

Обложка
щется

Обложка
щется

Вѣстникъ Опытной Физики

и ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

15 Февраля

№ 291.

1901 г.

Содержаніе: Второй международный математическій конгрессъ. *Проф. Д. Синцова.* — Новое доказательство трансцендентности чиселъ π и e . (Окончаніе). *Пр.-Док. В. Каана.* — Отъ Распорядительнаго Комитета XI Съезда Русскихъ Естествоиспытателей и Врачей въ С.-Петербургѣ. 20—30 декабря 1901 года. — Присужденіе премій имени Н. И. Лобачевского. *Пр.-Док. В. Каана.* — Научная хроника: † Oscar Schlömilch. † Z. T. Gramme. Фондъ имени Бельтрами. Новая теорія полярныхъ сияній. — Разныя извѣстія: Присужденіе премій Парижской Академіи Наукъ. Медаль Лондонскаго Рентгеновскаго Общества. Памятникъ Бунзену, Кирхгофу и Гельмгольцу. — Математическія мелочи. *И. Твердовскаго.* — Задачи №№ 16—17. — Задачи для учащихся №№ 11—15 (4 сер.). — Рѣшенія задачъ (3-ей серіи) №№ 580, 605, 616, 622. — Объявленія.

Второй международный математическій конгрессъ. *)

Профессора Д. Синцова въ Екатеринославъ.

Среди многочисленныхъ международныхъ съездовъ, организованныхъ во время Парижской выставки, состоялся 6—12 августа н. ст. и международный математическій конгрессъ. Отдвинутый на задній планъ многочисленными медицинскими и шумными студенческими конгрессами, происходившими одновременно, съездъ математиковъ прошелъ скромно, совершенно незамѣченный общеою прессою. Это не мѣшаетъ Парижскому съезду занять важное мѣсто въ исторіи международныхъ математическихъ съездовъ.

Если не считать попытки устроить международный съездъ въ Чикаго, также во время выставки 1893 г., первымъ опытомъ организациіи международныхъ съездовъ математиковъ быть съездъ въ Цюрихѣ въ 1897 г. Первый опытъ оказался удачнымъ, и второму съезду предстояло доказать, имѣетъ ли дѣло шансы упрочиться, возможны-ли на практикѣ періодическіе съезды математиковъ, по характеру своей науки, казалось бы, наиболее подготовленныхъ къ международной организациіи, но на практикѣ оказывающихся зачастую крайними націоналистами.

Эта задача можетъ считаться выполненной. Парижскій конгрессъ, несмотря на неблагопріятныя условія, показалъ, что международные математическіе съезды возможны, что они привлекаютъ достаточный контингентъ участниковъ. Послѣ него уже можно

*) Съ любезнаго разрѣшенія автора перепечатано изъ журнала „Физико-Математическія науки въ ходѣ ихъ развитія“. Т. I. Вып. 5.

считать обезпеченнымъ третій сѣздъ, и самые его недостатки (а ихъ было не мало) послужать урокомъ для организаторовъ будущаго сѣзда.

Парижскій сѣздъ привлекъ около 250 участниковъ (записалось около 300 членовъ и членовъ-посѣтителей, но часть не явилась). Всѣ европейскія государства, Сѣверная и Южная Америка и Японія имѣли на немъ своихъ представителей*). Активное участіе—посѣщеніемъ засѣданій и сообщеніями—принимало, конечно, гораздо меньшее число лицъ: выставка, на которую въ теченіе конгресса члены пользовались правомъ бесплатнаго входа, привлекала слишкомъ сильно.

Послѣ предварительнаго частнаго собранія вечеромъ 5-го августа, сѣздъ былъ открытъ официально 6 августа торжественнымъ засѣданіемъ въ Palais des Congrès. Президентомъ избранъ председатель организационнаго комитета Н. Poincaré (почетный президентъ Ch. Hermite отсутствовалъ) вице-президентами: Czuber (Австрія), Greenhill (Англія), Gordan и Lindemann (Германія), Geiser (Швейцарія), Volterra (Италія), Zeuthen (Данія), Тихомандрицкій (Россія), Lindelöf (Финляндія), Mittag-Leffler (Швеція), и Moore (Сѣв.-Амер. Соед. Штаты); секретарями: Bendixon, (Швеція), Capelli (Италія), Minkowski (Швейцарія), Пташицкій (Россія), и Whitehead (Англія); генеральнымъ секретаремъ—секретарь организационнаго комитета Duporcq.

На этомъ засѣданіи произнесены были двѣ рѣчи: одна—математикомъ историкомъ математики, профессоромъ Гейдельбергскаго Университета М. Cantor'омъ: „Sur l'Historiographie des mathématiques“, въ которой ораторъ далъ живой очеркъ прежнихъ работъ по исторіи математики, начиная съ Montucla и Libri. Вторая рѣчь—также на французскомъ языкѣ—была произнесена туринскимъ профессоромъ Volterra, избравшимъ предметомъ ея очеркъ научной дѣятельности трехъ итальянскихъ аналитиковъ Betti, Brioschi и Casorati и ихъ вліяніе на развитіе теоріи функцій.

Со слѣдующаго дня начались засѣданія по секціямъ. Ихъ было предположено шесть: 1) Ариметика и Алгебра (председатель Hilbert, секретарь Cartan), 2) Анализъ (председатель Painlevé, секретарь Hadamard), 3) Геометрія (председатель Darboux, секретарь Niewenglowski), 4) Механика съ математическою физикою и небесною механикою (председатель Lagrange, секретарь Levi-Civita), 5) Исторія и Библиографія (председатель пр. R. Bonaparte, секретарь d'Ocagne) и 6) Преподаваніе и методы (председатель Cantor и секретарь Laisant). Впрочемъ, въ виду малаго количества сообщеній 5-ой секціи, она была соединена съ шестою, а 4-ая, также привлекавшая мало сообщеній (благодаря совпаденію съ начавшимся физическимъ конгрессомъ), закончила очень скоро свои занятія. Тѣмъ

*) Мало очень было англичанъ, что, конечно, объясняется причинами общаго характера—африканской войной и симпатіями французовъ къ бурамъ.

не менѣ засѣданія секцій 1-ой и 2-ой совпадали между собою, и такъ какъ предварительнаго распредѣленія сообщеній по засѣданіямъ и по порядку не было, то приходилось жертвовать одной изъ двухъ. Въ интересахъ дѣла желательно было бы устранить такіа совпаденія на будущее время или, по крайней мѣрѣ, выдѣлять сообщенія общаго характера на соединенныя засѣданія.

Остановлюсь на болѣе интересныхъ сообщеніяхъ. По исторіи математики, кромѣ вышеупомянутыхъ двухъ рѣчей Кантора и Вольтерра и рѣчи Mittag-Leffler'a (см. далѣе), сдѣлано было только одно сообщеніе проф. *Fujisawa* (Японія): „The mathematics of the old japanese school“, въ которомъ почтенный японскій ученый, основываясь, какъ и въ своихъ предыдущихъ статьяхъ, на изученіи старыхъ японскихъ рукописей, доказывалъ, что цѣлый рядъ предложеній элементарной и высшей математики вплоть до бинорма Ньютона и т. д. были извѣстны съ давнихъ поръ японскимъ математикамъ. Въ преніяхъ по поводу этого доклада М. Cantor и А. В. Васильевъ указывали, что эти математическія свѣдѣнія могли быть не результатомъ самостоятельныхъ изслѣдованій японскихъ ученыхъ, а были, вѣроятно, сообщены о. іезуитами и другими европейцами, совершавшими, подобно Марко Поло, путешествія на Дальній Востокъ.

На засѣданіи 5-ой секціи *C. A. Laisant* сообщилъ о ходѣ работъ по составленію и изданію библиографическаго реперторія по математикѣ. ¹⁾ *Guimaraes* представилъ съѣзду составленную имъ согласно программѣ реперторія математическую библиографію Португаліи XIX вѣка. ²⁾ Въ томъ же засѣданіи *Léau* внесъ предложеніе, чтобы и математическій съѣздъ высказался, какъ нѣкоторые другіе, въ пользу введенія всеобщаго научнаго языка; какъ предлагалъ *Léau*, таковымъ языкомъ долженъ явиться *Espéranto*. Дебаты по этому предложенію, горячо поддержанному *Laisant*'омъ, были по предложенію предсѣдателя отложены до послѣдняго дня засѣданій секціи, когда въ преніяхъ приняли участіе *Schröder*, остроумно доказывавшій неудобство и нелогичность введенія новаго искусственнаго языка, *Dickstein*, *M. Cantor* и другіе. Реано указывалъ, что такой универсальный языкъ уже существуетъ въ символикѣ математической логики, принятой въ издаваемомъ имъ *Formulaire de Mathématiques*. Послѣ оживленныхъ преній секція отвергла предложеніе *Léau* и по предложенію А. В. Васильева высказалась лишь въ принципѣ за желательныя установленія границъ росту многоязычности, которому при развитіи національнаго самосознанія не предвидится конца. Въ средніе вѣка существовалъ одинъ научный языкъ—латинскій. Еще въ XVIII ст. французскій языкъ былъ общимъ языкомъ ученыхъ изданій. На Парижскомъ же конгрессѣ уже допущены доклады на четырехъ

¹⁾ См. статью *C. A. Laisant*—секретаря постоянной комиссіи по изданію реперторія—въ *Bibliotheca Mathematica* III сер. т. 1 с. 246—249. Sur l'état d'avancement du Répertoire bibliographique des sciences mathématiques (см. ниже).

