

Обложка
щется



Обложка
щется

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

1 Сентября


 №. 303.
 

1901 г.

Содержаніе: Расширеніе нашихъ чувствъ. Проф. O. Wiener'a. Переводъ Д. Шора. — Элементарное доказательство теоремъ Гильдена. А. Вербрюсова. — Международный Союзъ Академій. — Научная хроника: 73 съѣздъ германскихъ естествоиспытателей и врачей въ Гамбургѣ. Празднество въ честь F. Gioja. — Разныя извѣстія: Отставка E. Mach'a. Международный конгрессъ по прикладной химіи. Международный конгрессъ для стрѣльбы съ цѣлью предотвращенія непогоды. Новая редакція журнала „Archiv der Mathematik und Physik“. Число студентовъ натуралистовъ и математиковъ въ Германіи. — Математическія мелочи: Признаки дѣлимости на 9 и на 11. — Задачи XXVIII—XXIX. Задачи для учащихся №№ 82—87 (4 серіи). — Рѣшенія задачъ (4 сер.), №№ 27, 31, 37. — Поправка. — Объявленія.

Расширеніе нашихъ чувствъ.

Вступительная лекція прочитанная 19-го мая 1900 г. *Otto Wiener*'омъ, ординарнымъ профессоромъ Лейпцигскаго Университета.

Перевелъ Д. Шоръ въ Геттингенъ.

Уже много разъ была высказана мысль, что каждое физическое наблюденіе зависитъ отъ двухъ факторовъ—отъ внѣшней природы и отъ нашей собственной организаціи, въ особенности отъ нашихъ внѣшнихъ чувствъ. Характерными примѣрами служить явленія субъективнаго контраста и сліянія изображеній быстро движущагося тѣла.

Но природа нашихъ чувствъ играетъ еще болѣе важную роль. Ученіе о звукѣ и свѣтѣ, два большихъ отдѣла физики, непосредственно связаны съ двумя важнѣйшими нашими чувствами. И не смотря на это, врядъ ли можно было бы въ какой либо наукѣ произвести менѣе логичное дѣленіе матеріала, нежели это сдѣлано въ физикѣ. Ибо на ряду со звукомъ и свѣтомъ мирно стоятъ магнетизмъ и электричество, двѣ области, развившіяся изъ наблюденій притяженій и отталкиваній опредѣленныхъ тѣлъ.

Отсюда—замѣчу вскользь—никомъ образомъ не слѣдуетъ, что такое раздѣленіе нужно уничтожить. Физика, и въ особен-

ности опытная, есть наука, основанная на наблюденіяхъ. По основному биогенетическому закону каждое живое существо переживаетъ въ сокращенной послѣдовательности развитіе всего своего рода. Точно такъ же вполне естественно при преподаваніи основъ опытной физики излагать въ сокращенномъ видѣ явленія, вообще говоря, въ томъ порядкѣ, въ какомъ наука ихъ добыла одно за другимъ; причемъ, понятно, сокращеніе обусловливаетъ многія отклоненія отъ историческаго хода ¹⁾).

Но какъ понять, что мы получаемъ свѣдѣнія о такомъ состояніи или явленіи, какъ магнетизмъ, безъ малѣйшаго непосредственнаго воздѣйствія его на наши чувства? Отвѣтъ, понятно, очень простъ; но весьма важно отнестись сознательно къ основному предложенію примѣняемаго здѣсь метода.

Магнитное желѣзо движется въ извѣстныхъ условіяхъ, на примѣръ вблизи куска желѣза, иначе, чѣмъ немагнитное желѣзо. Это движеніе мы познаемъ осязаніемъ или зрѣніемъ. Если бы въ какомъ-нибудь мѣстѣ нашего тѣла было сосредоточено достаточное количество нервныхъ клѣтокъ съ достаточно сильнымъ магнитнымъ веществомъ, то мы могли бы безъ помощи небесныхъ свѣтилъ на неизвѣстномъ намъ мѣстѣ земли отличать столь же точно Сѣверъ отъ Юга, какъ мы отличаемъ верхъ отъ низа. Буссоль, т. е. вращающаяся, горизонтально подвѣшенная магнитная стрѣлка замѣняетъ намъ такимъ образомъ особое магнитное чувство. Она выполняетъ это своимъ движеніемъ, которое мы познаемъ глазами.

Итакъ, явленіе природы, которое не дѣйствуетъ непосредственно на наши чувства, можетъ, несмотря на это, дѣйствовать на нихъ *посредственно*, если оно въ то же время обусловливаетъ другія измѣненія, на которыя наши чувства реагируютъ.

По сравненію съ естественными средствами нашихъ органовъ чувствъ, буссоль называютъ искусственнымъ средствомъ.

Но это различіе въ свою очередь искусственно, т. е. сдѣлано людьми. На самомъ дѣлѣ человекъ составляетъ лишь часть природы и законмѣрное теченіе измѣненій проходитъ черезъ

¹⁾ Съ 1895 года я постоянно развивалъ эту весьма понятную мысль въ вступительныхъ разсужденіяхъ къ моимъ лекціямъ по экспериментальной физикѣ. Позже я нашелъ ее въ двухъ мѣстахъ въ литературѣ. Именно ее высказываетъ профессоръ Dr. A. Schmidt въ Штутгартѣ, начиная слѣдующими словами одну лекцію (напечатано въ приложеніи къ газетѣ „Staats-Anzeiger für Württemberg“, 14. 8. 1897): Я „избралъ схему, по которой научное воспитаніе юношества представляется подобіемъ научнаго развитія чело-вѣчества“. — Далѣе профессоръ Dr. Hans Büchner въ Мюнхенѣ въ лекціи о подготовкѣ медиковъ (напечатанной въ журналѣ „Deutsche Revue“, 25. Jahrgang, 1. Bd., S. 347, 1900) говоритъ: „Итакъ, какъ естествоиспытатель, я пришелъ къ убѣжденію, что для образованія чело-вѣческаго духа самый естественный, а потому и самый вѣрный путь, состоитъ въ томъ, чтобы воспитанникамъ давалась такая пища, которая по возможности точно соотвѣтствуетъ общему ходу развитія чело-вѣческаго духа въ его главныхъ этапныхъ пунктахъ“.

него точно так же, как и чрезъ какую-либо другую часть природы. Съ точки зрѣнія теоріи эволюціи поступки павіана, который кагитъ на своего преслѣдователя камни, и солдата, стрѣляющаго пулями во врага, и подобнымъ же образомъ поведеніе собаки, которая подымаетъ отвислыя уши, чтобы лучше слышать, и человѣка, прикладывающаго руку къ уху или пользующагося слуховой трубкой, суть явленія однородныя, и только степенью отличаются одно отъ другого.

Точно также каждый новый инструментъ или соединеніе извѣстныхъ уже инструментовъ для новой цѣли представляется, съ точки зрѣнія теоріи эволюціи, новымъ шагомъ въ ходъ естественнаго развитія и расширенія нашихъ чувствъ, какъ успѣхъ въ приспособленіи къ нашей средѣ, какъ новое орудіе въ борьбѣ за существованіе.

Избирая эту мысль темою моею сегодняшней рѣчи, я не думалъ сказать этимъ что-либо новое. И въ самомъ дѣлѣ, вскорѣ затѣмъ я нашелъ въ одной изъ прекрасныхъ лекцій *Tyndall'*я ²⁾ ссылку на *Herbert'a Spencer'a*, который многосторонне и подробно развилъ эту мысль, уже 45 лѣтъ назадъ, въ своихъ началахъ психологіи. Я привожу здѣсь особенно важный отрывокъ ³⁾ изъ его сочиненія:

„Каждый инструментъ для наблюденія“, говоритъ онъ, „каждая гири, мѣра, вѣсы, микрометръ, нониусъ, микроскопъ, термометръ и т. д. есть только искусственное расширеніе чувствъ, а всѣ рычаги, винты, молоты, клинья, колеса, станки и т. п. представляютъ искусственное увеличеніе размѣровъ нашихъ членовъ“.

Хотя, такимъ образомъ, эта идея уже давно ясно высказана, хотя она и сама по себѣ очевидна и съ тѣхъ поръ навѣрное не одинъ разъ была высказана независимо отъ Спенсера, я всетаки рѣшилъ оставить ее исходной точкой моего настоящаго разсужденія. Прежде всего понятно, что *Spencer* не могъ вдаваться въ физическія частности. А именно въ этомъ заключается рядъ интересныхъ фактовъ, которые въ широкомъ кругу читателей еще мало извѣстны и, отчасти, 45 лѣтъ тому назадъ еще не были найдены. Кромѣ того, принятая при этомъ точка зрѣнія теоріи эволюціи даетъ въ высшей степени широкій взглядъ на мѣсто, занимаемое физикой по отношенію къ наукѣ и жизни.

Впрочемъ на этомъ выводѣ я останавлиюсь въ концѣ своей рѣчи. Теперь же я постараюсь ближе разсмотрѣть детали вопроса, въ какой мѣрѣ физика содѣйствуетъ расширенію нашихъ чувствъ.

