Обложка
пщется

Обложка
ищется

XXVI Сем. № 2.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

15 Августа № 302. 1901 г.

Содержаніе: Физическій кабинетъ. *Эр. Шпачинскаго.* — „О бумерангѣ". *Д. Шора.* — О наименьшемъ кругѣ, вмѣщающемъ данную систему точекъ на плоскости. *М. Зимина.* — Задачи для учащихся №№ 76—81 (4 серіи). — Рѣшенія задачъ (4 сер.), №№ 9, 13, 19, 20, 23. — Объявленія.

Физическій кабинетъ.

Эр. Шпачинскаго.

I.

Имѣя въ виду побесѣдовать съ читателями „Вѣстника", въ небольшомъ рядѣ статей, о физическихъ кабинетахъ нашихъ средне-учебныхъ заведеній, начинаю съ вопроса, который—если не ошибаюсь—никогда еще не былъ подвергнутъ достаточно всестороннему обсужденію въ нашей педагогической литературѣ, и который, вслѣдствіе этого, и теперь вѣроятно окажется спорнымъ.

Вопросъ этотъ, одинъ изъ самыхъ существенныхъ, относится къ предназначенію физическихъ кабинетовъ при средней общеобразовательной школѣ. Что эти кабинеты нужны—это сознано всѣми, а такъ какъ, вмѣстѣ съ тѣмъ, признано неудобнымъ устройство коллективныхъ кабинетовъ, общихъ для нѣсколькихъ учебныхъ заведеній одного города, то каждое изъ такихъ заведеній, даже изъ числа частныхъ, стремится обзавестись своимъ собственнымъ кабинетомъ и пополнять таковой по мѣрѣ надобности и возможности. Такимъ образомъ, для удовлетворенія этой педагогической потребности, были затрачены и затрачиваются и нынѣ довольно значительныя, сравнительно, суммы. А между тѣмъ предназначеніе самихъ этихъ кабинетовъ, не вызывая, повидимому, никакихъ сомнѣній, остается не вполнѣ выясненнымъ, быть можетъ даже для многихъ изъ лицъ, завѣдывающихъ таковыми.

Въ оффиціальныхъ учебныхъ сферахъ давно уже установился такой, нѣсколько узкій для нашего времени, взглядъ, что кабинеты при гимназіяхъ, реальныхъ училищахъ и пр. нужны лишь для того, чтобы ученикамъ и ученицамъ высшихъ классовъ можно было показать нѣкоторые существенные приборы и опыты, необходимые для лучшаго усвоенія преподаваемаго имъ курса физики. Но—такъ ли это?—вотъ въ чемъ вопросъ. Не слѣдуетъ ли на педагогическую эксплуатацію физическихъ (и другихъ) кабинетовъ взглянуть въ настоящее время нѣсколько шире?

Лично—я убѣжденъ, что господствующая нынѣ система замкнутости физическихъ кабинетовъ и недоступности ихъ для учениковъ, не приступившихъ еще къ изученію курса физики, влечетъ за собою во 1-хъ вредное для правильности развитія умственныхъ способностей дѣтей запаздываніе возникновенія любознательности къ пониманію явленій міра реальнаго, и во 2-хъ—весьма естественную въ юношахъ, допущенныхъ наконецъ къ кабинетнымъ физико-химическимъ священнодѣйствіямъ, жадность къ опытамъ, какъ къ давно обѣщаннымъ зрѣлищамъ, которыми они рады любоваться, но съ чисто лишь внѣшней стороны, мало или даже вовсе не интересуясь поучительностью ихъ содержанія.

Оба эти, тѣсно связанныя одно съ другимъ явленія, въ наличности коихъ врядъ ли сомнѣвается кто-либо изъ лицъ, близко къ этому дѣлу стоящихъ, заслуживаютъ серьезнаго вниманія. Дѣти, вообще, очень мало интересуются природою и разъясненіемъ того, что съ малолѣтства привыкли считать обыденнымъ, естественнымъ; несравненно больше ихъ завлекаетъ все чудесное, даже невѣроятное, невозможное. Если иногда, вслѣдствіе прочитанной книжки или воздѣйствія старшихъ, въ нихъ и возникаетъ примитивная любознательность по отношевію къ явленіямъ реальнымъ, то легко убѣдиться, что любознательность эта касается главнымъ образомъ внѣшней стороны явленій и ихъ послѣдовательности, но не причинной между ними связи; ихъ нетерпѣливое любопытство прежде всего ждетъ отвѣта на вопросъ „какъ“, а не на вопросъ „почему?“ Если этотъ послѣдній и задаютъ иногда такъ называемыя „умныя“ дѣти, то за то они же и удовлетворяются первымъ услышаннымъ отвѣтомъ, иногда крайне наивнымъ—напримѣръ отъ другихъ дѣтей, а подчасъ и совершенно нелѣпымъ. Зачатки человѣческой любознательности не сопровождаются еще развитіемъ наклонности къ критикѣ; у дѣтей, вообще говоря, критики нѣтъ: въ нихъ можетъ проявляться только ея родоначальница—„недовѣріе“, но и то лишь по отношенію къ тѣмъ, чей авторитетъ они перестаютъ уже признавать на основаніи личнаго опыта. Потому то такъ важно для развитія ребенка, чтобы во 1-хъ его авторитетомъ пользовались тѣ лица, которыя заслуживаютъ того по своему собственному развитію и по своимъ познаніямъ, во 2-хъ—чтобы эти лица, дорожа своимъ вліяніемъ на ребенка, не убивали въ немъ зачатковъ правильно направленной любознательности всякими нелѣпыми или непонятными, а слѣдовательно — и скучными отвѣтами, и въ третьихъ — чтобы эта природная любознательность не направлялась ими искусственно въ одну какую-нибудь излюбленную сторону, въ ущербъ равномѣрности развитія индивидуальныхъ способностей ребенка.

Изъ всѣхъ задачъ воспитанія, эта послѣдняя представляетъ, повидимому, наибольшія трудности. Не останавливаясь болѣе подробно на этихъ вопросахъ, не могу, однако жъ, не замѣтить, что именно этотъ послѣдній грѣхъ — неравномѣрности развитія довѣренныхъ ей дѣтей—взяла на себя, и несетъ его и понынѣ наша общеобразовательная школа. Въ теченіе многихъ уже лѣтъ, она, съ настойчивостью до такой степени непонятной, что многіе видятъ въ ней одно лишь упрямство, искусственно направляетъ формирующіеся умы въ область грамматическихъ словопреній и математическихъ отвлеченностей, не предлагая имъ рѣшительно ничего, способствующаго зарожденію и развитію интереса къ пониманію обыденныхъ явленій жизни и природы. Можно съ увѣренностью сказать, что, въ общемъ, этими явленіями несравненно больше интересуются дѣти, оставшіяся внѣ школы, даже такія, которыя ничему не учатся, нежели одинаковаго съ ними возраста гимназисты, гимназистки, реалисты и пр. Первыхъ, на относящіеся къ реальной области вопросы наталкиваетъ та болѣе полная и болѣе естественная жизнь, какую они ведутъ (хотя бы и на улицѣ); вторымъ—рѣшительно некогда интересоваться какими бы то ни было вопросами, не заданными на завтрашній урокъ. А если иногда, не смотря на все это порабощеніе мысли ребенка непонятными для него тонкостями словопреній въ нѣсколькихъ заразъ языкахъ, какой-нибудь мальчуганъ 1-го, 2-го класса, благодаря случайному внѣшкольному вліянію, все таки заинтересуется какимъ-нибудь вопросомъ изъ естествознанія, или технологіи, или вообще изъ внѣпрограмной области знанія, и съ полнымъ довѣріемъ къ авторитету учителя рѣшится спросить у него—почему, что и какъ?—ему отвѣчаютъ сочувственно (а иногда и вовсе безъ всякаго сочувствія): „а вотъ, подожди, голубчикъ! „Доберешься до высшихъ классовъ, а потомъ, чего добраго, и до „университета, если не нарѣжешься на экзаменахъ зрѣлости, — „тамъ тебѣ все объяснятъ, все узнаешь. Нельзя же сразу все „знать! Нужна послѣдовательность. Брось поэтому всѣ эти глу- „пости и займись-ка теперь своей латинской грамматикой".

Неудивительно послѣ этого, что ученики и ученицы высшихъ классовъ, допущенные наконецъ въ физическій кабинетъ, не взирая на почтенный свой возрастъ, относятся какъ неразумныя малолѣтки ко всему тому, что преподавателю угодно будетъ имъ показать. Какъ бы ни были они уже сильны въ различныхъ мертвыхъ и живыхъ языкахъ, или въ геометрическихъ теоремахъ, все же въ сферѣ физическихъ, химическихъ, механическихъ и пр. знаній они остаются еще на уравнѣ развитія приготовительныхъ классовъ. И потому, все время вплоть до окончанія курса, они способны только по дѣтски „любоваться" опытами, восхищаться таковыми, если они удаются, и оставаться недовольными, если что нибудь обѣщанное не выходитъ; въ этомъ послѣднемъ случаѣ они начинаютъ терять довѣріе къ своему учителю не только какъ къ экспериментатору, но даже и какъ къ физику, ибо, подобно тому, какъ было въ средніе вѣка, они все таки считаютъ, что всякій „физикъ" долженъ быть тоже и ловкимъ фокусникомъ, и вмѣстѣ съ тѣмъ начинаютъ пренебрежительно отзываться о своемъ физическомъ кабинетѣ, въ которомъ, „вѣчно все испорчено". Уроки въ кабинетѣ—это для нихъ только театральное представленіе, въ теченіе котораго изъ-за опытовъ и красивыхъ приборовъ они, чаще всего, никакой физики и не усматриваютъ, ибо ихъ вниманіе бываетъ цѣликомъ поглощено созерцаеніемъ дотолѣ невидѣннаго. И учитель, показывая какой нибудь эффектный опытъ, напрасно будетъ тутъ же тратить время на обстоятельное научное его объясненіе; лучше отложить эти разглагольствованія, ибо тутъ, въ кабинетѣ, никто ихъ смысла хорошо не усвоитъ, никто ихъ почти не слушаетъ. Та классная комната, которая имѣется при большинствѣ физическихъ кабинетовъ, напрасно, поэтому, носитъ названіе „аудиторіи", ибо при настоящихъ порядкахъ—это только „спектаторія".

