Обложка
ищется

Обложка
ищется

XXII Сем. № 2.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 254.

Вычисленіе формулъ по данному приближенію.

(Опытъ пособія для учащихся).

---

§ 1. **Опредѣленія и обозначенія.** Вычислить формулу по данному приближенію значитъ опредѣлить такое численное значеніе формулы, которое отличалось бы отъ истиннаго ея значенія менѣе, нежели на нѣкоторую опредѣленную, впередъ заданную величину, называемую *точностью приближенія*. Точность, или, какъ говорятъ иногда, *предѣлъ* приближѣнія, задается обыкновенно аликвотными десятичными дробями:

$$\frac{1}{10^1},\ \frac{1}{10^2},\ \frac{1}{10^3},\ \ldots,\ \text{вообще}\ \frac{1}{10^m},$$

причемъ показатель при 10 называется *показателемъ приближенія*, или показателемъ точности даннаго числа; такъ, для $\pi = 3{,}14$ показатель точности будетъ $m = 2$, ибо взявъ π съ указаннымъ числомъ десятичныхъ знаковъ, мы дѣлаемъ ошибку $< \frac{1}{10^2}$; для числа $\sqrt{7} = 2, \ldots$ очевидно $m = 0$, ибо взявъ $\sqrt{7}$ равнымъ 2, мы сдѣлаемъ ошибку < 1, или $< 10^0$; для какого либо числа, взятаго *точно*, напр. 5,35, по аналогіи съ приближенными числами можно положить $m = \infty$, и т. п.

Въ приближенныхъ вычисленіяхъ формулъ вопросъ очевидно сводится къ опредѣленію показателей точности всѣхъ отдѣльныхъ членовъ формулы при условіи, чтобы показатель приближенія всей формулы былъ равенъ заданному.

Разсматривая различныя формулы въ общемъ видѣ, условимся истинныя значенія входящихъ въ нихъ величинъ называть A. B, C, ..; приближенныя значенія ихъ по недостатку: a, b, c, .., и дѣлаемыя при этомъ погрѣшности: α, β, γ, .., такъ что $A = a + \alpha$, $B = b + \beta$, $C = c + \gamma$ и пр. Показателя заданной точности будемъ называть m, показателей искомыхъ точностей: x, y, z, ...

§ 2. **Формула суммы.** Пусть сумму n слагаемыхъ: $A+B+C+\ldots+L$ требуется вычислить съ точностью $\frac{1}{10^m}$. Выражая данныя слагаемыя ихъ приближенными значеніями съ погрѣшностями, получимъ:

$$A+B+C+\ldots+L=(a+\alpha)+(b+\beta)+(c+\gamma)+\ldots+(l+\lambda),$$
$$=(a+b+c+\ldots+l)+(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda),$$

откуда очевидно, что погрѣшность для приближенной суммы $a+b+\ldots+l$ равна $\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda$; называя эту погрѣшность Δ_s, получимъ:

$$\Delta_s=\alpha+\beta+\gamma+..+\lambda,$$

т. е. погрѣшность для приближенной суммы равна суммѣ погрѣшностей всѣхъ взятыхъ слагаемыхъ. Если мы каждое слагаемое возьмемъ съ точностью, заданною для суммы, т. е. $\frac{1}{10^m}$ и положимъ, слѣдов., $\alpha<\frac{1}{10^m}$, $\beta<\frac{1}{10^m}$, ... $\lambda<\frac{1}{10^m}$, то очевидно получимъ:

$$\Delta_s<\frac{n}{10^m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Разсматривая полученный предѣлъ погрѣшности для суммы, замѣтимъ:

Если $n<10$, то для того, чтобы погрѣшность была требуемая, т. е. чтобы $\Delta_s<\frac{1}{10^m}$, очевидно необходимо и достаточно каждое слагаемое взять не съ точностью $\frac{1}{10^m}$, а съ точностью $\frac{1}{10^{m+1}}$; дѣйствительно тогда $\Delta_s<\frac{n}{10^{m+1}}$, или подавно $\Delta_s<\frac{10}{10^{m+1}}$, или $\Delta_s<\frac{1}{10^m}$, т. е. получимъ какъ разъ требуемую погрѣшность.

Если $n>10$, но <100, то для полученія заданной точности каждое слагаемое достаточно взять съ точностью $\frac{1}{10^{m+2}}$; и получимъ $\Delta_s<$ $<\frac{n}{10^{m+2}}$, или тѣмъ болѣе $\Delta_s<\frac{10^2}{10^{m+2}}$, или наконецъ $\Delta_s<\frac{1}{10^m}$, и т. д. Такимъ образомъ вообще:

Чтобы вычислить сумму n *слагаемыхъ съ точностью* $\frac{1}{10^{\mathrm{m}}}$, *должно каждое слагаемое брать съ показаніемъ точности* $\mathrm{x}=\mathrm{m}+1$, *если* $\mathrm{n}<10^1$; *съ показаніемъ* $\mathrm{x}=\mathrm{m}+2$, *если* $10^1<\mathrm{n}<10^2$; *съ показ.* $\mathrm{x}=\mathrm{m}+3$, *если* $10<\mathrm{n}<10^3$, *и т. д.*

Такъ напримѣръ, для вычисленія суммы $\pi + \sqrt{3} + \sqrt{2}$ съ точностью до $\frac{1}{10^2}$, имѣемъ $n = 3$; $3 < 10^1$; $x = m + 1 = 2 + 1 = 3$, и поэтому: $\pi + \sqrt{3} + \sqrt{2} = 3{,}141 + 1{,}732 + 1{,}414 = 6{,}287$; откидывая послѣднюю цифру, какъ не имѣющую достовѣрной точности, получимъ окончательно: $\pi + \sqrt{3} + \sqrt{2} = 6{,}28$ (до 0,01).

Примѣчаніе. Если въ числѣ слагаемыхъ суммы входятъ слагаемыя *точныя*, причемъ ни одинъ изъ десятичныхъ знаковъ ихъ не отбрасывается, то, очевидно, такія слагаемыя не должны быть принимаемы въ разсчетъ при опредѣленіи n.

§ 3. **Формула разности.** Пусть разность $A - B$ требуется вычислить съ точностью $\frac{1}{10^m}$. Выражая A и B черезъ ихъ приближенныя значенія, получимъ:

$$A - B = (a + \alpha) - (b + \beta),$$

или

$$= (a - b) + (\alpha - \beta),$$

откуда очевидно, что погрѣшность для приближенной разности $a - b$ выразится въ видѣ:

$$\Delta_d = \alpha - \beta,$$

т. е. разностью погрѣшностей уменьшаемаго и вычитаемаго.

Если мы послѣднія возьмемъ съ заданной точностью, т. е. положимъ $\alpha < \frac{1}{10^m}$, $\beta < \frac{1}{10^m}$, то подавно получимъ:

$$\Delta_d < \frac{1}{10^m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Такимъ образомъ, *чтобы вычислить разность съ точностью* $\frac{1}{10^m}$, *достаточно взять съ показателемъ той же точности*, $x = m$, *и уменьшаемое и вычитаемое.*

Такъ напримѣръ, для вычисленія $\pi - \sqrt{3}$ съ точностью $\frac{1}{10^3}$, имѣемъ $x = 3$, и потому $\pi - \sqrt{3} = 3{,}141 - 1{,}732 = 1{,}409$.

Примѣчаніе. При $\alpha < \beta$, имѣемъ $\Delta_d < 0$ и разность получится *съ избыткомъ*, а не съ недостаткомъ, какъ взяты уменьшаемое и вычитаемое; поэтому въ указанномъ случаѣ, желая получить разность непремѣнно съ недостаткомъ, слѣдуетъ въ полученной разности уменьшить на единицу цифру послѣдняго десятичнаго знака. Такъ напримѣръ, вычисляя до $\frac{1}{10^2}$ разность $\pi - \sqrt{3}$, получимъ: $\pi - \sqrt{3} = 3{,}14 - 1{,}73 = 1{,}41$, разность *съ избыткомъ*, ибо $\alpha - \beta = 0{,}001.. - 0{,}002..$, есть величина отрицательная. Поэтому та же разность съ недостаткомъ будетъ $\pi - \sqrt{3} = 1{,}40$.

§ 4. **Формула произведенія.** *1-й случай.* Пусть произведеніе $k \cdot A$ числа, взятаго точно, на приближенное требуется вычислить съ точностью $\frac{1}{10^m}$. Выражая число A черезъ его приближенное значеніе и погрѣшность, получимъ:

$$k.A = k\ (a+\alpha),$$

или

$$= k.a + k\alpha,$$

откуда видимъ, что погрѣшность для приближеннаго произведенія $k.a$ выразится въ видѣ:

$$\Delta_m = k.\alpha,$$

т. е., произведеніемъ погрѣшности множителя на множимое.

Если множителя взять съ требуемой точностью, т. е. положить $\alpha < \frac{1}{10^m}$, то очевидно получимъ:

$$\Delta_m < \frac{k}{10^m} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Разсуждая подобно тому, какъ при опредѣленіи погрѣшности суммы, увидимъ, что *для того, чтобы вычислить произведеніе* k.A *съ точностью до* $\frac{1}{10^m}$, *должно множителя* A *взять съ показателемъ* $x = m$, *той же точности, если* $k < 10^0$; *съ показателемъ* $x = m+1$, *если* $10^0 < k < 10^1$; *съ показателемъ* $x = m+2$, *если* $10^1 < k < 10^2$, *и т. д.*

Такъ напримѣръ, для вычисленія $42.\sqrt{3}$ съ точностью $\frac{1}{10^1}$, имѣемъ: $10^1 < k < 10^2$; $x = m+2 = 1+2 = 3$, и слѣдов. $42\sqrt{3} = 42 \times 1{,}732 = 72{,}744$, или 72,7.

