есть одна изъ сторонъ главнаго тр-ка ABC, то окружность, проходящая чрезъ вершины этихъ тр-въ и точку A, наз. *окружностью Neuberg'а* для стороны BC тр-ка ABC. Тремъ сторонамъ этого треугольника соотвѣтствуютъ три окружности Neuberg'а.

Такъ какъ уголъ Брокара для даннаго тр-ка зависитъ только отъ угловъ этого тр-ка, то *подобные* тр-ки съ общимъ основаніемъ, имѣющіе вершины на окружности Neuberg'а, имѣютъ равные углы Брокара (*triangles équibrocardiens*).

3. Теорема. *Окружность Нейберга есть геометрическое мѣсто вершинъ треугольниковъ, имѣющихъ общее основаніе и равные углы Брокара.* (III. 29).

Оставляя эту теорему безъ доказательства, замѣтимъ, что *центръ* O *окружности Neuberg'а* лежитъ на перпендикулярѣ, возставленномъ въ срединѣ A' соотвѣтственной стороны $BC = a$ главнаго тр-ка (фиг. 1), при чемъ

$$A'O \cdot x = \frac{a^2}{4},$$

гдѣ x есть разстояніе точекъ Лемуана тр-въ съ общимъ угломъ Брокара ω отъ общаго основанія ихъ $BC = a$, такъ что (V, 23)

$$x = \frac{a}{2}\,\mathrm{tg}\omega;$$

подставивъ это значеніе x въ предыдущее равенство, найдемъ, что

$$A'O = \frac{a^2}{4x} = \frac{a}{2}\,\mathrm{cotg}\omega.$$

Отсюда слѣдуетъ, что *уголъ, составленный прямыми, соединяющими центръ окружности Neuberg'а съ концами общаго основанія тр-въ, имѣющихъ вершины на этой окружности, равенъ удвоенному углу Брокара этихъ тр-въ*; т. е., если уголъ Брокара этихъ тр-въ $=\omega$, то (фиг. 1)

$$\angle BOC = 2\omega.$$

4. Если провести прямую $PQ \parallel BC$ (фиг. 1) на разстояніи

$$MA' = {}^3/_2\, x = {}^3/_4\, a \operatorname{tg}\omega$$

отъ BC, то эта прямая будетъ радикальною осью точки A' и окружности Neuberg'а для стороны BC. Поэтому, обозначивъ чрезъ r радіусъ разсматриваемой окружности Neuberg'а, получимъ (IV,8):

$$A'M^2 = (MO + r)(MO - r) = MO^2 - r^2,$$

откуда

$$r^2 = MO^2 - A'M^2;$$

но

$$MO = \frac{a}{2}(1 - {}^3/_2 \operatorname{tg}^2\omega)$$

и

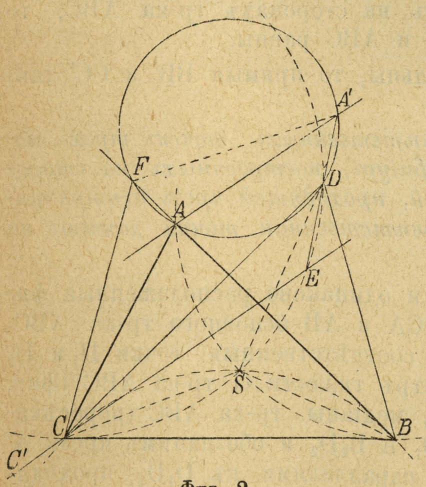
$$A'M = {}^3/_4 a \operatorname{tg}\omega;$$

слѣдовательно *радіусъ окружности Neuberg'а* будетъ

$$r = {}^1/_2 a \sqrt{\operatorname{cotg}^2\omega - 3}.$$

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что касательная изъ точки A' къ окружности Neuberg'а дѣлится пополамъ прямой PQ.

5. Теорема. *Если* A' *и* C' *суть соотвѣтственныя точки подобныхъ и одинаково расположенныхъ фигуръ* F_1 *и* F_3, *построенныхъ на сторонахъ* BC *и* AB *тр-ка* ABC, *и если* AA' *и* CC' *параллельны, то* A' *и* C' *суть точки окружностей Neuberg'а, соотвѣтственныхъ сторонамъ* BC *и* AB *тр-ка* ABC.



Фиг. 2.

Пусть S есть двойная точка подобныхъ фигуръ F_1 и F_3 (III,2). Обозначимъ чрезъ D точку фигуры F_1, соотвѣтственную точкѣ C фигуры F_3 чрезъ E—пересѣченіе прямыхъ A'D и CC'. Такъ какъ S есть двойная точка подобныхъ фигуръ SBCA'D и SABC'C, то (фиг. 2):

$$\angle SDA' = \angle SCC',$$

или

$$\angle SDE = \angle SCE;$$

слѣдовательно точки S, C, D, E лежатъ на одной окружности, а потому:

$$\angle DEC = \angle DSC;$$

но изъ построенія точки S (III,2), показаннаго на чертежѣ, видно, что

$$\angle ABC + \angle CSB = 180^0$$

или

$$\angle ABC + \angle DSC = 180^0;$$

такъ какъ углы $\angle DSC$ и $\angle CSB$ равны, какъ соотвѣтственные фигуръ F_1 и F_3; поэтому

$$\angle ABC + \angle CSB = \angle ABC + \angle DSC = \angle ABC + \angle DEC = 180^0;$$

изъ параллельности же прямыхъ AA' и CC' слѣдуетъ, что

$$\angle AA'D + \angle DEC = 180^0;$$

поэтому

$$\angle AA'D = \angle ABC,$$

т. е. точка A' находится на дугѣ окружности, проходящей чрезъ A и D и вмѣщающей уголъ B.