²⁾ Книга эта раздавалась участникамъ конгресса и дасть не простой списокъ но и краткое указаніе содержанія работъ.

языках—французскомъ, нѣмецкомъ, англійскомъ и итальянскомъ (итальянцы, впрочемъ, дѣлали свои доклады исключительно по-французски). Съ развитіемъ науки въ Южной Америкѣ и Россіи будутъ имѣть право претендовать на значеніе основныхъ языковъ испанскій и русскій, такъ что введеніе искусственного языка повело бы лишь къ необходимости сверхъ четырехъ—пяти живыхъ языковъ изучать еще этотъ искусственный. Гораздо болѣе пользы могутъ принести другія предпріятія, облегчающія знакомство съ литературою иноязычною, каковъ, напр., составленный Felix Müller'омъ и имъ поднесенный конгрессу французско-нѣмецкій математическій словарь.

По основаніямъ геометріи былъ сдѣланъ интересный докладъ молодымъ итальянскимъ ученымъ *Padoa*, послѣдователемъ *Peano*: „Новая система опредѣленій для эвклидовой геометріи“, гдѣ онъ, продолжая работы *Peano* и *Vivanti*, приводитъ основныя опредѣленія, къ которымъ сводятся всѣ остальные, къ двумъ: *точка* и *движеніе*. Тотъ же *Padoa* сдѣлалъ докладъ и по основаніямъ алгебры: „Новая неприводимая система постулатовъ для алгебры“ (неприводимая опять-таки въ смыслѣ математической логики,—какъ наименьшее число постулатовъ, изъ которыхъ помощью логическихъ операцій можно вывести всѣ остальные опредѣленія).

Capelli въ своемъ обстоятельномъ докладѣ: „Объ основныхъ операціяхъ ариметики“ доказывалъ, что основною арифметическою операціе слѣдуетъ считать умноженіе, а не сложеніе, такъ что въ противоположность обычному порядку: *сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе* должно считать нормальнымъ такой: *умноженіе, сложеніе, вычитаніе, дѣленіе*. (См. также статью его въ *Rendiconti della R. Accademia di Napoli* fasc. 5^o и 7^o за 1900 г. *Sull'ordine di precedenza fra le operazioni fondamentali dell'aritmetica*).

Упомяну здѣсь же объ интересномъ докладѣ *Stephans* „Объ отдѣленіи корней алгебраическихъ уравненій“, въ которомъ онъ сводитъ задачу опредѣленія числа вещественныхъ корней уравненія $f(x)=0$ на нахожденіе такого числа n , при которомъ въ произведеніи $(x+a)^n f(x)$ число перемѣнъ въ точности равно числу положительныхъ корней. Приѣмъ этотъ, конечно, имѣетъ главнымъ образомъ теоретическое значеніе, ибо найти это число n не менѣе трудно, чѣмъ опредѣлить иными способами число вещественныхъ корней.

Не останавливаясь на болѣе специальныхъ докладахъ первой секціи*), перейду къ сообщенію *Hilbert'a* (VI секція), одному

*) *Autonne*, „О группахъ конечнаго порядка, заключенныхъ въ линейной кватернарной группѣ“; *Dickson*, „Извѣстныя системы простыхъ группъ и ихъ интеръ-изоморфизмъ“; „Замѣтка по абстрактнымъ группамъ“; *Hancock*, „Замѣтки относительно кроenekерovýchъ модулярныхъ системъ“; *Perrin*, „О свойствахъ одного коварианта бинарной формы 5-го порядка и ихъ приложение къ рѣшенію уравненій 5-ой степени“; *Koch*, „О распредѣленіи простыхъ чиселъ (свойство функціи $\zeta(s)$)“; *Rados* (изъ Будапешта), „Замѣтка о теоріи ортогональныхъ подстановокъ“; *Гавриловичъ* (изъ Вѣлграда), „О замѣчательномъ свойствѣ детерминантовъ“.

изъ наиболѣе интересныхъ сообщеній съѣзда: „О будущихъ задачахъ математики“. Докладчикъ задался цѣлью пересмотрѣть тѣ задачи, которыя стоятъ въ настоящее время на очереди, и тѣмъ, съ одной стороны, показать, что математика способна къ дальнѣйшему развитію, съ другой—выставить тѣ задачи, разрѣшеніе которыхъ должно, по его мнѣнію, наиболѣе содѣйствовать прогрессу науки. Существованіе точныхъ, опредѣленныхъ задачъ важно и для прогресса математики и для работы каждаго изслѣдователя. Признаки проблемъ, наиболѣе способныхъ подвинуть впередъ науку, это, во-первыхъ, опредѣленность проблемы: смыслъ и значеніе ея должны быть легко схватываемы; она должна быть трудна, но не недоступна.

Первоначально математическія проблемы ставятъ опытъ. Въ дальнѣйшемъ развитіи науки новыя и плодотворныя проблемы создаетъ само уже наше мышленіе посредствомъ логическихъ разсужденій (комбинаціи, обобщенія, спеціализаціи). Вопросъ рѣшенъ, если, опираясь на конечное число типотезъ, доставленныхъ самою задачею, мы можемъ доказать вѣрность рѣшенія конечнымъ числомъ силлогизмовъ. Математическая строгость не ведетъ къ сложности и запутанности доказательствъ. Самый строгій методъ рѣшенія часто самый простой и понятный. Не одни только понятія ариметики или анализа доступны строгой точной обработкѣ, но и задачи геометріи и физики, если только ихъ опредѣлить столь же точно полною системою аксіомъ. Каждая система понятій приводитъ къ своимъ символамъ, и доказательство съ ихъ помощью будетъ вполне строгимъ, какъ только мы установимъ точно аксіомы, на которыхъ они основаны. Если задача представляетъ большія трудности, то рѣшать ее можемъ или *обобщеніемъ*, связывая ее съ группою задачъ того же рода, или *спеціализаціей*, подвергая болѣе глубокому изслѣдованію аналогичныя проблемы, уже разрѣшенныя. Неудача попытокъ разрѣшить проблему происходитъ часто отъ невозможности разрѣшить вопросъ въ поставленной формѣ. Тогда нужно дать строгое *доказательство невозможности* вопроса. Но никогда математикъ не скажетъ „Ignorabimus“.

Докладчикъ привелъ рядъ задачъ изъ различныхъ отдѣловъ математики, ждущихъ своего рѣшенія *). Онѣ показываютъ возрастающее разнообразіе математики. Но въ этомъ нельзя видѣть признаковъ грядущаго распада математики на отдѣльныя вѣтви. Напротивъ, каждый существующій шагъ впередъ приводитъ необходимо къ открытію методовъ, болѣе могучихъ и простыхъ, дающихъ каждому геометру сравнительно легкій доступъ ко всѣмъ частямъ нашей науки.

Сообщеніе Hilbert'a вызвало рядъ замѣчаній со стороны присутствовавшихъ, указывавшихъ, что нѣкоторыя изъ перечисленныхъ Hilbert'омъ задачъ вполне или отчасти разрѣшены ими.

*) Его докладъ напечатанъ полностью въ Göttinger Nachrichten. 1900.

Интересъ, вызванный сообщеніемъ, равно какъ и успѣхъ рѣчей въ общихъ собраніяхъ достаточно убѣдительно доказываютъ, что на подобнаго рода сѣздахъ наиболѣе умѣстны доклады общаго характера, стремящіеся подвести итоги сдѣланнаго, дать лишь общія идеи, а не подробный пересказъ статей по специальному вопросу науки, по необходимости все же слишкомъ краткій, чтобы быть понятнымъ большинству. И подобнаго рода сообщенія могутъ, конечно, имѣть большой интересъ,—какъ исключенія. Такъ, доклады *Mittag-Leffler'a* на секціи анализа [объ аналитической функціи и аналитическомъ выраженіи, а также объ одномъ распространеніи формулы Тейлора (существенную особенность которой авторъ видитъ не въ томъ, что она сходится въ кругѣ сходимости, а въ томъ, что она расходится внѣ его)] вызвали Borel'я къ изложенію вкратцѣ своихъ новѣйшихъ изслѣдованій по вопросу о разложеніи функцій по многочленамъ, тѣсно связанному съ вопросомъ, занимающимъ Mittag-Leffler'a. Съ своими замѣчаніями, выясняющими новыя точки зрѣнія на вопросы, выступили затѣмъ Painlevé и Hadamard. Такимъ образомъ слушатели вынесли въ общемъ нѣчто цѣлое.

Сообщеніе Bendixon'a „О кривыхъ опредѣленныхъ дифференціальными уравненіями“, въ которомъ онъ познакомилъ со своими изслѣдованіями, примыкающими къ извѣстной работѣ Poincaré объ алгебраическихъ интегралахъ дифференціальныхъ уравненій, вызвало замѣчаніе Levi-Civita, что остающійся у Bendixon'a неразрѣшеннымъ вопросъ объ условіяхъ существованія центра подвинуть имъ въ работѣ, имѣющей появиться въ *Comptes rendus*. Hadamard обратилъ вниманіе на новыя особенности, къ которымъ приводитъ теорія поверхностей (въ частности изслѣдованіе геодезическихъ кривыхъ) и которыя могутъ встрѣчаться и въ системахъ кривыхъ, опредѣленныхъ дифференціальными уравненіями.