2-й случай. Пусть произведеніе A.B двухъ приближенныхъ чиселъ требуется вычислить съ точностью до $\frac{1}{10^m}$. Выражая A и B черезъ ихъ приближенныя значенія, получимъ:

$$A.B = (a+\alpha)(b+\beta)$$

$$= ab + (a\beta + b\alpha + \alpha\beta),$$

откуда видимъ, что погрѣшность для приближеннаго произведенія ab выразится въ видѣ:

$$\Delta_m = a\beta + b\alpha + \alpha\beta.$$

Если множителей A и B возьмемъ каждаго съ точностью, заданной для произведенія, т. е. положимъ $\alpha < \frac{1}{10^m}$, $\beta < \frac{1}{10^m}$, то для членовъ послѣдней суммы, получимъ слѣдующія десятичныя приближенія: для 1-го — $a\beta < \frac{p}{10^m}$, гдѣ p есть ближайшее *большее* цѣлое число къ производителю A, для 2-го — $b\alpha < \frac{q}{10^m}$, гдѣ q есть ближайшее *боль-*

шее цѣлое число для В; и для 3-го слагаемаго: $\alpha\beta < \frac{1}{10^m}$, предполагая, что $\alpha < 1$, $\beta < 1$. Такимъ образомъ общая погрѣшность произведенія А, В выразится предѣломъ:

$$\Delta_m < \frac{p+q+1}{10^m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Разсуждая подобно тому, какъ при опредѣленіи погрѣшности суммы, увидимъ, что при $p+q+1 < 10$, обоихъ производителей должно взять съ точностью $\frac{1}{10^{m+1}}$; при $p+q+1 > 10$, но < 100, съ точностью $\frac{1}{10^{m+2}}$ и т. д.

Такимъ образомъ вообще *чтобы вычислить произведеніе двухъ сомножителей съ точностью* $\frac{1}{10^m}$, *должно, опредѣливъ ближайшія большія цѣлыя числа* p *и* q *къ даннымъ сомножителямъ, брать послѣдніе съ показателемъ точности* $x = m+1$, *если* $p+q+1 < 10$; *съ показателемъ* $x = m+2$, *если* $10^1 < p+q+1 < 10^2$; *съ показателемъ* $x = m+3$, *если* $10^2 < p+q+1 < 10^3$, и т. д.

Такъ напримѣръ, для вычисленія $\pi . \sqrt{3}$ съ точностью до $\frac{1}{10^2}$, имѣемъ: $p = 4$, $q = 2$; $p+q+1 = 7$; $7 < 10^1$; $x = m+1 = 2+1 = 3$, и слѣдовательно $\pi . \sqrt{3} = 3{,}141 . 1{,}732 = 5{,}440212$, или $5{,}44$.

3-й случай. Пусть, наконецъ, имѣемъ произведеніе 3-хъ или болѣе сомножителей, которые не даны точно. Не трудно видѣть, что вопросъ можетъ быть сведенъ на случай 2-хъ производителей. Въ самомъ дѣлѣ пусть напримѣръ произведеніе А.В.С трехъ сомножителей требуется вычислить съ точностью до $\frac{1}{10^m}$. Принимая произведеніе АВ за одного производителя = D, опредѣляемъ сначала, по предыдущему, произведеніе DC съ требуемой точностью; затѣмъ, найдя такимъ образомъ необходимую точность для D и C, положимъ $\frac{1}{10^{m+k}}$, опредѣляемъ уже на основаніи послѣдней точности необходимую точность и для множителей А и В. Подобнымъ же образомъ поступимъ въ случаѣ 4-хъ, 5 и т. д. производителей.

Такъ напримѣръ, для вычисленія произведенія $2{,}672834\ldots \times \pi \times \sqrt{3}$ до $\frac{1}{10^1}$, имѣемъ для произведенія $(2{,}672834\ldots\pi) \times \sqrt{3}$ по формулѣ (4) $p+q+1 = 12+2+1 = 15$; $15 < 10^2$; $x = 1+2 = 3$, и слѣдовательно произведеніе въ скобкахъ и $\sqrt{3}$ слѣдуетъ взять съ точностью до $\frac{1}{10^3}$.

Затѣмъ для произведенія въ скобкахъ, получимъ $p+q+1 = 3+4+$ $+1 = 8$; $8 < 10^1$; $x = 3+1 = 4$, и слѣдовательно числа $2{,}672834\ldots$ и

π должно взять съ точностью до $\frac{1}{10^4}$. Такимъ образомъ получимъ: 2,6728.3,1415 = 8,39660120, или 8,396; и затѣмъ 8,396.1,732 = 14,5.

Примѣчаніе. Для упрощенія вычисленій иногда бываетъ полезно видоизмѣнить сомножителей перенесеніемъ запятыхъ при условіи, чтобы численная величина произведенія осталась безъ перемѣны. Такъ напр. для вычисленія: 0,0003567 ... × 6783,25473 ... до $\frac{1}{10^2}$, поступая по предыдущему, имѣли бы: $p+q+1+1=6786$; $10^3<6786<10^4$; $x=2+4=6$, и множителей пришлось бы брать съ 6 десятичными знаками. Увеличивъ же множимое въ 1000 разъ и во столько же разъ уменьшивъ множителя, получимъ: 0,3567 ... × 6,78325473 ...; для этого же произведенія будемъ имѣть: $p+q+1=1+7+1=9$; $9<10^1$; $x=2+1=3$, и слѣдовательно получимъ: 0,356 × 6,783 = 2,41, сравнительно весьма простой случай умноженія.

Н. С. (Муромъ).

(*Окончаніе слѣдуетъ*).

О величинѣ молекулъ.

(Сообщеніе, сдѣланное 16 го октября 1896 г. въ Физической Семинаріи студентовъ С.-Петербургскаго Университета).

(*Окончаніе* *).

Перейдемъ теперь ко второму разсужденію Thomson'а, которое онъ считаетъ наиболѣе убѣдительнымъ „доказательствомъ существованія предѣла предполагаемой малости молекулъ“.

Доказательство это основано на совершенно иномъ явленіи, чѣмъ тѣ, о которыхъ я только что говорилъ, — на явленіи электризаціи при прикосновеніи. Извѣстно, что при прикосновеніи мѣди съ цинкомъ мѣдь электризуется отрицательно, — цинкъ положительно. Положимъ теперь, что мы имѣемъ листочки цинка въ 1 кв. см. площадью и толщиною въ $^1/_{100,000}$ см. съ тремя маленькими выступами или шишечками такой же вышины,—и такіе же листочки мѣди. Возьмемъ мысленно такой цинковый листочекъ, коснемся имъ одного изъ выступовъ мѣднаго листочка и будемъ поворачивать цинковый листочекъ до тѣхъ поръ, пока онъ не коснется всѣхъ трехъ выступовъ мѣднаго. Вслѣдствіе соприкосновенія мѣди съ цинкомъ листочки эти окажутся противоположно наэлектризованными; изъ опытныхъ данныхъ можно разсчитать, что сила притяженія ихъ будетъ равна 2 гр. и что работа, совершенная электрическими силами при приведеніи этихъ двухъ листочковъ на такое разстояніе другъ отъ друга, будетъ равна

$$2 \text{ гр.} \times {}^1/_{100,000} \text{ см.} = {}^2/_{100,000} \text{ гр.см.}$$

*) См. „Вѣст. Оп. Физ.“ № 253.

Представимъ себѣ, что на цинковый листочекъ или, вѣрнѣе, на его выступы, мы наложимъ снова мѣдный листочекъ (выступами вверхъ), на него снова цинковый, на тотъ—мѣдный и т. д., пока не получимъ столбика въ 2 см. вышиною. Столбикъ этотъ будетъ состоять изъ 50,000 цинковыхъ листочковъ и 50,000 мѣдныхъ листочковъ и вся работа электрическихъ силъ при составленіи его будетъ

$$^2/_{100,000} \text{ гр.см.} \times 100,000 = 2 \text{ гр.см.}$$

Масса этого столбика будетъ 8 гр. и, слѣд., на каждый граммъ его будетъ приходиться $^1/_4$ гр.см. работы. Если бы вся эта работа пошла на нагрѣваніе этого столбика, то онъ нагрѣлся бы на $^1/_{16,120}{}^0$ Ц., такъ какъ извѣстно, что для нагрѣванія 1 грамма цинка или мѣди на 1^0 Ц. нужно 4,030 гр.см. работы*).

Представимъ себѣ теперь, что наши листочки сдѣлались въ 1000 разъ тоньше (и выступы на нихъ въ 1000 разъ меньше), но что за это мы взяли ихъ въ 1000 разъ больше. Притяженіе каждыхъ двухъ листковъ, вслѣдствіе уменьшенія разстоянія между ними въ 1000 разъ, станетъ въ 1,000,000 разъ больше, работа же, совершаемая электрическими силами при такомъ сближеніи ихъ, будетъ, какъ можно показать, въ 1000 разъ больше, а такъ какъ число листочковъ будетъ въ 1000 разъ больше, то окончательно работа будетъ въ 1,000,000 разъ больше, — а слѣд., нагрѣваніе, которое произошло бы, если бы вся эта работа превратилась въ теплоту, было бы равно

$$\frac{1,000,000^0}{16,120} = 62^0\text{Ц.}$$

Сдѣлаемъ мысленно эти листочки еще въ 4 раза тоньше,—количество работы будетъ въ 16 разъ больше; слѣд., количество работы будетъ въ 990 разъ больше того, которое нужно, чтобы нагрѣть ихъ всѣ на 1^0Ц., т. е. значительно больше, чѣмъ, вѣроятно, выдѣлилось бы цинкомъ и мѣдью *при ихъ соединеніи*, т. е. при образованіи однороднаго сплава латуни. Дѣйствительно, если бы цинкъ и мѣдь при соединеніи выдѣляли столько теплоты, то „смѣсь цинковаго и мѣднаго порошка, будучи расплавлена въ одной точкѣ, сплавилась бы вся, выдѣляя больше теплоты, чѣмъ надобно для того, чтобы расплавить оба порошка въ отдѣльности,—подобно тому, какъ большое количество пороха, будучи зажжено въ одной точкѣ, сгораетъ все безъ всякаго новаго притока тепла“.

Но, такъ какъ при образованіи латуни ничего подобнаго не наблюдается, то Томсонъ отсюда заключаетъ, что „дѣйствіе электричества при соприкосновеніи прекращается или не продолжаетъ возрастать по тому же закону, когда дѣленіе металловъ доведено до чего нибудь вродѣ $^1/_{100,000,000}$ см.“. „Такимъ образомъ“, говоритъ Томсонъ далѣе, „мы не можемъ довести дѣленіе цинка и мѣди ниже извѣстной толщины, не

*) Число это получится, если помножить среднюю удѣльную теплоту мѣди и цинка, выраженную въ калоріяхъ, на механическій эквивалентъ тепла.