Обозначимъ чрезъ F пересѣченіе стороны AB съ этой окружностью; тогда:

$$\angle DFB = \angle AA'D = \angle ABC;$$

углы же $\angle ABC$ и $\angle BCD$ равны какъ соотвѣтственные подобныхъ фигуръ F_1 и F_3; поэтому

$$\angle DFB = \angle BCD = \angle FBC;$$

кромѣ того,

$$\angle DBC = \angle CAB$$

(тоже какъ углы соотвѣтственные фигуръ F_1 и F_3); слѣдовательно, тр-ки ABC, DBC и FBC подобны, а потому (1) окружность $AA'DF$ есть *окружность Neuberg'a*, что и требуется доказать (3).

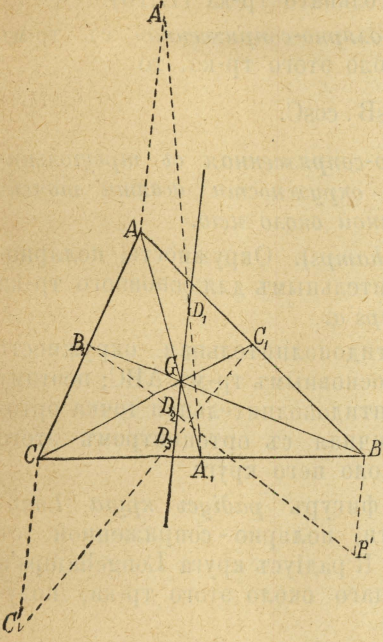
6. **Слѣдствія.** Если A', B', C' суть соотвѣтственныя точки подобныхъ фигуръ F_1, F_2, F_3, построенныхъ на сторонахъ тр-ка ABC, то углы Брокара тр-въ $A'BC$, $AB'C$, ABC' и ABC равны.

Если прямыя AA' и CC' параллельны, то прямыя BB' и CC' также параллельны.

7. **Теорема.** *Если двѣ изъ соотвѣтственныхъ точекъ трехъ подобныхъ и одинаково расположенныхъ фигуръ, построенныхъ на сторонахъ тр-ка* ABC, *находятся на прямой, проходящей чрезъ центръ тяжести этого тр-ка, то третья соотвѣтственная точка лежитъ на той-же прямой.*

Пусть F_1, F_2, F_3 суть подобныя и одинаково расположенныя фигуры, построенныя на сторонахъ BC, CA и AB основного тр-ка ABC. Положимъ, что прямая, соединяющая соотвѣтственныя точки D_1 и D_2 фигуръ F_1 и F_2, проходитъ чрезъ центръ тяжести G тр-ка ABC (фиг. 3). Обозначивъ чрезъ AA_1, BB_1 и CC_1 медіаны тр-ка ABC (пересѣкающіяся въ G), проведемъ прямыя A_1D_1 и B_1D_2 и обозначимъ чрезъ A' и B' пересѣченія этихъ прямыхъ съ параллелями къ D_1D_2, проходящими чрезъ A и B. Такъ какъ $AA_1 = 3\,GA_1$ и $BB_1 = 3GB_1$ (по извѣстному свойству медіанъ), то $A_1A' = 3A_1D_1$ и $B_1B' = 3B_1D_2$; но D_1 и D_2

суть соотвѣтственныя точки фигуръ F_1 и F_2, слѣдовательно A' и B' суть также соотвѣтственныя точки этихъ фигуръ. Обозначивъ затѣмъ чрезъ D_3 и C' точки фигуры F_3, соотвѣтственныя точкамъ D_1, D_2 и A', B', замѣтимъ, что $D_1D_2 \| AA' \| BB' \| CC'$ и что $C_1C' = 3C_1D_3$ и $CC_1 = 3GC_1$; отсюда слѣдуетъ, что точки D_1, D_2, D_3 лежатъ на одной прямой.



Фиг. 3.

8. Окружности Кэя (*Cay*). Такъ какъ геометрическія мѣста точекъ A', B', C' суть окружности (5), то геометрическія мѣста точекъ D_1, D_2, D_3 суть также окружности.

Окружности, на которыхъ находятся соотвѣтственныя точки (D_1, D_2, D_3) подобныхъ и одинаково расположенныхъ фигуръ (F_1, F_2, F_3), построенныхъ на сторонахъ тр-ка ABC, лежащія на одной прямой (проходящей чрезъ центръ тяжести тр-ка ABC), называются *окружностями Cay'я*.

9. *Окружности Cay'я* находятся въ связи съ *окружностью Брокара* (VII,1), выражающейся слѣдующей теоремой:

Теорема. *Полюсы сторонъ основного тр-ка* (ABC) *относительно окружностей Cay'я суть вершины перваго тр-ка Брокара.*

10. Условимся называть *треугольникомъ проэкцій* точки M—тр-къ, вершины котораго суть проэкціи этой точки на стороны основнаго тр-ка ABC, т. е. основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ M на стороны этого тр-ка*).

Теорема. *Геометрическое мѣсто такихъ точекъ* (M), *для которыхъ тр-ки проэкцій имѣютъ равные углы Брокара, есть окружность.*

11. Окружность Schoute'a. Окружность, служащая геометрическимъ мѣстомъ точекъ, для которыхъ тр-ки проэкцій имѣютъ данный уголъ Брокара, наз. *окружностью Schoute'a*.

Окружности Schoute'a соосны (IV,7) и имѣютъ общею радикальною осью *прямую Лемуана* (V,21).

Окружность, описанная около основного тр-ка, и окружность *Брокара* этого тр-ка, суть частные случаи окружностей *Schoute'a*.

12. Окружность полярно-сопряженная съ треугольникомъ. Окружность, относительно которой каждая сторона тр-ка служитъ полярой противоположной вершины его, наз. *окружностью полярно-сопряженной* съ этимъ тр-мъ *(Cercle polaire conjugué)***).

*) По французски такой треугольникъ называется *triangle podaire*.

**) Ср. II, 16.

Центръ окружности, полярно-сопряженной съ тр-мъ, находится въ ортоцентрѣ этого тр-ка (I,5); поэтому такая окружность въ дѣйствительности существуетъ только для тупоугольнаго тр-ка (II,10).