²⁾ *John Tyndall*, Die Rede von Belfast, прочитанная въ Британской Ассоціаціи 19-го августа 1879 г., напечатана въ „Fragmenten aus den Naturwissenschaften“, II-ое авторизованное нѣмецкое изданіе, 2-ой томъ, Braunschweig, F. Vieweg & Sohn. S. 220, 1899.

³⁾ *Herbert Spencer*, „Die Principien der Biologie“, авторизованное нѣмецкое изданіе, 1-ый томъ, Stuttgart, E. Schweizerlartsche Verlagshandlung (E. Koch), S. 380, 1882. Первое англійское изданіе появилось въ 1885 г.

При этомъ мое изложеніе, за недостаткомъ мѣста, не можетъ быть полнымъ; я не въ состояніи также придерживаться строгой послѣдовательности.

* * *

Начнемъ съ одного изъ механическихъ чувствъ. Мы обладаемъ природною способностью извѣстнымъ образомъ опредѣлять вѣсъ предмета, лежащаго на нашей рукѣ или на какой-либо другой части нашего тѣла. Объ этой способности мы можемъ судить по существу въ трехъ направленіяхъ. Прежде всего по наименьшему вѣсу, давленіе котораго вообще можетъ вызвать въ насъ ощущеніе — это называется по *Fechner'у* ⁴⁾: *порогъ возбудимости* ощущеній давленія; затѣмъ по относительной разности двухъ вѣсовъ, которые мы еще въ состояніи различить другъ отъ друга — это называютъ по *Fechner'у* ⁴⁾ *порогомъ отношеній* ощущеній давленія; и наконецъ по наибольшему вѣсу, который мы еще можемъ опредѣлить непосредственно, на примѣръ который мы еще въ состояніи поднять — это называется по *Wundt'у* ⁵⁾ *высотой возбужденій*.

То что справедливо по отношенію къ ощущенію давленія или къ чувству давленія, имѣетъ подобнымъ же образомъ мѣсто и для другихъ чувствъ, а также по отношенію къ аппаратамъ. Мы наблюдаемъ въ нихъ всѣхъ порогъ возбудимости, порогъ отношеній и высоту возбужденій.

О высотѣ возбужденій замѣчу, что она существуетъ для отдѣльныхъ аппаратовъ, но не для цѣлаго класса послѣднихъ; если же принимать во вниманіе различные классы аппаратовъ, служащихъ для одинаковой цѣли, то о высотѣ возбужденій, пожалуй, и вовсе не можетъ быть рѣчи. Такъ на примѣръ, мы въ состояніи взвѣсить даже всю землю, правда лишь въ извѣстномъ переносномъ смыслѣ слова.

Относительно порога отношеній *Ernst Heinrich Weber* ⁶⁾ установилъ, что онъ для каждаго чувства въ извѣстныхъ границахъ почти не зависитъ отъ величины даннаго возбужденія. На примѣръ: на нашей рукѣ лежатъ 100 граммовъ; если снять 30 граммовъ ⁷⁾, то мы почувствуемъ облегченіе; если бы на рукѣ лежало 1000 граммовъ, то, чтобы почувствовать облегченіе необходимо было бы снять 300 граммовъ. Итакъ, надъ порогомъ возбудимости всегда наступаетъ одинаковое относительное облегче-

⁴⁾ *Gustav Theodor Fechner*, „Elemente der Psychophysik“, zweite Auflage, erster Teil, Leipzig, Breitkopf & Härtel, S. 2. 39. 1889.

⁵⁾ *Wilhelm Wundt*, „Grundzüge der physiologischen Psychologie“, vierte Auflage, 1. Bd., Leipzig, Wilhelm Engelmann, S. 334, 1893.

⁶⁾ См. *Fechner*, цит. выше. Стр. 64.

⁷⁾ См. тамъ же. Стр. 138.

ніе. Это одинъ изъ фактовъ, лежащихъ въ основаніи *психо-физическаго закона Weber-Fechner'a* ⁸⁾.

Приблизительно то же самое справедливо и по отношенію къ аппаратамъ, по крайней мѣрѣ, если мы будемъ принимать во вниманіе опять не отдѣльные аппараты, а цѣлый классъ ихъ. Въ такомъ случаѣ и здѣсь въ извѣстныхъ границахъ всегда будетъ достигаться та же относительная точность измѣренія.

Обратимся теперь къ числовому сравненію воспріимчивости нашихъ чувствъ къ давленію и чувствительности соотвѣтствующаго инструмента—вѣсовъ.

Опредѣленіе вѣса рукою достигаетъ только 30% точности; оно можетъ быть сдѣлано и болѣе точнымъ, если мы не ограничимся только ощущеніемъ давленія, а станемъ поднимать данный грузъ нѣсколько разъ вверхъ, т. е. если воспользуемся мускульнымъ чувствомъ производимой при этомъ работы. Число ошибокъ падаетъ въ такомъ случаѣ до 10%, порогъ отношеній достигаетъ такимъ образомъ одной десятой ⁹⁾.

Сравнимъ съ этимъ наши лучшіе точные вѣсы; они могутъ, при нагрузкѣ въ 1 килограммъ на каждой сторонѣ, показывать еще одну двухсотую часть миллиграмма ¹⁰⁾. Ихъ порогъ отношеній лежитъ поэтому около одной *двѣстимилліонной*, такъ что они въ двадцать милліоновъ разъ чувствительнѣе нашего тѣла по отношенію къ разности давленій. Изъ этого видно важное значеніе этого инструмента, порогъ отношеній котораго меньше, нежели во всѣхъ другихъ аппаратахъ. Химія, пользуясь имъ, поднялась до степени перворазрядной науки, и играетъ важную роль не только въ борьбѣ за существованіе, но и въ наслажденіи имъ.

Если бы мы были столь же чувствительны по отношенію къ грузу, какъ эти вѣсы, то мы бы замѣчали уменьшеніе вѣса при повышеніи руки только на 2 сантиметра, точно такъ же, какъ это отзывается на такихъ вѣсахъ, когда одна изъ чашекъ виситъ на 2 сантиметра выше другой. Если бы на глубинѣ одного метра подъ поверхностью земли лежалъ золотой шаръ, радіусомъ въ 35 сантиметровъ, то мы чувствовали бы его присутствіе, проходя надъ этимъ мѣстомъ, такъ какъ онъ замѣтно увеличивалъ бы вѣсъ нашего тѣла.

Порогъ возбудимости ощущеній давленія лежитъ для различныхъ частей тѣла между 1-имъ граммомъ и 1-имъ миллиграммомъ (приблизительно ¹¹⁾), т. е. меньшее давленіе еще не чув-

⁸⁾ По этому закону порогъ возбудимости въ извѣстныхъ границахъ не зависитъ отъ силы возбужденія, или, въ формулировкѣ *Fechner'a*, сила ощущенія въ этихъ границахъ пропорціональна логариному силы возбужденія (см. *Psychophysik Fechner'a*, 2. Bd., S. 13).

⁹⁾ См. *Fechner*, цит. выше. 1. Bd. S. 138.

¹⁰⁾ См. *Leo Grunmach*, „Die physikalischen Erscheinungen und Kräfte“, Leipzig, Otto Spamer, S. 35, 1899.

¹¹⁾ См. *Fechner*, цит. выше, 1 томъ, стр. 264. См. также *L. Hermann*, *Lehrbuch der Physiologie*, 11. Auflage, Berlin, August Hirschwald, S. 480, 1896. Здѣсь дано для подошвы невѣроятно большое значеніе въ 250 граммовъ.

ствуется. Наши же легчайшіе и абсолютно чувствительнѣйшіе вѣсы реагируютъ уже на одну десятитысячную миллиграмма ¹²⁾; они, такимъ образомъ, въ десять тысячъ разъ болѣе чувствительны, чѣмъ чувствительнѣйшія мѣста нашего тѣла. Они отклоняются уже, если на одну изъ чашекъ опустится пылинка въ $\frac{1}{16}$ миллиметра въ діаметрѣ. Поэтому для наблюденія ихъ необходимо ставить подъ колоколъ воздушнаго насоса.

При помощи вѣсовъ такой чувствительности *Warburg'y* и *Jhmori* ¹³⁾ удалось доказать существованіе [невидимо-тонкой водяной пленки, которою можетъ покрываться стекло даже въ очень мало влажномъ воздухѣ. Существованіе этой водяной пленки могло быть обнаружено, даже въ томъ случаѣ, когда она имѣла въ толщину только одну пятимилліонную миллиметра ¹⁴⁾.