На секціи же анализа первымъ было сдѣлано единственное русское сообщеніе М. А. Тихомандрицкаго, „Объ исчезновеніи функціи H нѣсколькихъ переменныхъ“.

Функціямъ θ былъ посвященъ и докладъ Jahne (Charlottenburg), который далъ для функцій отъ двухъ переменныхъ обобщенія формулъ à cinq lettres (cp. Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 485).

Padé далъ обзоръ преимущественно собственныхъ работъ по теоріи непрерывныхъ дробей. Упомянемъ докладъ Drach, „Объ интегрированіи уравненій въ частныхъ производныхъ второго порядка въ связи съ преобразованиями прикосновенія“ и докладъ Cartan, „Объ уравненіяхъ въ полныхъ дифференціалахъ“.

По секціи геометріи отмѣтимъ сообщенія Lovett, „О преобразованіяхъ прикосновенія между основными элементами пространства“; Stringham, „Ортогональные преобразования въ эллиптическомъ и гиперболическомъ пространствахъ“.

По теоріи кривыхъ плоскихъ—Jamet, „Терема Salmon'a относительно кривыхъ 3-ей степени“ и Amodéo, „Объ особенностяхъ κ -гональныхъ кривыхъ“.

Issaly, „О псевдо-поверхностях вообще и объ одномъ частномъ примѣрѣ псевдо-поверхностей minima“, т. е. о системахъ кривыхъ, опредѣляемыхъ уравненіемъ въ полныхъ дифференціалахъ, не выполняющемъ условія интегрируемости.

На секціи механики были заявлены предварительно только четыре сообщенія: *Zenger*, „Движенія небесныхъ тѣлъ по законамъ электро-динамическимъ“; *Boccardi*, „О вычисленіи специальныхъ возмущеній малыхъ планетъ“; *Somigliana*, „О максвелловой теоріи дѣйствія на разстояніи“ и *Fredholm*, „Обращеніе опредѣленныхъ интеграловъ и примѣненіе его къ вопросамъ математической физики“. Кроме того *Hadamard* сдѣлалъ сообщеніе, въ которомъ обратилъ вниманіе на то, что противоположность случая вещественныхъ и воображаемыхъ характеристикъ дифференціальныхъ уравненій преувеличена и между обоими случаями можно, напротивъ, провести аналогію; сообщеніе это явилось какъ бы предисловіемъ къ слѣдующему сообщенію *Volterra* о теоремѣ *Poisson'a* для гиперболическаго случая. *Stephanos* сдѣлалъ сообщеніе: „Sur les relations de la géométrie projective et de la mécanique“, о принципѣ двойственности въ механикѣ, — возвращенія, аналогичныя высказаннымъ Ф. Клейномъ въ его извѣстномъ мемуарѣ о линейчатой геометріи (*Math. Ann.* t. XII).

Въ субботу 11-го августа состоялось послѣднее общее собраніе съѣзда въ Amphithéâtre Milne-Edwards въ Сорбоннѣ (засѣданія по секціямъ происходили также въ Сорбоннѣ въ двухъ смежныхъ Amphithéâtre Cauchy и Am. Leverrier). На этомъ засѣданіи *Mitag-Leffler* прочелъ свое сообщеніе: „Страница изъ жизни Вейерштрасса“, — исторія послѣднихъ лѣтъ жизни Вейерштрасса по письмамъ его къ С. В. Ковалевской. Въ письмахъ своихъ покойный ученый высказывался весь, и они даютъ прекрасную характеристику его. Вторую рѣчь произнесъ неутомимый председатель съѣзда *Poincaré*, наканунѣ дѣлавшій докладъ на физическомъ конгрессѣ, а передъ открытіемъ математическаго конгресса принимавшій живое участіе въ философскомъ конгрессѣ. Рѣчь свою *Poincaré* посвятилъ вопросу о роли интуиціи и логики въ математикѣ. Приводя какъ крайніе примѣры Мёгау, для котораго не представляется очевиднымъ, что двучленное уравненіе имѣетъ n корней, и *F. Klein'a*, который придаетъ такое значеніе непосредственному возвращенію (примѣръ: примѣненіе гидродинамики къ доказательству теоремъ по теоріи абелевыхъ интеграловъ, — если Клейнъ и не считалъ это доказательствомъ, то нашелъ все же возможнымъ напечатать), ораторъ высказалъ, что ученому одинаково необходимо и непосредственное возвращеніе и логика; оба являются необходимыми орудіями изслѣдованія: въ одномъ преобладаетъ одно, въ другомъ — другое, и отношеніе ихъ обуславливаетъ индивидуальность лица.

Вечеромъ членовъ конгресса принималъ у себя принцъ Р. Бонапартъ. Наканунѣ вмѣстѣ съ другими конгрессистами матема-

тики присутствовали на garden party въ Елисейскомъ дворцѣ. Въ Ecole Normale для нихъ былъ устроенъ lunch.

Въ воскресенье конгрессъ закончился банкетомъ въ Salle de l'Athénée Saint-Germain, прошедшимъ очень оживленно.

Слѣдующій конгрессъ предполагено собрать въ 1904 году въ Баденъ-Баденѣ, и если обстоятельства не заставятъ Deutsche Mathematiker Vereinigung измѣнить мѣсто сѣзда, черезъ четыре года въ царствѣ рулетки будутъ читаться математическіе доклады.

Итакъ, казавшійся почти невозможнымъ сѣздъ въ Парижѣ при участіи нѣмецкихъ математиковъ состоялся. Минуты, проведенныя вмѣстѣ за общимъ мирнымъ дѣломъ, не пройдутъ безъ слѣда, и какъ другіе международные сѣзды, математическій сѣздъ внесъ свое въ дѣло устраненія вражды между народами. Нужно только пожелать, чтобы на слѣдующихъ сѣздахъ Россія приняла болѣе активное участіе.

Новое доказательство трансцендентности чиселъ π и e .

(Доказательство Θ . Валена).

Прив.-Доцента В. Кагана изъ Одессы.

(Окончаніе. *)

Обращаясь теперь къ теоремѣ Линдемана, мы формулируемъ, прежде чѣмъ приступить къ ея доказательству, извѣстную теорему Высшей Алгебры, на которой оно цѣликомъ основано.

Всякая цѣлая рациональная симметрическая функція $\varphi(a, b, \dots l)$ корней алгебраическаго уравненія

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_n = 0$$

выражается рациональной же цѣлой функціей отъ коэффициентовъ p_1, p_2, \dots, p_n .

$$\varphi(a, b, \dots l) = F(p_1, p_2, \dots p_n).$$

Если функція φ имѣетъ исключительно цѣлые коэффициенты, то и функція F имѣетъ исключительно цѣлые коэффициенты. Поэтому, если коэффициенты уравненія p_1, p_2, \dots, p_n суть

также цѣлыя числа, то значеніе раціональной симметрической функціи корней уравненія, имѣющей исключительно цѣлые коэффициенты, выражается цѣлымъ числомъ. Поэтому, если всѣ цѣлые коэффициенты функціи φ имѣютъ какого нибудь общаго множителя p , то и значеніе этой функціи есть цѣлое число, кратное p . Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ $\varphi = p \cdot \psi$, гдѣ ψ есть также цѣлая симметрическая функція съ цѣлыми коэффициентами отъ корней того же уравненія, а потому ψ есть число цѣлое.

Далѣе, если уравненіе имѣетъ видъ:

$$f(x) = t_0 x^n + t_1 x^{n-1} + t_2 x^{n-2} + \dots + t_n = 0, \quad (37)$$

гдѣ t_0, t_1, \dots, t_n суть цѣлыя числа, то цѣлая функція съ цѣлыми коэффициентами отъ корней этого уравненія есть цѣлая функція съ цѣлыми же коэффициентами отъ количествъ $\frac{t_1}{t_0}, \frac{t_2}{t_0}, \dots, \frac{t_n}{t_0}$, ибо, раздѣляя уравненіе (37) на t_0 , мы приведемъ его къ прежнему виду;

$$\varphi(a, b, \dots, l) = F\left(\frac{t_1}{t_0}, \frac{t_2}{t_0}, \dots, \frac{t_n}{t_0}\right).$$

Поэтому значеніе функціи F есть дробь, знаменатель которой есть степень числа t_0 . Въ Высшей Алгебрѣ безъ труда доказывается, что показатель степени, въ которой t_0 входитъ въ знаменатель этой дроби, не превышаетъ наивысшаго показателя, съ которымъ каждый изъ корней входитъ въ составъ функціи φ . Поэтому, если k есть этотъ показатель, то $t_0^k \varphi$ имѣетъ цѣлое значеніе, и если всѣ коэффициенты въ функціи φ кратны нѣкотораго числа p , то и это значеніе кратно p .