приводя ихъ тѣмъ самымъ въ условія, въ которыхъ они теряютъ свои свойства, какъ самостоятельные твердые металлы". А такъ какъ мы опредѣлили молекулу, какъ наименьшее количество вещества, сохраняющее химическія его свойства, то изъ этого разсужденія Томсона мы можемъ съ большой вѣроятностью вывести, что для мѣди и цинка

$$\delta > 0{,}025\mu\mu.$$

Все, что я говорилъ до сихъ поръ, касалось въ сущности опредѣленія тѣхъ *предѣловъ*, между которыми должна заключаться величина молекулъ, — тѣхъ размѣровъ, которые не можетъ превышать діаметръ молекулы, и тѣхъ размѣровъ, меньше которыхъ онъ не можетъ быть. Теперь же я перейду къ тѣмъ теоретическимъ разсужденіямъ, которыя представляютъ, по мнѣнію Томсона, наиболѣе достовѣрныя данныя для сужденія относительно *дѣйствительной величины* молекулъ, а именно къ разсужденіямъ, основаннымъ на кинетической теоріи газовъ. Какъ извѣстно, по этой теоріи газъ представляетъ собой скопленіе мельчайшихъ частицъ вещества, мчащихся по всевозможнымъ направленіямъ со всевозможными скоростями, непрерывно налетающихъ другъ на друга, сталкивающихся другъ съ другомъ и отскакивающихъ одна отъ другой съ измѣненными, какъ по направленію, такъ и по величинѣ скоростями. Средняя квадратичная *) скорость движенія частицъ газа (G) получается, какъ извѣстно, изъ формулы

$$p = {}^1/_3\, dG^2,$$

гдѣ p—давленіе газа, выраженное въ механической мѣрѣ, а d—плотность. Эта скорость оказывается равной при обыкновенной температурѣ нѣсколькимъ сотнямъ метровъ въ секунду (такъ, для воздуха $G = 486\,\frac{\text{м.}}{\text{сек.}}$), т. е. такова, какъ начальныя скорости пуль современныхъ ружей. Громадность получающихся изъ этой формулы скоростей вызывала въ первое время недовѣріе къ кинетической теоріи газовъ. Появился рядъ возраженій на статьи Clausius'а и Krönig'а, въ которыхъ даны были основанія этой теоріи и выведена вышеуказанная формула. Возражавшіе недоумѣвали, какимъ образомъ, напр., если молекулы газа обладаютъ такими гигантскими скоростями, „табачный дымъ въ комнатѣ можетъ такъ долго оставаться въ неподвижномъ положеніи", а не мгновенно разлетится по всей ней,—какимъ образомъ какой нибудь запахъ можетъ быть слышенъ только въ одномъ мѣстѣ комнаты, — наконецъ, какъ же газы такъ плохо проводятъ теплоту и такъ медленно смѣшиваются другъ съ другомъ, диффундируютъ другъ въ друга. Всѣ эти возраженія не только не поколебали кинетической теоріи газовъ, но послужили даже къ ея дальнѣйшему росту и упроченію. Благодаря имъ,

*) Среднею квадратичною нѣсколькихъ величинъ называется корень квадратный изъ средняго ариѳметическаго ихъ квадратовъ, т. е.

$$a = \sqrt{\frac{\Sigma a_i^2}{n}}.$$

для того, чтобы ихъ опровергнуть,—Clausius (1858) ввелъ въ эту теорію новое понятіе о „средней длинѣ свободнаго пути молекулы газа“, т. е. такого пути, который молекула проходитъ безъ столкновенія съ другими молекулами, и доказалъ, что эта „средняя длина пути“ есть очень малая величина. Maxwell, а затѣмъ и другіе, дали потомъ и способы довольно точнаго опредѣленія численнаго значенія этой величины. Не вдаваясь въ подробности этого вопроса, я укажу только, что тѣ три класса явленій, — а именно треніе въ газахъ, ихъ теплопроводность и диффузія газовъ,—интенсивность которыхъ, какъ легко видѣть, должна зависѣть отъ величины средней длины пути, отъ пути, который молекула проходитъ безъ столкновенія съ другими, — даютъ очень близкіе результаты для численнаго опредѣленія этой величины. Я ограничусь только выпискою формулъ, выражающихъ „коэффиціентъ внутренняго тренія газовъ“, „коэффиціентъ теплопроводности газа“ и „коэффиціентъ диффузіи двухъ газовъ“, т. е. выражающихъ быстроту переноса частицами газа количествъ движенія, быстроту переноса ими теплоты и быстроту переноса ими самихъ себя. Эти „быстроты“, очевидно, должны зависѣть отъ величины того разстоянія, которое каждая частица можетъ пробѣжать свободно и на которое, слѣд., она можетъ передать отнятое ею отъ движущагося тѣла количество движенія, или отнятое отъ нагрѣтаго тѣла количество тепла, или, наконецъ, самое себя. Отъ этой „длины пути“ должна, слѣд., зависѣть быстрота замедленія движенія движущагося въ газѣ тѣла („треніе“ газа), быстрота охлажденія теплаго тѣла („теплопроводность“ газа) и быстрота проникновенія другъ въ друга двухъ газовъ („диффузія“ газовъ). Кинетическая теорія газовъ даетъ слѣдующія выраженія для упомянутыхъ трехъ коэффиціентовъ:

$$\eta = 0{,}318\ d\lambda\Omega_1),$$

$$\varkappa = 0{,}487\ d\lambda\Omega c,$$

$$D = \frac{\pi}{8N}(N_1\lambda_2\Omega_2 + N_2\lambda_1\Omega_1),$$

гдѣ d — плотность газа, c — теплоемкость, λ — длина свободнаго пути молекулъ газа, Ω—средняя ариѳметическая ихъ скоростей, а N—число частицъ газа въ единицѣ объема.

Для воздуха, напр., на основаніи наблюденій этихъ трехъ классовъ явленій получаются слѣдующія значенія для средней длины пути

$$\lambda = 99\mu\mu,$$

$$\lambda = 74\mu\mu,$$

$$\lambda = 109\mu\mu.$$

Результаты эти, ввиду трудности опытныхъ изслѣдованій всѣхъ этихъ явленій, нужно считать очень близкими.

Замѣтимъ, что малость средней длины пути сама по себѣ служитъ доказательствомъ конечности размѣровъ молекулъ газъ. Въ самомъ дѣлѣ, если бы частицы газа были дѣйствительно *безконечно* малы, то длина пути должна была бы быть безконечно большою, такъ какъ вѣроятность столкновенія двухъ такихъ молекулъ, представляющихъ собою „математическія точки“, была бы безконечно мала. На связь длины пути съ размѣрами молекулъ обратилъ впервые вниманіе Loschmidt (1865), который и далъ первое опредѣленіе размѣра молекулъ изъ длины пути, а потомъ въ этомъ направленіи много было сдѣлано Lothar Meyer'омъ, Thomson'омъ, Maxwell'емъ и другими.

Представимъ себѣ, для простоты, что молекула представляетъ собою шарикъ радіуса ϱ. Въ такомъ случаѣ, еслибы эта частица двигалась все время прямолинейно, то въ единицу времени она описала бы собою въ пространствѣ прямой круговой цилиндръ длиною G и съ основаніемъ $\pi\varrho^2$,—слѣд., объема $\pi\varrho^2 G$. Очевидно, что столкновенія этой молекулы съ другими должны отразиться только на формѣ описаннаго ею пространства, которое изъ прямого кругового цилиндра обратится въ зигзагообразный каналъ, состоящій изъ милліардовъ маленькихъ цилиндриковъ, но не на объемѣ этого пространства. Попробуемъ теперь вычислить, сколько же другихъ молекулъ можетъ попасться нашей молекулѣ на ея пути въ единицу времени. Легко видѣть, что попадется ей на встрѣчу только всякая такая молекула, которой хоть какая нибудь часть окажется въ этомъ зигзагообразномъ каналѣ,—иначе говоря, всѣ тѣ молекулы, центры которыхъ отстоятъ отъ поверхности этого канала менѣе, чѣмъ на ϱ, т. е. всѣ тѣ молекулы, центры которыхъ находятся въ каналѣ такого же зигзагообразнаго вида, но вдвое бо́льшаго діаметра и объемъ котораго будетъ, слѣд., $4\pi\varrho^2 G$. А такъ какъ въ единицѣ объема, по нашему обозначенію, находится N молекулъ, то разсматриваемая нами частица столкнется, слѣд., въ 1 времени съ $4\pi\varrho^2 G.N$ частицами.

Но число столкновеній частицы въ 1 времени можно выразить еще иначе, воспользовавшись извѣстной намъ величиною „средней длины пути“. Дѣйствительно, частица въ 1 времени проходитъ длину G, а безъ столкновенія проходитъ длину λ, слѣд., чисто столкновеній частицы въ 1 времени будетъ $\frac{G}{\lambda}$.

Приравнивая полученныя два выраженія для числа столкновеній и сокращая на G, получимъ

$$4\pi\varrho^2 N = \frac{1}{\lambda}.$$

Если же принимать во вниманіе неодинаковость скоростей всѣхъ молекулъ, то болѣе строгій математическій анализъ даетъ болѣе точную формулу

$$4\sqrt{2}\pi\varrho^2 N = \frac{1}{\lambda}.$$

Въ эту формулу кромѣ интересующей насъ величины ϱ входитъ еще одна неизвѣстная—N. Поэтому нужно найти еще одно уравненіе, въ которое входили бы эти же величины ϱ и N. Loschmidt предложилъ за это второе уравненіе принять слѣдующую формулу:

$$\frac{4}{3}\pi\varrho^3 N = \frac{d}{\Delta},$$

гдѣ Δ — плотность сжиженнаго газа.

Вотъ какъ интерпретируетъ онъ это уравненіе: $\frac{4}{3}\pi\varrho^3$ есть объемъ одной молекулы, $\frac{4}{3}\pi\varrho^3 N$ есть объемъ всѣхъ молекулъ, заключенныхъ въ единицѣ объема,—иными словами, число, указывающее, какая часть объема газа занята дѣйствительно его веществомъ. Этотъ объемъ мы бы получили, если бъ могли сблизить молекулы газа до соприкосновенія и сжать ихъ въ одну сплошную массу. Loschmidt и предлагаетъ, что въ сжиженномъ газѣ частицы находятся именно въ такомъ состояніи, а въ такомъ случаѣ, если искомый объемъ умножимъ на плотность сжиженнаго газа, то мы и получимъ плотность газа при обыкновенныхъ условіяхъ,—это и выражаетъ вышеуказанное уравненіе.

Предпочтительнѣе однако другіе способы опредѣленія объема всѣхъ молекулъ въ 1 объема. Второй способъ основывается на формулѣ Van der Waals'a:

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = \mathrm{RT},$$

представляющей собою, какъ извѣстно, обобщеніе закона Бойля-Маріотта и принимающей во вниманіе, какъ существованіе притягательныхъ междучастичныхъ силъ $\left(\text{членъ:} + \frac{a}{v^2}\right)$, такъ и размѣрность частицъ (членъ: $-b$).