Всестороннее давленіе, какъ атмосферное, мы не въ состояніи вообще воспринимать непосредственно *). Извѣстно, какой громадный шагъ впередъ въ познаніи атмосферныхъ явленій составило изобрѣтеніе *Torricelli* ртутнаго барометра. Но этотъ инструментъ еще сравнительно грубой природы. *Friedrich Kohlrausch* ¹⁵⁾ и *August Töpler* ¹⁶⁾ построили инструменты, которые непрерывно отмѣчаютъ малѣйшія колебанія атмосфернаго давленія, не ощущаемыя ртутнымъ барометромъ. *Töpler* въ своихъ вѣсахъ (*Libellenwage*) употребляетъ вмѣсто ртути ксулолъ, вещество почти въ 16 разъ болѣе легкое; трубка барометра поставлена не вертикально, а лишь слегка наклонена къ горизонту. При помощи этого инструмента можно опредѣлять колебанія давленія, которыя достигаютъ только сотой части одной милліонной атмосферы ¹⁷⁾. Этотъ аппаратъ ощущаетъ даже въ закрытой комнатѣ колебанія давленія, возникающія, когда вдали открывается дверь, или даже только, когда какой-нибудь человѣкъ пройдетъ сквозь открытую дверь. *Max Töpler* показалъ, что этотъ инструментъ указываетъ давленіе столба газа, который вѣситъ только одну тысячную миллиграмма ¹⁸⁾.

Какихъ удивительныхъ результатовъ могутъ достигнуть лица, чувства которыхъ—по природнымъ ли способностямъ или отъ упражненія—превышаютъ возбудимостью чувства средняго человѣка, показываютъ опыты чтецовъ чужихъ мыслей. Читаю.

¹²⁾ *Leo Grunmach*, цит. выше, стр. 35.

¹³⁾ *E. Warburg* и *J. Jhmori*, *Wied. Ann.* Bd. 27, S. 481, 1886.

¹⁴⁾ *J. Jhmori*, *Wied. Ann.* Bd. 31, S. 1012, 1887.

*) Это, очевидно, недосмотръ со стороны автора. Атмосферное давленіе не замѣчается нами не потому, что оно всестороннее давленіе (*ein allseitiger Druck*), а потому, что оно есть одно изъ неизмѣнныхъ и постоянныхъ условій нашего существованія. Всестороннее давленіе, которое мы испытываемъ при погруженіи въ воду, мы безъ труда замѣчаемъ.

Прим. переводчика.

¹⁵⁾ *F. Kohlrausch*, *Pogg. Ann.* Bd. 150, S. 423, 1873.

¹⁶⁾ *A. Töpler*, *Wied. Ann.* Bd. 56, S. 609, 1895.

¹⁷⁾ Тамъ же, S. 629.

¹⁸⁾ *M. Töpler*, *Wied. Ann.* Bd. 57, S. 323, 1896.

щей мысли ощущаетъ малѣйшія колебанія давленія произвольныхъ и безсознательныхъ подергиваній руки ведущаго лица, которое сосредоточенно и усиленно думаетъ о какомъ-нибудь словѣ, предметѣ, дѣйствиіи. Но аппаратъ, построенный психіатромъ *Robert'омъ Sommer'омъ* ¹⁹⁾ въ Гиссенѣ превзошелъ то, что можетъ сдѣлать лучшій чтець мыслей; этотъ аппаратъ даетъ возможность записывать произвольныя движенія ноги, руки, въ особенности пальцевъ. При этомъ движенія разлагаются, при помощи приспособленной къ тому системы рычаговъ, по тремъ основнымъ направленіямъ: впередъ—назадъ, направо—налѣво, вверхъ—внизъ; каждое изъ этихъ составляющихъ движеній записывается перомъ на вращающихся барабанахъ, такъ что одновременно возникаютъ три кривыя. Эти кривыя, напримѣръ, внезапно даютъ колебанія, когда произносятся задуманное слово, и этимъ выдаютъ произвольное движеніе. Этотъ аппаратъ служитъ, главнымъ образомъ, для опредѣленія тонкихъ различій нервныхъ болѣзней. Такъ, кривыя дрожанія у алкоголика не тѣ, что у паралитика.

Точно такъ же, какъ мы опредѣляемъ мельчайшія дрожанія человѣческаго тѣла, мы въ состояніи, при помощи соотвѣтствующихъ инструментовъ, опредѣлять мельчайшія колебанія земной поверхности. Для этой цѣли служитъ, между прочимъ, горизонтальный маятникъ—маятникъ качающійся въ почти горизонтальной плоскости; на его оси находится зеркало, отбрасывающее лучи небольшого источника свѣта на свѣточувствительную бумагу; эта бумага насажена на барабанъ, который приводится въ движеніе часовымъ механизмомъ. Такое автоматическое записываніе можетъ быть примѣнено ко всѣмъ инструментамъ, въ которыхъ измѣряются малые углы. Усовершенствованный *v. Rebeur-Paschwitz'омъ* ²⁰⁾ горизонтальный маятникъ даетъ на барабанѣ кривыя съ періодами, часто совершенно неожиданными ²¹⁾, объясненіе которыхъ обѣщаетъ намъ познаніе важныхъ соотношеній. Прежде же всего онъ записываетъ колебанія, которыя производятся землетрясеніями въ значительно отдаленныхъ мѣстностяхъ. Такъ, на инструментахъ, установленныхъ въ Страсбургѣ, замѣчались землетрясенія, происходившія въ Японіи ²²⁾.

(Окончаніе слѣдуетъ).

¹⁹⁾ *R. Sommer*, Zeitschrift f. Psychol. u. Physiol. d. Sinnesorgane von H. Ebbinghaus u. A. König, Bd. 16, S. 275, 1898.

²⁰⁾ *v. Rebeur-Paschwitz*, Nova acta der Kais. Leop.-Carol. Acad. Bd. 60, S. 1, 1894.

²¹⁾ *v. Rebeur-Paschwitz*, тамъ же, а также въ Beiträgen zur Geophysik, herausgegeben v. G. Gerland, Bd. 2, S. 211, 1895.

²²⁾ Тамъ же, S. 436.

Элементарное доказательство теоремъ Гильдена.

А. Веребрюсова.

Двѣ теоремы Гильдена даютъ простой и удобный способъ для вычисленія поверхностей и объемовъ тѣлъ вращенія. Для доказательства этихъ двухъ теоремъ пользуются обыкновенно приемомъ интегральнаго исчисленія. Однако, теоремы эти могутъ быть доказаны безъ труда посредствомъ элементарной геометріи и при томъ, съ такою простотою, что намъ представляется даже цѣлесообразнымъ предлагать ихъ въ видѣ упражненій ученикамъ средне-учебныхъ заведеній, въ особенности въ реальныхъ училищахъ.

Элементарное доказательство названныхъ двухъ теоремъ составляетъ предметъ настоящей статьи.

Предложеніе I. Если въ двухъ точкахъ M_1 и M_2 (фиг. 1), лежащихъ съ одной стороны прямой PQ и отстоящихъ отъ нея на разстояніяхъ x_1 и x_2 , сосредоточены массы m_1 и m_2 , то разстояніе (x) отъ той же прямой центра тяжести этихъ массъ выражается формулой:

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

Доказательство: пусть M будетъ центръ тяжести этихъ двухъ массъ; тогда

$$M_1 M : M_2 M = m_2 : m_1 \quad (1)$$

Фиг. 1.

Пусть N_1 , N , N_2 будутъ проэкціи точекъ M_1 , M , M_2 на прямую PQ . Полагая $M_1 N_1 < M_2 N_2$, проведемъ изъ точки M_1 прямую $M_1 N' N_2$ параллельно прямой PQ ; положимъ, что она пересѣчетъ проецирующіе перпендикуляры MN и $M_2 N_2$ въ точкахъ N' и N'_2 . Тогда, очевидно,

$$MN' : M_2 N'_2 = M_1 M : M_1 M_2; \quad (2)$$

то изъ соотношенія (1) мы видимъ, что

$$M_1 M : M_1 M_2 = m_1 : m_1 + m_2.$$

Подставляя это въ равенство (2) и замѣчая, что

$$M_2 N'_2 = x_2 - x_1,$$

находимъ:

$$MN' = \frac{m_1 (x_2 - x_1)}{m_1 + m_2}.$$

Отсюда

$$x = MN' + N'N = \frac{m_1(x_2 - x_1)}{m_1 + m_2} + x_1 = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}.$$

Изъ симметріи формулы мы заключаемъ, что мы получимъ тотъ же результатъ, если $M_2N_2 < M_1N_1$. Наконецъ, если $M_1N_1 = M_2N_2$, то $x = x_1 = x_2$ и предыдущая формула, очевидно, остается справедливой.

Предложеніе II. Если отрѣзокъ M_1M_2 , длина котораго равна m , весь расположенъ съ одной стороны оси PQ , то поверхность, которую онъ описываетъ при вращеніи вокругъ этой оси, равна произведенію изъ длины отрѣзка на окружность круга, описываемаго при этомъ вращеніи центромъ тяжести M отрѣзка.

Доказательство. Положимъ, что ни одна изъ точекъ M_1M_2 не лежитъ на оси и что разстоянія этихъ точекъ отъ оси суть x_1 и x_2 . Поверхность, описываемая отрѣзкомъ при вращеніи, равна $\pi m(x_1 + x_2)$; но такъ какъ центръ тяжести M лежитъ въ этомъ случаѣ на серединѣ отрѣзка M_1M_2 , то разстояніе x точки M отъ оси равняется $\frac{1}{2}(x_2 + x_1)$. Предыдущее выраженіе поверхности вращенія можетъ быть поэтому представлено въ видѣ $m \cdot 2\pi x$; это обнаруживаетъ справедливость высказаннаго предложенія.