Съ другой стороны, всякій преподаватель физики хорошо знаетъ, до какой степени наивны и малотребовательны зрители такой спектаторіи. Какъ тѣ дикари, которыхъ европейцы плѣняютъ всякими блестящими бездѣлушками, такъ и они способны приходить въ восторгъ и любоваться всякой новинкой, всякой физической игрушкой. Въ каждомъ кабинетѣ, поэтому, такія игрушки имѣются, въ каждомъ каталогѣ физическихъ приборовъ имъ отводится не мало мѣста, что и неудивительно, ибо на нихъ всегда есть спросъ. И всякую такую игрушку, или диковинку, или курьезный опытъ, ученики наши готовы смотрѣть не одинъ, а много много разъ. Такъ, напримѣръ, ртутью они любуются въ теченіе всего курса, и съ наслажденіемъ слѣдятъ за всѣми манипуляціями учителя, собирающагося показать какой-нибудь опытъ со ртутью, а если по неосторожности нѣсколько капель ея будетъ пролито, они были бы готовы всѣмъ классомъ броситься въ погоню за ускользающими красивыми шариками; ихъ не столько интересуетъ ожидаемый опытъ, сколько красивый и новый для нихъ видъ самой ртути. Вѣдь и чистая вода по оптическимъ эффектамъ не менѣе красива чѣмъ ртуть, но они давно привыкли къ ея виду, и потому опыты съ водою, сравнительно, меньше ихъ интересуетъ, нежели опыты со ртутью. Для этихъ взрослыхъ дѣтей никогда демонстративный урокъ въ кабинетѣ не покажется слишкомъ длиннымъ; послѣ каждаго красиваго опыта они готовы были бы кричать „bis!" Я лично пробовалъ нѣкоторые опыты показывать однимъ и тѣмъ же ученикамъ всякій годъ, въ теченіе курса, и убѣдился, что не три раза, а еще какихъ нибудь тридцать разъ они смотрѣли бы съ такимъ же любопытствомъ. Очевидно, въ теченіе трехлѣтняго курса они не успѣваютъ еще „насмотрѣться". Въ виду всего этого, наврядъ ли хорошо дѣлаютъ тѣ преподаватели, которые, ради экономіи времени, заранѣе подготовляютъ всѣ опыты и продолжительность самой демонстраціи передъ учениками доводятъ такимъ образомъ до возможнаго „minimum“. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ, я полагаю, наоборотъ, было бы цѣлесообразнѣе продѣлать всѣ манипуляціи, требуемыя опытомъ, съ начала до конца передъ глазами учениковъ. Время, на это затрачиваемое, нельзя считать потеряннымъ, ибо, если только эти манипуляціи не тянутся слишкомъ ужъ долго, ученики слѣдятъ за ними съ большимъ вниманіемъ и терпѣніемъ; не имѣя возможности продѣлать ихъ собственноручно *), они по крайней мѣрѣ мысленно принимаютъ въ нихъ активное участіе. Попробуйте, напримѣръ, опредѣлить передъ ними удѣльный вѣсъ какого-нибудь твердаго тѣла, при помощи гидростатическихъ вѣсовъ; съ какимъ оживленіемъ они будутъ слѣдить за всей довольно скучною, въ сущности, процедурой взвѣшиванія, выкрикивать „много!“, „мало!“, подсказывать вамъ какую гирьку наложить на чашку, какую принять, и пр. Надо сказать, что во всѣхъ подобныхъ случаяхъ, они сильно напоминаютъ тѣхъ дѣтей, которыя, видя кого-нибудь играющимъ на музыкальномъ инструментѣ, рады были бы пообезьяничать и попробовать тотчасъ же сыграть самимъ точно такъ же, а потомъ—когда имъ позволятъ это сдѣлать—весьма скоро конфузятся, убѣдившись, что ничего не выходитъ. Но кто не испытывалъ въ дѣтствѣ такого желанія подражать музыканту, тотъ и самъ никогда музыкантомъ не будетъ; точно такъ же не увлечется и физикой тотъ, кто никогда не присутствовалъ при физическихъ опытахъ, производимыхъ другими.

Случается, что малоопытнаго преподавателя легко могутъ ввести въ заблужденіе эти дѣтскіе восторги учащихся, когда имъ показываютъ въ кабинетѣ что-либо совершенно для нихъ новое, или красивое по внѣшнему виду, или поражающее неожиданностью результата: онъ склоненъ вѣрить, что ему удалось уже заинтересовать учащихся физикой, что эти послѣдніе отлично должны были усвоить тѣ законы явленій, которые такъ эффектно, такъ удачно, были оправданы передъ ихъ глазами на опытахъ. Но неизбѣжное, увы, въ данномъ случаѣ разочарованіе, вообще говоря, наступаетъ довольно скоро: къ величайшему своему удивленію, такой преподаватель убѣждается (обыкновенно—на экзаменахъ), что, за весьма немногими исключеніями, никто изъ учениковъ не помнитъ даже, въ чемъ состояли тѣ красивые опыты, которыми всѣ они такъ еще недавно восхищались, не можетъ разсказать въ послѣдовательномъ порядкѣ, что онъ именно видѣлъ, какъ были расположены приборы и пр., если же и разскажетъ, съ грѣхомъ по поламъ, то непремѣнно такъ, и съ такимъ рисункомъ, какъ этотъ опытъ описанъ въ учебникѣ. Изъ всего видѣннаго въ дѣйствительности, въ памяти осталась самая малость; за

*) О практическихъ самостоятельныхъ занятіяхъ учениковъ въ физическихъ кабинетахъ побесѣдуемъ въ одной изъ слѣдующихъ статей.

то вслѣдствіе привычки къ книжному ученію (и къ запоминанію геометрическихъ чертежей) въ ней преобладаютъ воспоминанія о рисункахъ, видѣнныхъ въ учебникѣ физики, отдѣльныхъ его фразахъ и проч.

Тутъ кстати будетъ напомнить также и о томъ, какъ ученики, допущенные уже къ изученію физики, боятся физическихъ задачъ. Они ихъ попросту ненавидятъ! Даже такъ называемые „математики", легко справляющіеся со сложными курсовыми задачами изъ алгебры или съ довольно трудными вообще геометрическими задачами на построеніе, весьма часто становятся въ тупикъ надъ какою нибудь простенькою задачею изъ пройденнаго и вполнѣ уже усвоеннаго, повидимому, отдѣла физики. Точно такъ же ихъ затрудняютъ всякіе физическіе вопросы изъ категоріи „предсказательныхъ". (Наоборотъ, привычка къ дедуктивному доказательству предложенной теоремы дѣлаетъ ихъ смѣлѣе въ отвѣтахъ на вопросы „почему?" изъ области физики, хотя эта смѣлость не гарантируетъ ихъ еще отъ неправильныхъ объясненій). И если, съ одной стороны, все это обнаруживаетъ полное отсутствіе навыка къ индуктивному методу мышленія и анализу реальныхъ явленій, то съ другой, главнымъ образомъ, обусловливается новизною той области, въ которой физическія задачи принуждаютъ ученика искать надлежащихъ соотношеній, а также недостаточною отчетливостью самихъ представленій о „физическихъ" величинахъ. Что „объемъ" напримѣръ, есть функція геометрическихъ величинъ „длины", „ширины" и „высоты"—это всякій ученикъ понимаетъ отлично, но онъ совсѣмъ не привыкъ еще считать его также функціею такихъ физическихъ величинъ, какъ внѣшнее „давленіе" и „температура". Теоремы, заключающія выведенныя изъ наблюденій соотношенія физическихъ величинъ, не связаны между собою (какъ въ геометріи) никакою послѣдовательностью; онѣ слишкомъ разнородны, разбросаны по разнымъ отдѣламъ физики, и потому выбрать ту изъ нихъ, которая нужна въ данной задачѣ для составленія основнаго уравненія, ученику, не имѣвшему достаточно времени, чтобы въ этомъ поупражняться, всегда очень трудно, хотя бы онъ и зналъ эту теорему отлично. Нельзя, слѣдовательно, „экзаменовать" нашихъ учениковъ изъ физики на „задачахъ", или—какъ это, къ сожалѣнію, практиковалось иногда на конкурсныхъ испытаніяхъ—на физическихъ „загадкахъ", и вопросахъ, требующихъ предсказанія того, что должно быть. По учебнымъ планамъ средней школы, на физику удѣлено слишкомъ мало времени для того, чтобы, при столь обширной программѣ предмета и полной его новизнѣ, преподаватель успѣвалъ не только показывать ученикамъ нужные опыты и ставить ненужныя (четвертныя) отмѣтки, не дающія никакого понятія о дѣйствительныхъ познаніяхъ учениковъ, но еще и упражняться съ ними въ достаточной мѣрѣ для выработки навыка въ рѣшеніи задачъ по всѣмъ отдѣламъ физики.