Величина b представляетъ собою нѣкоторое кратное объема всѣхъ молекулъ, заключенныхъ въ 1 объема, т. е.

$$\frac{4}{3}\pi\varrho^3 N = kb.$$

Относительно точнаго численнаго значенія k различные авторы приходятъ къ различнымъ результатамъ, наиболѣе достовѣрно принятіе

$$k = \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

Третій способъ основанъ на теоріи діэлектриковъ Mossotti-Poisson'a, изъ которой слѣдуетъ, что K—такъ называемая діэлектрическая постоянная—связана съ числомъ k, выражающимъ, какая часть всего объема діэлектрика занята дѣйствительно его веществомъ, уравненіемъ

$$\mathrm{K} = \frac{1 + 2k}{1 - k}.$$

Отсюда легко получить

$$\frac{4}{3}\pi\varrho^3 N = \frac{\mathrm{K} - 1}{\mathrm{K} + 2}.$$

Четвертый способъ совпадаетъ, въ сущности, съ третьимъ, но вмѣсто величины K тутъ вводится показатель преломленія, квадратъ котораго, согласно электромагнитной теоріи свѣта Maxwell'я, долженъ равняться діэлектрической постоянной; слѣд.

$$\frac{4}{3}\pi\varrho^3 N = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}.$$

Рѣшая одно изъ этихъ уравненій вмѣстѣ съ уравненіемъ

$$4\sqrt{2}\pi\varrho^2 N = \frac{1}{\lambda},$$

можно найти, какъ ϱ, такъ и N. Такъ, по способу Loschmidt'a, принимая $d = 0{,}001293$ (Regnault), а $\Delta = 0{,}933$ (Ольшевскій), получимъ $2\varrho = \delta = 1{,}13\mu\mu$,—результатъ, въ которомъ правильнѣе было бы поставить знакъ неравенства ($\delta < 1{,}13\mu\mu$), такъ какъ плотность молекулъ воздуха, сжатыхъ въ одну компактную массу,—такъ-называемая „абсолютная плотность молекулъ", — во всякомъ случаѣ больше плотности жидкаго воздуха, опредѣленной Ольшевскимъ. Пользуясь формулой Van der Waals'a и принимая за b среднее изъ чиселъ, получающихся изъ наблюденій Regnault ($b = 0{,}00197$), получимъ $\delta = 0{,}28$ $\mu\mu$*), а изъ діэлектрической постоянной ($K = 1{,}00059$—Boltzmann) или изъ показателя преломленія его ($K^2 = 1{,}000588$—Mascart), получаемъ $\delta = 0{,}16$ $\mu\mu$.

Если мы сопоставимъ въ одной таблицѣ (см. стр. 5) всѣ полученныя числа, то увидимъ, что они довольно значительно разнятся другъ отъ друга. Но именно то обстоятельство, что, несмотря на крайнее разнообразіе явленій, изъ которыхъ выведены эти числа, не смотря на то, что одни изъ этихъ чиселъ относятся къ молекуламъ твердыхъ тѣлъ, другія—къ молекуламъ жидкихъ, третьи—газообразныхъ, всѣ они оказываются величинами *того же порядка*, и представляетъ наиболѣе убѣдительное доказательство того, что *„діаметръ молекулы" представляетъ нѣчто, мало отличающееся отъ десятимилліонной доли миллиметра.* Приведемъ опять слова Thomson'a, которыми онъ заканчиваетъ свою рѣчь „О величинѣ атомовъ". Всѣ эти разсужденія въ своей совокупности устанавливаютъ—съ вѣроятностью, которую мы не можемъ разсматривать иначе, какъ очень высокую степень вѣроятности,—то заключеніе, что въ любой обыкновенной жидкости, прозрачномъ или повидимому непрозрачномъ твердомъ дѣлѣ среднее разстояніе между центрами смежныхъ молекулъ менѣе одной милліонной и болѣе одной стомилліонной доли миллиметра"…. „Такимъ образомъ, мы можемъ въ настоящее время быть вполнѣ увѣрены въ томъ, что діаметръ молекулы и десятимилліонныя доли миллиметра—величины, очень близкія между собою". А отсюда мы можемъ вывести и число молекулъ въ 1 куб. см.—такъ, для воздуха это число равно нѣсколькимъ десяткамъ трилльоновъ,—можетъ быть, 20 трилльоновъ, можетъ быть, 60, это не важно, но важно то, что мы увѣрены въ томъ, что это число—не нѣсколько билльоновъ или не нѣ-

*) Замѣтимъ, что число молекулъ въ 1 куб. см. воздуха получается при этомъ предположеній равнымъ 24.10^{18}, т. е. 24 трилльонамъ.

сколько квадрилльоновъ, а именно нѣсколько десятковъ триллъоновъ. Отсюда, вѣсъ одной молекулы воздуха выражается десятитриллъонными долями миллиграмма.

Для того, чтобы хоть нѣсколько уяснить вамъ эти ничего не говорящія ни уму, ни воображенію чрезвычайно малыя и чрезвычайно большія числа, я позволю себѣ закончить мое сообщеніе нѣкоторыми сравненіями и сопоставленіями. Сначала я попробую нарисовать вамъ картину того, что представляетъ собою въ дѣйствительности такая на первый взглядъ спокойная, почти невидимая глазу среда, какъ воздухъ. Для того, чтобы что либо разсмотрѣть въ этой микроскопической картинѣ, увеличимъ всѣ линейные размѣры ея въ милліардъ разъ и увеличимъ кстати, воспользовавшись идеей Stoney, и размѣры времени — тоже въ милльярдъ разъ. У самого Stoney, къ сожалѣнію, не совсѣмъ удачны были подобраны эти отношенія,—время было увеличено въ меньшее число разъ, чѣмъ пространство, благодаря чему измѣнились скорости, — у насъ же скорости останутся тѣми же, какъ и въ дѣйствительномъ газѣ, такъ какъ, при увеличеніи пути и времени, въ которое этотъ путъ пробѣгается, въ одинаковое число разъ, скорость, очевидно, не испытаетъ никакого измѣненія. Воздухъ превратится при этомъ въ собраніе ядеръ 32 см. діаметромъ, вѣсомъ въ 53 килограмма, летящихъ по всѣмъ направленіямъ, со всѣми возможными скоростями, налетающихъ другъ на друга и отскакивающихъ въ разныя стороны или несущихся вмѣстѣ далѣе. Средняя скорость ихъ—486 метровъ въ секунду, среднее разстояніе—3 $^1/_2$ метра. Несмотря на такія большія разстоянія между ядрами они все-таки настолько густо заполняютъ пространство, что между ними происходятъ частыя столкновенія,—каждую секунду—5 столкновеній,—такъ что безъ столкновенія они будутъ проходить, среднимъ числомъ, около 97 метровъ. Постарайтесь живо представить себѣ такое дикое, адское сраженіе этого хаоса ядеръ и сдѣлайте теперь еще одно усиліе воображенія, — представьте себѣ, что время стало идти въ милльярдъ разъ быстрѣе и что линейные размѣры всѣхъ тѣлъ уменьшились въ милльярдъ разъ: при такомъ предположеніи, всѣ, напр., событія, совершившіяся отъ начала нашей эры до настоящаго времени промелькнули бы въ головокружительномъ круговоротѣ въ 1 минуту, а земной шаръ обратился бы въ орѣхъ. Если вы такому превращенію подвергнете нарисованную мною картину пространства, заполненнаго этими бьющими другъ о друга и летящими по всѣмъ направленіямъ ядрами, то вы и получите истинное изображеніе воздуха: ядра превратятся въ мельчайшіе шарики-молекулы, мчащіяся съ такими же гигантскими скоростями, но пробѣгающія безъ столкновенія всего стотысячныя сантиметра и испытывающія уже не 5, а 5 милльярдовъ столкновеній ежесекундно,—и въ каждомъ кубическомъ сантиметрѣ такихъ малютокъ ядеръ будетъ 24,000,000,000,000,000,000 — 24 триллъона.

Если 30 милльоновъ молекулъ воздуха положить въ одну линію вплотную другъ къ другу, то получилась бы линія всего въ 1 см. длиною (пересчитать ихъ мы всѣ, работая усидчиво съ утра до ночи и отсчитывая молекулы по 2 въ секунду, врядъ-ли смогли бы въ $^1/_2$ года). Несмотря на это, если бы всѣ молекулы, заключенныя въ 1 куб. см.

воздуха и вѣсящія всѣ вмѣстѣ всего $1\frac{1}{3}$ миллиграмма, разложить на столѣ въ одинъ слой, то получился бы кусокъ дѣйствительно „воздушной" матеріи, значительно больше поверхности человѣческаго тѣла. Если же нанизать ихъ всѣ на одну линію, какъ четки, то получилась бы нить, которую можно было бы обвить 192 раза земной шаръ и которую можно было бы протянуть 20 разъ отъ земли до луны. Предъ этой нитью тончайшая паутинка явилась бы по тонинѣ тѣмъ же, чѣмъ вѣковое дерево въ два обхвата является передъ этою паутинкою. Если бы все человѣчество задалось цѣлью сосчитать молекулы, находящіяся всего въ 1 куб. см. воздуха, то результатъ узнало бы лишь 9-е поколѣніе, потому что для этой работы потребовалось бы $2\frac{1}{2}$ вѣка. Если бы каждая молекула билльярднаго шара приняла размѣры билльярднаго шара, то билльярдный шаръ принялъ бы размѣры земного. Самое совершенное „безвоздушное" пространство, которое мы только можемъ получить, заключаетъ въ себѣ еще биллъоны молекулъ воздуха въ каждомъ кубическомъ сантиметрѣ.

Не твердыми шагами, но увѣренно идетъ наука къ раскрытію тайнъ этого недоступнаго никакому микроскопу міра молекулъ, и теперь уже можетъ, какъ вы видѣли, съ достаточной точностью измѣрить, взвѣсить и сосчитать эти молекулы, обнаруживая въ этомъ случаѣ, можетъ быть, ярче, чѣмъ въ другихъ, свою поразительную мощь и могущество.

Б. П. Вейнбергъ.

ОТЧЕТЪ

о рѣшеніяхъ задачи на премію, предложенной въ № 241 „Вѣстника".

Было получено лишь одно элементарное и вполнѣ удовлетворительное рѣшеніе задачи г. Шатуновскаго, напечатанной въ № 241 „Вѣстника Оп. Физики". Рѣшеніе это принадлежитъ г. *В. Зайцеву*, которому и присуждена премія.