Если одна изъ точекъ, скажемъ M_1 , лежитъ на оси, то конечная поверхность, описываемая отрѣзкомъ равна $2\pi m x_2$. Но въ этомъ случаѣ разстояніе x центра тяжести M отрѣзка отъ оси равняется $\frac{1}{2}x_2$. Предыдущее выраженіе можетъ быть поэтому опять таки представлено въ видѣ $m \cdot 2\pi x$.

Предложеніе III. Если ломанная линія цѣликомъ расположена съ одной стороны оси PQ , то поверхность, описываемая ею при вращеніи вокругъ этой оси, равняется произведенію изъ длины ломанной на окружность, описанную при этомъ вращеніи центромъ тяжести ломанной линіи.

Доказательство. Докажемъ наше предложеніе индуктивнымъ приѣмомъ. Предположимъ, что наше предложеніе справедливо, когда ломанная состоитъ изъ n отрѣзковъ; докажемъ, что оно справедливо, когда ломанная состоитъ изъ $n+1$ отрѣзковъ.

Отъ нашей ломанной отдѣлимъ одинъ изъ составляющихъ ее отрѣзковъ; если ломанная разомкнута, то мы отдѣлимъ первый или послѣдній отрѣзокъ; если же она замкнута, то можно отдѣлить произвольный отрѣзокъ. Этимъ путемъ мы разобьемъ нашу ломанную, состоящую изъ $n+1$ отрѣзковъ, на двѣ части: на ломанную, состоящую изъ n отрѣзковъ и одинъ прямолинейный отрѣзокъ. Обозначимъ длину ломанной, содержащей n отрѣзковъ, черезъ m_1 , разстояніе центра тяжести ея M_1 отъ оси черезъ x_1 ; длину $(n+1)$ -го отрѣзка обозначимъ черезъ m_2 , а разстояніе центра его тяжести M_2 черезъ x_2 . Согласно сдѣланному предположенію съ одной стороны и предыдущему предположенію съ дру-

гой стороны, поверхности, описанныя двумя частями нашей линіи, равны $2\pi m_1 x_1$ и $2\pi m_2 x_2$. Следовательно поверхность, описанная всей ломанной линіей, равна $2\pi(m_1 x_1 + m_2 x_2)$. Теперь обозначимъ длину всей ломанной черезъ m , а разстояніе центра тяжести ея M отъ оси черезъ x . Такъ какъ мы можемъ смотрѣть на точку M , какъ на центръ тяжести двухъ массъ m_1 и m_2 , сосредоточенныхъ въ точкахъ M_1 и M_2 , то по предложенію I

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = (m_1 + m_2)x = mx.$$

Поэтому поверхность, описанная всей ломанной линіей, можетъ быть представлена въ видѣ $m \cdot 2\pi x$, чѣмъ и доказывается предложеніе по отношенію къ ломанной, состоящей изъ $n + 1$ отрѣзковъ.

Такъ какъ предложеніе справедливо, когда ломанная сводится къ одному отрѣзку, то оно остается справедливымъ, изъ сколькихъ бы отрѣзковъ ломанная не состояла.

Первая теорема Гильдена: Если кривая L лежитъ цѣликомъ съ одной стороны оси PQ , то поверхность, описываемая ею при вращеніи вокругъ этой оси, равняется произведенію изъ длины кривой на длину окружности, описанной центромъ тяжести кривой при этомъ вращеніи.

Доказательство. Обозначимъ длину кривой L черезъ l , а разстояніе центра ея тяжести M отъ оси черезъ x . Впишемъ въ кривую ломанную, состоящую изъ n сторонъ; ея длину обозначимъ черезъ l_n , а разстояніе центра ея тяжести M_n отъ оси черезъ x_n . Наконецъ поверхности, описанныя при вращеніи кривой и ломанной, черезъ S и S_n . Согласно предложенію III

$$S_n = l_n \cdot 2\pi x_n.$$

Если теперь будемъ увеличивать неопредѣленно числа сторонъ многоугольника, неопредѣленно уменьшая его стороны, то S_n , l_n и x_n стремятся къ предѣламъ S , l и x . Поэтому

$$S = l \cdot 2\pi x.$$

Примѣръ. Определить поверхность, описываемую окружностью, расположенной съ одной стороны оси при вращеніи вокругъ этой оси.

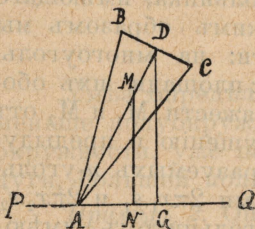
Длина окружности равна $2\pi r$; если разстояніе центра отъ оси равно h , то длина окружности, описанной центромъ тяжести кривой, равна $2\pi h$. Поэтому искомая поверхность вращенія равна $4\pi^2 hr$.

Если $h=r$, т. е. если окружность касается оси, то поверхность вращенія равна $4\pi^2 r^2$. Если окружность вращается вокругъ одной изъ своихъ касательныхъ, то она описываетъ окружность, равную площади квадрата, сторона котораго равна длинѣ окружности.

Предложеніе IV. Если треугольникъ ABC лежитъ цѣликомъ съ одной стороны оси PQ , то объемъ тѣла вращенія, описываемаго этимъ треугольникомъ при вращеніи вокругъ оси, вы-

ражается произведениемъ изъ площади треугольника на окружность, описываемую при этомъ вращеніи центромъ тяжести треугольника.

Доказательство. Рассмотримъ сначала случай, когда вершина А треугольника ABC (фиг. 2) лежитъ на оси. Извѣстно, что въ этомъ случаѣ объемъ описываемаго треугольникомъ тѣла вращенія выражается произведениемъ изъ поверхности, описываемой стороной BC, на разстояніе стороны BC отъ вершины А. Обозначимъ длину BC черезъ a , разстояніе этой стороны отъ вершины А черезъ h , середину отрезка BC черезъ D, разстояніе точки D отъ оси черезъ l и наконецъ площадь треугольника ABC черезъ Δ .



Фиг. 2.

Поверхность, описываемая отрезкомъ BC, согласно первой теоремѣ Гильдена, равна $2\pi a.l$. Поэтому объемъ описываемаго треугольникомъ тѣла вращенія равенъ $\frac{2}{3}\pi a.lh$ или, замѣняя ah черезъ 2Δ , $\frac{4}{3}\pi l\Delta$. Центръ тяжести М треугольника ABC лежитъ на прямой AD на разстояніи $\frac{2}{3}AD$ отъ вершины; слѣдовательно разстояніе его x отъ оси равно $\frac{2}{3}l$. Предыдущее выражение можно, стало быть, представить въ видѣ $2\pi x.\Delta$, чѣмъ и доказывается высказанное предложеніе для рассмотрѣннаго частнаго случая.

Положимъ теперь, что ни одна изъ вершинъ треугольника не лежитъ на оси; положимъ, что продолженіе одной изъ сторонъ, скажемъ сторона АВ, встрѣтитъ ось въ точкѣ Е (мы предполагаемъ, что точка А лежитъ между В и Е). Центры тяжести треугольниковъ ABC, EAC, EBC обозначимъ черезъ M_1 , M_2 и М; разстояніе ихъ отъ вершины черезъ x_1 , x_2 и x , а площади соответствующихъ треугольниковъ черезъ Δ_1 , Δ_2 и Δ . Согласно предыдущему предложенію, объемы тѣлъ, образуемыхъ вращеніемъ треугольниковъ ABC и AEC, имѣютъ значенія: $2\pi x_1.\Delta_1$ и $2\pi x_2.\Delta_2$. Слѣдовательно объемъ тѣла, образуемаго вращеніемъ треугольника ABC, равняется $2\pi(\Delta x - \Delta_1 x_1)$. Съ другой стороны точку М мы можемъ разсматривать, какъ центръ тяжести двухъ массъ Δ_1 и Δ_2 , сосредоточенныхъ въ точкахъ M_1 и M_2 . Стало быть, согласно предложенію I,

$$\Delta x = (\Delta_1 + \Delta_2)x = \Delta_1 x_1 + \Delta_2 x_2.$$

Подставляя это выраженіе въ найденную выше формулу объема тѣла, образуемаго вращеніемъ треугольника ABC, мы представимъ его въ видѣ $2\pi x_1.\Delta_1$ и тѣмъ докажемъ предложеніе въ самомъ общемъ случаѣ.

Предложеніе V. Если многоугольникъ расположенъ весь съ одной стороны оси, то объемъ образуемаго имъ при вращеніи вокругъ этой оси тѣла вращенія выражается произведениемъ изъ его площади на длину окружности, описываемой при этомъ вращеніи его центромъ тяжести.

Доказательство. Предыдущее предположеніе обнаруживает справедливость высказанной теоремы, когда многоугольникъ имѣетъ три стороны. Предположимъ теперь, что она справедлива также для многоугольника, имѣющаго n сторонъ. Докажемъ, что она справедлива и для многоугольника, имѣющаго $n+1$ сторонъ.