Всѣ вышеприведенные факты, съ полною убѣдительностью доказываютъ крайнюю односторонность развитія обучающихся въ нашихъ средне-учебныхъ заведеніяхъ дѣтей, какъ мальчиковъ, такъ и дѣвочекъ. Если—повторяю—въ теченіе нѣсколькихъ лѣтъ мысль ихъ искусственно заставляютъ работать исключительно въ сферѣ отвлеченныхъ соображеній, и вся почти область реальныхъ представленій остается для нихъ чуждою вплоть до 16—18-лѣтняго возраста, то само собою понятно, что, введенные наконецъ въ эту область и сразу ошеломленные ея разнообразіемъ, наши юноши, несмотря на свой возрастъ, чувствуютъ себя въ этой области совершеннѣйшими дѣтьми и не могутъ, поэтому, сразу надлежаще усвоить всего громаднаго курса физики, составленнаго вѣдь не для малолѣтокъ и безъ принятія въ разсчетъ абсолютной неподготовленности учащихся къ индуктивному методу, его языку, физической научной терминологіи и даже къ наблюденію и запоминанію совершающагося передъ ихъ глазами.

Въ этомъ, по моему мнѣнію, кроется главная причина незнанія физики абитуріентами нашей средней школы,—незнанія, неоднократно уже констатированнаго профессорами и во время конкурсныхъ экзаменовъ въ высшія спеціальныя заведенія, и въ теченіе университетскихъ курсовъ. Напрасно будемъ винить плохіе учебники, или убожество физическихъ кабинетовъ, или—наконецъ—неопытность преподавателей; всѣ эти условія могутъ играть здѣсь лишь второстепенную роль; коренная же причина—слишкомъ запоздалое развитіе наблюдательныхъ способностей и интереса къ познаванію явленій міра реальнаго—никакими учебниками, никакими преподавателями и никакими кабинетами не можетъ быть устранена при нынѣ принятыхъ порядкахъ и программахъ средней школы.

Но если какому-нибудь горю нельзя помочь радикально и вполнѣ, то все же желательно устранить его хоть до нѣкоторой степени. И вотъ, такою полумѣрою, такимъ временнымъ паліативомъ, было бы, по моему мнѣнію, установленіе въ педагогическихъ сферахъ нѣсколько иного взгляда на предназначеніе школьныхъ физическихъ кабинетовъ. Снимите только, господа, тѣ семь печатей, за которыми каждый такой кабинетъ торжественно сохраняется, оставьте въ его таинственныхъ дверяхъ хоть маленькую щелку и для дѣтей низшихъ классовъ, и позвольте имъ великодушно смотрѣть въ эту щелку не изъ-за отмѣтокъ, а попросту ради удовольствія. Нечего обезпокоиться: они сами прибѣгутъ, найдутъ время оторваться отъ своихъ грамматикъ и, насытившись до нѣкоторой степени въ теченіе двухъ, трехъ лѣтъ зрѣлищемъ всякихъ диковинокъ, потомъ, когда настанетъ пора приступить къ систематическому курсу физики, войдутъ въ тотъ же кабинетъ не такими уже „дикарями", какими входятъ въ него теперь. Оставьте имъ только щелочку!

Короче сказать,—я стою за небольшой „пропедевтическій курсъ физическихъ наукъ" въ нашей средней общеобразовательной школѣ. Для всякаго круга новыхъ понятій, въ который учащагося вводятъ достаточно рано, я всякую пропедевтику считалъ бы, конечно, совершенно лишнею тратою драгоцѣннаго времени; такою, напримѣръ, я считалъ бы въ гимназіяхъ и пр. пропедевтику геометріи, сист. курсъ которой начинается достаточно (если даже не слишкомъ) рано; точно такъ же нахожу лишнимъ начинать алгебру (какъ это кое - гдѣ дѣлается) съ какого-то дѣтскаго курса, читаемаго ученикамъ, не закончившимъ еще курса ариѳметики. Но физика, какъ извѣстно, поставлена программами въ совершенно иныя условія: систематическій курсъ ея, сложный и трудный, нѣтъ возможности начинать слишкомъ рано, ибо—какъ показалъ непосредственный опытъ *) — онъ является непосильнымъ даже для учениковъ IV класса. Но въ дѣйствительности, какъ я старался показать выше, курсъ этотъ оказывается непосильнымъ точно такъ же и для учениковъ высшихъ классовъ, именно по той причинѣ, что онъ „впервые" вводитъ учащихся въ совершенно новую для нихъ и, въ добавокъ, слишкомъ разнообразную область понятій; при множествѣ другихъ занятій, они не успѣваютъ присвоить таковыхъ и ограничиваются, чаще всего, заучиваніемъ наизусть опредѣленій и законовъ. А такъ какъ, согласно программамъ, въ четырехъ низшихъ классахъ всѣ усилія школы направлены, главнымъ образомъ, къ изученію языковъ и загроможденію памяти учащихся такимъ матеріаломъ, который въ наилучшемъ случаѣ мало для нихъ интересенъ, то единственно для нашего времени возможнымъ, по моему мнѣнію, средствомъ возстановленія, хоть до нѣкоторой степени, равномѣрности развитія всѣхъ природою данныхъ способностей, является такой необязательный пропедевтическій курсъ физическихъ наукъ, который освоилъ бы дѣтей съ наиболѣе важными явленіями природы, расширяя слишкомъ съуженный школою ихъ кругозоръ и развивая въ нихъ мало по малу способность и интересъ къ наблюденіямъ.

Во избѣжаніе недоразумѣній, считаю необходимымъ тутъ же сдѣлать весьма существенную оговорку. Подъ вышеупомянутымъ пропедевтическимъ курсомъ я понимаю не нѣчто тяжело оффиціальное, съ неизбѣжными „журналами", ежеурочными, четвертными, годовыми и пр. и пр. отмѣтками, съ контролированіемъ преподавателей, записываніемъ отсутствующихъ и того что „задается" и всѣми прочими нашими школьными атрибутами, вошедшими силою привычки въ плоть и кровь педагоговъ, а попросту показываніе дѣтямъ всего того въ кабинетѣ (и при помощи туманныхъ картинъ), что ихъ и забавляетъ и въ то же время поучаетъ, но безъ всякаго насилія. Пусть хоть при этихъ необязательныхъ научныхъ развлеченіяхъ индивидуальности ребенка будетъ предоставлено право проявиться вполнѣ свободно.

Итакъ, возвращаясь къ основному вопросу настоящей замѣтки, позволяю себѣ высказать такой тезисъ:

---

*) Съ начала 90-хъ годовъ, по учебнымъ планамъ реальныхъ училищъ курсъ физики начинался въ нихъ съ 4-го класса. Вскорѣ, однакожъ, это было отмѣнено.

„Существующіе при средне-учебныхъ заведеніяхъ физиче-„скіе кабинеты должны быть такъ устроены и обставлены, чтобы, „во 1-хъ, могли служить необходимымъ пособіемъ при препода-„ваніи въ высшихъ классахъ систематическаго курса физики „(включая въ таковой механику и химію), и во 2-хъ, чтобы въ „нихъ можно было показывать ученикамъ низшихъ классовъ та-„кіе элементарные опыты, приборы, картины, матеріалы, при-„надлежности и пр., съ которыми желательно ихъ познакомить „возможно раньше, въ цѣляхъ бо̀льшей равномѣрности и есте-„ственности развитія природныхъ способностей“.

Я предвижу, конечно, множество возраженій, какія могутъ быть вызваны подобнымъ тезисомъ. Сейчасъ же возникнутъ вопросы, напримѣръ въ родѣ слѣдующихъ: кто же „долженъ“ (въ оффиціальномъ значеніи слова) вводить малышей въ кабинетъ и забавлять ихъ тамъ химическими и физическими фокусами? Преподаватель ли физики, или кто-либо другой изъ педагогическаго персонала? Въ послѣднемъ случаѣ—кто же „долженъ“ нести отвѣтственность за испорченные при такихъ фокусахъ приборы? Какое вознагражденіе и изъ какихъ источниковъ „долженъ“ получать тотъ, кто будетъ тратить свое время на эти добавочныя съ дѣтьми занятія? Какія мѣры взысканій „должны“ быть примѣняемы къ тѣмъ, кто не захочетъ посѣщать этихъ занятій въ кабинетѣ? Какіе часы „должно“ назначить для нихъ? Не повредитъ ли это успѣшности занятій другими предметами? Что еще скажутъ г.г. медики на подобное нововведеніе, одобрятъ ли они его? И пр., пр.

Безспорно, какъ эти, такъ и многіе другіе подобные вопросы не могутъ быть обойдены молчаніемъ въ случаѣ искренняго желанія осуществить проектируемую здѣсь мѣру на практикѣ. Но если такое желаніе будетъ дѣйствительно искреннимъ, то оно же и найдетъ отвѣты на всѣ подобные вопросы, отвѣчать на каковые въ данный моментъ съ моей стороны было бы преждевременнымъ, тѣмъ болѣе, что я имѣлъ въ виду въ настоящей замѣткѣ высказать лишь мой личный взглядъ на предназначеніе школьныхъ кабинетовъ.