Г. Зайцевъ приглашается извѣстить редакцію, въ какомъ видѣ онъ желаетъ получить свою премію.

РѢШЕНІЕ ЗАДАЧИ НА ПРЕМІЮ.

Задача. Показать, что, зная пару цѣлыхъ рѣшеній, отличную отъ $x = \pm 1$, $y = 0$ уравненія

$$x^2 - (8p - 1)\ y^2 = 1,$$

въ которомъ $8p - 1$ есть простое число, будемъ знать пару цѣлыхъ рѣшеній уравненія

$$x^2 - (8p - 1)y^2 = 2,$$

и обратно, зная пару цѣлыхъ рѣшеній послѣдняго уравненія, найдемъ неограниченное число паръ цѣлыхъ рѣшеній перваго уравненія.

Покажемъ прежде всего, что ни одно изъ уравненій

$$x^2-(8p-1)y^2=-1$$

$$x^2-(8p-1)y^2=-2$$

не удовлетворяется въ цѣлыхъ числахъ. Дѣйствительно, эти уравненія можно представить соотвѣтственно въ видѣ

$$x^2+y^2=8py^2-1,$$

$$x^2+y^2=8py^2-2,$$

а такъ какъ квадратъ четнаго числа при дѣленіи на 8 всегда даетъ въ остаткѣ либо 0 либо 4, а остатокъ отъ дѣленія на 8 квадрата нечетнаго числа всегда равенъ 1-цѣ (ибо всѣ четныя числа суть числа вида $4e$ или $4e\pm 2$, а всѣ нечетныя числа суть числа вида $4e\pm 1$), то число x^2+y^2, дающее при дѣленіи на 8 въ остаткѣ одно изъ чиселъ 0, 1, 2, 4, 5, не можетъ быть равно одному изъ чиселъ $8py^2-1$, $8py^2-2$, которыя при дѣленіи на 8 даютъ соотвѣтственно остатки 7 и 6.

Пусть теперь $x=x_1$ и $y=y_1$ будетъ данная намъ пара цѣлыхъ рѣшеній уравненія (1), отличная отъ $x=\pm 1$, $y=0$. Можемъ предположить, что x_1 и y_1 цѣлыя положительныя числа, ибо, удовлетворяясь значеніями $x=x_1$, $y=y_1$, уравненіе (1) удовлетворится также и значеніями $x=\pm x_1$; $y=\pm y_1$, причемъ двойные знаки можно такъ подобрать, чтобы мы имѣли пару цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній уравненія (1). Числа x_1 и y_1 удовлетворяютъ соотношенію

$$(x_1-1)(x_1+1)=(8p-1)y_1^2, \tag{3}$$

а такъ какъ $8p-1$ есть простое число, то одно изъ чиселъ x_1-1, x_1+1 дѣлится безъ остатка на $8p-1$, слѣдовательно, число x_1 при дѣленіи на $8p-1$ даетъ въ остаткѣ ± 1, такъ что имѣемъ

$$x_1=(8p-1)q+(-1)^n, \tag{4}$$

гдѣ q и n цѣлыя числа. Внося это выраженіе x_1 въ предыдущее равенство, замѣчаемъ, что одинъ изъ множителей лѣвой части обращается въ $(8p-1)\,q$, а другой—въ $(8p-1)\,q\pm 2$, гдѣ $+2$ соотвѣтствуетъ четному, -2 нечетному n. Сокративъ послѣ этого равенство (3) на $(8p-1)$, получимъ

$$q[(8p-1)q+2(-1)^n]=y_1^2, \tag{5}$$

гдѣ n имѣетъ то-же значеніе, что и въ равенствѣ (4), а q есть опредѣленное цѣлое и положительное число, получающееся отъ дѣленія x_1 на $8p-1$. Разложимъ q на простые множители и пусть $a_1, a_2, \ldots a_r$ будутъ простые дѣлители числа q, входящіе въ q въ четныхъ степеняхъ;

пусть также $b_1, b_2, \ldots, b_s$ будутъ простые дѣлители числа q, содержащіеся въ q въ нечетныхъ степеняхъ, такъ что будемъ имѣть

$$q = a_1^{2\alpha_1} a_2^{2\alpha_2} \ldots a_r^{2\alpha_r} b_1^{2\beta_1+1} b_2^{2\beta_2+1} \ldots b_s^{2\beta_s+1}$$

Полагая

$$a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_r^{\alpha_r} b_1^{\beta_1} b_2^{\beta_2} \ldots b_s^{\beta_s} = y_2; \; b_1 b_2 \ldots b_s = z,$$

гдѣ y_2 есть опредѣленное извѣстное цѣлое положительное число также какъ и z, которое при этомъ не дѣлится на квадратъ цѣлаго числа, отличнаго отъ 1^2, получимъ

$$q = y_2^2 z;$$

$$x_1 = (8p-1) y_2^2 z + (-1)^n,$$

а потому равенство (5) представится въ видѣ

$$y_2^2 z [8p-1) y_2^2 z + 2(-1)^n] = y_1^2, \qquad (6)$$

откуда видимъ, что число y_1^2 дѣлится *послѣдовательно* на число y_2^2 и на число z, которое само не дѣлится на квадратъ цѣлаго числа, отличнаго 1^2. Это возможно только тогда, когда y_1 дѣлится безъ остатка на произведеніе $y_2 z$, слѣдовательно

$$y_1 = y_2 z x_2 \qquad (7)$$

гдѣ x_2—извѣстное положительное цѣлое число, получающееся какъ результатъ дѣленія y_1 на $y_2 z$. Внеся это значеніе y_1 въ равенство (6), получаемъ по сокращеніи на число $y_2^3 z^2$, отличное отъ нуля,

$$x_2^2 - (8p-2) y_2^2 = (-1)^n \cdot \frac{2}{z},$$

а потому z необходимо имѣетъ одно изъ двухъ значеній $z = 1$; $z = 2$, сообразно съ чѣмъ имѣетъ мѣсто одно изъ двухъ равенствъ:

$$x_2^2 - (8p-1) y_2^2 = (-1)^n \cdot 2,$$

$$x_2^2 - (8p-1) y_2^2 = (-1)^n$$

При n нечетномъ ни одно изъ этихъ двухъ равенствъ существовать не можетъ, какъ было показано раньше, а потому необходимо допустить, что n четное число. Это приводитъ насъ къ слѣдующему заключенію:

Если $x = x_1$ и $y = y_1$ есть пара цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній уравненія (1), то будетъ имѣть мѣсто одинъ изъ двухъ слѣдующихъ случаевъ:

1) либо

$$x_1 = (8p-1) y_2^2 + 1; \; y_1 = y_2 x_2,$$

причемъ положительныя числа x_2 и y_2, удовлетворяя соотношенію

$$x_2^2 - (8p-1) y_2^2 = 2,$$

представляютъ пару цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній уравненія (2);

2) либо

$$x_1 = 2(8p - 1)y_2^2 + 1;\; y_1 = 2y_2x_2$$

причемъ положительныя числа x_2 и y_2, удовлетворяя соотношенію

$$x_2^2 - (8p - 1)y_2^2 = 1,$$

не представляютъ пары рѣшеній уравненія (2), но представляютъ новую пару цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній уравненія (1), также отличную отъ $x = 1$; $y = 0$, причемъ очевидно $y_2 < y_1$. Поступая въ этомъ случаѣ съ числами x_2 и y_2, какъ поступлено было съ числами x_1, y_1, получимъ либо пару рѣшеній уравненія (2), либо новую пару рѣшеній x_3, y_3 уравненія (1), отличную отъ $x=1$; $y=0$ (причемъ будетъ $y_3 < y_2 < y_1$). Въ этомъ послѣднемъ случаѣ поступимъ съ x_3 и y_3, какъ было поступлено съ x_2 и y_2 и т. д. Этотъ процессъ можемъ продолжать, покуда будутъ получаться пары чиселъ x_n, y_n, служащія парою рѣшеній уравненія (1). Но такъ какъ при этомъ значенія y_n убываютъ и число y_n не становится $\leqslant 0$, то процессъ не можетъ продолжаться неопредѣленно и мы слѣдовательно необходимо придемъ къ такой парѣ чиселъ, которая уже не будетъ парой цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній уравненія (1). Такая пара x_n, y_n будетъ необходимо парою цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній уравненія (2), ч. и т. д.

Чтобы доказать вторую половину нашей теоремы замѣтимъ 1), что если x_1, y_1 суть пара цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній уравненія (1), то и числа x_2, y_2, опредѣляемыя равенствами

$$x_2 = 2(8p - 1)y_1^2 + 1;\; y_2 = 2y_1x_1,$$

будутъ парой цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній того же уравненія (1), ибо при этихъ значеніяхъ x и y лѣвая часть уравненія (1) обращается въ

$$[2(8p-1)y_1^2+1]^2-(8p-1)(2y_1x_1) = 1-4(8p-1)y_1^2[x_1^2-(8p-1)y_1^2-1] = 1,$$

$[x_1 - (8p - 1)y_1^2 - 1$ равно нулю, такъ кахъ x_1 и y_1 суть пара чиселъ, удовлетворяющихъ уравненію (1)]. Отсюда слѣдуетъ, что, имѣя пару рѣшеній уравненія (1), найдемъ неограниченное число паръ рѣшеній этого уравненія

2) Остается доказать, что, имѣя пару цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній $x = x_1$; $y = y_1$ уравненія (2), найдемъ одну пару цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній

$$x_2 = (8p - 1)\; y_1 + 1;\; y_2 = y_1x_1$$

ур. (1), ибо при этихъ значенія x_2 и y_2 лѣвая часть уравненія (1) обращается въ

$$[(8p-1)y_1^2+1]^2-(8p-1)(y_1x_1)^2 = 1-(8p-1)y_1^2[x_1^2-(8p-1)y_1^2-2] = 1,$$

[число $x_1^2-(8p-1)y_1^2-2=0$, такъ какъ x_1 и y_1 удовлетворяютъ уравненію (1)].