Въ самомъ дѣлѣ, отбѣчемъ отъ многоугольника, имѣющаго $(n+1)$ сторонъ, діагональю треугольникъ. Такимъ образомъ мы разобьемъ нашъ многоугольникъ на двѣ части: на многоугольникъ, имѣющій n сторонъ, и на треугольникъ; площади ихъ обозначимъ черезъ s_1 и s_2 , разстояніе центровъ тяжести M_1 и M_2 отъ оси черезъ x_1 и x_2 . Согласно сдѣланному допущенію и предыдущему предположенію объемъ тѣла вращенія, образуемыхъ n -угольникомъ и треугольникомъ выразится формулами $2\pi x_1 s_1$ и $2\pi x_2 s_2$. Объемъ тѣла вращенія, образуемаго многоугольникомъ, имѣющимъ $(n+1)$ сторонъ, равенъ $2\pi (s_1 x_1 + s_2 x_2)$. Если теперь обозначимъ черезъ s и x площадь $(n+1)$ -угольника и разстояніе его центра тяжести отъ оси, то

$$s_1 x_1 + s_2 x_2 = sx$$

Объемъ тѣла вращенія и въ этомъ случаѣ выразится формулой

$$2\pi x \cdot s.$$

Вторая теорема Гильдена. Если замкнутая линія цѣликомъ расположена съ одной стороны оси, то объемъ тѣла вращенія, образуемаго площадью, которую оно ограничиваетъ, при вращеніи вокругъ оси, равенъ произведенію изъ этой площади на окружность, описываемую при этомъ вращеніи ея центромъ тяжести.

Доказательство. Вписываемъ въ кривую замкнутую ломанную линію и доказываемъ теорему методами предѣловъ подобно тому, какъ мы доказали первую теорему.

Примѣръ. Если кругъ, центръ котораго отстоитъ отъ оси на разстояніи h , вращается вокругъ нея, то онъ образуетъ тѣло, объемъ котораго равенъ $2\pi r^2 h$.

Замѣчаніе. Если поверхность или объемъ тѣла вращенія могутъ быть опредѣлены непосредственно, то теоремы Гильдена даютъ средство опредѣлить положеніе центра тяжести дуги или площади.

Примѣръ 1. Опредѣлить положеніе центра тяжести дуги круга АВ.

Обозначимъ середину этой дуги черезъ С, центръ черезъ О. Ясно, что центръ тяжести дуги М лежитъ на радіусѣ ОС; требуется только опредѣлить его разстояніе отъ вершины. Дугу АВ обозначимъ черезъ l , хорду ея черезъ c , разстояніе ОМ черезъ x , радіусъ круга черезъ r . Предполагая, что дуга АВ меньше полуокружности, проведемъ діаметръ, параллельный хордѣ АВ. При вращеніи вокругъ оси дуга АВ опишетъ сферическій поясъ, поверхность котораго равна $2\pi r \cdot c$. Съ другой стороны эта поверх-

ность вращения по первой теоремѣ Гильдена равна $2\pi lx$. Слѣдовательно

$$2\pi lx = 2\pi rc, \quad x = r \cdot \frac{c}{l}.$$

Если уголъ $\text{AOB} = 2\alpha$, то $l = 2r\alpha$, $c = 2r\sin\alpha$ и слѣдовательно

$$x = r \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Умѣя опредѣлять положеніе центра тяжести дуги, которая меньше полуокружности и зная положеніе центра тяжести всей окружности, уже нетрудно опредѣлить положеніе центра тяжести дуги, большей полуокружности.

Примѣръ 2. Опредѣлить положеніе центра тяжести кругового сектора AOB .

Сохраняя обозначеніе и построеніе, сдѣланное при рѣшеніи въ предыдущей задачѣ, замѣтимъ, что объемъ сферическаго сектора, описываемаго круговымъ секторомъ при вращеніи вокругъ діаметра, равенъ $\frac{2}{3} \pi r^2 c$. Площадь кругового сектора равна $\frac{lr}{2}$.

Если поэтому x означаетъ разстояніе центра тяжести кругового сектора отъ центра, то тотъ же объемъ, по второй теоремѣ Гильдена, имѣетъ значеніе πlrx . Стало быть,

$$\pi lrx = \frac{2}{3} \pi r^2 c; \quad x = \frac{2}{3} r \frac{c}{l} = \frac{2}{3} r \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Зная положеніе центра тяжести кругового сектора и треугольника AOB , можно опредѣлить положеніе центра тяжести кругового сегмента.

Международный Союзъ Академій.

*L'association internationales des Academies. *)*

Небольшое число международныхъ научныхъ учреждений обогатилось новой ассоціаціей, которой предстоитъ, вѣроятно, играть значительную роль въ дѣлѣ объединенія народовъ на поприщѣ научнаго изслѣдованія.

Еще Лейбницъ предлагалъ устроить Союзъ важнѣйшихъ академій всего міра для совмѣстныхъ научныхъ изслѣдованій. Цѣлесообразность и даже необходимость такой ассоціаціи въ настоящее время очевидна. Многія научныя изслѣдованія требуютъ

*) См. „Journal des Savants“, Janvier 1901 p. 1. „L'Enseignement Mathématique“ 1901. № 2 p. 121. Статья въ „J. des Savants“ принадлежитъ математику G. Darboux, который игралъ важную роль въ дѣлѣ организаціи „Союза“.

такихъ предпріятій, которыя сопряжены съ огромными затратами, могутъ быть приведены въ исполненіе лишь при участіи значительнаго числа специалистовъ, нуждаются въ многостороннемъ обсужденіи наиболѣе компетентныхъ ученыхъ. Такъ какъ въ успѣхахъ такихъ предпріятій въ одинаковой мѣрѣ заинтересованы всѣ культурныя страны, то сопряженные съ ними трудности должны естественно по возможности равномѣрно распребляться между народами, пользующимися благами цивилизаціи. Необходимо компетентный органъ, который могъ бы обсудить и организовать такія предпріятія.

Лондонское Королевское Общество (Royal Society) приняло въ концѣ истекшаго десятилѣтія изданіе библиографическаго указателя, который содержалъ бы перечень всѣхъ работъ, появившихся въ XIX столѣтіи и принадлежащихъ области точныхъ наукъ. Выпущенные К. Обществомъ 11 томовъ in 4^o доводятъ этотъ перечень до 1884 г. Но статьи расположены по авторамъ въ алфавитномъ порядкѣ. Это чрезвычайно умаляетъ значеніе изданія, такъ какъ пользоваться имъ крайне затруднительно. Въ настоящее время было бы гораздо важнѣе имѣть списокъ научныхъ сочиненій, расклассифицированный по предметамъ изслѣдованія. Королевское Общество намѣрено издать и такой указатель. Но даже непосвященному во всѣ трудности библиографической работы ясно, что этотъ огромный трудъ можетъ быть выполненъ лишь при совмѣстной работѣ ученыхъ всѣхъ цивилизованныхъ націй.

По примѣрному подсчету Королевскаго Общества годичный каталогъ работъ, относящихся къ точнымъ наукамъ, съ самыми краткими указаніями относительно ихъ содержанія, долженъ содержать около 200.000 страницъ. „Не ясно ли, замѣчаетъ по этому поводу Darboux, что намъ грозитъ повтореніе вавилонскаго столпотворенія, если мы не объединимъ этихъ изслѣдованій. Сколько времени теряютъ напрасно изслѣдователи, сколько дѣлается бесполезныхъ — и вслѣдствіе этого вредныхъ — изысканій, если номенклатура мѣняется отъ націи къ націи, если классификація не согласована, если инструменты, употребляемые для производства однихъ и тѣхъ же измѣреній въ различныхъ странахъ, даютъ несравнимые результаты, если опредѣленія расходятся, единицы несоизмѣримы!“

Этими нуждами были вызваны къ жизни нѣкоторыя научныя международныя учрежденія, существующія уже около четверти вѣка. Важнѣйшія изъ нихъ — „Международная Геодезическая Ассоціація“ („Association géodésique internationale“), „Международное Бюро Мѣръ и Вѣсовъ“ („Bureau international des poids et mesures“). Но это учрежденія спеціальныя, имѣющія каждое строго опредѣленную задачу.