Положимъ теперь, что намъ дано уравненіе m -ой степени вида (37), корни котораго суть a, b, c, \dots, l ; эти корни могутъ быть дѣйствительные или мнимые, различные или не всѣ различные; мы только будемъ принимать, что они *отличны отъ нуля*. Отъ корней этого уравненія мы составляемъ функцію, отличающуюся отъ выраженія (17) только множителемъ t_0^{np} . Пусть

$$N(f) = t_0^{np} \sum (-1)^{\alpha+\beta+\dots+\lambda} \binom{p}{\alpha} \binom{p}{\beta} \times \dots \times \binom{p}{\lambda} \frac{[(n+1)p - \alpha - \beta - \dots - \lambda - 1]!}{(p-1)!} a^\alpha b^\beta \dots l^\lambda,$$

$\alpha, \beta, \dots, \lambda = 0, 1, \dots, p.$

гдѣ p есть нечетное простое число. $N(f)$ есть цѣлая симметрическая функція съ цѣлыми коэффициентами отъ корней уравненія (37). Показатель наивысшей степени, въ которой каждый изъ корней входитъ въ функцію $N(f)$, есть p . Такъ какъ при функціи имѣется множитель t_0^{np} , то $N(f)$ есть цѣлое число. Выдѣлимъ изъ

функции $N(f)$ членъ, который соответствуетъ значеніямъ

$$\alpha = \beta = \dots \lambda = p.$$

Этотъ членъ есть $(-1)^{np} t_0^{np} [abc \dots l]^p$, а такъ какъ

$$(-1)^n abc \dots l = \frac{t_n}{t_0},$$

то этотъ членъ имѣетъ значеніе $t_0^{(n-1)p} t_n^p$. Совокупность остальныхъ членовъ, въ свою очередь, есть цѣлая симметрическая функція отъ корней $a, b \dots l$ съ цѣлыми коэффициентами, которые всѣ, какъ мы видѣли выше, при анализѣ выраженія N , кратны p . Поэтому совокупность этихъ членовъ имѣетъ значеніе, которое выражается цѣлымъ числомъ, кратнымъ p . Итакъ,

$$N(f) = t_0^{(n-1)p} t_n^p + pR, \quad (38)$$

гдѣ R цѣлое число.

Составимъ теперь произведеніе $N(f) \cdot e^a$. Такъ какъ рядъ, которымъ выражается e^a , сходится абсолютно, *) то произведеніе это можно составить точно такъ же, какъ мы составляли выше аналогичное произведеніе $(N \cdot e^a)$. (См. выраженіе (22)). Оно выражится слѣдующимъ рядомъ:

$$t_0^{np} \sum (-1)^{\beta+\gamma+\dots+\lambda} \binom{p}{\beta} \binom{p}{\gamma} \times \dots \times \binom{p}{\lambda} \left\{ \frac{q!}{h!} - \binom{p}{1} \frac{(q-1)!}{(h-1)!} \dots \right\} \frac{a^h b^\beta \dots l^\lambda}{(p-1)!}, \quad (39)$$

$$\beta, \gamma \dots \lambda = 0, 1 \dots p,$$

$$h = 0, 1, 2 \dots \text{до } \infty,$$

гдѣ

$$q = (n+1)p - \beta - \gamma \dots - \lambda - 1.$$

Какъ и выше, мы разобьемъ этотъ рядъ на три группы членовъ. Первая группа состоитъ изъ тѣхъ членовъ, измѣненіе которыхъ по отношенію къ корнямъ уравненія меньше np . Совокупность этихъ членовъ послѣ тѣхъ же преобразованій, которыя были сдѣланы надъ соответствующей группой выше, можетъ быть представлена въ видѣ:

$$G(a, b \dots l) =$$

$$t_0^{np} \sum (-1)^{\beta+\gamma+\dots+\lambda} \binom{p}{\alpha} \binom{p}{\beta} \times \dots \times \binom{p}{\lambda} \binom{np-\beta-\gamma-\dots-\lambda-1}{h} \frac{[(n+1)p-\lambda-\beta-\dots-\lambda-1]!}{(p-1)!} a^h b^\beta \dots l^\lambda.$$

$$\beta, \gamma \dots \lambda = 0, 1 \dots p$$

$$h + \beta + \gamma + \dots + \lambda < np.$$

*) Т. е. независимо отъ порядка его членовъ.

Это есть цѣлая рациональная функція съ цѣлыми коэффициентами отъ корней уравненія; какъ мы уже видѣли выше, всѣ коэффициенты кратны p ; но функція эта симметрична не относительно всѣхъ корней уравненія, а только относительно $b, c \dots l$.

Вторую группу составляютъ тѣ члены суммы (39), измѣреніе которыхъ заключается между np и $(n+1)p$, включая нижній и исключая верхній предѣлъ. Совершенно такъ же, какъ это было доказано относительно соответствующей группы выше, мы обнаружимъ, что всѣ эти члены обращаются въ нуль.

Остается рассмотреть третью группу $R(\bar{a}, b \dots l)$ членовъ, измѣреніе которыхъ равно или больше $(n+1)p$. Обозначая модуль этого количества черезъ P , а черезъ m наибольшій изъ модулей корней $a, b \dots l$, мы можемъ утверждать, что

$$P \leq t_0^{np} \sum \binom{p}{\beta} \binom{p}{\gamma} \times \dots \times \binom{p}{\lambda} \frac{(h+\beta+\dots\lambda-(n+1)p+1)\dots(\lambda+\beta+\dots\lambda-np)}{h(h-1)\dots(np-\beta-\gamma\dots-\lambda)(p-1)!} m^{h+\beta+\dots\lambda}$$

$$\beta, \gamma \dots \lambda = 0, 1 \dots p$$

$$h+\beta+\gamma+\dots\lambda \leq (n+1)p.$$

Число t_0 мы, конечно, можемъ считать положительнымъ. Это совпадаетъ съ неравенствомъ (32), и мы можемъ на прежнихъ основаніяхъ утверждать, что

$$P < \frac{k^p}{p!} e^m, \text{ гдѣ } k = t_0^{np} 2^{n-1} m^{n+1}.$$

По этому P становится меньше всякой данной величины, когда число p неопредѣленно возрастаетъ. Итакъ,

$$e^a N(f) = G(\bar{a}, b \dots l) + R(\bar{a}, b \dots l), \quad (40)$$

гдѣ G есть цѣлая функція корней уравненія, симметричная относительно корней $b, c \dots l$; всѣ коэффициенты этой функціи кратны p . Количество же $R(\bar{a}, b \dots l)$ становится по модулю меньше любого заданнаго числа, когда p неопредѣленно возрастаетъ.

Теперь намъ будетъ нетрудно доказать слѣдующее предложеніе Линдемана:

Теорема Если A и B суть цѣлые числа, отличныя отъ нуля, и $a, b \dots l$ составляютъ полную систему корней алгебраическаго уравненія вида (37) съ цѣлыми коэффициентами и если всѣ эти корни отличны отъ нуля, то равенство

$$A + B(e^a + e^b + \dots e^l) = 0$$

невозможно.

Въ самомъ дѣлѣ, умножимъ лѣвую часть этого равенства на $N(f)$. Мы получимъ на основаніи равенствъ (38) и (40)

$$N(f) \{ A + B(e^a + e^b + \dots e^l) \} = A t_0^{(n-1)p} t_n^{2p} + A p R +$$

$$B \{ G(\bar{a}, b \dots l) + G(a, \bar{b}, \dots l) + \dots G(a, b \dots \bar{l}) \} +$$

$$B \{ R(\bar{a}, b \dots l) + R(a, \bar{b}, \dots l) \dots + R(a, b \dots \bar{l}) \}. \quad (41)$$

Функция $G(\bar{a}, b \dots l)$ симметрична только относительно корней $b, c \dots l$; точно также функция $G(a, \bar{b}, c \dots, l)$ симметрична только относительно корней $a, c \dots l$ и т. д. Но сумма

$$G(\bar{a}, b \dots l) + G(a, \bar{b}, \dots l) + \dots + G(a, b \dots, \bar{l}),$$

очевидно, симметрична относительно всех корней уравнения (37). Так как это есть целая симметрическая функция степени $np-1$ корней уравнения (37) с целыми коэффициентами, которые все кратны p и имеют еще множитель t_0^{np} , то значение этой суммы есть целое число pS , кратное p . Равенство (40) мы можем после этого представить в виде:

$$N(f) \{A + B(e^a + e^b + \dots e^l)\} = At_0^{(n-1)p} t_n^p + p(AR + BS) + \\ B \{R(\bar{a}, b \dots l) + R(a, \bar{b} \dots l) + \dots R(a, b \dots, \bar{l})\}.$$

Если мы выберем простое число p настолько большим, чтобы оно не входило в состав чисел A, t_0, t_n (которые все отличны от нуля) и чтобы модуль выражения

$$B \{R(\bar{a}, b \dots l) + R(a, \bar{b} \dots l) + \dots R(a, b \dots, \bar{l})\}$$

стал меньше единицы, то правая часть не может быть равна нулю. Разсуждения, при помощи которых это обнаруживается, совпадают с теми, посредством которых было доказано то же положение относительно равенства (36).

Теорема доказана. Тем же средствами можно было бы доказать значительно более общее предположение, но нам достаточно этого, чтобы обнаружить трансцендентность числа π . Для этого мы, однако, должны сделать еще одно небольшое отступление в область Алгебры.