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Къ классификаціи химическихъ элементовъ. (*M. Delauney*. C. R. CXXIII,600).—Если расположить всѣ элементы, атомный вѣсъ которыхъ кратенъ четырехъ, по порядку возрастанія ихъ атомныхъ вѣсовъ, то получается слѣдующая табличка:

I. Атомный вѣсъ кратенъ четырехъ.

4	12	Углеродъ	4	92	Церій	4	172	„
8	16	Кислородъ	8	96	Молибденъ	8	176	Иттербій
4	24	Магній	4	104	Родій	4	184	Вольфрамъ
4	28	Кремній	4	108	Серебро	4	188	„
8	32	Сѣра	8	112	Кадмій	8	192	Иридій
4	40	Кальцій	4	120	Сурьма	4	200	Ртуть
4	44	Скандій	4	124	„	4	204	Таллій
4	48	Титанъ	4	128	„	4	208	Висмутъ
4	52	Хромъ	4	132	Цезій	4	212	„
24	56	Желѣзо	24	136	„	24	216	„
	80	Бромъ		160	Гадолиній		240	Уранъ

Всѣ элементы этого класса распадаются на три группы, причемъ въ каждой группѣ разности между атомными вѣсами двухъ сосѣднихъ элементовъ выражаются соотвѣтственно числамі: 4,8,4,4,8,4,4,4,4,24, а разность между атомными вѣсами *соотвѣтственныхъ* членовъ двухъ сосѣднихъ группъ равна 80. Семь мѣстъ остаются незанятыми.

Точно такъ же элементы, атомные вѣса которыхъ даютъ въ остаткѣ 3 при дѣленіи на четыре, располагаются въ двѣ совершенно подобныхъ группы съ тѣми же разностями атомныхъ вѣсовъ:

II. Атомный вѣсъ выражается формулой $4n + 3$

4	7	Литій	87	Стронцій
8	11	Боръ	91	„
4	19	Фторъ	99	„
4	23	Натрій	103	Рутеній
8	27	Алюминій	107	„
4	35	Хлоръ	115	„
4	39	Калій	119	„
4	43	„	123	„
4	47	„	127	Іодъ
24	51	Ванадій	131	„
	75	Мышьякъ	155	„

Нѣкоторые элементы, атомные вѣса которыхъ даютъ въ остаткѣ 3 при дѣленіи на 4, не вошли въ эту табличку (фосфоръ 31, марганецъ 55, кобальтъ и никель 59, мѣдь 63, селенъ 79, лантанъ 139, тулій 171, осмій 195, свинецъ 207 и торій 231). Кромѣ того въ табличкѣ много пробѣловъ. Авторъ склоненъ думать, что эти пробѣлы соотвѣтствуютъ элементамъ, которые не могутъ существовать самостоятельно и распались каждый на два другихъ:

$2 \times 43 = 31$ (фосфоръ) $+ 55$ (марганецъ)
$2 \times 47 = 31$ (фосфоръ) $+ 63$ (мѣдь)
$2 \times 91 = 79$ (селенъ) $+ 103$ (рутеній)
$2 \times 99 = 59$ (кобальтъ, никель) $+ 139$ (лантанъ)
$2 \times 107 = 7$ (литій) $+ 207$ (свинецъ) $= 19$ (фторъ) $+ 195$ (осмій)
$2 \times 115 = 59$ (кобальтъ или никель) $+ 171$ (тулій)
$2 \times 119 = 7$ (литій) $+ 231$ (торій).

Въ третьемъ классѣ авторъ группируетъ элементы, атомные вѣса которыхъ даютъ при дѣленіи на 4 въ остаткѣ 2.

III. Атомный вѣсъ выражается формулой $4n + 2$.

	2	Гелій
12	14	Азотъ
56	70	Галлій
20	90	Иттрій, Цирконій
16	106	Палладій
20	126	Теллуръ
56	182	Танталъ
12	194	Платина

Разности атомныхъ вѣсовъ сосѣднихъ элементовъ этого класса выражаются числами 12, 56, 20, 16, 20, 56, 12, представляющими замѣчательную симметрію.

Наконецъ, элементы четвертаго класса располагаются такъ:

IV. Атомный вѣсъ выражается формулой $4n + 1$.

	9	Берилій
56	65	Цинкъ
20	86	Рубидій
16	101	"
20	121	"
56	177	"

Ихъ атомные вѣса слѣдуютъ повидимому тому же закону, что и атомные вѣса элементовъ III-го класса.

Барій, принадлежащій къ этому классу, разсматривается какъ продуктъ разложенія элемента, атомный вѣсъ котораго $= 101$:

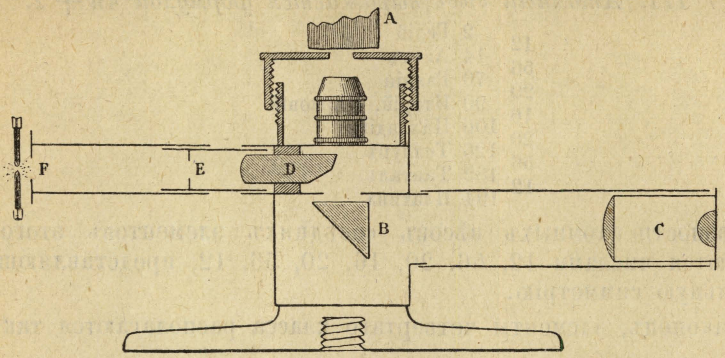
$$2 \times 101 = 65 \text{ (цинкъ)} + 137 \text{ (барій)}.$$

Нѣкоторые элементы вовсе не вошли въ эту клиссификацію. Это —либо элементы мало изученные (аргонъ, эрбій, гольмій, неодимъ и т. д.), либо элементы, атомные вѣса которыхъ не установлены надежно (дидимъ, иридій, ніобій), и, наконецъ, золото (196,2—199) и олово (117,35—118).

В. Г.

ОПЫТЫ и ПРИБОРЫ.

Новый микроскопъ для изученія непрозрачныхъ тѣлъ. (Rev. gén. des Sciences. 1897.43).—Устройство этого микроскопа, изобрѣтеннаго *H. Le Chatelier*, понятно изъ прилагаемаго схематическаго рисунка (фиг. 13). Изслѣдуемый предметъ помѣщается въ *A*. Подъ нимъ находится объективъ микроскопа. Изображеніе, получаемое отъ этого объектива отбрасывается призмой *B* съ полнымъ внутреннимъ отраженіемъ къ окуляру *C*. Для освѣщенія служитъ призма *D*, длиною въ 30 mm, заканчивающаяся съ одной стороны чечевицей, фокусное разстояніе которой равно длинѣ призмы (30mm), а съ другой—двумя гранями, наклоненными подъ угломъ $22^0,5$ къ горизонту и къ вертикальной плоскости. Такимъ образомъ свѣтовой пучекъ, идущій отъ источника свѣта, помѣщеннаго за вертикальнымъ экраномъ *F*, пройдя сквозь призму *D*,



Фиг. 13.

становится вертикальнымъ. Крайнее ребро призмы *D* проходитъ черезъ главный фокусъ объектива или, по меньшей мѣрѣ, возможно ближе къ нему. Діафрагма *E*, находящаяся въ сопряженномъ фокусѣ наблюдаемаго предмета и подвижной экранъ *F*, помѣщенный въ сопряженномъ фокусѣ первой чечевицы объектива по отношенію къ призмѣ *D*, задерживаютъ лучи, которые могли бы освѣщать поле микроскопа и препятствовать ясности изображеній. Чтобы это задержаніе лучей было возможно совершеннымъ, необходимо, чтобы діаметръ отверстія діафрагмы *E* равнялся діаметру изображенія наблюдаемой части предмета.

Нашъ схематическій рисунокъ представляетъ модель микроскопа, построеннаго *Peltin*'омъ по указаніямъ *Le Chatelier* и предназначеннаго для металло-графическихъ цѣлей.

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Вѣроятно наши читатели знаютъ уже изъ газетъ, что изобрѣтатель динамита, шведскій милліонеръ *Альфредъ Нобель*, скончавшійся въ декабрѣ прошлаго года, завѣщалъ громадную сумму для научныхъ цѣлей. Пользуемся случаемъ привести въ точномъ переводѣ выписку изъ завѣщанія покойнаго милліонера *). Первая часть завѣщанія опредѣляетъ суммы родственникамъ и друзьямъ покойнаго (всего около 3 мил. франковъ). Затѣмъ завѣщаніе гласитъ:

„Остальная часть моего имущества будетъ распредѣлена такъ: изъ капитала, который распорядители обратятъ въ надежныя бумаги, будетъ образованъ одинъ фондъ, проценты съ котораго ежегодно будутъ даваемы въ видѣ преміи тѣмъ, кто за истекшій годъ принесъ наибольшую пользу человѣчеству. Процентныя деньги будутъ раздѣлены на пять равныхъ частей, которыя будутъ выдаваемы: *одна часть* тому, кто сдѣлалъ наиболѣе важное открытіе или изобрѣтеніе въ области *физики*; *одна часть* тому, кто сдѣлалъ наиболѣе важное открытіе или усовершенствованіе въ области *химіи*; *одна часть* тому, кто сдѣлалъ наиболѣе важное открытіе въ области *физіологіи* или *медицины*; *одна часть* тому, кто написалъ самое выдающееся *литературное* произведеніе въ идеальномъ духѣ, и *одна часть* тому, кто наибольше и наилучше работалъ для достиженія *братства народовъ*, для *устраненія или уменьшенія*

*) Изъ издаваемой въ Швеціи газеты „Lingvo Internacia", № 12, стр. 222—223.

постоянныхъ армій и для устройства и распространенія *конгресовъ мира*. — Преміи по физикѣ и химіи будутъ присуждаться *Шведской Академіей Наукъ*, за физіологическіе или медицинскіе труды—*Каролинскимъ Институтомъ* въ Стокгольмѣ, за литературныя произведенія — *Королевской Шведской Академіей* въ Стокгольмѣ, а борцамъ за миръ—комитетомъ изъ пяти членовъ, избираемыхъ *норвежскимъ стортингомъ*. Я желаю, чтобы при присужденіи премій вовсе не принималась въ разсчетъ принад-

Альфредъ Нобель.

лежность къ той или другой націи, такъ чтобы преміи выдавались всегда самому достойному, будетъ ли онъ скандинавомъ или нѣтъ".

Точная сумма завѣщаннаго наукѣ и прогрессу капитала еще не опредѣлилась. По имѣющимся въ настоящее время свѣдѣніямъ капиталъ этотъ достигаетъ 30 *милліоновъ кронъ* (около 15 мил. рублей). Проценты съ этого капитала составятъ ежегодно около *милліона кронъ* (около 500,000 руб.).

Открытый недавно химическій элементъ *люцій* оказался, какъ сообщаетъ Chem. News (1896,74) нечистымъ итріемъ.

На мѣсто скончавшагося *H. Resal*'я избранъ въ члены Парижской Академіи Наукъ генералъ *Sebert*.