Въ началѣ истекшаго десятилѣтія возникъ однако союзъ, имѣющій болѣе общую задачу. Союзъ этотъ образовали четыре нѣмецкихъ учрежденія: „Вѣнская Академія Наукъ, Геттингенское

Ученое Общество, Лейпцигское Ученое Общество и Мюнхенская Академія Наукъ“. („Die Kartellirten Academien und gelehrten Gesellschaften“). Союзъ поставилъ своей задачей объединить и согласовать труды академій и обществъ, входящихъ въ составъ его, организовывать общими средствами научныя предпріятія, издавать сочиненія, требующія совмѣстной обработки и т. д. Не смотря на сравнительно кратковременное существованіе, союзъ этотъ не только доказалъ свою жизнеспособность, но успѣлъ проявить плодотворную дѣятельность. Подъ его верховнымъ надзоромъ выходилъ „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften“*) и „Thesaurus linguae latinae“. Онъ организовалъ новые пункты, въ которыхъ производятся постоянныя наблюденія варіацій силы тяжести; онъ создалъ постоянный фондъ, субсидирующий ученыхъ, отправляющихся для обозрѣнія единственной въ своемъ родѣ ботанической станціи Buitenzorg на островѣ Явѣ, онъ систематически обработалъ проэктъ германской экспедиціи къ южному полюсу, онъ изыскалъ средства для экспедиціи въ восточную Африку, которая въ настоящее время уже заканчиваетъ свои труды; онъ организовалъ систематическія наблюденія надъ колебаніемъ земной коры въ центральной Европѣ и т. д. Соединенныя академіи устраивали ежегодные сѣзды своихъ представителей, которые руководили дѣятельностью союза.

Къ этому Союзу обратилось въ 1897 г. Лондонское Королевское Общество съ дѣлью устроить совѣщаніе по поводу принятаго ими библиографическаго изданія, о которомъ мы говорили выше. Союзъ пригласилъ представителей К. Общества на ближайшій сѣздъ, состоявшійся въ Геттингенѣ во время пасхи 1898 г. На этотъ же сѣздъ были приглашены также представители Берлинской Академіи Наукъ. На этомъ собраніи, которое посѣтили уже такимъ образомъ представители наиболѣе значительныхъ ученыхъ учреждений Европы, зародилась мысль о реализаціи идеи Лейбница—созданія ассоціаціи академій всего міра.

Инициативу въ этомъ дѣлѣ взяла на себя Берлинская Академія Наукъ. Она разослала важнѣйшимъ академіямъ предложеніе созвать конференцію для разработки этого вопроса. Лондонское Общество взяло на себя нелегкую дипломатическую задачу склонить Парижскую Академію Наукъ принять участіе въ союзѣ, возникающемъ по инициативѣ германскихъ ученыхъ. Во всякомъ случаѣ соглашеніе состоялось и на 9-ое октября 1899 г. была назначена конференція въ Висбаденѣ. На конференцію прибыли слѣдующіе делегаты:

- 1) Отъ Берлинской Академіи Наукъ Auwers, Virchow и Diels.
- 2) Отъ Геттингенскаго Ученаго Общества Ehlers и Léo.
- 3) Отъ Лейпцигскаго Ученаго Общества Windisch и Wislencus.

*) См. № 289 „Вѣстника“.

4) Отъ Лондонскаго Королевскаго Общества Rücker, Armstrong и Schuster.

5) Отъ Мюнхенской Академіи Наукъ Zittel, W. Dyck и v. Sicherer.

6) Отъ Парижской Академіи Наукъ Darboux и Moissan.

7) Отъ С.-Петербургской Академіи Наукъ А. С. Фаминцынъ и К. Т. Залеманъ.

8) Отъ Вѣнской Академіи Наукъ Gomperz, Massaffia, v. Lang и Lieben.

9) Отъ Вашингтонской Національной Академіи Newcomb, Remsen и Bowditch.

Изъ приглашенныхъ Академій только Римская Академія dei Lincei не прислала представителей, но изъявила согласіе присоединиться къ постановленіямъ конференціи.

Берлинская Академія представила конференціи проектъ Устава предполагаемаго Союза, который былъ принятъ съ несущественными измѣненіями.

Вотъ въ чемъ заключается въ общихъ чертахъ такъ называемый „Висбаденскій Уставъ“.

Академіи и ученые общества, представленныя на Висбаденской Конференціи, образуютъ Союзъ, который ставитъ себѣ задачей готовить и организовывать научные труды и предприятия всякаго рода, имѣющіе общій интересъ, и вообще облегчать общеніе между народами на поприщѣ научнаго изслѣдованія.

Къ участию въ Союзѣ на равныхъ правахъ съ учредителями приглашаются слѣдующія учрежденія:

1) Королевская Академія Наукъ въ Амстердамѣ, 2) Бельгійская Академія наукъ, литературы и изящныхъ искусствъ въ Брюсселѣ, 3) Венгерская Академія Наукъ въ Будапештѣ, 4) Ученое Общество въ Христіаніи, 5) Королевское Ученое Общество въ Копенгагенѣ, 6) Королевская Академія историческихъ наукъ въ Мадридѣ, 7) Академія надписей въ Парижѣ, 8) Академія нравственно-политическихъ наукъ въ Парижѣ, 9) Шведская Академія Наукъ въ Стокгольмѣ.

По предложенію одной изъ Академій, входящихъ въ составъ Союза, къ нему могутъ быть присоединены и другія ученые учрежденія; но они должны получить на выборахъ не менѣе двухъ третей голосовъ (каждому учрежденію, входящему въ составъ Союза, принадлежитъ, конечно, одинъ голосъ).

Органами Союза являются: а) Общее собраніе, б) Комитетъ. Общее Собраніе Союза созывается Президентомъ Комитета въ очередномъ порядкѣ черезъ каждые три года. По предложенію Комитета или по предложенію одной изъ Академій Союза, принятому Комитетомъ, оно можетъ быть созвано раньше или позже очереди. На Общее Собраніе каждая Академія посылаетъ столько членовъ, сколько она находитъ нужнымъ, но при этомъ она из-

бираетъ одного, который во время голосованія вотируетъ отъ имени всей делегаціи.

Общее Собраніе распадается на двѣ секціи: секцію науки и секцію литературы. Каждая Академія можетъ посылать делегатовъ въ обѣ секціи или только въ одну—по своему усмотрѣнію. Вопросы рѣшаются большинствомъ голосовъ; но если дѣло идетъ о какомъ либо предпріятіи, то рѣшеніе большинства не обязательно для остальныхъ Академій въ томъ смыслѣ, что каждая изъ нихъ сохраняетъ за собой право присоединиться или не присоединиться къ этому предпріятію.

Каждое Общее Собраніе избираетъ мѣсто ближайшаго собранія при одной изъ Академій Союза. Эта Академія считается въ теченіе трехлѣтія между двумя общими собраніями *главствующей*. Ея представитель состоитъ въ теченіе этого трехлѣтія Президентомъ Комитета. Комитетъ представляетъ Союзъ въ промежуткѣ между двумя общими собраніями. Каждая Академія назначаетъ изъ своей среды двухъ членовъ комитета или одного, смотря по тому, принимаетъ ли она участіе въ обѣихъ секціяхъ или только въ одной изъ нихъ. Во всякомъ случаѣ она располагаетъ въ Комитетѣ только однимъ голосомъ.

Всякое предложеніе, сдѣланное одной изъ Академій, направляется въ Комитетъ, который по обсужденіи направляетъ его во всѣ Академіи. По полученіи отвѣтовъ Академій вопросъ считается рѣшеннымъ или предоставляется обсужденію ближайшаго Общаго Собранія, если въ этомъ смыслѣ высказались по крайней мѣрѣ двѣ Академіи.

Комитетъ исполняетъ свою задачу частью собраніями въ полномъ составѣ, частью при посредствѣ комиссій, частью путемъ переписки. Каждому Общему Собранію онъ представляетъ отчетъ о своей дѣятельности и слагаетъ свои полномочія къ концу того же гражданскаго года.

Конференція постановила также, что Союзъ долженъ считаться открытымъ, коль скоро со стороны шести Академій послѣдуетъ ратификація устава. Ратификація должна быть произведена извѣщеніемъ Берлинской Академіи Наукъ.

Къ февралю 1900 г. послѣдовала ратификація съ стороны трехъ французскихъ академій, Берлинской, Вѣнской, Петербургской Академіи и Геттингенскаго Ученаго Общества. Берлинская Академія Наукъ объявила Союзъ открытымъ. Позже присоединились и остальные учрежденія, какъ представленныя на конференціи въ Висбаденѣ, такъ и приглашенныя этой конференціей. Только Мадридская Академія историческихъ наукъ не приняла приглашенія.

Въ мартѣ 1900 г. при празднованіи двухсотлѣтняго юбилея Берлинской Академіи Союзъ Академій уже имѣлъ своихъ представителей.

На Конференціи въ Висбаденѣ было рѣшено, что первое Общее Собраніе будетъ имѣть мѣсто въ Парижѣ въ 1900 году.

Однако это оказалось невозможнымъ выполнить. Ратификація происходила медленно и только въ маѣ ооредѣлился составъ Комитета. Представителями С.-Петербургской Академіи Наукъ въ Комитетъ избраны академики Фаминцынъ и Залеманъ. Въ концѣ іюля 1900 г. состоялось первое собраніе Комитета въ полномъ составѣ. Въ этомъ собраніи Комитетъ выработалъ инструкцію для своей дѣятельности; рѣшилъ нѣкоторые вопросы финансоваго свойства и рассмотрѣлъ рядъ предложеній.

