Обложка
ищется

Обложка
пщется

XXVI Сем. № 4.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
элементарной математики.

15 Сентября № 304. 1901 г.

Содержаніе: О наименьшемъ кругѣ, вмѣщающемъ данную систему точекъ на плоскости. (Окончаніе). *М. Зимина.* — Расширеніе нашихъ чувствъ. *Проф. O. Wiener'а. ПереводъД. Шора.* — Развитіе телеграфическихъ знаковъ. — Рецензіи: „Физическое Обозрѣніе". Журналъ издаваемый проф. П. А. Зиловымъ. *Проф. Г. Де-Метца.* — Задачи для учащихся №№ 88—93 (4 серіи). — Рѣшенія задачъ (4 сер.), №№ 11, 14, 16, 22, 30, 38.—Поправка.—Объявленія.

О наименьшемъ кругѣ, вмѣщающемъ данную систему точекъ на плоскости.

М. Зимина въ Варшавѣ.

*(Окончаніе *).*

§ 9. Переходимъ теперь къ общему случаю опредѣленія наименьшаго круга системы произвольнаго числа точекъ. Вопросъ, очевидно, сводится къ нахожденію тѣхъ двухъ или трехъ точекъ, чрезъ которыя проходитъ наименьшій кругъ.

Предварительно замѣтимъ, что данная система точекъ можетъ быть представлена въ видѣ вершинъ выпуклаго многоугольника, внутри периметра котораго можетъ заключаться нѣсколько точекъ. Важность этого замѣчанія вытекаетъ изъ § 6. Такъ какъ наименьшій кругъ вершинъ многоугольника будетъ таковымъ же для всѣхъ точекъ, то при разысканіи его мы можемъ не обращать вниманія на внутреннія точки многоугольника, что облегчитъ нашу задачу.

---

*) См. № 302 „Вѣстника".

Для отдѣленія периферическихъ точекъ, т. е. тѣхъ, которыя образуютъ вершины многоугольника, вмѣщающаго остальныя точки системы, можно предложить такой способъ.

Возьмемъ прямую такъ, чтобы всѣ точки системы лежали по одну ея сторону, и будемъ ее передвигать, оставляя ее параллельной самой себѣ и приближая къ какой-либо изъ точекъ. Прямая, перемѣщаясь, достигнетъ нѣкоторой точки A_1, послѣ чего будемъ вращать прямую въ извѣстномъ направленіи вокругъ A_1, пока на прямой не очутится другая точка A_2. Затѣмъ, производя вращеніе прямой въ томъ же направленіи вокругъ A_2, достигнемъ точки A_3 и т. д. Изъ самаго способа перемѣщенія прямой видно, что при всякомъ ея положеніи всѣ точки системы лежатъ по одну ея сторону. Послѣ нѣсколькихъ вращеній мы вторично попадемъ на начальную точку A_1. Докажемъ это.

Такъ какъ число точекъ конечно, то мы, продолжая производить вращеніе прямой, необходимо встрѣтимъ вторично *одну* изъ прежнихъ точекъ. Пусть это будетъ A_k и пусть въ первый разъ прямая встрѣтила A_k, вращаясь по часовой стрѣлкѣ вокругъ A_{k-1}, а во второй—вокругъ A'_{k-1}. Докажемъ, что A'_{k-1} совпадаетъ съ A_{k-1}. Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что точки A'_{k-1} и A_{k-1} различны. Мы можемъ считать всѣ три точки: A_k, A_{k-1} и A'_{k-1} не лежащими на одной прямой, такъ какъ въ противномъ случаѣ точку, лежащую между двумя другими, мы могли бы на основаніи § 6 отбросить. Разсмотримъ нѣкоторое положеніе вращающейся вокругъ A_{k-1} прямой. Точки A_k и A'_{k-1} должны быть по одну ея сторону; притомъ, если представимъ себѣ, что наблюдатель находится въ точкѣ A_{k-1}, обращенный лицомъ къ A_k, то точка A'_{k-1} должна лежать вправо отъ прямой $A_{k-1}A_k$, иначе вращающаяся прямая встрѣтила бы при указанномъ направленіи вращенія точку A'_{k-1}, а не A_k. Разсмотримъ затѣмъ какое угодно положеніе прямой, вращающейся вокругъ A'_{k-1}. Эта прямая не можетъ пересѣкать отрѣзка $A_{k-1}A_k$, иначе она раздѣляла бы точки системы. Но она не можетъ быть и внѣ тр-ка $A_{k-1}A_kA'_{k-1}$, такъ какъ въ этомъ случаѣ она при вращеніи въ томъ же направленіи, т. е. по часовой стрѣлкѣ встрѣтила бы точку A_{k-1} раньше, нежели A_k. То и другое вмѣстѣ показываетъ, что никакая точка кромѣ A_{k-1} не можетъ быть такимъ центромъ вращенія прямой (въ указанномъ же направленіи), послѣ котораго она приходила бы въ A_k. Итакъ, прежде чѣмъ вторично прійти въ A_k, прямая должна вторично же прійти въ A_{k-1}. Примѣняя то же заключеніе послѣдовательно къ точкамъ A_{k-1}, A_{k-2} . . . и т. д., убѣдимся въ томъ, что прямая при указанномъ ея перемѣщеніи снова придетъ въ начальную точку A_1, чѣмъ отдѣленіе периферическихъ точекъ будетъ закончено. Какъ мы уже сказали, для всякаго положенія прямой всѣ точки лежатъ по одну ея сторону, а потому послѣдовательные центры вращенія A_1, A_2, ... и будутъ вершинами искомаго многоугольника.