Избраны въ члены Бельгійской Академіи Наукъ въ Брюсселѣ профессора: *Менделѣевъ*, *Бельтрами*, *Жансенъ Des Cloiseaux* (Парижъ) и *Treub* (Buitenzorg).

Медаль *Matteucci* присуждена Итальянскимъ Обществомъ Наукъ проф Rowland'у за труды по спектроскопіи.

Петербургская Академія Наукъ избрала въ члены-корреспонденты: *Collandreau*, профессора математики и *W. Ostwald*'а профессора химіи въ Лейпцигѣ, *Landolt*'а, профессора химіи въ Берлинѣ и *K. Zittel*'я, проф. палеонтологіи въ Мюнхенѣ.

Скончались: проф. *Galileo Ferraris* въ Флоренціи, селенографъ *T. Gwyn Elger* 9-го января, проф. химіи въ Парижѣ *Georges Ville* $^{10}/_{22}$ февраля.

$^{7}/_{19}$ февраля скончался одинъ изъ величайшихъ современныхъ математиковъ, профессоръ математики въ Берлинѣ, *Карлъ Вейерштрассъ*, 81 года отъ роду. Некрологъ покойнаго будетъ помѣщенъ въ слѣдующемъ номерѣ „Вѣстника".

ЗАДАЧИ.

№ 445. Найти формулу, выражающую площадь четыреугольника $ABCD$ въ функціи его угловъ A, B, C и D, периметра m и разности n между суммами противоположныхъ сторонъ. Доказать на основаніи полученнаго результата, что четыреугольникъ, периметръ и углы котораго заданы, имѣетъ наибольшую площадь, когда въ него вписывается кругъ.

М. Зиминъ (Орелъ).

№ 446. Въ треугольникъ ABC вписанъ треугольникъ $A'B'C'$; около того же треугольника ABC описанъ треугольникъ $A''B''C''$, стороны котораго соотвѣтственно параллельны сторонамъ треугольника $A'B'C'$. Показать, что

$$\frac{BA'}{A'C}=\frac{C''A}{AB''},\ \frac{CB'}{B'A}=\frac{A''B}{BC''},\ \frac{AC'}{C'B}=\frac{B''C}{CA''}.$$

(Заимств.) *Д. Е.* (Иваново-Вознесенскъ).

№ 447. Рѣшить уравненіе

$$x^2+\sqrt{x+a}=a.$$

Л. Магазаникъ (Бердичевъ).

№ 448. Показать, что отношеніе отрѣзка MX, соединяющаго произвольную точку X окружности съ серединой M стороны квадрата, вписаннаго въ ту же окружность, къ отрѣзку, соединяющему M съ серединой N радіуса, проведеннаго въ точку X, равно $\sqrt{2}$.

З. Бродскій (Одесса).

№ 449. Въ данный правильный шестиугольникъ вписать другой правильный шестиугольникъ съ данной стороной.

(Заимств.). *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ).

№ 450. Показать, что при n цѣломъ

$(2n+1)^5-2n-1$ дѣлится на 240,

$3^{2n+2}-8n-9$ „ „ 64,

$3^{2n+3}+40n-27$ „ „ 64,

$3^{2n+1}+2^{n+2}$ „ „ 7,

$3^{2n+2}+2^{6n+1}$ „ „ 11,

$3^{4n+4}+4^{3n+3}$ „ „ 17,

$3.5^{2n+1}+2^{3n+1}$ „ „ 17.

(Заимств.) *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 322 (3 сер.). — Найти число, равное квадрату числа его единицъ, сложенному съ кубомъ числа его десятковъ.

Если x есть число десятковъ, а y—число единицъ, то

$$10x+y=y^2+x^3,$$

или

$$x(10-x^2)=y^2-y.$$

Такъ какъ вторая часть этого уравненія положительна, то $10>x^2$, а потому x можетъ имѣть только значенія 0, 1, 2, 3. Соотвѣтственно этому получимъ для y четыре уравненія, изъ 8-и корней которыхъ только $y=1$ при $x=0$ и $y=4$ при $x=2$ удовлетворяютъ условіямъ задачи. Искомыя числа суть слѣдовательно 1 и 24.

М. Зиминъ (Орелъ); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка): *Э. Заторскій* (Вильно); *Лежебокъ* (Ярославль).

№ 323 (3 сер.). — Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненія:

$$x^2+2y=u^2,$$

$$x^2-2y=v^2,$$

гдѣ x, y, u и v суть неизвѣстныя.

Сложивъ данныя уравненія, получимъ:

$$2x^2=u^2+v^2.$$

Положивъ $x=2^p x_1$, $u=2^q u_1$ и $v=2^r v_1$, гдѣ p, q и r суть цѣлыя числа, не меньшія нуля, а x_1, y_1 и v_1—цѣлыя нечетныя числа, получимъ:

$$2^{2p+1}x_1^2=2^{2q}u_1^2+2^{2r}v_1^2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (1)$$

Легко доказать, что $p=q=r$. Дѣйствительно, допустивъ, что $r>q$ и написавъ предыдущее равенство въ видѣ

$$2^{2p+1}x_1^2=2^{2q}(u_1^2+2^{2r-2q}v_1^2),$$

заключаемъ, что, вслѣдствіе нечетности чиселъ x_1^2 и $u_1^2+2^{2r-2q}v_1^2$, должно быть

$$2^{2p+1}=2^{2q},$$

что невозможно. Такимъ образомъ необходимо, чтобы было $q=r$, и равенство (1) можетъ быть написано такъ:

$$2^{p+1}x_1^2=2^q\,(u_1^2+v_1^2).$$

Полагая $u_1=2u_2+1$, $v_1=2v_2+1$, получимъ

$$2^{p+1}x_1^2=2^{q+1}[(u_2+v_2+1)^2+(u_2-v_2)^2].$$

Такъ какъ числа u_2+v_2 и u_2-v_2 всегда одинаковой четности, то число, содержащееся въ скобкахъ [ ] нечетно, и слѣдовательно

$$2^{p+1}=2^{q+1},$$

откуда $p=q$,

$$x=2^p x_1,\ u=2^p(2u_2+1),\ v=2^p(v_2+1)$$

и

$$x_1^2=(u_2+v_2+1)^2+(u_2-v_2)^2.$$

Общее рѣшеніе этого уравненія дается, какъ извѣстно, формулами

$$x_1=m^2+n^2,$$

$$u_2+v_2+1=m^2-n^2 \text{ или } 2mn,$$

$$u_2-v_2=2mn \text{ или } m^2-n^2.$$

Такъ какъ u_2+v_2 и u_2-v_2 одинаковой четности и одно изъ этихъ чиселъ, въ силу послѣднихъ равенствъ, необходимо четное, то числа m и n различной четности. Рѣшая систему послѣднихъ уравненій относительно u_2 и v_2, получаемъ:

$$2u_2+1=m^2-n^2+2mn,$$

$$2v_2+1=\pm(m^2-n^2-2mn),$$

а потому

$$x=2^p(m^2+n^2),$$

$$y=2^{2p+1}mn(m^2-n^2),$$

$$u=2^p(m^2-n^2+2mn),$$

$$v=\pm 2^p(m^2-n^2-2mn),$$

гдѣ m и n суть произвольныя цѣлыя числа различной четности.

N.B. Было получено четыре неполныхъ рѣшенія.

№ 325 (3 сер.) — Показать, что если $x_1+x_2+x_3+\ldots+x^n=1$, то

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2)-(x_1^3+x_2^3+x_3^3+\ldots+x_n^3)=s_2-3s_3,$$

гдѣ s_2 обозначаетъ сумму произведеній по два чиселъ x_1, x_2, $x_3, \ldots x^n$, которыя всѣ положительны, а s_3 обозначаетъ сумму произведеній по три этихъ же чиселъ.

Возвысивъ въ квадратъ равенство:

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=1, \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

найдемъ

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2=1-2s_2, \quad \ldots\ldots (2)$$

а перемноживъ равенства (1) и (2), получимъ:

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3+\ldots+x_n^3+\sigma=1-2s_2, \quad \ldots\ldots (3)$$

гдѣ σ обозначаетъ сумму произведеній квадрата каждаго изъ чиселъ x_1, x_2, $x_3, \ldots\ x_n$ на каждое изъ остальныхъ.

Возвысивъ равенство (1) въ кубъ, найдемъ:

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3+\ldots+x_n^3+3\sigma=-6s_3. \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Умноживъ равенство (3) на 3 и вычтя его затѣмъ изъ равенства (4), получимъ

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3+\ldots+x_n^3=1-3s_2+3s_3,$$

вычтя же это равенство изъ равенства (2), получимъ требуемое соотношеніе.

М. Зиминъ (Елецъ); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка); *Э. Заторскій* (Москва).

№327 (3 сер.).—Показать, что прямая, проведенная черезъ пересѣченіе діагоналей трапеціи параллельно ея основаніямъ, дѣлится въ точкѣ пересѣченія діагоналей пополамъ.

Пусть прямая, параллельная основаніямъ трапеціи, встрѣчаетъ непараллельныя стороны въ точкахъ R и S, а діагонали — въ точкахъ T и U. Показать, что $RT=SU$.

1. Положимъ, что непараллельныя стороны AB и DC трапеціи пересѣкаются въ точкѣ E, а діагонали AC и BD въ точкѣ F, и пусть линія, EF встрѣчаетъ большую изъ параллельныхъ сторонъ AD въ точкѣ K. Имѣемъ *)

$$BE.CD.AK=AB.EC.DK,$$

а такъ какъ

$$BE.CD=AB.EC,$$

то $AK=DK$, откуда слѣдуетъ справедливость перваго изъ положеній задачи.

Если точки R, S, T и U лежатъ соотвѣтственно на AB, CD, AC, BD, а прямая, параллельная AD и проходящая черезъ F, встрѣчаетъ AB въ M, а CD въ N, то

$$\frac{RT}{MF}=\frac{AR}{AM}=\frac{DS}{DN}=\frac{SU}{FN},$$

а такъ какъ $MF=FN$, то $RT=SU$.

2. Очевидно имѣемъ:

$$\frac{MF}{AD}=\frac{BM}{BA}=\frac{CN}{CD}=\frac{NF}{AD},$$

откуда $MF=NF$.

М. Зиминъ (Орелъ); *Лежебокъ* (Ярославль); *Д. Цельмеръ* (Тамбовъ); *Э. Заторскій* (Москва).

№ 328 (3 сер.)—Показать, что три прямыя, проходящія каждая черезъ основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ ортоцентра треугольника на внутренній и внѣшній биссекторы его угла, пересѣкаются въ одной точкѣ.