Пусть $\varphi(a, b \dots l)$ будет некоторая рациональная функция корней алгебраического уравнения $n^{\text{ой}}$ степени. Сделаем некоторую перестановку корней $a, b \dots l$, т. е. составим функцию $\varphi(a', b' \dots l')$, где $a', b' \dots l'$ суть те же количества $a, b, \dots l$, только в другом порядке; эту новую функцию принято называть вторым значением функции φ ; если мы сделаем третью перестановку корней, то получим третье значение функции φ и т. д. Таких перестановок можно сделать $n!$, и следовательно, функция φ может иметь $n!$ значений. *)

Теорема. Если $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_\nu$, где $\nu = n!$, суть все значения некоторой целой рациональной функции с целыми коэффициентами корней алгебраического уравнения

$$t_0 x^n + t_1 x^{n-1} + \dots + t_n = 0, \quad (41)$$

имеющего также целые коэффициенты, то можно составить урав-

*) Эти значения могут быть не все различны; так, переставляя в функции $a+b+2(c+\dots+l)$ корни a и b , мы получим второе ее значение $b+a+2(c+\dots+l)$, не отличающееся от первого.

неніе, опять таки съ цѣлыми коэффициентами, корнями котораго будутъ служить количества $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n$.

Въ самомъ дѣлѣ, составимъ сумму

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n.$$

Легко видѣть, что эта сумма представляетъ собой симметрическую функцію корней уравненія (42), ибо всякая перестановка этихъ корней можетъ только перемѣстить слагаемыя этой суммы. Такъ какъ эта симметрическая функція имѣетъ цѣлые коэффициенты, то ея значеніе выражается раціональной дробью, знаменатель которой есть нѣкоторая степень числа t_0 .

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n = \frac{T_1}{t_0^{k_1}},$$

гдѣ T_1 есть цѣлое число.

Такимъ же образомъ обнаружимъ, что

$$\varphi_1\varphi_2 + \varphi_2\varphi_3 + \dots + \varphi_{n-1}\varphi_n = \frac{T_2}{t_0^{k_2}}$$

$$\varphi_1\varphi_2\varphi_3 + \varphi_1\varphi_2\varphi_4 + \dots + \varphi_{n-2}\varphi_{n-1}\varphi_n = \frac{T_3}{t_0^{k_3}}$$

$$\varphi_1\varphi_2\varphi_3 \dots \varphi_{n-1}\varphi_n = \frac{T_n}{t_0^{k_n}},$$

гдѣ $T_2, T_3 \dots T_n$ суть цѣлыя числа.

Слѣдовательно, $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n$ суть корни уравненія

$$T^n + \frac{T_1}{t_0^{k_1}} T^{n-1} + \frac{T_2}{t_0^{k_2}} T^{n-2} + \dots + \frac{T_n}{t_0^{k_n}} = 0.$$

Коэффициенты этого уравненія легко освободить отъ знаменателей.

Изъ доказанной теоремы легко вывести слѣдующее *слѣдствіе*:

Теорема. Равенство вида

$$1 + e^{\xi} = 0 \quad (42)$$

невозможно, если ξ есть алгебраическое число.

Докажемъ это предположеніе отъ противнаго. Допустимъ, что равенство (42) имѣетъ мѣсто, при чемъ ξ есть корень алгебраическаго уравненія съ цѣлыми коэффициентами:

$$t_0 x^n + t_1 x^{n-1} + \dots + t_n = 0.$$

Пусть $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_{n-1}$ будутъ остальные корни того же уравненія. Тогда произведеніе

$$(1 + e^{\xi}) (1 + e^{\xi_1}) (1 + e^{\xi_2}) \dots (1 + e^{\xi_{n-1}})$$

также равно нулю. Это можно представить въ такомъ видѣ:

$$0 = 1 + \sum e^{\xi} + \sum e^{\xi_1 + \xi_2} + \dots + \sum e^{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n-1}}. \quad (43)$$

Первая сумма распространяется на члены вида $e^{\xi_1 + \xi_2}$, въ которыхъ показателями служатъ всевозможныя суммы количествъ $\xi, \xi_1, \dots, \xi_{v-1}$ по два, въ слѣдующей суммѣ показателями служатъ всевозможныя суммы тѣхъ же количествъ по три и т. д. Но дѣло въ томъ, что всевозможныя суммы корней алгебраическаго уравненія по два составляютъ полную систему значеній функціи $\varphi = \xi + \xi_1$, отъ корней этого уравненія; численныя значенія этихъ функцій представляютъ, слѣдовательно, собой корни нѣкотораго алгебраическаго уравненія съ цѣлыми коэффициентами $f_1(T) = 0$; точно также сумма корней по три суть корни такого же уравненія $f_2(T) = 0$ и т. д. Наконецъ, показатель послѣдняго члена

$$\xi + \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{v-1} = -\frac{t_1}{t_0}$$

есть число рациональное. Мы можемъ его разсматривать какъ корень алгебраическаго уравненія

$$f_{v-1}(T) = t_0 T + t_1 = 0.$$

Равенство (43) можно, слѣдовательно, представить въ такомъ видѣ:

$$0 = 1 + \Sigma e^a + \Sigma e^b + \dots + \Sigma e^m,$$

гдѣ первая сумма распространяется на всѣ корни a уравненія $f_1(T) = 0$, вторая на всѣ корни b уравненія $f_2(T) = 0$ и т. д. Можно это равенство написать и въ такомъ видѣ:

$$1 + \Sigma e^\sigma = 0, \quad (44)$$

гдѣ суммирование распространяется на всѣ корни σ уравненія

$$\Phi(T) = f_1(T) \cdot f_2(T) \cdot \dots \cdot f_{v-1}(T) = 0.$$

Между значеніями корней σ можетъ оказаться нѣсколько равныхъ нулю; положимъ, что ихъ есть $A - 1$; тогда, съ одной стороны, соответствующіе $(A - 1)$ членовъ суммы въ равенствѣ (44) обращаются въ 1 и мы можемъ присоединить ихъ къ первой единицѣ. Съ другой стороны, въ этомъ случаѣ имѣемъ тождественно

$$\Phi(T) = T^{A-1} \Phi_1(T),$$

гдѣ $\Phi_1(T)$ цѣлый полиномъ съ цѣлыми коэффициентами, не имѣющій нулевыхъ корней. Равенство (44) можно поэтому представить въ такомъ видѣ:

$$A + \Sigma e^\sigma = 0,$$

гдѣ суммирование распространяется на всѣ корни σ уравненія $\Phi_1(t) = 0$, которые всѣ отличны отъ нуля. Но, согласно доказанной выше теоремѣ Линдемана, такое равенство невозможно. По-

этому сдѣланное нами предположеніе, неправильно, и равенство (42) не можетъ имѣть мѣста, если ξ есть алгебраическое число.

Между тѣмъ извѣстно, что

$$1 + e^{\pi i} = 0. *)$$

Слѣдовательно πi есть число трансцендентное. Отсюда легко вывести, что и π число трансцендентное. Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что π удовлетворяетъ алгебраическому уравненію съ цѣлыми коэффициентами $f(T) = 0$. Положимъ $\pi i = \sigma$, такъ что $\pi = -\sigma i$. Такъ какъ $f(\pi) = 0$, то $f(-\sigma i) = 0$. Поэтому имѣемъ также:

$$f(-\sigma i) f(\sigma i) = 0.$$

Между тѣмъ, если перемножимъ полиномы $f(-xi)$ и $f(xi)$, рассматривая x , какъ переменное, то получимъ полиномъ $F(x)$ съ n дѣйствительными цѣлыми коэффициентами. Поэтому, при сдѣланномъ предположеніи, число $\sigma = \pi i$ удовлетворяло бы уравненію $F(x) = 0$. Это противорѣчитъ доказанному предположенію. Слѣдовательно π есть число трансцендентное.

*) Справедливость этого равенства доказывается слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned} e^{\sigma i} &= 1 + \frac{(\sigma i)}{1} + \frac{(\sigma i)^2}{1.2} + \frac{(\sigma i)^3}{1.2.3} + \dots \\ &= 1 - \frac{\sigma^2}{1.2} + \frac{\sigma^4}{1.2.3.4} - \dots \\ &+ i \left\{ \frac{\sigma}{1} - \frac{\sigma^3}{1.2.3} + \dots \right\} \end{aligned}$$

Если σ есть дѣйствительное число и выражаетъ нѣкоторую дугу въ линейной мѣрѣ, то

$$\begin{aligned} \cos \sigma &= 1 - \frac{\sigma^2}{1.2} + \frac{\sigma^4}{1.2.3.4} - \dots \\ \sin \sigma &= \frac{\sigma}{1} - \frac{\sigma^3}{1.2.3} + \frac{\sigma^5}{1.2.3.4.5} - \dots \end{aligned}$$

Поэтому предыдущій результатъ можно выразить такъ:

$$e^{\sigma i} = \cos \sigma + i \sin \sigma.$$

Полагая здѣсь $\sigma = \pi$, найдемъ

$$e^{\pi i} = -1.$$

Естествоиспытателей и Врачей въ С.-Петербургѣ

20—30 Декабря 1901 года.