Если ϱ есть *радіусъ окружности, полярно-сопряженной* съ тр-мъ ABC, а R—радіусъ круга, описаннаго около этого тр-ка, то

$$\varrho^2 = -4R^2 \cos A \,.\, \cos B \,.\, \cos C.$$

13. Теорема. *Окружность, полярно-сопряженная съ треугольникомъ, проходитъ чрезъ точки пересѣченія окружности девяти точекъ* (I,12) *этого тр-ка и окружности, описанной около него.*

14. Окружность Лоншана (*Longchamps*). Окружность, полярно-сопряженная съ тр-мъ $A''B''C''$, антидополнительнымъ для основного тр-ка ABC (III,9), наз. *окружностью Longchamps'а.*

Окружность Longchamps'а есть антидополнительная окружность для окружности полярно-сопряженной съ основнымъ тр-мъ ABC; поэтому *центръ окружности Longchamps'а* есть антидополнительная точка ортоцентра тр-ка ABC, т. е. точка, симметричная съ ортоцентромъ этого тр-ка относительно центра описаннаго около него круга.

По свойству антидополнительныхъ фигуръ *радіусъ круга Longchamps'а* вдвое болѣе радіуса окружности, полярно-сопряженной съ тр-мъ (12); поэтому, обозначивъ чрезъ ϱ' и R радіусъ круга Longchamps'а для тр-ка ABC и радіусъ круга, описаннаго около этого тр-ка, получимъ

$$\varrho'^2 = -16R^2 \cos A \,.\, \cos B \,.\, \cos C.$$

Изъ опредѣленія слѣдуетъ, что окружность Longchamps'а въ дѣйствительности существуетъ только для тупоугольнаго тр-ка.

15. Теоремы Longchamps'а. Окружности, описанныя около вершинъ тр-ка ABC радіусами, равными противоположнымъ сторонамъ его, пересѣкаются по двѣ въ точкахъ A_0, B_0, C_0 на окружности, описанной около этого тр-ка.

Прямая, соединяющая вершину того-же тр-ка A съ пересѣченіемъ прямыхъ BC и B_0C_0, пересѣкаетъ окружность, описанную около тр-ка ABC въ *точкѣ Штейнера* (VII, 12).

Окружность Longchamps'а ортогональна (IV,11) *съ окружностями, описанными около вершинъ основного тр-ка радіусами, равными противоположнымъ сторонамъ его.*

16. Прямая Лоншана. (*Longchamps*). Радикальную ось (IV,2) *окружности Longchamps'а* и окружности, описанной около основного тр-ка ABC, будемъ называть *прямою Longchamps'а.*

Прямая Longchamps'а изотомически сопряжена съ прямою Lemoine'а (V,21) *относительно сторонъ тр-ка* ABC *и параллельна прямой, соединяющей точки, изотомически сопряженныя съ точками Брокара этого тр-ка.*

Трилинейный полюсъ (III,14) *прямой Longchamps'а относительно тр-ка* ABC *есть одинъ изъ центровъ перспективы* (II,1) *тр-ка* ABC *и его перваго тр-ка Брокара* (VII,4).

17. Приложенія. Если D_1, D_2, D_3 суть соотвѣтственныя точки трехъ подобныхъ и одинаково расположенныхъ фигуръ F_1, F_2, F_3, построенныхъ на сторонахъ тр-ка, то геометрическія мѣста этихъ точекъ суть окружности (ст. 7 и 8), если:

a) Одна изъ сторонъ тр-ка $D_1D_2D_3$ задана по величинѣ.

b) Одинъ изъ угловъ тр-ка $D_1D_2D_3$ заданъ по величинѣ.

c) Уголъ Брокара тр-ка $D_1D_2D_3$ заданъ по величинѣ.

18. *Окружности Сау'я* служатъ обратными фигурами (IV, 15) для сторонъ перваго тр-ка Брокара относительно круга, имѣющаго центромъ центръ тяжести основного тр-ка ABC и ортогонально пересѣкающаго окружность Брокара этого тр-ка (VII,1).

19. *Окружность Longchamps'a* ортогональна съ окружностями, описанными около срединъ сторонъ основного тр-ка радіусами, равными соотвѣтственнымъ медіанамъ его.

20. *Окружность Longchamps'a* соосна съ окружностью, описанной около основного тр-ка и окружностью, описанной около ортоцентра этого тр-ка радіусомъ, равнымъ діаметру окружности, описанной около тр-ка.

21. *Окружность Longchamps'a* соосна съ окружностями, описанными около основного тр-ка и его антидополнительнаго тр-ка.

22. *Прямая Longchamps'a* есть поляра центра тяжести основного тр-ка для соотвѣтственной окружности Longchamps'a.

23. *Прямая Longchamps'a* параллельна радикальной оси окружности, описанной около основного тр-ка и окружности, полярно-сопряженной съ нимъ.

Д. Е. (Иваново-Вознесенскъ).

(*Продолженіе слѣдуетъ*).

Число элементовъ въ логическомъ многочленѣ.

1. Въ статьѣ „Нѣкоторыя приложенія математической логики къ ариѳметикѣ“ мы вывели формулу *)

$$N(A_1+A_2+\ldots+A_n)=\Sigma N(P_1)-\Sigma N(P_2)+\ldots+(-1)^{m-1}\Sigma N(P_m)+$$
$$+\ldots+(-1)^{n-1}\Sigma N(P_n), \qquad (1)$$

дающую возможность вычислить число элементовъ въ классѣ

$$A_1+A_2+\ldots+A_n,$$

если извѣстно число элементовъ въ каждомъ изъ классовъ

$$A_1, A_2, \ldots\ldots A_n,$$

*) См. №№ 247, 248.

а также въ каждомъ изъ логическихъ произведенiй, какiя только можно составить изъ этихъ n классовъ.

Отдѣльный классъ, обозначаемый одною буквой, а также и произведенiе нѣсколькихъ классовъ мы будемъ называть логическимъ одночленомъ. Логическую сумму нѣсколькихъ логическихъ одночленовъ назовемъ логическимъ многочленомъ.