Позволю себѣ отвѣтить, въ заключеніе, тѣмъ только скептикамъ, которые, соглашаясь въ принципѣ съ вышеизложеннымъ мнѣніемъ, придутъ все-таки къ тому выводу, что „у насъ“ всѣ эти нововведенія и неосуществимы, и невозможны. Не могу привести, къ сожалѣнію, болѣе одного факта въ опроверженіе такого пессимистическаго взгляда, но—тамъ гдѣ возможенъ одинъ фактъ, точно такъ же былъ бы возможенъ и другой, третій и т. д.

Тотъ хорошо мнѣ извѣстный, единичный пока фактъ, осуществленія на практикѣ подготовительнаго курса физическихъ наукъ для учениковъ первыхъ трехъ классовъ, не потребовавшаго, въ добавокъ, никакой ломки существующихъ порядковъ и измѣненія программъ, — относится къ Лодзинскому Коммерческому училищу, физическій кабинетъ котораго (не вполнѣ еще сформированный), съ начала истекающаго 109⁰/₁ уч. года, находится въ моемъ завѣдываніи. И вотъ, въ теченіе всего этого учебнаго года, благодаря иниціативѣ товарища моего, преподавателя географіи Д. Д. Струнина, съ согласія на то директора училища и педагогическаго коммитета, двери этого физическаго кабинета были открыты настежь для учениковъ первыхъ трехъ классовъ *), которымъ тотъ же г. Струнинъ, приблизительно одинъ разъ въ двѣ, три недѣли, читаетъ безвозмездно, по своей доброй волѣ, спеціально для этой цѣли составленныя лекціи, иллюстрируя таковыя многими химическими и физическими опытами и широко пользуясь туманными картинами при помощи хорошаго скіоптикона. Само собою понятно, что посѣщеніе этихъ чтеній (въ послѣобѣденное время) вовсе не обязательно для учениковъ, но такъ какъ они имъ очень понравились, а училище переполнено до того, что каждый изъ трехъ низшихъ классовъ имѣетъ по три параллельныхъ отдѣленія, классная же комната при физическомъ кабинетѣ вмѣщаетъ не болѣе ста человѣкъ, то пришлось раздѣлить учениковъ на группы, по классамъ, и повторять каждую такую лекцію по три раза. Не взирая на такое затрудненіе, все же въ теченіе истекающаго учебнаго года удалось выполнить 9 лекцій на слѣдующія темы: 1) земля (форма, вращеніе около оси), 2) солнце и движеніе земли вокругъ солнца, 3) луна, 4) планеты и звѣзды, 5) кометы и падающія звѣзды, 6) вулканы и землетрясенія, 7) теплота, 8) вода и 9) воздухъ. При первыхъ чтеніяхъ главнымъ пособіемъ служили туманныя картины (отъ Криса въ Гамбургѣ, 25 неподвижныхъ и 10 подвижныхъ). За все время были показаны дѣтямъ слѣдующіе опыты: расширеніе при нагрѣваніи тѣлъ твердыхъ (кольцо Гравезанда), воды, воздуха. Термометры: водяной, спиртовой, ртутный. Плавленіе цинка, размягченіе и плавленіе стекла. Гашеніе извести (повыш. темпер. показано при помощи проекц. термометра на экранѣ). Зажиганіе фосфора прикосновеніемъ горячей палочки и треніемъ; высѣканіе искръ при помощи кремня, доведеніе эфира до кипяченія треніемъ. Фильтрованіе. Раствореніе солей въ водѣ. Перегонка воды. Замораживаніе воды (при 0⁰). Кипѣніе воды (при 100⁰). Упругость паровъ воды. Разложеніе воды гальв. токомъ. Разложеніе воды каліемъ. Добываніе водорода (путемъ вытѣсненія его изъ сѣрной кислоты цинкомъ). Образованіе воды при горѣніи водорода. Свойства водорода. Добываніе кислорода разложеніемъ красной окиси ртути. Свойства кислорода. Горѣніе въ немъ желѣзной проволоки. Отдѣленіе азота отъ воздуха при горѣніи фосфора. Добываніе углекислаго газа изъ мрамора. Свойства этого газа. Взвѣшиваніе воздуха. Опыты съ воздушнымъ насосомъ. Барометръ. Опытъ Ториччели. Опытъ съ колокольчикомъ подъ колоколомъ возд. насоса. Подъемъ шара (бумажнаго), наполненнаго нагрѣтымъ воздухомъ, и—нѣкоторые еще другіе опыты, которыхъ не припомню.

*) Въ 4-мъ классѣ начинается уже систематическій курсъ физики, въ 5-мъ—химіи.

Подобныя лекціи съ демонстраціями предполагается вести и въ слѣдующемъ году; пока г. Струнинымъ намѣчены такія темы для нихъ: 1) Вѣтры и атмосферные осадки, 2) Громъ и молнія, 3) Свѣтовыя явленія въ атмосферѣ, 4) Почва и коренныя породы, 5) Подземный міръ, и пр.

Прибавлю еще, что даже малыши младшаго и старшаго отдѣленій приготовительнаго класса весь этотъ годъ посѣщали періодически физическій кабинетъ, гдѣ, при помощи того же скіоптикона, преподаватели русскаго языка иллюстрировали передъ ними русскія сказки спеціальными коллекціями туманныхъ картинъ. Нечего и говорить, что все это ужасно дѣтямъ нравится.

Само собою понятно, что приведенный мною единичный примѣръ ничего еще въ сущности не доказываетъ, ибо одинъ годъ такого педагогическаго опыта недостаточенъ еще для сужденія о дѣйствительной пользѣ устройства такихъ популярно-научныхъ развлеченій для учениковъ низшихъ классовъ. Но, во всякомъ случаѣ, этотъ опытъ можетъ до нѣкоторой степени служить доказательствомъ, что, во 1-хъ, повтореніе его при всякомъ другомъ средне-учебномъ заведеніи нельзя à priori считать абсолютно невозможнымъ, и что, во 2-хъ, открытіе доступа въ физическіе кабинеты для учениковъ низшихъ классовъ не влечетъ за собою никакихъ особенныхъ неудобствъ или нежелательныхъ послѣдствій.

г. Лодзь. *(Продолженіе слѣдуетъ).*

О бумерангѣ

Д. Шора въ Геттингенѣ.

Почти каждому мальчику школьнаго возраста, читающему путешествія и разсказы изъ жизни дикарей, извѣстно, что бумерангомъ называется оружіе австралійскихъ туземцевъ, обладающее удивительнымъ свойствомъ возвращаться къ ногамъ бросающаго, въ случаѣ если оно не попало въ цѣль. Но, вѣроятно, большинство дѣтей, послѣ здраваго размышленія, относятъ разсказъ о бумерангѣ къ числу выдумокъ, которыми такъ богата литература этого рода; и дѣйствительно не видѣвшему этого снаряда человѣку трудно повѣрить въ его реальность. Поэтому не безинтересно будетъ привести здѣсь рефератъ статьи *Gillert'a T. Walker'a* о бумерангѣ, явившейся результатомъ десятилѣтнихъ занятій этимъ снарядомъ *). Возможно что найдутся учителя физики, которые воспользуются изложеннымъ ниже матеріаломъ для изготовленія бумеранговъ и демонстрированія ихъ ученикамъ. Насколько поучительны и важны явленія, подобныя полету буме-

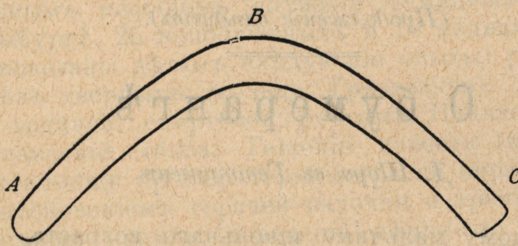
*) Мы воспользовались нѣмецкимъ переводомъ этой статьи, помѣщеннымъ въ „Physikalische Zeitschrift“, № 31, 2 Jahrgang.

ранга явствуетъ изъ того, что они встрѣчаются на самомъ дѣлѣ очень часто, хотя, правда, не всегда въ столь парадоксальной формѣ; напомнимъ явленіе отраженія отъ поверхности воды плоскаго горизонтально брошеннаго, вращающагося камня; или еще болѣе простой примѣръ движенія судовъ отъ вращенія небольшого винта. Наконецъ можно съ большой вѣроятностью утверждать, что, если человѣку удастся когда-либо построить летательную машину, то принципъ ея будетъ опять таки родственъ принципу бумеранга.—Итакъ, обратимся къ изложенію содержанія статьи *Walker'a*.

Бумерангъ бываетъ весьма различныхъ формъ и умѣніе бросать его различно въ различныхъ мѣстахъ Австраліи. Туземецъ бросаетъ его иногда такъ, что онъ отлетаетъ на разстояніе 80-ти метровъ отъ бросившаго, а затѣмъ возвращается къ его ногамъ. Но разсказываютъ еще болѣе удивительные случаи (*M. A. W. Horitt*, Natur, 20 July 1876), а именно, что бумерангъ описывалъ въ воздухѣ 5 круговъ, удаляясь при этомъ на 90 метровъ отъ бросившаго и подымаясь на высоту въ 45 метровъ.