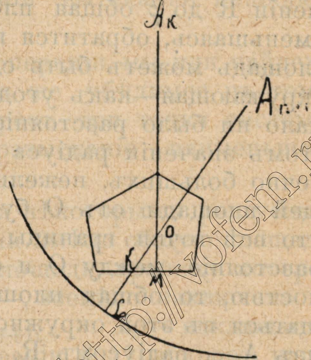
§ 10. Пусть O и ρ будутъ соотвѣтственно центръ и радіусъ наименьшаго круга точекъ $A_1 \ldots A_n$. Изъ этихъ точекъ, какъ изъ центровъ, радіусомъ ρ опишемъ окружности. Такъ какъ каждый изъ отрѣзковъ $OA_1, \ldots OA_n$—не больше ρ, то нѣкоторыя (по крайней мѣрѣ двѣ) изъ этихъ окружностей пройдутъ черезъ точку O; остальныя же окружности должны заключать точку O. Такимъ образомъ O будетъ общею точкою для площадей всѣхъ круговъ. Не трудно видѣть, что эти круги не могутъ имѣть общей площади. Дѣйствительно, пусть такая площадь существуетъ. Возьмемъ на ней точку C. Такъ какъ C лежитъ внутри всѣхъ окружностей, то каждый изъ отрѣзковъ: $CA_1, \ldots CA_n$— меньше ρ. Принимая C за центръ и наибольшій изъ этихъ отрѣзковъ за радіусъ, мы построимъ окружность радіуса, меньшаго, нежели ρ, вмѣщающую всѣ данныя точки, а это противорѣчитъ тому, что ρ есть радіусъ наименьшаго круга.

Подобными же разсужденіями легко показать, что круги, описанные изъ $A_1, \ldots A_n$ радіусомъ, меньшимъ ρ, не могутъ имѣть ни общей площади, ни общей точки.

Если же изъ тѣхъ же точекъ опишемъ круги радіуса, большаго, нежели ρ, то точка O будетъ лежать внутри всѣхъ круговъ. Это показываетъ, что въ данномъ случаѣ построенные круги имѣютъ нѣкоторую общую площадь.

Изъ сказаннаго вытекаетъ слѣдующее условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы данный отрѣзокъ былъ радіусомъ наименьшаго круга системы точекъ $A_1, A_2 \ldots A_n$: *всѣ круги, описанные изъ точекъ системы радіусомъ, равнымъ этому отрѣзку, должны имѣть лишь единственную общую точку.*

§ 11. Сохраняя для O и ρ прежнія значенія, предположимъ, что общая площадь круговъ, описанныхъ изъ $A_1, \ldots A_n$ радіусомъ R, большимъ ρ, на которой, какъ мы только что показали, лежитъ точка O, всецѣло заключается внутри круга, описаннаго изъ точки A_{n+1} тѣмъ же радіусомъ R. Положимъ далѣе, что прямая $A_{n+1}O$ (см. черт.), будучи продолжена, пересѣчетъ границу общей площади круговъ $A_1, \ldots A_n$—въ K и окружность A_{n+1} въ L *). Соединимъ O съ центромъ A_k того круга, на окружности котораго лежитъ точка K, и пусть A_kO пересѣчетъ окружность A_k въ M. Такъ какъ OM есть кратчайшее разстояніе точки O отъ окружности A_k, то



$$OK > OM,$$

*) Небольшія дуги, ограничивающія общую площадь, изображены на чертежѣ прямолинейными отрѣзками.

а такъ какъ

$$OL > OK,$$

то

$$OL > OM;$$

но

$$OL + OA_{n+1} = OM + OA_k,$$

слѣдовательно

$$OA_{n+1} < OA_k.$$

Послѣднее неравенство приводитъ къ двумъ весьма важнымъ слѣдствіямъ:

1) Наименьшій кругъ системы: $A_1, \ldots A_n$—вмѣщаетъ A_{n+1} и, слѣдовательно (§ 7), есть наименьшій кругъ для всѣхъ $n+1$ точекъ.

2) Наименьшій кругъ системы: $A_1, \ldots A_n, A_{n+1}$—не проходитъ черезъ точку A_{n+1}.

Примѣчаніе. K можетъ совпасть съ M, тогда $OK = OM$, $OL > OK$; L можетъ совпасть съ K, тогда $OK > OM$, $OL = OK$. Отсюда видимъ, что неравенство: $OL > OM$—справедливо и для этихъ случаевъ. Совпаденіе же трехъ точекъ K, L, M показывало бы, что A_{n+1} совпало съ A_k, чего мы не предполагаемъ.