На X съездъ русскихъ естествоиспытателей и врачей, происходившемъ въ августѣ 1898 г. въ Кіевѣ, было постановлено испросить разрѣшеніе созвать слѣдующій XI съездъ въ августѣ 1901 г., въ Варшавѣ. Но устройство этого съезда въ Варшавѣ оказалось невозможнымъ, вслѣдствіе чего Варшавскій университетъ предложилъ С.-Петербургскому университету созвать XI съездъ въ С.-Петербургѣ. На основаніи этого предложенія, принятаго Физико-Математическимъ факультетомъ, Совѣтъ Императорскаго С.-Петербургскаго университета обратился съ просьбою къ г. Министру Народнаго Просвѣщенія о разрѣшеніи устроить съездъ въ С.-Петербургѣ. Г. Министръ изъяснилъ свое согласіе на эту просьбу. Сначала было предложено назначить для XI съезда время отъ 28-го декабря 1901 года по 7-ое января 1902 г. Въ послѣдствіи же въ виду того, что Правленіе Общества русскихъ врачей въ память Н. И. Пирогова обратилось съ просьбою измѣнить время созыва XI съезда и само измѣнило время созыва въ Москвѣ VIII Пироговскаго съезда, назначивъ для этого съезда срокъ отъ 3-го по 10-ое января 1902 г. вмѣсто срока отъ 28-го декабря 1901 г. по 4 января 1902 г., было рѣшено устроить XI съездъ въ промежутокъ времени отъ 20-го по 30-ое декабря 1901 г.

На ходатайство объ этомъ послѣдовало 25 ноября 1900 г. согласіе г. Министра Народнаго Просвѣщенія. Г. Министръ разрѣшилъ устроить, на основаніи нижеприводимыхъ правилъ, въ С.-Петербургѣ, съ 20-го по 30-е декабря 1901 года, XI съѣздъ русскихъ естествоиспытателей и врачей и утвердилъ председателемъ Распорядительнаго Комитета по устройству этого съѣзда заслуженнаго профессора Н. А. Меншуткина, товарищемъ председателя заслуженнаго профессора А. А. Иностранцева и дѣлопроизводителями: ординарныхъ профессоровъ И. И. Боргмана и В. Т. Шевякова.

Въ настоящее время въ составъ Распорядительнаго Комитета входятъ всѣ профессора Физико-Математическаго Факультета, а кромѣ того Директоръ Института Экспериментальной Медицины профессоръ С. М. Лукьяновъ, профессоръ Военно-Медицинской Академіи С. В. Шидловскій и профессоръ Юридическаго факультета И. И. Кауфманъ.

Распорядительнымъ Комитетомъ назначены завѣдующими секціями:

Математики и Механики . . .	проф. Ю. В. Сохоцкий и Д. К. Бобылев,
Астрономія и Геодезія . . .	С. П. Глазенапъ и А. М. Ждановъ,
Физики . . .	Ө. Ө. Петрушевскій и И. И. Боргманъ,
Физической Географіи . . .	А. И. Воейковъ,
Химіи . . .	Н. А. Меншуткинъ и Д. П. Коноваловъ,
Геологіи и Минералогіи . . .	А. А. Иностранцевъ и Д. А. Землячскій,
Ботаники . . .	Х. Я. Гоби,
Зоологіи . . .	В. М. Шимкевичъ и В. Т. Шевцовъ,
Анатоміи и Физиологіи . . .	Н. Е. Введенскій и А. С. Догель,
Географіи . . .	П. И. Броуновъ,
Подсекціи Статистики . . .	И. И. Кауфманъ,
Агрономіи . . .	А. В. Софьовъ,
Научной Медицины . . .	С. М. Лукьяновъ,
Гигіены . . .	С. В. Шидловскій.

Довода о семъ до всеобщаго свѣдѣнія, Члены Распорядительнаго Комитета обращаются къ каждому изъ своихъ собратій по наукѣ съ покорнѣйшею просьбою почтить XI сѣздъ русскихъ естествоиспытателей и врачей своимъ личнымъ присутствіемъ или присылкою своихъ ученыхъ трудовъ.

Для предоставления возможности наибольшему числу иногородных лиц принять участие въ сѣздѣ Комитетъ 1) будетъ ходатайствовать передъ гг. Попечителями Учебныхъ Округовъ о возможномъ содѣйствіи лицамъ, пожелавшимъ участвовать въ сѣздѣ; 2) употребитъ стараніе, чтобы приготовить по возможности удешевленное помѣщеніе въ С.-Петербургѣ для членовъ сѣзда и 3) будетъ ходатайствовать предъ Департаментомъ Желѣзныхъ дорогъ о предоставленіи тарифныхъ льготъ по проѣзду членовъ сѣзда.

Такъ какъ комитету необходимо знать заранее, на какое примѣрно число членовъ сѣзда онъ можетъ разсчитывать, то онъ и обращается съ просьбою ко всѣмъ желающимъ принять участие въ сѣздѣ извѣстить не позднѣе 20 сентября 1901 года о своемъ намѣреніи прибыть въ С.-Петербургъ, адресуя письма въ *Университетъ въ Распорядительный Комитетъ XI сѣзда*, а также сообщить свои точные адреса, чтобы дать возможность заблаговременно выслать билеты (билеты высылаются лишь по уплатѣ членскаго взноса въ 3 руб.) и необходимыя удостовѣренія на право пользованія льготными тарифами, если таковыя будутъ разрѣшены. Кромѣ того желательно, чтобы будущіе члены XI сѣзда, присылая свои заявленія о желаніи участвовать въ сѣздѣ, вмѣстѣ съ тѣмъ обозначали и ту секцію, на которую они намѣрены записаться.

Распорядительный Комитетъ употребитъ все свое стараніе, чтобы доставить членамъ XI сѣзда возможность осмотрѣть наиболѣе примѣчательныя учрежденія въ С.-Петербургѣ.

Подробныя программы занятій XI сѣзда будутъ своевременно сообщены членамъ сѣзда.

Распорядительный Комитетъ имѣетъ честь заявить, что на предстоящемъ XI сѣздѣ, какъ и на всѣхъ предыдущихъ сѣздахъ, при обсужденіи научныхъ и учебныхъ вопросовъ въ засѣданіяхъ всѣ члены Сѣзда пользуются совершенно одинаковыми правами, но при баллотировкѣ въ общихъ собраніяхъ, право рѣшающаго голоса принадлежитъ только ученымъ, напечатавшимъ самостоятельное сочиненіе или изслѣдованіе по математикѣ, естествознанію или медицинѣ, а также преподавателямъ этихъ наукъ при высшихъ и среднихъ учебныхъ заведеніяхъ. (§ 3 правилъ о сѣздѣ).

На основаніи Высочайше утвержденнаго 15-го февраля 1897 г. положенія Комитета Министровъ утвержденнаго г. Министромъ Народнаго Просвѣщенія Правила для XI сѣзда русскихъ естествоиспытателей и врачей въ С.-Петербургѣ.

1) XI сѣздъ русскихъ естествоиспытателей и врачей въ С.-Петербургѣ имѣетъ цѣлью способствовать ученой и учебной дѣятельности на поприщѣ естественныхъ наукъ, направлять эту дѣятельность главнымъ образомъ на ближайшее изслѣдованіе Россіи и доставлять русскимъ естествоиспытателямъ случай лично знакомиться между собою.

2) XI сѣздъ, состоя по примѣру предшествовавшихъ сѣздовъ подъ покровительствомъ г. Министра Народнаго Просвѣщенія, находится въ вѣдѣніи г. Попечителя С.-Петербургскаго Учебнаго Округа, отъ котораго зависятъ ближайшія распоряженія по устройству сего сѣзда.

3) Членомъ сѣзда можетъ быть всякій, кто научно занимается математикой, естествознаніемъ или медициной, но правами голоса на сѣздѣ пользуются только ученые, напечатавшіе самостоятельное сочиненіе или изслѣдованіе по этимъ наукамъ, и преподаватели сихъ наукъ при высшихъ и среднихъ учебныхъ заведеніяхъ. Никакого диплома на званіе члена XI сѣзда не выдается.

4) Засѣданія сѣзда бываютъ общія и частныя (по секціямъ); въ общихъ засѣданіяхъ читаются общинтересныя статьи и обсуждаются вопросы, касающіеся всего сѣзда, въ частныхъ засѣданіяхъ сообщаются и разбираются изслѣдованія и наблюденія, имѣющія болѣе специальное значеніе.

5) Отдѣленія на сѣздѣ полагаются слѣдующія: 1) по математикѣ (чи-

стой и прикладной) и механикъ; 2) астрономіи, геодезіи и астрофизикъ; 3) физикъ; 4) физической географіи и метеорологіи; 5) химіи; 6) минералогіи и геологіи; 7) ботаникъ; 8) зоологіи; 9) анатоміи и физиологіи человека и животныхъ; 10) географіи, этнографіи, и антропологіи; 11) агрономіи; 12) научной медицинѣ и 13) научной гигиенѣ.

6) Члены Академіи Наукъ (находящіеся внѣ столицы), преподаватели Университетовъ и другихъ учебныхъ заведеній, желающіе принять участіе въ сѣздѣ, могутъ получать для этой цѣли командировки, срокомъ отъ двухъ до четырехъ недѣль, смотря по разстоянію ихъ мѣстожителства отъ С.-Петербурга.

7) Сѣздъ имѣетъ быть съ 20-го по 30-ое декабря 1901 года.

Общій распорядокъ XI сѣзда предполагается такой: 20 декабря 1901 г. общее собраніе, 21, 22, 23 и 24 декабря засѣданія секцій, 26 общее собраніе, 27, 28 и 29 засѣданія секцій, 30-го декабря заключительное общее собраніе и закрытіе сѣзда.

Присужденіе преміи имени Н. И. Лобачевского.