---

*) См. „Новая геометрія треугольника", *Д. Е.* „В. О. Ф." № 230, стр. 30.

Пусть H будетъ ортоцентръ треугольника ABC, H_1 — центръ круга описаннаго, O—средина отрѣзка HH_1, т. е. центръ круга девяти точекъ. Вслѣдствіе равнонаклонности прямыхъ AH и AH_1 къ сторонамъ угла A, внутренній биссекторъ угла A раздѣлитъ и уголъ HAH_1 пополамъ. Обозначимъ черезъ D средину отрѣзка AH и положимъ, что прямая OD встрѣчаетъ внутренній биссекторъ угла A въ точкѣ E. Такъ какъ $OD \parallel AH_1$, то

$$\angle DEA = \angle EAH_1 = \angle EAH,$$

а потому $DE = DA = DH$ и $\angle AEH = 90^0$. Отсюда слѣдуетъ, что внѣшній биссекторъ угла A параллеленъ HE, и если прямая DE встрѣчаетъ его въ точкѣ F, то $HF \perp AF$. Такимъ образомъ прямая, проходящая черезъ основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ ортоцентра треугольника на внутренній и внѣшній биссекторы какого либо изъ его угловъ, проходитъ черезъ центръ круга девяти точекъ этого треугольника, а потому всѣ три прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ.

М. Зиминъ (Орелъ).

ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

Bulletin de la Société Astronomique de France.

1896 — № 11.

Nouvelles photographies lunaires—фотографіи мѣстностей, окружающихъ цирки: Тихо, Фламмаріонъ и Клавій; эти фотографіи представляютъ въ 9—11 разъ увеличенныя фотографіи, полученныя на Обсерваторіи Lick'а.

Société Astronomique de France. *Séance du 14 Oct.*

Les preuves mécaniques de la rotation de la terre. *Ph. Gilbert.* — Гипотеза вращенія земли около оси высказывалась еще древними философами напр. Гераклитомъ, Экфантомъ, Аристархомъ Самосскимъ, Селевкомъ Вавилонскимъ; въ средніе вѣка ее допускалъ Николай Куза. Галилей своими работами въ области механики подготовилъ почву для механическаго ея подтвержденія и устранилъ нѣкоторыя изъ существовавшихъ тогда возраженій; противники Галилея, вслѣдствіе незнанія закона независимости дѣйствія силъ, утверждали, что, если-бы земля вращалась съ Запада на Востокъ, то тѣло, брошенное съ вершины башни, должно было бы упасть позади ея, т. е. къ З. между тѣмъ какъ оно падаетъ у основанія. Галилей на это возразилъ, что падающее тѣло сохраняетъ ту горизонтальную скорость, которую имѣла вершина башни вслѣдствіе вращенія земли и, падая, отклоняется къ В на столько-же, на сколько подвинулось основаніе башни и падаетъ поэтому къ ея основанію; ему, повидимому, не пришло въ голову мысли, что различныя точки башни, находясь на различныхъ разстояніяхъ отъ отъ оси земного шара, обладаютъ различными линейными скоростями, убывающими къ основанію. Мерсенъ и Пти пробовали стрѣлять изъ пушки по вертикальному направленію вверхъ, но ядра падали то къ В, то къ З, такъ что опыты ихъ ни къ чему не привели

Ускользнувшія отъ Галилея соображенія пришли въ голову Ньютону, который въ своемъ письмѣ отъ 8 декабря 1679 г. въ Лондонское Королевское Общество высказалъ, что, если высота паденія будетъ достаточная, то должно получиться отклоненіе къ В; Гукъ, присутствовавшій на этомъ засѣданіи, замѣтилъ, что отклоненіе должно получиться къ ЮВ; имъ былъ произведенъ такой опытъ и хотя результать оправдалъ ожиданія, но въ виду малой высоты паденія (27 англ. ф.) онъ не внушаетъ довѣрія.

Только въ 1790—91 гг. Гульельмини повторилъ опытъ Ньютона, для этого онъ избралъ Болонскую башню, высота которой около 100 метровъ; принявъ различныя предосторожности, чтобы не сообщить падающему тѣлу бокового толчка, онъ въ 15 опытахъ получилъ отклоненія къ ЮВ; средняя величина восточнаго отклоненія = 0,0167 мм, южнаго — 0,01175 мм.; цифры эти сомнительны, такъ какъ опыты производились лѣтомъ, направленіе же вертикальной линіи, проходящей чрезъ точку привѣса, опредѣлено было зимою, между тѣмъ устройство башни позволяетъ предполагать измѣненіе ея формы въ зависимости отъ температуры.

Нѣсколько лѣтъ спустя Бенценбергъ возобновилъ эти опыты сперва въ Гамбургѣ на башнѣ Св. Михаила, потомъ въ рудникѣ въ Schlebusch; не смотря на массу предосторожностей, результаты получились сомнительные: отклоненія были во всѣ стороны, разность между противоположными отклоненіями почти въ 9 разъ больше полученной средней величины.

Рейхъ и Брендель возобновили эти опыты въ одномъ изъ рудниковъ близъ Фрейберга въ 1830—31 гг.; различныхъ предосторожностей не только относительно способа привѣса, устраненія токовъ воздуха, влажности, но и относительно полной однородности падающихъ шаровъ, способа измѣренія высоты и времени — принято было еще больше; среднее отклоненіе получалось въ 0,028396 къ В и 0,0437 мм къ Ю, въ то время какъ теорія даетъ 0,0275 мм. къ В и 0 къ Ю. Не смотря на кажущееся согласіе опыта съ теоріей, опыты принадлежатъ къ сомнительнымъ, такъ какъ: 1) Рейхъ, при полученіи средней цифры, устранялъ тѣ опыты, которые ему казались подозрительными, 2) на ряду съ отклоненіями къ В получались и гораздо большія отклоненія къ З и 3) отклоненія въ одну сторону колеблются въ очень широкихъ предѣлахъ. Въ концѣ концовъ эти опыты въ виду ихъ важности нуждаются въ повтореніи; теперь мы располагаемъ и болѣе глубокими рудниками и болѣе совершенными приборами и методами.

Saturne en 1896. *Ph. Fauth.*—Во время послѣдней оппозиціи Fauth (обсерв. Landstuhl) отчетливо видѣлъ на Сатурнѣ слѣд. подробности: просвѣтъ Энке и широкую свѣтлую полосу по внутреннему краю внѣшняго кольца, имѣвшаго цвѣтъ желтовато-сѣрый; среднее кольцо состояло изъ трехъ концентрическихъ полосъ: яркой и узкой внѣшней, болѣе широкой средней желтоватаго цвѣта еще болѣе широкой оранжевой внутренней; просвѣты, замѣченные Антоніади, удалось видѣть и Fauth'у; внутреннее кольцо было синевато-стального цвѣта, на самой планетѣ были видны широкая темно-сѣрая полоса, усѣянная пятнами, тонкая полоса по экватору и сѣрый полярный сегментъ.

Sur l'observation des taches de Saturne *H. Friffiths.*

L'éclipse de Soleil du 9 Août 1896. Въ Li-ka-wei (Китай) затменіе было видимо какъ частное; снято нѣсколько фотографій, отмѣчено время 1-го и послѣдняго контактовъ и произведены актинометрическія наблюденія; температура упала съ 32°,1 до 30°,7; minimum продолжался около получаса; отчетливо проэктировался на солнце профиль лунныхъ горъ (Dörfel и Лейбницъ кажется).

Nouvelles de la Science. Variétés.

Le ciel en Novembre.

К. С. (Умань).

Присланы въ редакцію книги и брошюры:

11. **К. Христіансенъ,** Профессоръ физики въ Копенгагенскомъ Университетѣ. **Основы теоретической физики.** Переводъ *С. Г. Егорова*, подъ редакціей профессора физики въ С.-Петербургскомъ Технологическомъ Институтѣ Императора Николая I *Н. А. Гезехуса.* Съ 143 рисунками. II. Спб. Изданіе Ф. В. Щепанскаго. Невскій пр., 34. 1897. Ц. 3 р.

12. **Русскій Астрономическій Календарь на 1897 г.** Нижегородскаго Кружка Любителей Физики и Астрономіи. Подъ редакціей Предсѣдателя Общества. Съ приложеніемъ подвижной карты звѣзднаго неба и съ рисунками и чертежами въ текстѣ. Москва. Изданіе К. И. Тихомирова (Кузнецкій Мостъ) 1897. Ц. 75 к.

13. **Опытъ систематическаго сборника задачъ и численныхъ примѣровъ для начальнаго обученія ариѳметикѣ.** Часть первая, цѣлыя числа первой сотни. Составилъ *Н. Павловъ*. Третье исправленное изданіе. Казань. Изданіе кн. магазина А. А. Дубровина. 1896. Ц. 15 к.

14. — Часть вторая, числа любой величины. Составилъ *Н. Павловъ*. Изданіе четвертое. Казань. Изданіе книжнаго магазина А. А. Дубровина. 1897. Ц. 25 к.

15. **Методическія замѣтки о рѣшеніи сложныхъ задачъ начальной ариѳметики.** Учебное пособіе при прохожденіи ариѳметики въ начальныхъ школахъ. Составилъ *Н. Павловъ*. Казань. Изданіе книжнаго магазина А. А. Дубровина. 1896. Ц. 30 к.

16. **Учебникъ началъ математики.** Составленъ по министерскимъ программамъ для средне-учебныхъ заведеній *А. Н. Воробьевымъ*, преподавателемъ математики въ Сарапульскомъ Алексѣевскомъ реальномъ училищѣ и Сарапульской женской гимназіи. Часть I. **Элементарное счисленіе.** Алгебраическое (или буквенное) счисленіе. Алгебра (теорія элементарныхъ уравненій). Алгебраическій элементарный анализъ. Съ приложеніемъ: 1) основаній теоретической ариѳметики, 2) методовъ рѣшенія ариѳметическихъ задачъ, 3) таблицъ четырехзначныхъ логариѳмовъ, 4) одной таблицы чертежей и 5) собранія задачъ (около 1500). Казань. 1896. Ц. 1 р.

17. — Часть II. **Геометрія.** Планиметрія, Тригонометрія, Стереометрія. Съ приложеніемъ: 1) главнѣйшихъ методовъ рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе (приложеніе алгебры къ геометріи) и 2) элементовъ теоріи доказательствъ. Казань. 1897. Ц. 1 р.

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Одесса, 19-го Марта 1897 г.
„Центральная типо-литографія", уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. № 39.

Обложка
пщется

Обложка
ищется