Обозначимъ черезъ S нѣкоторый логическiй многочленъ, который содержитъ въ себѣ классы

$$A_1,\ A_2,\ldots A_k,\ldots A_n \qquad (2)$$

либо въ утвердительномъ, либо въ отрицательномъ смыслѣ, т. е. многочленъ можетъ содержать въ себѣ A_k, не содержа a_k, — или наоборотъ; наконецъ, онъ можетъ содержать и A_k и a_k.

Для вычисленiя N(S) достаточно знать число элементовъ въ каждомъ изъ классовъ (2), а также въ каждомъ изъ логическихъ произведенiй, какiя только можно составить изъ этихъ классовъ; кромѣ того, если среди одночленовъ, изъ суммы которыхъ состоитъ S, есть членъ, представляющiй собою либо отрицательный классъ, либо произведенiе нѣкоторыхъ отрицательныхъ классовъ, то необходимо еще знать N(T), гдѣ T—совокупность всѣхъ разсматриваемыхъ элементовъ. Такъ, напримѣръ, для вычисленiя $N(ACb+B+d)$ навѣрно достаточно знать

$$N(A),\ N(B),\ N(C),\ N(D);\ N(AB),\ N(AC),\ N(AD),\ N(BC),\ N(BD),\ N(CD);$$

$$N(ABC),\ N(ABD),\ N(BCD),\ N(ACD),\ N(ABCD) \text{ и } N(T). \qquad (3)$$

И вообще, зная рядъ чиселъ (3), мы можемъ вычислить число элементовъ въ любомъ многочленѣ, обозначаемомъ при помощи всѣхъ или нѣкоторыхъ изъ буквъ A,B,C,a,b,c.

Доказательство вышеупомянутаго предложенiя и является предметомъ настоящей статьи.

2. Докажемъ справедливость формулы

$$A+B+ab=T \text{ *)}. \qquad (4)$$

Обозначая черезъ T совокупность всѣхъ разсматриваемыхъ элементовъ, имѣемъ:

$$A=AT \text{ и } T=B+b, \text{ откуда}$$

$$A=A(B+b)=AB+Ab.$$

Точно также найдемъ

$$B=AB+Ba.$$

Поэтому

$$A+B+ab=AB+Ab+AB+Ba+ab=AB+Ab+Ba+ab=$$
$$=(A+a)B+(A+a)b=(A+a)(B+b)=TT=T.$$

---

*) Формулы (4) и (5), можно сказать, очевидны; но все-таки мы считаемъ не лишнимъ привести ихъ формальное доказательство.

3. Формулу (4), справедливую для двухъ классовъ, легко распространить индуктивно на n классовъ; для этого допустимъ, что для n классовъ справедлива формула

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n + a_1 a_2 \ldots a_n = T \qquad (5)$$

и докажемъ, что изъ нея вытекаетъ справедливость формулы

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n + A_{n+1} + a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1} = T \qquad (6),$$

отличающейся отъ формулы (5) лишь тѣмъ, что въ ней число классовъ увеличено на единицу.

Чтобы доказать это, замѣтимъ, что

$$(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) a_1 a_2 \ldots a_n = A_1 a_1 a_2 \ldots a_n + A_2 a_1 a_2 \ldots a_n + \ldots +$$
$$+ A_n a_1 a_2 \ldots a_n = 0 \qquad (7),$$

а потому, — въ связи съ допущеннымъ нами уравненіемъ (5), — заключаемъ, что классъ

$$a_1 a_2 \ldots a_n \qquad (8)$$

есть отрицательный классъ по отношенію къ классу

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n . \qquad (8 \text{ bis})$$

Дѣйствительно, уравненія (5) и (7) показываютъ, что въ классъ $a_1 a_2 \ldots a_n$ входятъ всѣ разсматриваемые элементы, не входящіе въ классъ $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$.

Обозначивъ классы (8) и (8 bis) соотвѣтственно черезъ X и x, примѣнимъ къ классамъ X и A_{n+1} формулу (4); тогда имѣемъ:

$$X + A_{n+1} + x a_{n+1} = T,$$

или, вставляя вмѣсто X и x ихъ значенія, получимъ:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n + A_{n+1} + a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1} = T,$$

что и представляетъ собою формулу (6).

Доказанное предложеніе въ связи съ уравненіемъ (4) убѣждаетъ насъ въ справедливости формулы (5) при всякомъ цѣломъ и положительномъ n.

4. Возвратимся къ нашей главной задачѣ. Съ помощью формулы (1) нахожденіе числа элементовъ въ логическомъ многочленѣ приводится къ вычисленію въ отдѣльности числа членовъ нѣкоторыхъ одночленовъ. Эти числа, по условію задачи, предполагаются данными заранѣе для всѣхъ такихъ одночленовъ, которые представляютъ собою отдѣльные положительные классы или же произведеніе нѣсколькихъ положительныхъ классовъ. Остается поэтому разсмотрѣть только такіе случаи, когда одночленъ представляетъ собою отдѣльный отрицательный классъ или же — когда одинъ или нѣсколько множителей одночлена отрицательны. Разберемъ эти случаи каждый въ отдѣльности.

1) Данъ одночленъ вида a. Такъ какъ

$$T = A + a,$$

то

$$N(T) = N(A + a),$$

или,—по формулѣ (1) —

$$N(T) = N(A) + N(a) - N(Aa).$$

Но, такъ какъ $Aa = 0$, а потому и $N(Aa) = 0$, то

$$N(T) = N(A) + N(a).$$

Поэтому

$$N(a) = N(T) - N(A) \tag{9}$$

Эта формула даетъ выраженіе для $N(a)$ при помощи данныхъ чиселъ $N(T)$ и $N(A)$.

2) Одночленъ имѣетъ видъ $a_1 a_2 \ldots a_n$. Такъ какъ (уравненіе 5)

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n + a_1 a_2 \ldots a_n = T,$$

то

$$N(T) = N[(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) + a_1 a_2 \ldots a_n] = N(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) + \\ + N(a_1 a_2 \ldots a_n).$$

Слѣдовательно

$$N(a_1 a_2 \ldots a_n) = N(T) - N(A_1 + A_2 + \ldots + A_n). \tag{10}$$

Эта формула (см. формулу 1) даетъ возможность вычислить $N(a_1 a_2 \ldots a_n)$, зная $N(T)$ а также число элементовъ, какъ въ каждомъ изъ классовъ A_1, $A_2 \ldots A_n$, такъ и въ каждомъ изъ произведеній, какія только можно составить изъ этихъ классовъ.