Лондонское Королевское Общество предложило слѣдующій проэктъ: Знаменитый русскій астрономъ Струве измѣрилъ дугу меридіана, расположеннаго на 30° къ востоку отъ Гринвича,—отъ сѣверной Россіи до Чернаго Моря. Съ другой стороны Dr. Gill директоръ Капской Обсерваторіи измѣрилъ дугу того же меридіана, продолженіе котораго проходить по Родезіи. Было бы въ высокой степени важно дополнить эти измѣренія путемъ геодезической съемки, которая прошла бы по тому же меридіану черезъ Малую Азію и Африку. Королевское Общество предложило Союзу взять на себя выполнение этого предпріятія. Комитетъ отнесся чрезвычайно сочувственно къ этому проэкту; но такъ какъ онъ по своей сложности нуждается въ продолжительной разработкѣ, въ согласіи правительствъ, то полное его разрѣшеніе отложено до ближайшаго Общаго Собранія.

Остальныхъ менѣе значительныхъ проэктвъ мы не будемъ здѣсь перечислять. Мы полагаемъ, что достаточно выяснили задачи новаго учрежденія, а о дальнѣйшей его дѣятельности своевременно сообщимъ читателямъ.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

73 съѣздъ германскихъ естествоиспытателей и врачей въ Гамбургѣ. Отъ 22 го до 28-го сентября н. с. въ Гамбургѣ будетъ засѣдать 73-й съѣздъ германскихъ естествоиспытателей и врачей. Съѣздъ этотъ собирается въ Гамбургѣ третій разъ (1830 г. и 1866 г.). Съѣздъ распадается на секцію естествознанія и секцію медицины. Секція естествознанія состоитъ изъ подсекцій: 1) математики, астрономіи и геодезіи, 2) физики, 3) прикладной математики, 4) химіи, 5) прикладной химіи, 6) геофизики, 7) географіи, 8) минералогіи и геологіи, 9) ботаники, 10) зоологіи, 11) антропологіи.

Въ разосланныхъ организаціоннымъ комитетомъ приглашеніяхъ помѣщенъ перечень заявленныхъ рефератовъ. На двухъ общихъ собраніяхъ будутъ прочитаны между прочимъ два реферата по физикѣ: *E. Lecher* изъ Праги. „О сдѣланномъ Герцомъ открытіи электрическихъ волнъ и дальнѣйшемъ развитіи этого вопроса“. *W. Nernst* изъ Геттингена. „О значеніи электрическихъ

методовъ и теорій для химіи“. Сообщенія, заявленныя въ математической секціи большею частью носятъ специальный характеръ. Рефераты физической секціи почти всѣ относятся къ тѣмъ вопросамъ, на которыхъ въ настоящее время особенно сосредоточено вниманіе физиковъ: теоріи іоновъ, теоріи электрическихъ колебаній, безпроводной телеграфіи, катодныхъ лучей и т. д.

Празднество въ честь *F. Gioja*. Въ городѣ Амальфи въ Италіи происходилъ въ текущемъ мѣсяцѣ большой праздникъ въ честь *Flavio Gioja* изъ Амальфи, который считается изобрѣтателемъ компаса и жилъ въ эпоху около 1300 года. Хотя и до него не только въ Китаѣ, но и въ Европѣ извѣстно было свойство магнитной стрѣлки, но ее не могли употреблять на морѣ вслѣдствіе колебаній корабля. По изслѣдованіямъ Breusing'a заслуга устранения этого недостатка принадлежитъ *Gioja*. (*Physikalische Zeitschrift*).

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Профессоръ философіи Вѣнскаго Университета *Ernst Mach* подалъ въ отставку.

На четвертомъ международномъ конгрессѣ по прикладной химіи въ 1900 году въ Парижѣ рѣшено было, что слѣдующій конгрессъ будетъ происходить въ Берлинѣ въ 1902 году. Теперь же комитетъ рѣшилъ созвать конгрессъ только въ 1903 году, такъ какъ большая часть химиковъ считаютъ двухлѣтній интервалъ слишкомъ короткимъ.

Международный конгрессъ, созываемый для производства опытовъ стрѣльбы съ цѣлью предотвращенія непогоды будетъ въ этомъ году происходить въ Ліонѣ.

Новая редакція журнала „*Archiv der Mathematik und Physik*“. Съ апрѣля текущаго года вышепоименованный журналъ выходитъ подъ новой редакціей, но безъ измѣненія программы. Редакцію составляютъ *E. Lampe*, проф. Берлинскаго Политехникума, *W. Fr. Meyer*, проф. Кенигсбергскаго Университета и *E. Jahnke*, преподаватель реальнаго училища. Прежній редакторъ *E. R. E. Norpe* скончался 7-го іюня 1900 года, пробывъ редакторомъ названнаго журнала 28 лѣтъ.

Число студентовъ натуралистовъ и математиковъ въ Германіи. Изъ 35552 студентовъ Германскихъ университетовъ въ истекшемъ лѣтнемъ семестрѣ естественныя науки и математику изучали 5050. Изъ всего числа студентовъ 2606 иностранцы изъ послѣднихъ 579 изучали естественныя науки и математику. Большинство иностранцевъ русскіе: именно 717.

МАТЕМАТИЧЕСКІЯ МЕЛОЧИ.

Признаки дѣлимости на 9 и на 11.

Въ III тетради *Supplemento al „Periodico di Mathematica“* за текущій годъ G. Candido помѣстилъ замѣтку, содержащую изящное доказательство признаковъ дѣлимости на 9 и на 11.

Теорема. Обозначимъ черезъ $f(x)$ полиномъ

$$p_0x^m + p_1x^{m-1} + p_2x^{m-2} + \dots + p_{m-1}x + p_m$$

коэффициенты котораго суть цѣлыя числа. Если a и b суть также цѣлыя числа, а $f(a)$ и $f(a+b)$ суть значенія полинома при $x=a$ и $x=a+b$, то $f(a)$ и $f(a+b)$ при дѣленіи на b даютъ одинъ тотъ же остатокъ.

Доказательство. Согласно теоремѣ Безу остатокъ отъ дѣленія полинома, $f(x)$ на $x-a$ равенъ $f(a)$. Это значитъ

$$f(x) = (x-a)Q(x) + f(a),$$

гдѣ $Q(x)$ также представляетъ собой полиномъ съ цѣлыми коэффициентами. Полагая здѣсь $x=b+a$, мы легко получимъ

$$f(a+b) - f(a) = b \cdot Q(a+b). \quad (1)$$

Такъ какъ $Q(a+b)$ есть цѣлое число, то равенство (1) обнаруживаетъ, что разность

$$f(a+b) - f(a)$$

дѣлится на b . Это возможно въ томъ и только въ томъ случаѣ, если $f(a+b)$ и $f(a)$ при дѣленіи на b даютъ одинъ и тотъ же остатокъ.

Слѣдствія. 1) Если число изображается цифрами $p_0, p_1, p_2, \dots, p_m$, то оно равно

$$p_010^m + p_110^{m-1} + \dots + p_m.$$

Въ нашемъ обозначеніи это есть $f(10)$; сумма же цифръ этого числа равна $f(1)$. Если положимъ $a=1$ и $b=9$, то окажется, что $f(10)$ и $f(1)$ даютъ при дѣленіи на 9 одинъ и тотъ же остатокъ. 2) При тѣхъ же обозначеніяхъ $f(-1)$ есть разность между суммой цифръ стоящихъ на четныхъ мѣстахъ и суммой цифръ, стоящихъ на нечетныхъ мѣстахъ. Если положимъ въ предыдущей теоремѣ $b=11$, $a=-1$, то окажется, что $f(10)$ т. е. наше число даетъ при дѣленіи на 11 тотъ же остатокъ, что и разность между суммами цифръ, стоящими на четныхъ и нечетныхъ мѣстахъ. Слѣдовательно, число дѣлится на 11 въ томъ и только въ томъ случаѣ, если эта разность дѣлится на 11.

ЗАДАЧИ.

XXVIII. Определить геометрические места точек Лемуана и прямых Лемуана треугольников, вписанных в данный круг и имеющих общий угол Брокера ω .

Е. Григорьев (Казань).

XXIX. Ареометр с постоянным весом имеет вид некоторого тела вращения, устойчиво плавающего в жидкости так, что ось вращения его вертикальна. Какую форму надо дать этому ареометру, чтобы при уменьшении плотности жидкости в данных пределах высота погружающейся вследствие этого уменьшения части ареометра была пропорциональна уменьшению плотности жидкости. *)

Е. Бутинский (Одесса).

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Решения всех задач, предложенных в текущем семестре, будут помещены в следующем семестре.

№ 82 (4 сер.). Показать, что при n целом и не меньшем нуля число $5^{5n^2-2n+1} + 11^n$ делится на 6.

Л. Гальперин (Бердичев).

№ 83 (4 сер.). Пересечь данный треугольник ABC сходящей, встречающей стороны AB и BC соответственно в точках D и E так, чтобы отрезки BD , DE и EC были пропорциональны данным отрезкам m , n и p .

Е. Е.

№ 84 (4 сер.). Построить треугольник по углу его B и по расстояниям α и β центра круга вписанного от сторон его AB и AC .

Н. С. (Одесса).