Авторъ разсматриваетъ два типа бумеранга; первый (фиг. 1), длиною приблизительно въ 80 сентиметровъ (вдоль средней линіи), согнутъ почти подъ прямымъ угломъ (при B); поперечное сѣченіе представлено на фиг. 2. При B ширина его около 6,5

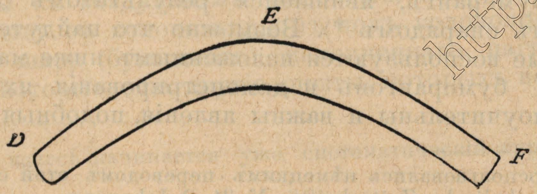
Фиг. 1.



Фиг. 2.

сентиметра, толщина 1 сентиметръ; къ концамъ A и C ширина и толщина слегка уменьшаются. Вѣсъ бумеранга 230 граммовъ. Плечи его не лежатъ въ плоскости ABC, а слегка закручены на подобіе мельничныхъ крыльевъ на 2—3° вокругъ BA и BC въ направленіи прямого винта. Одна сторона бумеранга, какъ видно на фиг. 2, нѣсколько болѣе выпукла, чѣмъ другая.—Бумерангъ второго типа (фиг. 3) длиною въ 70 сентиметровъ и шириною въ 7

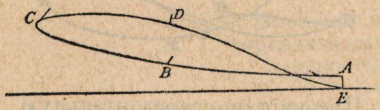
Фиг. 3.



сентиметровъ; поперечное сѣченіе его подобно изображенному на фиг. 2. Плечи бумеранга этого рода закручены вокругъ осей DE и FE на 3⁰ въ направленіи обратнаго винта.

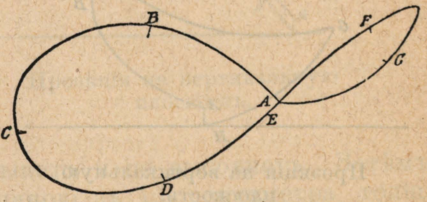
„Бумерангъ перваго типа, говоритъ далѣе авторъ, держатъ вогнутымъ краемъ впередъ, при чемъ его болѣе выпуклая сторона находится слѣва. Установивъ плоскость его вертикально, его бросаютъ въ горизонтальномъ направленіи, стараясь при этомъ привести его въ по возможности быстрое вращеніе. Плоскость вращенія не остается параллельною первоначальному положенію, а вращается во-первыхъ вокругъ направленія поступательнаго движенія и во-вторыхъ вокругъ одной изъ перпендикулярныхъ къ нему линій“. Вслѣдствіе этихъ двухъ вращеній возникаютъ замкнутыя кривыя самыхъ неожиданныхъ формъ и, если соотвѣтствующимъ образомъ бросать бумерангъ, то можно достигнуть того, что онъ возвращается два или даже три раза къ мѣсту нахожденія экспериментатора. Форма кривой зависитъ отъ угла подъ которымъ бросаютъ бумерангъ и отъ величины затраченной на это силы. Приложенныя изображенія этихъ кривыхъ дадутъ читателю представленіе о ихъ сложности; фигуры 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

Фяг. 4.



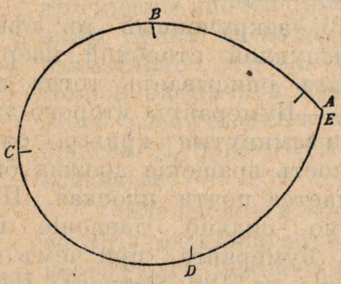
Проэкція на вертикальную плоскость.

Фиг. 7.



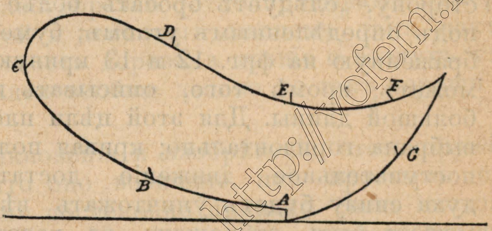
Проэкція на горизонтальную плоскость.

Фиг. 5.



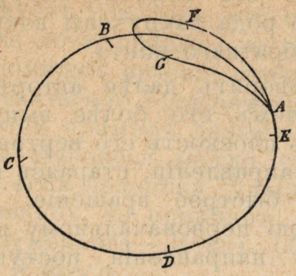
Проэкція на горизонтальную плоскость.

Фиг. 6.



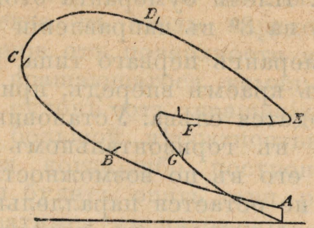
Проэкція на вертикальную плоскость.

Фиг. 8.



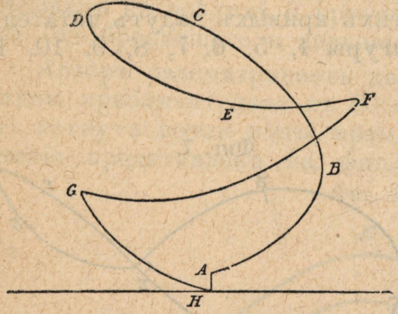
Проэкція на горизонтальную плоскость.

Фиг. 9.



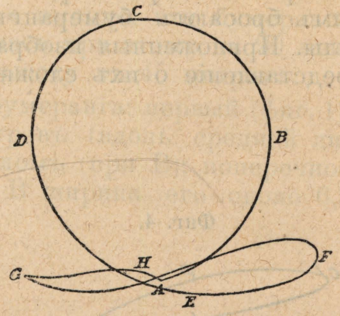
Проэкція на вертикальную плоскость.

Фиг. 10.



Проэкція на вертикальную плоскость.

Фиг. 11.



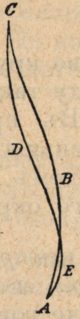
Проэкція на горизонтальную плоскость.

такъ какъ эти кривыя вообще двойной кривизны, т. е. на плоскости не могутъ быть изображены, то на чертежахъ даны двѣ проэкціи—на вертикальную и на горизонтальную плоскости—, какъ это принято въ начертательной геометріи.

Бумерангъ второго типа (фиг. 3), закрученный въ лѣвую сторону, „слѣдуетъ бросать болѣе выпуклой стороной кверху" подъ опредѣленнымъ угломъ; бумерангъ описываетъ тогда изображенную на фиг. 12 и 13 кривую. — Бумерангъ второго типа можетъ, кромѣ того, описывать и незамкнутыя кривыя очень большой длины. Для этой цѣли плоскость вращенія должна быть выбрана горизонтально; кривая получается почти плоская. Пока поступательное движеніе достаточно сильно, давленіе воздуха снизу будетъ уничтожать вѣсъ бумеранга, при чемъ онъ можетъ быть отброшенъ на разстояніе въ 130 метровъ. Нѣкоторые экземпляры этого типа летали противъ вѣтра дальше, чѣмъ по вѣтру. Очень трудно придать бумерангу достаточную скорость вращенія; чтобы облегчить это авторъ снабжалъ бумерангъ мѣдною проволокою въ 60 граммъ вѣсу, прикрѣпляя по одному кусочку на концахъ и по серединѣ (этимъ увеличивается моментъ инерціи вокругъ центра тяжести). Такой бумерангъ *Walker'у* удавалось бросать на разстояніе въ 167 метровъ, въ то время какъ шарообразный мячъ вдвое меньшаго вѣса онъ бросалъ только на разстояніе 63 метровъ.

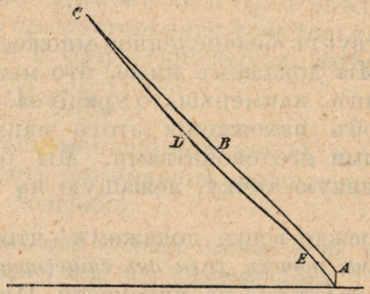
Рецептъ приготовленія бумеранговъ слѣдующій: „Слѣдуетъ взять кусокъ ясеневаго прямоволокнистаго дерева приблизительно въ 90 центиметровъ длиною, 7 (или 7,5) центиметровъ толщиною и не меньше 7 центиметровъ шириною. Дерево это размягчается паромъ и затѣмъ изгибается въ желательную форму и сохра-

Фиг 12.



Проэкція на горизонтальную плоскость.

Фиг. 13.



Проэкція на вертикальную плоскость.

няется въ ней, пока не остынетъ и не высохнетъ. Затѣмъ оно распиливается на куски толщиною въ 1,3 сентиметра толщиною. Послѣ нѣкотораго времени каждый кусокъ обрабатывается въ бумерангъ; самый подходящій инструментъ для этого—рубанокъ". Далѣе, слѣдуетъ стараться, чтобы край бумеранга былъ параллеленъ волокнамъ ясеня, иначе при ударѣ онъ легко ломается. Закручиваніе плечей бумеранга лучше всего достигается при распиливаніи куска; не слѣдуетъ прибѣгать для этой цѣли къ вторичному размягченію дерева. Цѣлесообразно отполировывать бумерангъ тонкой наждачной бумагой и льнянымъ масломъ, такъ какъ отъ этого увеличивается плотность дерева, а треніе о воздухъ уменьшается. Дубовые бумеранги вообще далеко не такъ хороши какъ ясеневые.

Что касается возникновенія и изобрѣтенія этого оружія, то авторъ предполагаетъ, что оно возникло изъ простыхъ слегка изогнутыхъ мечей и лишь постепенно приняло свою настоящую форму. Открытіе цѣлесообразности закручиванія плечъ бумеранга онъ считаетъ счастливою случайностью, и вѣроятность такой гипотезы подтверждается тѣмъ фактомъ, что *Walker* самъ пришелъ къ этому закручиванію совершенно случайно, не знавъ ничего о немъ раньше.