3) Одночленъ имѣетъ видъ Pa, гдѣ P — положительный классъ или же произведеніе положительныхъ классовъ. Такъ какъ

$$A + a = T, \text{ то}$$

$$P(A + a) = PT = P,$$

а потому

$$N(P) = N(PA + Pa) = N(PA) + N(Pa).$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$N(Pa) = N(P) - N(PA); \tag{11}$$

числа же $N(P)$ и $N(PA)$, по предположенію, даны.

4) Пусть, наконецъ, одночленъ имѣетъ видъ

$$Pa_1 a_2 \ldots a_n,$$

гдѣ P имѣетъ такое же значеніе, какъ и въ предыдущемъ случаѣ.

Такъ какъ (5)

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n + a_1 a_2 \ldots a_n = T,$$

то

$$P[(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) + a_1 a_2 \ldots a_n] = PT = P,$$

а потому

$$N(P) = N\{P[(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) + a_1 a_2 \ldots a_n]\} = N[P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) +$$

$$+ P a_1 a_2 a_n] = N[P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n)] + N(P a_1 a_2 \ldots a_n),$$

— такъ какъ

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) a_1 a_2 \ldots a_n = 0.$$

Поэтому

$$N(P a_1 a_2 \ldots, a_n) = N(P) - N[P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n)],$$

или:

$$N(P a_1 a_2 \ldots a_n) = N(P) - N(PA_1 + PA_2 + \ldots + PA_n). \qquad (12)$$

Такъ какъ $N(P)$ дано, а $N(PA_1 + PA_2 + \ldots PA_n)$ легко сведется — на основанiи уравненiя (1)—къ алгебраической суммѣ чиселъ, по условiю задачи данныхъ заранѣе,—то и $N(P a_1 a_2 \ldots a_n)$, при помощи формулы (12), вычисляется безъ труда.

Итакъ, если дано $N(T)$, а также даны числа элементовъ въ рядѣ положительныхъ классовъ

$$A_1, A_2 \ldots A_n \qquad (13)$$

и во всѣхъ логическихъ произведенiяхъ, какiя только можно составить изъ этихъ классовъ, то по этимъ даннымъ можно вычислить число элементовъ во всякомъ логическомъ многочленѣ, въ составъ котораго входятъ классы (13) въ положительномъ или отрицательномъ смыслѣ.

5. Для лучшаго уясненiя изложеннаго выше прiема вычисленiя числа элементовъ въ логическомъ многочленѣ, рѣшимъ слѣдующую задачу. Требуется сосчитать всѣ числа, не превосходящiя 4000 и обладающiя слѣдующими свойствами: каждое изъ чиселъ либо не дѣлится на 5, либо дѣлится на 2, не дѣлясь въ то же время на 3 и на 7. Классы чиселъ, дѣлящихся соотвѣтственно на 2, 3, 7, 5 и не превосходящихъ 4000, назовемъ соотвѣтственно черезъ A, B, C, D.

Тогда задачу нашу можно выразить такъ:

Требуется вычислить $N(Abc + d)$.

Примѣняя формулу (1), находимъ:

$$N(Abc + d) = N(Abc) + N(d) - N(Abcd). \qquad (14)$$

По формулѣ (12)

$$N(Abc) = N(A) - N(AB + AC) = N(A) - N(AB) - N(AC) + N(ABC) \quad (15)$$

и

$$N(Abcd) = N(A) - N(AB + AC + AD) = N(A) - N(AB) - N(AC) -$$

$$- N(AD) + N(ABC) + N(ABD) + N(ACD) - N(ABCD) \qquad (16)$$

Наконецъ, по формулѣ (9)

$$N(d) = N(T) - N(D). \tag{17}$$

Подставляя изъ уравненій (15), (16), (17) значенія

$$N(Abc),\ N(Abcd) \text{ и } N(d)$$

въ уравненіе (14), получимъ:

$$N(Abc + d) = N(T) + N(AD) + N(ABCD) - N(D) - N(ACD) - N(ABD).$$

Такъ какъ

$$N(T) = 4000,\ N(AD) = E\left(\frac{4000}{2.5}\right),\ N(ABCD) = E\left(\frac{4000}{2.5.3.7}\right),$$

$$N(D) = E\left(\frac{4000}{5}\right),\ N(ACD) = E\left(\frac{4000}{2.7.5}\right),\ N(ABD) = E\left(\frac{4000}{2\ 3.5}\right),$$

то

$$N(Abc + d) = 4000 + E\left(\frac{4000}{10}\right) + E\left(\frac{4000}{210}\right) - E\left(\frac{4000}{5}\right) -$$

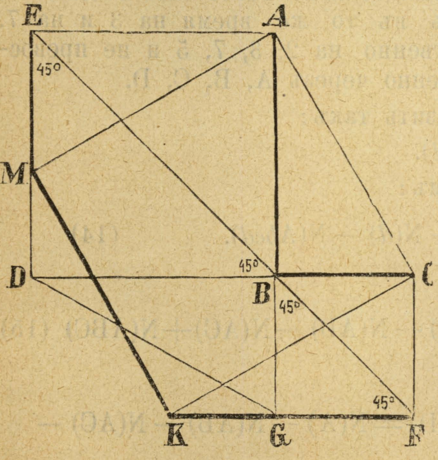
$$- E\left(\frac{4000}{70}\right) - E\left(\frac{4000}{30}\right) = 3429.$$

Е. Буницкій (Одесса).

МАТЕМАТИЧЕСКІЯ МЕЛОЧИ.

Новое доказательство теоремы Пиѳагора.

Пусть ABC (см. черт. 1) есть т|еугольникъ прямоугольный при точкѣ B, ABDE и BCFG—квадраты, построенные на его катетахъ.