№ 85 (4 сер.). Найти n чисел, составляющих арифметическую прогрессию, зная их сумму a и сумму b их кубов. Разсмотреть отдельно случаи четного и нечетного n .

Journal de Mathématiques élémentaires publié par Longchamps.

№ 86 (4 сер.). Показать, что из равенств

$$x^3 + y^3 + z^3 = x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z = 1$$

следует, что произведение xyz равно нулю.

Journal de Mathématiques élémentaires publié par Fubert.

№ 87 (4 сер.). В сосуд, содержащий 2500 граммов воды при 5° , вложено 725 грамм льда. Когда установилось тепловое равновесие, оказалось, что лед впитал на 64 грамм больше. Определить начальную температуру льда. Теплота плавления льда 80 калорий; удельная теплота его 0,5.

Теплоемкость сосуда и обмен теплоты с наружным пространством в расчет не принимаются.

Journal de Physique, Chimie et Histoire naturelle élémentaires

(сообщил М. Гербауский).

*) Знакомство с элементами анализа и приложений его к геометрии может значительно облегчить решение задачи.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 27 (4 сер.). Передъ чечевицей помѣщенъ кружокъ перпендикулярно къ ея оси и concentрически съ ней. На экранѣ, отстоящемъ на 3 метра отъ кружка, получается изображеніе кружка, причемъ площадь этого изображенія въ 4 раза больше площади кружка. Требуется опредѣлить главное фокусное разстояніе чечевицы.

Пусть d —разстояніе отъ кружка до чечевицы, f —разстояніе отъ чечевицы до изображенія кружка; F —главное фокусное разстояніе чечевицы, a —діаметръ кружка и A —діаметръ изображенія кружка. Такъ какъ площадь изображенія кружка въ 4 раза больше площади кружка, то

$$\frac{A}{a} = 2,$$

такъ что линейное увеличеніе изображенія равно 2; но это же увеличеніе выражается, какъ извѣстно, отношеніемъ $\frac{f}{d}$. Итакъ $\frac{f}{d} = 2$, откуда

$$f = 2d \quad (1),$$

и, кромѣ того, по условію задачи

$$f + d = 3 \quad (2).$$

Изъ равенствъ (1) и (2) находимъ:

$$3d = 3; \quad d = 1; \quad f = 2.$$

Подставляя найденныя значенія f и d въ формулу

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{d} = \frac{1}{F},$$

находимъ:

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{F},$$

откуда $F = \frac{2}{3}$ метра.

А. Казназовъ (Севастополь); Н. Готлибъ (Митава); Б. Мерцаловъ (Орель)
П. Грицынъ (ст. Цымлянская); Д. Дьяковъ (Переясновка).

№ 31 (4 сер.). Найти значенія параметра m , при которыхъ четыре корня уравненія

$$x^4 - (3m+2)x^2 + m^2 = 0$$

образуютъ арифметическую прогрессию.

Пусть

$$a, a+d, a+2d, a+3d \quad (A)$$

суть четыре корня биквадратнаго уравненія, образующіе арифметическую прогрессию; такъ какъ сумма этихъ корней равна нулю, то

$$4a + 6d = 0,$$

откуда

$$d = -\frac{2a}{3} \quad (1).$$

Чтобы не вводить дробей, положимъ $a = 3\beta$; тогда (см. 1)

$$d = -2\beta,$$

и рядъ корней (A) приметъ видъ:

$$3\beta, \beta, -\beta, -3\beta \quad (B).$$

Какъ извѣстно изъ элементовъ теоріи алгебраическихъ уравненій, произведеніе корней (B) должно равняться свободному члену даннаго уравненія четвертой степени, а сумма произведеній корней по два — коэффициенту при x^2 . Следовательно

$$3\beta \cdot \beta \cdot (-\beta) \cdot (-3\beta) = 9\beta^4 = m^2,$$

$$3\beta[\beta + (-\beta) + (-3\beta)] + \beta[(-\beta) + (-3\beta)] + (-3\beta)(-\beta) = -10\beta^2 = -(3m+2)$$

Итакъ

$$10\beta^2 = 3m+2, \quad 9\beta^4 = m^2.$$

Опредѣляя β^2 изъ перваго изъ этихъ уравненій и подставляя найденное значеніе во второе, находимъ:

$$m^2 = 9 \left(\frac{3m+2}{10} \right)^2,$$

откуда

$$19m^2 - 109m - 36 = 0 \quad (2).$$

Итакъ корни биквадратнаго уравненія *могутъ* образовать арифметическую прогрессию только тогда, если значеніе параметра m удовлетворяетъ уравненію (2). Рѣшая это уравненіе, находимъ

$$m_1 = 6, \quad m_2 = \frac{-6}{19} \quad (3).$$

Подставляя эти значенія m въ данное биквадратное уравненіе, получаемъ уравненія:

$$x^4 - 20x^2 + 36 = 0,$$

$$x^4 - \frac{20}{19}x^2 + \frac{36}{19^2} = 0.$$

Корни перваго изъ нихъ —

$$3\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, -3\sqrt{2}$$

образуютъ арифметическую прогрессию съ разностью $-2\sqrt{2}$, а корни втораго отличаются отъ корней перваго изъ нихъ множителемъ $\frac{1}{\sqrt{19}}$ и потому также образуютъ арифметическую прогрессию. Такимъ образомъ *единственно возможные* рѣшенія (3) суть дѣйствительно годныя.

П. Полушкинъ (Знаменка); *Л. Гальперинъ* (Бердичевъ); *Н. Готлибъ* (Дубельнъ); *Б. Мерцаловъ* (Орель).

№ 37 (4 сер.). *Рѣшить систему уравненій:*

$$x(y+z) = yz(ax^2+1)$$

$$y(x+z) = zx(by^2+1)$$

$$z(x+y) = xy(cz^2+1).$$

Рѣшимъ прежде всего такой вопросъ: нельзя ли удовлетворить предложенной системѣ уравненій, полагая одно изъ неизвѣстныхъ, напримѣръ, x , равнымъ нулю. Изъ перваго изъ данныхъ уравненій видно, что если $x=0$, то yz также равно нулю, а потому одно изъ неизвѣстныхъ y или z также равно нулю. Пусть напримѣръ $y=0$. Полагая

$$x=0, \quad y=0,$$

мы замѣчаемъ, что всѣ три уравненія удовлетворяются при произвольномъ z этими значеніями x и y . Точно также найдемъ, что данная система вообще удовлетворяется, полагая значенія двухъ изъ неизвѣстныхъ равными нулю и оставляя третье неизвѣстное произвольнымъ.

Теперь остается рассмотреть только тѣ рѣшенія, при которыхъ ни x , ни y , ни z не равны нулю. Для этого складываемъ почленно первыя два изъ

данныхъ уравненій, уничтожаемъ въ первой и второй части равные члены и выводимъ во второй части за скобки множителя xy . Тогда имѣемъ:

$$2xy = xy(axz + byz) \quad (1).$$

Такъ какъ xy по предположенію не равно нулю, то изъ равенства (1) вытекаетъ:

$$axz + byz = 2.$$

Умножая обѣ части этого равенства на c , находимъ:

$$acxz + bcyz = 2c \quad (2).$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ:

$$bcyz + abxy = 2b \quad (3)$$

$$abxy + acxz = 2a \quad (4).$$

Складывая почленно равенства (2), (3), (4) и сокращая обѣ части на 2, получимъ:

$$abxy + bcyz + acxz = a + b + c.$$

Вычитая изъ этого равенства равенство (2), найдемъ:

$$abxy = a + b - c,$$

откуда

$$xy = \frac{a+b-c}{ab} \quad (5).$$

Точно также найдемъ:

$$yz = \frac{b+c-a}{bc}, \quad (6)$$

$$zx = \frac{c+a-b}{ac} \quad (7).$$

Перемножая равенства (5), (6) и (7) и извлекая корень изъ обѣихъ частей результата, имѣемъ:

$$xyz = \pm \frac{\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}}{abc}.$$

Для этого равенство послѣдовательно на равенства (6), (7) и (5), находимъ:

$$x = \pm \frac{\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}}{c(b+c-a)}, \quad y = \pm \frac{\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}}{b(a+c-b)}.$$

$$z = \pm \frac{\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}}{c(a+b-c)}.$$

Въ этихъ формулахъ надо взять одновременно знакъ $+$ или $-$, что легко проверить, подставляя найденныя рѣшенія въ равенства (5), (6) и (7).

* Д. Дяковъ (Новочеркасскъ); Б. Мерцаловъ (Орелъ); Н. Готлибъ (Дубельнъ); В. Нерехтскій (Кіевъ); Гудковъ (Свеаборгъ).

ПОПРАВКА: Въ № 301 „Вѣстника“ въ „Научной хроникѣ“ на стр. 13 напечатано въ двухъ мѣстахъ „Limon“ вмѣсто „Simon“.

Редакторы: В. А. Циммерманъ и В. Ф. Каганъ.

Издатель В. А. Гернетъ.

Дозволено цензурою, Одесса, 1-го сентибря 1901 г.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.

Обложка
щется

Обложка
щется