Недавно состоялось второе присужденіе преміи имени *Н. И. Лобачевского*. Какъ извѣстно, эта премія (500 руб.) выдается Физико-Математическимъ обществомъ, состоящимъ при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ, разъ въ пять лѣтъ за лучшую оригинальную работу по геометріи, преимущественно относящуюся къ основаніямъ этой науки. Первая премія было присуждена покойному Софусу Ли. Вторую получилъ теперь профессоръ Академіи въ Мюнстерѣ W. Killing. Этотъ геометръ не мало потрудился на дѣло распространенія и развитія идей Лобачевского. Еще въ 1878 г. онъ опубликовалъ въ „Jurnal für reine und angewandte Mathematik“ изслѣдованіе: „Ueber Zwei Raumformen mit konstanter positiver Krümmung“. Въ этой работѣ Killing указалъ геометрическую систему въ пространствѣ постоянной положительной кривизны, отличную отъ той, которую намѣтилъ Риманъ въ своемъ знаменитомъ мемуарѣ „О гипотезахъ, лежащихъ въ основаніи геометріи“. Эту систему онъ назвалъ полярной по отношенію къ системѣ Римана. На нашъ взглядъ это самое важное, что было сдѣлано Killing'омъ. Другія его работы относятся, главнымъ образомъ, къ теоріи трансформационныхъ группъ въ ихъ примѣненіи къ геометріи. Онъ примыкаетъ, слѣдовательно, по своему направленію къ школѣ С. Ли.

Изъ работъ Killing'a, посвященныхъ выясненію идей, выработанныхъ школой Лобачевского, выдающееся мѣсто занимаютъ два сочиненія: 1) „Die Nicht-Euclidischen Raumformen in analytischer Behandlung“ (Leipzig, 1885). Это сочиненіе содержитъ аналитическую обработку геометрическихъ системъ въ пространствѣ постоянной кривизны. Первая часть посвящена пространствамъ трехмѣрнымъ, а вторая содержитъ распространеніе этихъ идей на пространства n измѣреній. 2) „Einführung in die Grundla-

gen der geometrie“. Это обширное сочинение въ двухъ томахъ закончено въ 1898 г. Оно содержитъ обстоятельное изложенье ученія объ основаніяхъ геометріи въ его постепенномъ развитіи.

Впрочемъ нужно прибавить, что къ какой либо опредѣленной системѣ евклидовой геометріи Киллингъ не пришелъ.

Отзывъ о сочиненіяхъ Киллинга давалъ профессоръ Лейпцигскаго университета, ученикъ и ближайшій сотрудникъ С. Ли—F. Engel; за этотъ трудъ онъ награжденъ золотою медалью.

Наконецъ почетные отзывы получили еще Witehead за работу, озаглавленную „Universal Algebra“ и Binder за работу: „О кривыхъ 3-ей и 4-ой степени“. Отзывъ о статьѣ Binder'a давалъ профессоръ Московскаго Университета К. А. Андреевъ, за что также награжденъ золотою медалью.

Пр.-Док. В. Кананъ.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

† **Oscar Schlömilch.** Въ Дрезденѣ скончался математикъ *Oscar Schlömilch*. Покойный родился въ Веймарѣ въ 1823 г., въ 1842 г. удостоился степени доктора, а въ 1844 г. вступилъ въ качествѣ приватъ-доцента, въ Іенскій университетъ. Въ 1849 г. *Schlömilch* былъ назначенъ ординарнымъ профессоромъ въ Дрезденскій политехникумъ, гдѣ и оставался до 1874 г. Отъ 1874 г. по 1885 г. онъ занималъ отвѣтственный постъ при Министерствѣ Народнаго Просвѣщенія. Кромѣ ряда оригинальныхъ работъ О. *Schlömilch* написалъ нѣсколько прекрасныхъ учебниковъ, изъ которыхъ нѣкоторые, какъ напр.: „Analytische Geometrie“ и „Compendium der höheren Analysis“, занимаютъ весьма видное мѣсто въ литературѣ.

† **Z. T. Gramme** 20-го (7-го) января скончался въ Парижѣ, на 75-омъ году жизни, электрикъ *Z. T. Gramme*; его имя носить изобрѣтенное имъ въ 1870 г. (независимо отъ А. Pacinotti) кольцо.

Фондъ имени Бельтрами. Faculté des Sciences Римскаго университета, желая увѣковѣчить память одного изъ наиболѣе выдающихся своихъ дѣятелей Е. Бельтрами, открылъ подписку для образованія фонда его имени. Собранные средства будутъ употреблены отчасти на изданіе полного собранія его сочиненій, отчасти на премію его имени. По предварительнымъ соображеніямъ это собраніе сочиненій будетъ заключать 3—4 тома, всего около 2000 стр. 4^о.

Взносы принимаетъ J. Sonzogno, секретарь Высшей Инженерной Школы въ Римѣ (J. Sonzogno, Segretario della Scuola d'Applicazione per gli ingegneri, Piazza San Pietro in Vincoli, 5, Roma).

Лица, внесшія болѣе 50 франковъ, получаютъ бесплатно экземпляръ собранія сочиненій Бельтрами.

Новая теорія полярныхъ сіяній. Шведскій метеорологъ *Svante Arrhenius* опубликовалъ статью, въ которой излагаетъ новую теорію полярныхъ сіяній, основанную на согласіи спектра послѣднихъ со спектромъ катодныхъ лучей; его теорія есть слѣдствіе Максвелловой теоріи свѣта*).

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ

Присужденіе премій Парижской Академіи Наукъ происходило въ концѣ прошлаго, 1900-го года на торжественномъ публичномъ засѣданіи, какъ это происходитъ ежегодно. Большую премію по математикѣ въ 3000 франковъ получилъ профессоръ *Mathias Lerch* (Фрейбургъ, въ Швейцаріи); премія Laland'a присуждена астроному *Giacobini* (Ницца) за его открытія кометъ; премію Damoiseau въ 1500 франковъ получилъ профессоръ *von Hepperger* (Грацъ) за изслѣдованіе орбиты кометы Biela; премію Janssen'a (золотую медаль) — американскій астрономъ *Barnard* за открытіе пятого спутника Юпитера; премію Gegner въ 4000 франковъ — г-жа *Curie*.

Лондонское Рентгеновское Общество учредило золотую медаль, которая будетъ выдана за изготовленіе лучшей рентгеновской трубки. Въ соисканіе могутъ принимать участіе и иностранныя фирмы. Трубки должны быть высланы въ названное общество къ 1-му мая.

Въ Гейдельбергѣ организовался комитетъ для постановки памятника Бунзену, Кирхгофу и Гельмгольцу.

МАТЕМАТИЧЕСКІЯ МЕЛОЧИ.

Доказательство теоремы о пересѣченіи трехъ высотъ треугольника въ одной точкѣ посредствомъ теоріи вписанныхъ угловъ.

Имѣемъ треугольникъ ABC съ перпендикулярами BD и CE , опущенными изъ вершинъ B и C на противоположныя стороны и пересѣкающимися въ точкѣ H . Требуется доказать, что линія AH , пересѣкающаяся при продолженіи въ точкѣ F съ противолежащей углу A стороной BC , перпендикулярна къ этой послѣдней.

Вслѣдствіе равенства угловъ DBE и DCE , имѣющихъ взаимно перпендикулярныя стороны и опирающихся на одинъ и тотъ

*) Еще до полученія этого сообщенія отъ референта редація приняла рѣшеніе напечатать переводъ статьи *Arrhenius'a*; но за накопленіемъ матеріала не знаемъ удастся ли намъ это сдѣлать до начала слѣдующаго семестра.

Ред.

же отрезокъ DE можно построить окружность, проходящую черезъ точки B, C, D, E. Также можно построить окружность, проходящую черезъ точки A, D, E, H, такъ какъ прямые углы AЕН и АДН опираются на одинъ и тотъ же отрезокъ АН. Тогда углы CBD и CED, вписанные въ окружность B, C, D, E, и опирающиеся на одну и ту же хорду DC этой окружности, равны. Углы CAF и CED, вписанные въ окружность ADEN и опирающиеся на одну и ту же хорду DH этой окружности, также равны. Поэтому

$$\angle CAF = \angle CBD \quad (1)$$

Но

$$\angle AND = \angle BHF$$

Слѣдовательно

$$\angle ADN = \angle HFB.$$

Т. е. АН перпендикулярна къ сторонѣ ВС, что и нужно было доказать.

Ис. Твердовскій (Харьковъ).

ЗАДАЧИ.

№ 16. Рѣшить систему уравненій:

$$(a+b-c-d)xy + (ab-cd)(x+y) + ab(c+d) - cd(a+b) = 0,$$

$$(a+c-b-d)xz + (ac-bd)(x+z) + ac(b+d) - bd(a+c) = 0,$$

$$(a+d-b-c)yz + (ad-bc)(y+z) + ad(b+c) - bc(a+d) = 0.$$

Проф. В. Ермаковъ (Кіевъ).

№ 17. Показать, что уравненіе

$$a \sin^2 x + 2b \sin x \cos x + c \cos^2 x + d_1 \sin x + d_2 \cos x + f = 0$$

рѣшается въ квадратныхъ радикалахъ, относительно $\sin x$, когда

$$b^2(d_1^2 - d_2^2) = d^2(a - c),$$

гдѣ d есть одно изъ двухъ чиселъ d_1 или d_2 .

С. Шатуновскій (Одесса).

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

№ III (4 сер.). На данной хордѣ данной окружности построить вписанную въ эту окружность трапецію, въ которой дано отношеніе боковой стороны къ діагонали.