Фиг. 1.

Проводя прямую DG, получимъ:

1) Пл. кв. ABDE + пл. кв. BCFG =

= пл. 6-тиугольн. ACFGDE —

— 2 пл. △ ABC.

Линія EBF прямая, такъ какъ сумма угловъ по одну ея сторону при точкѣ B равна 180^0. Перемѣстимъ фигуру EDGF въ положеніе EMKF, такъ что EM = FG и FK = ED.

Проводя прямыя AM и CK, получимъ четыреугольникъ AMKC съ *равными* сторонами (каждая изъ

изъ нихъ равна гипотенузѣ даннаго треугольника);

$$\angle \text{MAC} = \angle \text{EAB} = d;$$

слѣд. четыреугольникъ AMKC есть *квадратъ*, построенный на гипотенузѣ даннаго треугольника.

2) Пл. кв. AMKC = пл. 6-ти уг. ACFKME — 2 пл. $\triangle$ ABC =

= пл. 6-ти угол. ACFGDE — 2 пл. $\triangle$ ABC.

Изъ (1) и (2) равенствъ имѣемъ:

пл. кв. ABDE + пл. кв. BCFG = пл. кв. AMKC.

М. С. Волковъ (СПБ.).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Объ электропроводности нагрѣтыхъ газовъ. (*P. Pettineli* и *G. B. Marolli*; Atti, Reale Accad. dei Lincei V, 136; Naturwiss. Rundsch. XI, 603).—Начиная съ изслѣдованій *Becquerel*'я было сдѣлано много наблюденій надъ электропроводностью нагрѣтыхъ газовъ. Не смотря на это, до послѣдняго времени вопросъ о способности газовъ при высокой температурѣ проводить электричество не былъ изученъ всесторонне и систематически.

Гг. *Pettineli* и *Marolli* заключали газы въ фарфоровыя трубки длиною въ 50 cm и діаметромъ 2 cm, закрытыя каучуковыми пробками, сквозь которыя проходили латунные стержни, заканчивающіеся электродами. Трубки вставлялись въ особую газовую печь и нагрѣвались тамъ до желаемой температуры, которая измѣрялась при помощи особаго платиноваго сопротивленія, вводившагося въ трубку послѣ опыта; съ трубкой можно было соединять насосъ и разрѣжать заключающійся въ ней газъ. Сопротивленіе газа опредѣлялось томсоновскимъ гальванометромъ. Токъ доставлялся батареей изъ 100 большихъ цинко-мѣдныхъ элементовъ. Длинный рядъ опытовъ (болѣе 200) привелъ къ слѣдующимъ результатамъ:

1. Электропроводность нагрѣтыхъ газовъ въ закрытыхъ сосудахъ, а также электропроводность пламени тѣсно связана со степенью пористости отрицательнаго электрода; при прочихъ равныхъ условіяхъ (величина и разстояніе электродовъ, природа и температура газа, электродвигательная сила) сопротивленіе газа тѣмъ менѣе, чѣмъ пористѣе отрицательный электродъ), т. е. чѣмъ болѣе онъ способенъ поглощать газообразныя вещества. Такъ напр. при замѣнѣ металлическаго электрода угольнымъ электропроводность увеличивается въ сотни разъ и тѣмъ болѣе, чѣмъ пористѣе взятый уголь. Зависимость эта выступаетъ столь рѣзко, что можетъ служить критеріемъ для оцѣнки пористости отрицательнаго электрода. Если оба электрода сдѣланы изъ одного и того же вещества, то электропроводность тѣмъ больше, чѣмъ боль-

ше отрицательный электродъ. Интересно, что при высокихъ температурахъ электропроводность газа зависитъ только отъ размѣровъ и степени пористости отрицательнаго электрода, но эта зависимость электропроводности отъ пористости отрицательнаго электрода быстро уничтожается при уменьшенiи температуры газа. Такъ, въ пламени бунзеновской горѣлки замѣна желѣзнаго отрицательнаго электрода угольнымъ увеличиваетъ электропроводность въ сотни разъ; если же газъ заключенъ въ трубкѣ, нагрѣтой до 800^0, то та же замѣна увеличиваетъ электропроводность въ 3—4 раза. Ту же разницу можно наблюдать и въ газовой горѣлкѣ, если только ввести электроды въ менѣе нагрѣтыя части пламени.

2. Законъ Ома оказывается непримѣнимымъ для нагрѣтыхъ газовъ, если измѣнять электровозбудительную силу тока, не измѣняя прочихъ условiй опыта: сила тока возрастаетъ быстрѣе электровозбудительной силы, иными словами съ увеличенiемъ электровозбудительной силы сопротивленiе уменьшается. Только при опытахъ надъ пламенемъ съ угольными электродами законъ Ома оказывается приблизительно вѣрнымъ для электровозбудительныхъ силъ отъ 0,1 до 50 вольтъ.

3. При прочихъ равныхъ условiяхъ сила тока обратно пропорцiональна разстоянiю между электродами, если это послѣднее не меньше 2 mm; при меньшихъ разстоянiяхъ она увеличивается меньше, чѣмъ слѣдуетъ.

4. Зависимость отъ температуры выражается такъ. При 600^0 газы становятся проводниками для токовъ, уловимыхъ примѣнявшимися приборами. При 800^0 сила тока увеличивается на нѣсколько сотыхъ вольта; при дальнѣйшемъ возрастанiи температуры она увеличивается все медленнѣе и медленнѣе.

5. Отъ природы газа описанныя явленiя повидимому не зависятъ, если только газъ не дѣйствуетъ химически на электроды.

6. Съ уменьшенiемъ давленiя электропроводность горячаго газа увеличивается. Опыты не производились при давленiяхъ, меньшихъ 5 mm ртутнаго столба.