О наименьшемъ кругѣ, вмѣщающемъ данную систему точекъ на плоскости.

М. Зимина въ Варшавѣ.

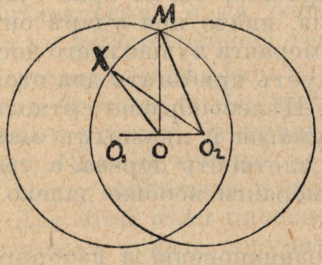
§ 1. Положимъ, что на плоскости дано n точекъ:

$$A_1, A_2, \ldots A_n.$$

Существуетъ безчисленное множество круговъ, вмѣщающихъ эти точки. Мы докажемъ ниже, что между такими кругами существуетъ одинъ наименьшаго радіуса. Въ предлагаемой статьѣ дается способъ нахожденія этого наименьшаго круга въ связи съ нѣкоторыми его свойствами. Мы будемъ считать, что кругъ вмѣщаетъ всякую точку, лежащую на его окружности.

§ 2. Прежде всего докажемъ, что *центръ наименьшаго круга данной системы точекъ, если онъ существуетъ, можетъ занимать лишь единственное положеніе* на плоскости. Иначе говоря, что не можетъ существовать двухъ наименьшихъ вмѣщающихъ круговъ одинаковыхъ радіусовъ, но съ различными центрами.

Допустимъ, что существуетъ два равныхъ наименьшихъ круга, центры которыхъ пусть будутъ O_1 и O_2. Такъ какъ каждый кругъ вмѣщаетъ всѣ данныя точки, то, очевидно, круги не



могутъ бутъ расположены одинъ внѣ другаго, и слѣдовательно, они должны имѣть общую площадь и двѣ точки пересѣченія; данныя же точки должны находиться на ихъ общей площади. Пусть O будетъ средина отрѣзка O_1O_2. Возьмемъ какую нибудь точку X на границѣ общей площади круговъ и точку M ихъ пересѣченія, лежащую по одну сторону съ X относительно прямой O_1O_2. Если X лежитъ на окружности центра O_2, то разсматривая треугольники MO_2O и XO_2O и замѣчая, что въ нихъ двѣ стороны одного равны порознь двумъ сторонамъ другаго, а углы, заключенные между этими сторонами не равны, и именно

$$\angle XO_2O < \angle MO_2O,$$

по извѣстной теоремѣ заключаемъ

$$OX < OM.$$

Отсюда вытекаетъ, что кругъ, описанный изъ O радіусомъ OM, вмѣститъ общую площадь круговъ O_1 и O_2, а слѣдовательно, и всѣ данныя точки. Но изъ прямоугольнаго треугольника MO_2O, въ которомъ OM есть катетъ и O_2M—гипотенуза, имѣемъ

$$OM < O_2M,$$

т. е., новый построенный кругъ меньше круговъ O_1 и O_2, почему каждый изъ послѣднихъ не есть наименьшій вмѣщающій. Такимъ образомъ, наше предложеніе доказано.

§ 3. *Всякій кругъ, вмѣщающій данныя точки и не проходящій черезъ двѣ изъ нихъ, не есть наименьшій изъ вмѣщающихъ.*

Дѣйствительно, предположимъ, что построенъ вмѣщающій кругъ, удовлетворяющій вышесказанному условію. Слѣдовательно, этотъ кругъ или не проходитъ ни чрезъ одну изъ точекъ, или проходитъ только чрезъ одну. Въ первомъ случаѣ, оставляя положеніе центра неизмѣннымъ, будемъ измѣнять кругъ, уменьшая непрерывно его радіусъ до тѣхъ поръ, пока окружность не достигнетъ нѣкоторой точки системы. Во второмъ случаѣ, когда кругъ проходитъ только чрезъ одну точку, напр., A_1, измѣняемъ кругъ, приближая его центръ къ точкѣ A_1 и заставляя окружность попрежнему проходить чрезъ A_1, пока не придемъ къ окружности, проходящей, кромѣ A_1 чрезъ нѣкоторую другую точку системы. Въ томъ и въ другомъ случаѣ мы отъ даннаго вмѣщающаго круга перейдемъ къ новому, вмѣщающему же, но меньшему, чѣмъ первоначально взятый, слѣдовательно, этотъ послѣдній не есть наименьшій.

Слѣдствіе. Наименьшій вмѣщающій кругъ данной системы точекъ, если онъ существуетъ, долженъ проходить черезъ двѣ точки системы.

§ 4. *Вмѣщающій кругъ, который проходитъ только черезъ двѣ точки системы и центръ котораго не лежитъ въ срединѣ разстоянія этихъ точекъ, не есть наименьшій.*

Дѣйствительно, измѣняя кругъ такимъ образомъ, чтобы онъ постоянно проходилъ чрезъ эти двѣ точки, и чтобы его центръ приближался къ срединѣ ихъ разстоянія, мы достигнемъ того, что или кругъ уменьшаясь и оставаясь вмѣщающимъ, встрѣтитъ третью точку системы, или же центръ его придетъ въ средину разстоянія двухъ точекъ. Какъ и прежде, заключаемъ, что первоначальный кругъ не есть наименьшій.

Слѣдствіе. Наименьшій кругъ данной системы, если онъ существуетъ, проходитъ болѣе, чѣмъ черезъ двѣ точки, или же только черезъ двѣ, и тогда его центръ лежитъ на срединѣ отрѣзка, соединяющаго эти двѣ точки. Легко видѣть, что въ этомъ послѣднемъ случаѣ разстояніе между двумя точками, чрезъ которыя проходитъ наименьшій кругъ, есть наибольшее изъ взаимныхъ разстояній точекъ системы.

§ 5. Изъ разсужденій предыдущихъ параграфовъ вытекаетъ, что наименьшій кругъ, вмѣщающій данную систему точекъ на плоскости *существуетъ*.

Въ самомъ дѣлѣ, результаты, вытекающіе изъ разсужденій §§ 3 и 4, могутъ быть формулированы слѣдующимъ образомъ:

Если намъ данъ кругъ, который вмѣщаетъ данную систему точекъ, не имѣетъ своимъ діаметромъ ни одного изъ отрѣзковъ, соединяющихъ какія либо двѣ изъ этихъ точекъ и не проходитъ черезъ три изъ нихъ, то можно построить кругъ *меньшаго* радіуса, который также вмѣщаетъ эти точки и либо имѣетъ одинъ изъ названныхъ отрѣзковъ своимъ діаметромъ, либо проходитъ черезъ три точки системы.

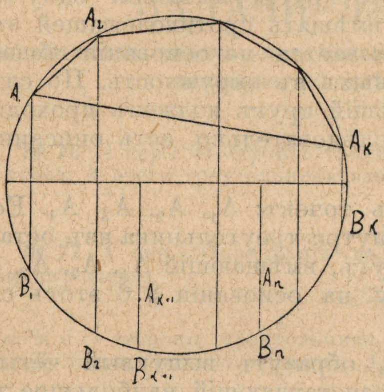
Поступимъ теперь слѣдующимъ образомъ: на наибольшемъ изъ отрѣзковъ, соединяющихъ данныя точки, какъ на діаметрѣ опишемъ окружность. Если существуетъ нѣсколько такихъ отрѣзковъ, имѣющихъ одинаковую максимальную длину, то построимъ по окружности на *каждомъ* изъ нихъ, какъ на діаметрѣ. Далѣе черезъ каждыя три точки нашей системы, не лежащія на одной прямой, проведемъ окружность. Изъ всѣхъ этихъ окружностей отберемъ тѣ, которыя вмѣщаютъ данную систему точекъ; что таковыя окажутся, вытекаетъ изъ формулированнаго въ началѣ этого параграфа предложенія. Изъ этихъ послѣднихъ окружностей выберемъ ту, которая имѣетъ наименьшій радіусъ; если таковыхъ окажется нѣсколько, выберемъ одну изъ нихъ. Утверждаемъ, что эта окружность (будемъ называть ее буквой C) *представляетъ собой наименьшую окружность, вмѣщающую данную систему точекъ*.

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ какую либо окружность C_1, вмѣщающую данную систему точекъ; если она не принадлежитъ къ числу построенныхъ нами сейчасъ окружностей, то согласно формулированному въ началѣ параграфа предложенію, среди построенныхъ нами окружностей и вмѣщающихъ данную систему точекъ, должна быть по крайней мѣрѣ одна меньшая, нежели C_1; стало быть окружность C_1 во всякомъ случаѣ больше нежели C. Если же окружность C_1 фигурируетъ среди построенныхъ нами окружностей, то и въ этомъ случаѣ она равна или больше окружности C. Теорема такимъ образомъ, доказана. Сопоставляя же этотъ результатъ съ теоремой § 2-го, мы заключаемъ, что среди построенныхъ нами окружностей, вмѣщающихъ данную систему точекъ, имѣется *только одна* наименьшая.

Изложенныя здѣсь соображенія, въ сущности, даютъ средство для построенія наименьшаго круга. Однако, это построеніе обыкновенно можетъ быть выполнено проще.