Л. Магазиникъ (Вердичевъ).

№ 12 (4 сер.). 1) Построить треугольник по трем радиусам r_a , r_b и r_c вписанных кругов. Требуется решить задачу методом подобия (данные задачи позволяют построить треугольник, подобный искомому).

2) Пользуясь методом решения вышеуказанной задачи, решить тригонометрически треугольник по данным r_a , r_b , r_c .

А. Мерлинъ (Смоленскъ).

№ 13 (4 сер.). Доказать, что при n цѣломъ и положительномъ число

$$3^{2(n+1)} \cdot 5^{2n} - 3^{3n+2} \cdot 2^{2n}$$

дѣлится на 117.

(Займств.).

№ 14 (4 сер.). Если многочленъ

$$x^4 + px^2 + qx + a^2$$

дѣлится на $x^2 - 1$, то онъ дѣлится и на $x^2 - a^2$.

(Займств.).

№ 15 (4 сер.). Сферическій проводникъ радиуса въ 9 сантиметровъ заряженъ электричествомъ. Если соединить этотъ проводникъ съ другимъ отдаленнымъ шаромъ радиуса x , то отъ перваго шара будетъ отнята $\frac{1}{100}$ его заряда. Вычислить x .

(Займств.) М. Гербановскій.

РѢШЕНИЯ ЗАДАЧЪ.

№ 580 (3 сер.). Доказать, что при всякомъ цѣломъ положительномъ n числа

$$5^n + 2 \cdot 3^n - 3, \quad 7^n + 3^n - 2$$

дѣлятся на 8, а число

$$7^n - 3 \cdot 5^n + 3 \cdot 3^n - 1$$

дѣлится на 16.

При n нечетномъ выраженіе $5^n + 2 \cdot 3^n - 3$ можно представить въ видѣ

$$5^n + 3^n + 3 \left[(3^2)^{\frac{n-1}{2}} - 1 \right], \text{ гдѣ } \frac{n-1}{2} \text{ есть число цѣлое.}$$

Но $5^n + 3^n$ при n нечетномъ дѣлится на $5+3=8$, а $(3^2)^{\frac{n-1}{2}} - 1$ дѣлится на $3^2-1=8$. Слѣдовательно и предложенное выраженіе дѣлится на 8.

При n четномъ

$$5^n + 2 \cdot 3^n - 3 = 5 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 3 \cdot 3^{n-1} - 3 = 5(5^{n-1} + 3^{n-1}) + 3 \left[(3^2)^{\frac{n-2}{2}} - 1 \right],$$

гдѣ $\frac{n-2}{2}$ число цѣлое. Такъ какъ при n четномъ $5^{n-1} + 3^{n-1}$ дѣлится на

$5+3=8$, равно какъ и $(3^2)^{\frac{n-2}{2}} - 1$ дѣлится на $3^2-1=8$, то и данное выраженіе дѣлится на 8.

Выраженіе $7^n + 3^n - 2$ можно представить въ одномъ изъ двухъ видовъ:

$$7^n + 1 + 3 \left[(3^2)^{\frac{n-1}{2}} - 1 \right], \text{ или } 7(7^{n-1} + 1) + 3^2 \left[(3^2)^{\frac{n-1}{2}} - 1 \right].$$

При n нечетномъ цѣлыя числа $7^n + 1$ и $(3^2)^{\frac{n-1}{2}} - 1$, а при n четномъ цѣлыя числа $7^{n-1} + 1$ и $(3^2)^{\frac{n-2}{2}} - 1$ дѣлятся на 8, а потому и выражение $7^n + 3^n - 2$ дѣлится на 8.

Выраженіе $7^n - 3 \cdot 5^n + 3 \cdot 3^n - 1$ можно представить въ одномъ изъ двухъ видовъ:

$$7[(7^2)^{\frac{n-1}{2}} - 1] + 9[(5^2)^{\frac{n-1}{2}} - (3^2)^{\frac{n-1}{2}}] - 6 - [(5^2)^{\frac{n-1}{2}} - 1] \text{ или } (7^2)^2 - 1 - 3[(5^2)^2 - (3^2)^2]$$

При n нечетномъ, цѣлое число $(7^2)^{\frac{n-1}{2}} - 1$ дѣлится на $7^2 - 1 = 48$, а слѣдовательно и на 16; цѣлое число $(5^2)^{\frac{n-1}{2}} - (3^2)^{\frac{n-1}{2}}$ дѣлится на $5^2 - 3^2 = 16$, и цѣлое число $(5^2)^{\frac{n-1}{2}} - 1$ дѣлится на $5^2 - 1 = 24$, откуда слѣдуетъ, что число $6[(5^2)^{\frac{n-1}{2}} - 1]$ дѣлится на 16. Въ случаѣ n четнаго цѣлое число $(7^2)^{\frac{n}{2}} - 1$ дѣлится на $7^2 - 1 = 48$ и цѣлое число $(5^2)^{\frac{n}{2}} - (3^2)^{\frac{n}{2}}$ дѣлится на $5^2 - 3^2 = 16$.

II. Полумикль (Знаменка); Л. Малазаник (Бердичевъ).

№ 605 (3 сер.). Рѣшить систему:

$$\lg xy - \lg xy = \frac{8}{3},$$

$$xy = 16.$$

Полагая

$$\log_y x = u, \log_x y = v, \text{ т. е. } x = y^u, y = x^v$$

находимъ:

$$\log x = u \log y \quad (1), \lg y = v \lg x,$$

откуда, въ связи съ первымъ изъ предложенныхъ уравненій, выводимъ:

$$uv = 1, u - v = \frac{8}{3}.$$

Эта система даетъ для u корни $u_1 = 3, u_2 = -\frac{1}{3}$.

Предполагая, что всѣ логарифмы взяты при основаніи 2, прологарифмируемъ второе изъ данныхъ уравненій; тогда получимъ:

$$\log x + \log y = 4 \quad (2).$$

Подставляя значенія u въ уравненіе (1), найдемъ:

$$\log x = 3 \log y \quad (3), \log x = -\frac{1}{3} \log y \quad (4).$$

Рѣшая уравненія (2) и (3) совместно, а затѣмъ уравненія (2) и (4) находимъ:

$$\log_2 x_1 = 3, \log_2 y_1 = 1; \log_2 x_2 = -2, \log_2 y_2 = 6,$$

откуда

$$x_1 = 8, y_1 = 2; x_2 = \frac{1}{4}, y_2 = 64.$$

III. Кунда (Гродно); II. Давидсонъ (Житомиръ).

№ 616 (3 сер.). Доказать, что выражение

$$5 \cdot 7^{2(n+1)} + 2^{3n}$$

при n любом и не меньшем нуля делится на 41 без остатка.

Данное выражение можно представить въ видѣ

$$5 \cdot 7^{2(n+1)} - 5 \cdot 2^{3(n+1)} + 5 \cdot 2^{3(n+1)} + 2^{3n} = 5[(7^2)^{n+1} - (2^3)^{n+1}] + 2^{3n}(5 \cdot 2^3 + 1).$$

Выраженіе $(7^2)^{n+1} - (2^3)^{n+1}$ дѣлится при n не меньшемъ нуля на $7^2 - 2^3 = 41$, а выраженіе $2^{3n}(5 \cdot 2^3 + 1)$ кратно числа $5 \cdot 2^3 + 1$, тоже равнаго 41. Следовательно и предложенное выраженіе дѣлится на 41.

П. Полушкинъ (Знаменка); П. Давидсонъ (Житомиръ).

№ 628 (3 сер.). Рѣшить систему уравненій:

$$x^2 - y^2 = z^2,$$

$$(x + y + z)(x - y + z)(y + z - x)(y + x - z) = 576,$$

$$y - z = 1.$$

Пусть y и z суть катеты нѣкотораго прямоугольнаго треугольника. Тогда x , какъ это видно изъ перваго изъ предложенныхъ уравненій, есть гипотенуза, а первая часть втораго уравненія — помноженный на 16 квадратъ площади этого треугольника. Такимъ образомъ первую часть втораго уравненія можно замѣнить выраженіемъ $4y^2z^2$, въ чемъ можно убѣдиться и непосредственно, раскрывъ скобки въ первой части втораго уравненія и замѣняя x^2 его значеніемъ изъ перваго уравненія. Итакъ

$$4y^2z^2 = 576, \text{ откуда } yz = \pm 12.$$

Рѣшая систему $yz = 12$, $y - z = 1$, находимъ:

$$y_1 = 4, z_1 = 3; y_2 = -3, z_2 = 4,$$

откуда, на основаніи перваго уравненія, $x_{1,2} = \pm 5$.

Система же

$$yz = -12, y - z = 1$$

въ связи съ первымъ изъ предложенныхъ уравненій даетъ мнимыя рѣшенія.

Л. Галлеринъ (Бердичевъ); П. Полушкинъ (Знаменка); М. Милашевичъ (Севастополь); В. Толстовъ (Тамбовъ); Н. Циклискій (Могилевъ); Б. Мерца (Орель); Л. Левитскій, К. Красюкъ, А. Русцовъ (Курскъ); И. Кудинъ (Москва); П. Давидсонъ (Житомиръ).

Редакторъ В. А. Циммерманъ.

Издатель В. А. Гернетъ.

Дозволено цензурою, Одесса, 14-го февраля 1901 г.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.

Обложка
щется

Обложка
щется