Всѣ эти результаты наводятъ на мысль, что электропроводность газовъ, раскаленныхъ въ пламени или нагрѣтыхъ до высокой температуры въ закрытомъ сосудѣ, обусловливается конвекцiоннымъ переносомъ электричества. Газовыя частицы, заряжающiяся отрицательнымъ электричествомъ, повидимому менѣе подвержены частичной диссоцiацiи и распадаются на iоны при сравнительно высокой температурѣ. При повышенiи температуры диссоцiацiя увеличивается, поэтому должна увеличиваться и проводимость. Пористость отрицательнаго электрода обусловливаетъ лучшiй контактъ, т. е. тоже увеличиваетъ проводимость газа. *В. Г.*

Уничтоженiе ползучихъ солей въ элементахъ.—Извѣстно, что ползучiя соли въ гальваническихъ элементахъ причиняютъ массу хлопотъ. Чтобы воспрепятствовать ихъ образованiю, обыкновенно покрываютъ верхнюю часть сосудовъ слоемъ параффина. Но обращенiе съ параффиномъ нѣсколько неудобно, такъ какъ его надо плавить. Гораздо удобнѣе въ этомъ отношенiи *составъ Каммермана*, который готовится изъ 10 частей по вѣсу бѣлаго вазелина и 1 ч. лучшаго минеральнаго воска (церезина). Тщательно вымывъ и высушивъ сосудъ элемента, покрываютъ его этимъ составомъ внутри—отъ верха до высоты на 3—4 cm ниже нормальнаго уровня жидкости, и снаружи—на 1 cm отъ верха при помощи сухой и чистой тряпки. Если затѣмъ осторожно налить жидкость, не расплескивая ее по стѣнкамъ, то элементъ можетъ оставаться 7 мѣсяцевъ, не требуя чистки („Электр.").

А.

Мухи видятъ лучи Рёнтгена: — *D. Axenfeld* доказываетъ это слѣдующимъ опытомъ. Два непроницаемыхъ для свѣта ящика, одинъ изъ дерева, другой изъ свинца, соединяются другъ съ другомъ при помощи тоже непроницаемой для свѣта горизонтальной боковой трубки. Въ эти ящики помѣщаются обыкновенныя комнатныя мухи. Если переворотить приборъ, то особая подъемная дверца прекращаетъ сообщенiе между ящиками, такъ что, снявъ крышки съ обоихъ ящиковъ, можно сосчитать мухъ отдѣльно въ деревяномъ и свинцовомъ ящикѣ. Легкая газовая сѣтка мѣшаетъ имъ при этомъ улетѣть изъ прибора. Если снять крышку съ одного изъ ящиковъ и такимъ образомъ освѣтить его внутри, то мухи перебираются изъ темнаго ящика въ свѣтлый, особенно если встряхивать приборъ. Если оба ящика закрыты, то встряхиванiе не вызываетъ переселенiя мухъ. Если перегнать всѣхъ мухъ въ свинцовый ящикъ и затѣмъ, закрывъ оба ящика и освѣтивъ приборъ x-лучами, встряхивать его, то уже черезъ 4—5 минутъ большая часть мухъ перекочевываетъ въ деревяный, т. е. въ проницаемый для лучей Рёнтгена ящикъ. Если же мухи первоначально сидѣли въ деревяномъ ящикѣ, то освѣщенiе лучами Рёнтгена не вызываетъ ихъ переселенiя: онѣ остаются на своемъ мѣстѣ. (Centralbl. f. Physiol. X, 436).

Е. Е.

ЗАДАЧИ.

№ 415. Обозначая черезъ h_a, h_b, h_c и a, b, c высоты и стороны треугольника ABC, показать, что

$$(h_a + h_b + h_c)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) = (a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right);$$

$$h_a + h_b + h_c = \frac{bc + ca + ab}{2R},$$

гдѣ R есть радiусъ круга ABC.

(Заимств.) *Д. Е.* (Иваново-Вознесенскъ).

№ 416. Найти три числа, составляющихъ геометрическую прогрессiю, если извѣстно, что отъ прибавленiя 8-ти ко второму члену прогрессiя превращается въ ариѳметическую, а если еще прибавить 64 къ третьему члену, то прогрессiя снова становится геометрической.

(Заимств.) *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка),

№ 417. Построить треугольникъ по основанію, биссектрисѣ угла, прилежащаго къ основанію, и углу, противолежащему основанію.

Студентъ СПБ. Университета.

№ 418. На продолженіи стороны AB даннаго треугольника ABC отложенъ отрѣзокъ $BD = AB$ и точка D соединена съ точкой E, дѣлящей сторону AC въ отношеніи $1:(n-1)$. Пусть DE пересѣкаетъ сторону CB въ точкѣ F. Опредѣлить отношеніе $EF:FD$.

Л. Магазаникъ (Бердичевъ).

№ 419. Даны двѣ точки A и B и прямая LM; требуется на этой послѣдней найти точку C такъ, чтобы прямыя AC и BC составили съ прямой LM углы, имѣющіе данную разность.

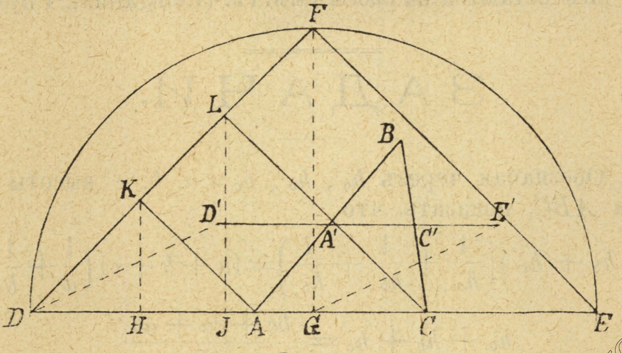
З. Колтовскій (Харьковъ).

№ 420. Черезъ точку A, лежащую на биссекторѣ угла XOY, провести прямую BC такъ, чтобы она дѣлилась въ точкѣ A въ крайнемъ и среднемъ отношеніи и чтобы отрѣзокъ AB былъ бо́льшій.

П. Свѣшниковъ (Уральскъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 159 (2 сер.). — Доказать построеніемъ, что сумма трехъ среднихъ пропорціональныхъ между сходственными сторонами двухъ подобныхъ



Фиг. 1.