§ 6. *Всякій вмѣщающій кругъ, проходящій черезъ 3 или большее число точекъ системы, и центръ котораго не лежитъ внутри выпуклаго многоугольника, образуемаго этими точками, не есть наименьшій.*

Пусть A_1, A_2 . . . . A_k тѣ точки системы $A_1 \ldots . A_k \ldots A_n$, чрезъ которыя проходитъ разсматриваемый кругъ, въ порядкѣ



ихъ расположенія по окружности. Проведемъ діаметръ, не пересѣкающій периметра многоугольника A_1 . . . . A_k и не проходящей чрезъ его вершины, что возможно, такъ какъ по условію центръ круга лежитъ внѣ многоугольника A_1 . . . . A_k. Изъ всѣхъ точекъ системы опустимъ на діаметръ перпендикуляры, продолженія которыхъ пересѣкутъ полуокружность, не содержащую многоугольника $A_1 \ldots A_k$ въ точкахъ: B_1, ... B_n. Изъ отрѣзковъ: A_1B_1 . . . . . . A_nB_n (между которыми, какъ это легко видѣть, нѣтъ ни одного, равнаго нулю) выберемъ наименьшій, длина котораго пусть будетъ l, и затѣмъ, сохраняя кругъ неподвижнымъ, передвинемъ плоскость, содержащую точки, въ направленіи, перпендикулярномъ къ діаметру, въ сторону полукруга, не содержащаго многоугольника A_1 . . . . A_k, на нѣкоторое разстояніе, меньшее l. Тогда всѣ точки системы, сохраняя первоначальное относительное положеніе, очутятся внутри круга. Но мы уже видѣли, что кругъ, не проходящій ни чрезъ одну изъ точекъ системы, не есть наименьшій.

Слѣдствіе I. Центръ наименьшаго круга, проходящаго черезъ три или болѣе точекъ системы, помѣщается внутри выпуклаго многоугольника, образуемаго этими точками.

Слѣдствіе II. Если наименьшій кругъ проходитъ черезъ три точки, то онѣ образуютъ остроугольный треугольникъ.

§ 7. *Если наименьшій кругъ системы m точекъ: A_1, ... A_m вмѣщаетъ кромѣ того точки: A_{m+1}, ... A_{m+n}, то онъ есть наименьшій кругъ для всѣхъ $m + n$ точекъ.*

Дѣйствительно, онъ удовлетворяетъ тѣмъ двумъ условіямъ, которыми мы опредѣлили наименьшій кругъ: вмѣщаетъ всѣ точки и есть наименьшій изъ всѣхъ, потому что всякій другой кругъ меньшаго радіуса не вмѣститъ точекъ $A_1, \ldots A_m$.

§ 8. На основаніи вышеизложенныхъ теоремъ можно опредѣлить наименьшій кругъ для двухъ, трехъ и четырехъ точекъ.

Наименьшій кругъ для точекъ: A_1 и A_2 есть тотъ, который имѣетъ A_1A_2 діаметромъ, что слѣдуетъ изъ §§ 2 и 3.

Возьмемъ три точки: A_1, A_2, A_3. Есла треугольникъ $A_1A_2A_3$ тупоугольный, то кругъ, имѣющій сторону, противолежащую тупому углу, діаметромъ, будетъ вмѣщать вершину тупого угла и, по § 5 и только что сказанному о наименьшемъ кругѣ двухъ точекъ, будетъ таковымъ же кругомъ для A_1, A_2, A_3. Если же треугольникъ $A_1A_2A_3$ остроугольный, то кругъ, имѣющій одну изъ его сторонъ діаметромъ, не будетъ вмѣщать противолежащей этой сторонѣ вершины, что легко доказывается на основаніи общеизвѣстныхъ свойствъ угловъ, вписанныхъ въ окружность. По слѣдствію § 3 заключаемъ, что наименьшій кругъ долженъ проходить чрезъ всѣ три точки A_1, A_2, A_3 и, слѣдовательно, есть описанный кругъ треугольника $A_1A_2A_3$.

Разсмотримъ случай четырехъ точекъ: A_1, A_2, A_3, A_4. Если одна изъ точекъ, напр., A_4 лежитъ внутри треугольника изъ остальныхъ точекъ $A_1A_2A_3$, то всякій кругъ, вмѣщающій A_1, A_2, A_3, будемъ вмѣщать также и A_4, почему на основаніи § 6 этотъ случай сводится къ предыдущему.

Положимъ, что A_1, A_2, A_3, A_4 образутъ выпуклый четыреугольникъ. Выберемъ отрѣзокъ, представляющій наибольшее изъ взаимныхъ разстояній вершинъ. Пусть это будетъ A_1A_2. Если углы: $A_1A_3A_2$ и $A_1A_4A_2$ тупые, то кругъ, описанный на A_1A_2, какъ на діаметрѣ, содержитъ A_3 и A_4 и будетъ наименьшимъ вмѣщающимъ. Если же это обстоятельство не имѣетъ мѣста, то наименьшій кругъ проходитъ черезъ три или четыре точки системы. Убѣдившись въ послѣднемъ, обратимся къ разсмотрѣнію угловъ четыреугольника. Изъ равенства:

$$(A_1 + A_3) + (A_2 + A_4) = 360^0,$$

гдѣ A_1 и A_3, A_2 и A_4 противоположные углы четыреугольника $A_1A_2A_3A_4$, видно, что одна изъ суммъ $A_1 + A_3$ и $A_2 + A_4$ должна быть не менѣе 180^0.

Пусть

$$A_1 + A_3 \geqq 180^0.$$

Если

$$A_1 + A_3 > 180^0, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

то

$$A_2 + A_4 < 180^0 \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Одинъ изъ угловъ A_1 и A_3 долженъ быть тупой, другой — острый (если бы они оба были тупые, то наименьшій кругъ проходилъ бы только черезъ двѣ точки: A_2 и A_4). Пусть

$$A_1 > 90^0, \quad A_3 < 90^0.$$

Пользуясь неравенствомъ (2), можно показать, что кругъ $A_1A_2A_3$ не вмѣститъ точки A_4, а кругъ $A_1A_3A_4$—точки A_2. Кругъ $A_1A_2A_4$ не можетъ быть наименьшимъ, потому что треугольникъ $A_1A_2A_4$ тупоугольный (см. § 5). Остается кругъ $A_2A_3A_4$, который вмѣститъ точку A_1 (что слѣдуетъ изъ неравенства (1)) и будетъ наименьшимъ.

(Окончаніе слѣдуетъ).

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 76 (4 сер.). Построить треугольникъ ABC по сторонамъ b и c, зная, что уголъ A этого треугольника вдвое болѣе угла B.

П. Давидсонъ (Житоміръ).

№ 77 (4 сер.). Опредѣлить въ плоскости треугольника точку такъ, чтобы выраженіе

$$ax^2+by^2+cz^2,$$

гдѣ a, b, c — стороны треугольника, а x, y, z — соотвѣтственныя разстоянія искомой точки отъ его вершинъ A, B, C, было minimum.

Е. Григорьевъ (Казань)

№ 78 (4 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$x^2-3x-3y^2-y=0.$$

Л. Гальперинъ (Бердичевъ).

№ 79 (4 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$y.7^y-2x.3^y=44.$$

Н. С. (Одесса).

№ 80 (4 сер.). Если

$$2^m-1=ab,$$

гдѣ m, a и b—цѣлыя положительныя числа (причемъ $b>1$), то числа $a+1$ и $b-1$ дѣлятся на одну и ту же наивысшую степень 2-хъ.

(Journal de Mathématiques élémentaires).

№ 81 (4 сер.). Прямолинейный стержень, длиной въ 27,75 метра, наклоненъ къ горизонту подъ угломъ въ 45°. По длинѣ этого стержня скользитъ кольцо, вѣсомъ въ 20 килограммовъ. 1) Какова была бы скорость кольца въ концѣ паденія, если бы не было тренія? 2) Вслѣдствіе тренія эта скорость оказывается равной лишь 2 метрамъ. Опредѣлить количество теплоты, произведенной треніемъ, зная, что одна калорія эквивалентна 425 килограмметрамъ, и принимая ускореніе силы тяжести равнымъ 9,81 метрамъ.

Journal de Physique, Chimie et Histoire naturelle élémentaires (сообщилъ *М. Гербановскій*).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 9 (4 сер.). *Доказать, что числа вида $3n-1$, $5n+2$, $5n-2$, $7n+3$, $7n-1$, $7n-2$, гдѣ n число цѣлое, не могутъ быть точными квадратами.*

Пусть M— нѣкоторое цѣлое число, не равное нулю. Всякому цѣлому числу N можно дать видъ $Mq+r$, гдѣ q и r числа цѣлыя, причемъ абсолютная величина r не болѣе половины абсолютной величины M; условимся называть остаткомъ отъ дѣленія N на M число r, выбранное вышеуказаннымъ способомъ. При указанномъ способѣ выбора r ему придется иногда давать отрицательныя значенія. Во всякомъ случаѣ, при M *нечетномъ* всякое цѣлое число N при указанномъ способѣ выбора r можетъ давать лишь *одинъ* остатокъ, т. е. опредѣленному значенію N отвѣчаетъ лишь одно значеніе r. *) Если мы желаемъ найти остатокъ отъ дѣленія N^2 на M, то задача эта упрощается при помощи тожества:

$$N^2=(Mq+r)^2=M^2q^2+2Mqr+r^2.$$

Дѣйствительно, изъ этого тожества видно, что числа N^2 и r^2 при дѣленіи на M даютъ равные остатки. Полагая $M=3$, найдемъ, что r можетъ принимать значенія $0, \pm 1$, а r^2—значенія 0 или 1. Такимъ образомъ N^2 есть всегда число вида $3n$ или $3n+1$, но не вида $3n-1$; отсюда видно, что число вида $3n-1$ не есть точный квадратъ. Полагая $M=5$, найдемъ, что r можетъ принимать лишь значенія $0, \pm1, \pm2$, а остатокъ отъ дѣленія r^2, равный остатку N^2, рядъ значеній $0, 1, -1$, которые суть соотвѣтственно остатки чиселъ:

$$0, (\pm 1)^2, (\pm 2)^2.$$

Такимъ образомъ N^2 всегда есть число одного изъ видовъ $5n$, $5n\pm 1$, и потому числа вида $5n\pm 2$ не суть точные квадраты. Точно также при $M=7$ найдемъ

$$r=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3;$$

$$r^2=0,\ 1,\ 4,\ 9.$$

Остатки послѣдняго ряда чиселъ суть: 0, 1, —3, 2. Такимъ образомъ N^2 всегда будетъ числомъ одного изъ видовъ $7n$, $7n+1$, $7n-3$, $7n+2$, числа же $7n-1$, $7n+3$, $7n-2$ не суть точные квадраты.

Б. Мерцаловъ (Орелъ); *П. Полушкинъ* (Знаменка); *Г. Огановъ* (Эривань); *Л. Гальперинъ* (Бердичевъ); *Д. Дьяковъ* (Персіяновка).

№ 13 (4 сер.). *Доказать, что при n цѣломъ и положительномъ число*

$$3^{2(n+1)} \cdot 5^{2n} - 3^{3n+2} \cdot 2^{2n}$$

дѣлится на 117.

Изъ тожествъ

$$3^{2(n+1)} \cdot 5^{2n} - 3^{3n+2} \cdot 2^{2n} = 3^2(3^{2n} \cdot 5^{2n} - 3^{3n} \cdot 2^{2n}) = 3^2\{[(3.5)^2]^n - (3^3 \cdot 2^2)^n\} =$$

$$=3^2(225^n-108^n)$$

вытекаетъ, что предложенное выраженіе дѣлится на $225-108=117$; кромѣ

---

*) При M четномъ неопредѣленность при выборѣ r имѣетъ мѣсто лишь тогда, когда абсолютная величина r равна половинѣ абсолютной величины M.

того, видно, что предложенное выраженіе дѣлится и на $3^2 . 117 = 1053$.

Б. Мерцаловъ (Орелъ); *Ю. Рабиновичъ* (Одесса); *Н. Готлибъ* (Митава); *Л. Гальперинъ* (Бердичевъ).

№ 19 (4 сер.). *Найти цѣлые положительные корни уравненія*

$$2^{x^2+x-2} - 2^{x^2-4} = 992.$$

Представивъ предложенное уравненіе въ видѣ

$$2^{x^2+x-2} - 2^{x^2-4} = 2^5 . 31,$$

помножимъ обѣ части его на 2^4, а затѣмъ выведемъ въ лѣвой части за скобки множителя 2^{x^2}. Тогда получимъ:

$$2^{x^2}(2^{x+2}-1) = 2^9 . 31 \qquad (1).$$

При x цѣломъ и положительномъ множитель $2^{x+2}-1$ есть число нечетное, а потому высшая степень 2-хъ, на которую дѣлится лѣвая часть, есть 2^{x^2}; высшая же степень 2-хъ, на которую дѣлится правая часть, есть 2^9. Слѣдовательно

$$2^{x^2} = 2^9.$$

Единственное цѣлое положительное значеніе x, удовлетворяющее этому равенству, есть 3. Слѣдовательно, если только предложенное уравненіе имѣетъ цѣлый положительный корень, то этотъ корень долженъ равняться 3. Подставляя вмѣсто x число 3 въ лѣвую часть предложеннаго или же эквивалентнаго ему уравненія (1), убѣждаемся, что $x=3$ есть дѣйствительно цѣлый положительный корень.

А. Черевковъ (Новочеркасскъ); *Н. Готлибъ* (Митава); *Г. Огановъ* (Эривань); *П. Полушкинъ* (Знаменка); *Л. Гальперинъ* (Бердичевъ).

№ 20 (4 сер.). *Показать, что при x цѣломъ и положительномъ число*

$$(2x^2-2x+1)^{x^2-x+1} + (x^2-x+2)^{x^2+x+1}$$

дѣлится на 3, а число

$$(x^2+2)^{2x^2+1} + (4x^2+3)^{2x+1}$$

дѣлится на 5.

Положимъ

$$x^2-x+2 = M.$$

При x цѣломъ сумма

$$(x^2-x+2)+(2x^2-2x+1) = 3(x^2-x+1)$$

есть число, кратное 3-хъ, которое мы обозначимъ черезъ $3k$. Тогда

$$2x^2-2x+1 = 3k-M.$$

Такимъ образомъ

$$(2x^2-2x+1)^{x^2-x+1} + (x^2-x+2)^{x^2+x+1} = (3k-M)^{x^2-x+1} + M^{x^2+x+1}.$$

Примѣняя формулу бинома къ цѣлому положительному показателю x^2-x+1 и замѣчая, что лишь послѣдній членъ $(-M)^{x^2-x+1}$ разложенія $(3k-M)^{x^2-x+1}$ не содержитъ явно 3 множителемъ, мы убѣдимся, что остатокъ, получаемый отъ дѣленія даннаго выраженія на 3, равенъ остатку, полученному отъ числа

$$M^{x^2+x+1} + (-M)^{x^2-x+1},$$

которое мы обозначимъ черезъ P. Показатель $x^2-x+1=x(x-1)+1$ есть число нечетное, такъ какъ произведеніе 2-хъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ есть число четное. Поэтому

$$P=M^{x^2+x+1}-M^{x^2-x+1}=M^{x^2-x+1}(M^{2x}+1).$$

Всли M кратно 3-хъ, то M^{x^2-x+1}, а слѣдовательно и P дѣлится на 3. Число $M^{2x}-1=(M^2)^x-1$ дѣлится на M^2-1; при M не кратномъ 3-хъ число $M^2-1=M^{3-1}-1$ дѣлится, согланo съ теоремой Фермата *). на 3; поэтому и $M^{2x}-1$, а слѣдовательно и P при M не кратномъ 3-хъ дѣлится на 3. Итакъ предложенное выраженіе при x цѣломъ и положительномъ всегда дѣлится на 3.

Разсуждая подобнымъ же образомъ и вводя аналогичныя обозначенія, найдемъ:

$$x^2+2=M,\quad (x^2+2)+(4x^2+3)=5(x^2+1)=5k,$$

откуда

$$4x^2+3=5k-M.$$

$$P=M^{2x^2+1}+(-M)^{2x+1}=M^{2x^2+1}-M^{2x+1}=M^{2x+1}(M^{2x(x-1)}-1).$$

Если M кратно 5-ти, то и P кратно 5-ти. Пусть теперь M не кратно 5-ти. Число

$$M^{2x(x-1)}-1=(M^4)^{\frac{x(x-1)}{2}}-1,$$

гдѣ $\frac{x(x-1)}{2}$ число цѣлое, такъ какъ $x(x-1)$ при x цѣломъ кратно 2-хъ, дѣлится на M^4-1; но $M^4-1=M^{5-1}-1$ по теоремѣ Фермата **) дѣлится при M не кратномъ 5-ти на 5. Слѣдовательно и при M не кратномъ 5-ти P дѣлится на 5, а потому предложенное выраженіе всегда дѣлится на 5.

П. Полушкинъ (Знаменка); *Л. Гальперинъ* (Бердичевъ); *Н. Готлибъ* (Дубельнъ).

№ 23 (4 сер.). *Доказать, что число*

$$5^{2n+1}+2^{n+4}+2^{n+1}$$

при n цѣломъ и не меньшемъ нуля дѣлится на 23.

Подвергнемъ предложенное выраженіе слѣдующему ряду преобразованій:

$$5^{2n+1}+2^{n+4}+2^{n+1}=5.5^{2n}+2^4.2^n+2.2^n=5.5^{2n}+18.2^n=$$
$$=5.5^{2n}+18.2^n+5.2^n-5.2^n=5[(5^2)^n-2^n]+23.2^n=$$
$$=5[25^n-2^n]+23.2^n.$$

При n цѣломъ и положительномъ выраженіе 25^n-2^n дѣлится на $25-2=23$, а членъ 23.2^n очевидно дѣлится на 23; поэтому и предложенное выраженіе дѣлится на 23 безъ остатка. При n равномъ нулю предложенное выраженіе равно 23, а слѣдовательно также и въ этомъ случаѣ дѣлится на 23.

Н. Готлибъ (Митава); *Б. Мерцаловъ* (Орелъ); *І. Ставскій* (Одесса); *Л. Гальперинъ* (Бердичевъ); *Д. Дьяковъ* (ст. Персіяновка).

---

*) Вмѣсто пользованія теоремой Фермата, можно непосредственно изслѣдовать остатки отъ дѣленія на 3 чиселъ $(3n+1)^2$, $(3n-1)^2$.

**) Вмѣсто пользованія теоремой Фермата, можно непосредственно изслѣдовать остатки отъ дѣленія на 5 чиселъ $(5n\pm1)^4$, $(5n\pm2)^4$.

Редакторы: **В. А. Циммерманъ** и **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса, 14-го августа 1901 г.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.

Обложка
пщется

Обложка
ищется