треугольниковъ равна средней пропорціональной между ихъ периметрами, т. е. что

$$\sqrt{aa'} + \sqrt{bb'} + \sqrt{cc'} = \sqrt{(a+b+c)(a'+b'+c')}$$

при условіи:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Пусть ABC и $A'BC'$ (фиг. 1) два подобныхъ треугольника, сходственныя стороны которыхъ суть: $AB=c$ и $A'B=c'$, $BC=a$ и $BC'=a'$, $AC=b$ и $A'C'=b'$.

На продолженіи стороны AC отложимъ съ одной стороны $CE=CB$, а съ другой $AD=AB$; прямая DE представляетъ периметръ треугольника ABC. Такимъ же образомъ построимъ прямую $D'E'$, представляющую периметръ треугольника $A'BC'$, и построимъ среднюю пропорціональную между DE и $D'E'$. Опишемъ для этого на DE, какъ на діаметрѣ, полуокружность и, отложивъ $DG=D'E'$, возставимъ къ DE перпендикуляръ GF до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ F и соединимъ наконецъ, F съ D и E. Прямая DF есть средняя пропорціональная между DE и DG, т. е. между периметрами треугольниковъ ABC и $A'BC'$. Раздѣлимъ теперь DG на три части DH, HJ и JG, соотвѣтственно равныя $D'A'$, $A'C'$ и $C'E'$, т. е. сторонамъ треугольника $A'BC'$, и изъ точекъ H и J возставимъ къ DE перпендикуляры HK и JL. Покажемъ, что отрѣзки DK, KL и LF, на которыя раздѣлилась прямая DF, суть среднія пропорціональныя между сходственными сторонами данныхъ треугольниковъ. Соединимъ для этого A съ K и C съ L.

Изъ параллельности прямыхъ KH, LJ и FG вытекаетъ:

$$\frac{DH}{DK}=\frac{HJ}{KL}=\frac{JG}{LF} \text{ или}$$

$$\frac{A'B}{DK}=\frac{A'C'}{KL}=\frac{BC'}{LF}.$$

Раздѣливъ соотвѣтственно эти равенства на данныя:

$$\frac{A'B}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{BC'}{BC},$$

получимъ

$$\frac{AB}{DK}=\frac{AC}{KL}=\frac{BC}{LF}$$

или

$$\frac{DA}{DK}=\frac{AC}{KL}=\frac{CE}{LF},$$

откуда видно, что прямыя AK и CL параллельны EF, а потому перпендикулярны къ DF.

Такимъ образомъ

$$DK=\sqrt{cc'},\ KL=\sqrt{bb'},\ LF=\sqrt{aa'}$$

и

$$DF=\sqrt{aa'}+\sqrt{bb'}+\sqrt{cc'}=\sqrt{(a+b+c)(a'+b'+c')}.$$

А. Байковъ (Москва).

№ 147 (3 сер.) Сто монетъ, состоящихъ изъ франковъ, марокъ и гульденовъ, по курсу размѣняли на русскія деньги, причемъ было получено 56 р. 25 к. Сколько было франковъ, марокъ и гульденовъ, если извѣстно, что гульденовъ было на 8 штукъ больше, чѣмъ марокъ и что по курсу франкъ стоитъ $37\frac{1}{2}$ к., марка 45 к., а гульденъ 75 к.

Отнимая 8 гульденовъ, стоившихъ 6 руб., отъ общаго числа монетъ получимъ 92 монеты стоимостью въ 50 р. 25 к., среди которыхъ марокъ и гульденовъ было поровну. Если мы примемъ, что марки и гульдены замѣнены другой монетой средней стоимости въ 60 коп., то тогда будемъ имѣть, что сумма въ 50 р. 25 коп. составлена изъ 92 монетъ въ 60 коп. и $37\frac{1}{2}$ к. Опредѣлить теперь количество тѣхъ и другихъ монетъ не представляется труднымъ. Такимъ образомъ найдемъ, что гульденовъ было 43, марокъ 35, франковъ 22.

Г. Левиковъ (Тамбовъ); *Уч. Кіево-Печ. гимн. Л.* и *Р.*; *А. Бачинскій* (Холмъ); *А. Шантырь* (СПБ.); *И. Барковскій*, *Н. Кузнецовъ* и *V. N.*, *А. Павлычевъ* (Иваново-Вознесенскъ).

№ 157 (3 сер.) — Къ двумъ касающимся кругамъ проведены внѣшнія касательныя AD и BC (A и B точки касанія на одномъ изъ круговъ, C и D — на другомъ). Показать, что въ четыреугольникъ $ABCD$ можно вписать кругъ.

Опустивъ изъ точки касанія круговъ M перпендикуляры на стороны четыреугольника и соединивъ ее съ вершинами четыреугольника мы изъ полученныхъ треугольниковъ легко докажемъ равенство всѣхъ перпендикуляровъ.

П. Бѣловъ (с. Знаменка); *L.* (Тамбовъ); *Э. Заторскій*, *И. Барковскій* (Могил. губ.); *Я. Соколовъ* (Курскъ); *М. Зиминъ* (Орелъ); *П. Хлѣбниковъ* (Тула); *А. Дмитріевскій* (Цивильскъ); *А. Бачинскій* (Холмъ); *А. Шантырь*, *М. фонъ-Циглеръ* (СПБ.); *Уч. Кіево-Печ. гимн. Л.* и *Р.*; *И. Никольскій* (Очаковъ).

Поправки

къ статьѣ: „Элементарная теорія Эллипса“.

Въ	№ 247,	стр.	188,	строка	19	сверху	напечатано:	черт. 00;	должно быть	черт. 52.
„	„ „	„	„	„	26	„	„	„ „	„	„ „
„	№ 248	„	208,	„	8	„	„	B′	„ „	b′
„	„ „	„	„	„	„	„	„	FB′	„ „	Fb′
„	„ „	„	„	„	5 снизу		„	∠A″FL′	„ „	∠A″FB″.

Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Одесса, 3-го Ноября 1897 г.
„Центральная типо-литографія“, уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. № 39.

Обложка
ищется

Обложка
пщется