§ 12. Обратно, если наименьшій кругъ точекъ: $A_1, \ldots A_{n+1}$—не проходитъ черезъ A_{n+1}, то существуетъ такое значеніе для R, что кругъ, описанный изъ A_{n+1} радіусомъ R и всякимъ другимъ, меньшимъ, нежели R, будетъ всецѣло заключать общую площадь (если таковая существуетъ) круговъ, описанныхъ тѣмъ же радіусомъ изъ точекъ $A_1, \ldots A_n$.

Дѣйствительно, возьмемъ $R > \rho$, гдѣ ρ радіусъ наименьшаго круга всѣхъ точекъ $A_1, \ldots A_n, A_{n+1}$. При непрерывномъ уменьшеніи R до ρ общая площадь всѣхъ $n+1$ круговъ, непрерывно уменьшаясь, обратится наконецъ въ точку O, слѣдовательно, эта площадь можетъ быть сдѣлана какъ угодно малою, а граница, ее окружающая—какъ угодно близкою къ O. Это значитъ, какъ бы мало ни было разстояніе ε, мы можемъ выбрать R такъ, что при этомъ значеніи радіуса и всѣхъ меньшихъ его значеніяхъ (конечно большихъ, нежели ρ) разстоянія всѣхъ точекъ границы общей площади отъ O будутъ меньше, нежели ε. Если R таково, что всѣ точки границы будутъ ближе къ O, нежели кратчайшее разстояніе между O и описанною изъ A_{n+1} радіусомъ ρ окружностью, то общая площадь круговъ $A_1, \ldots A_n$ будетъ помѣщаться въ этой окружности, а также и въ окружности, описанной изъ A_{n+1} радіусомъ R, потому что $R > \rho$.

Опишемъ теперь изъ точекъ $A_1, \ldots A_{n+1}$ круги радіусомъ $R_1 < R$, и предположимъ, что общая площадь *всѣхъ* круговъ существуетъ. Граница общей площади круговъ $A_1, \ldots A_n$—въ этомъ случаѣ будетъ еще ближе къ точкѣ O, нежели при радіусѣ R; слѣдовательно, эта общая площадь и подавно будетъ заключаться въ окружности, описанной изъ A_{n+1} радіусомъ ρ. Та же общая площадь будетъ заключаться и въ окружности, описанной изъ A_{n+1} радіусомъ R_1, ибо фактъ существованія общей площади всѣхъ $n+1$ круговъ по § 10 показываетъ, что $R_1 > \rho$.

§ 13. На основаніи всего вышеизложеннаго можно предложить слѣдующій общій способъ нахожденія наименьшаго круга системы какого угодно числа точекъ.

Предварительно по способу § 9 находимъ периферическія точки данной системы, а всѣ остальныя исключаемъ изъ разсмотрѣнія.

Далѣе изслѣдуемъ, не проходитъ ли искомый наименьшій кругъ только черезъ двѣ точки системы. Съ этою цѣлью сравненіемъ отрѣзковъ, представляющихъ взаимныя разстоянія точекъ системы, опредѣляемъ наибольшій изъ нихъ. Кругъ, имѣющій этотъ отрѣзокъ діаметромъ, и будетъ искомымъ наименьшимъ, если онъ вмѣщаетъ остальныя точки системы. При этомъ можетъ оказаться, что существуетъ нѣсколько равныхъ отрѣзковъ, большихъ, нежели остальные. Если всѣ они пересѣкаются въ одной точкѣ и дѣлятся ею пополамъ, то кругъ, діаметрами котораго служатъ эти отрѣзки, и будетъ искомымъ наименьшимъ при томъ условіи, что онъ вмѣщаетъ всѣ остальныя точки системы. Въ томъ случаѣ, когда взаимно равные наибольшіе отрѣзки не удовлетворяютъ вышесказанному условію, кругъ, построенный на какомъ либо изъ нихъ, какъ на діаметрѣ, не вмѣститъ хотя одного изъ остальныхъ отрѣзковъ. Такимъ образомъ, при существованіи нѣсколькихъ равныхъ наибольшихъ отрѣзковъ для испытанія достаточно взять какой угодно изъ нихъ. Если же кругъ, имѣющій наибольшій отрѣзокъ своимъ діаметромъ, не вмѣщаетъ всѣхъ точекъ системы, то это показываетъ, что наименьшій кругъ долженъ проходить болѣе, чѣмъ черезъ двѣ точки системы. Справедливость приведенныхъ утвержденій вытекаетъ непосредственно изъ §§ 3, 4 и 7.

Итакъ, продѣлавъ вышеуказанныя операціи, мы или найдемъ наименьшій кругъ данныхъ точекъ, или же убѣдимся въ томъ, что онъ проходитъ по крайней мѣрѣ черезъ три точки системы. Въ послѣднемъ случаѣ дальнѣйшее разысканіе наименьшаго круга ведемъ слѣдующимъ образомъ.

Изъ данныхъ точекъ опишемъ круги нѣкоторымъ радіусомъ, достаточно большимъ для того, чтобы они имѣли общую площадь. Можетъ при этомъ оказаться, что эта площадь, границу которой составляютъ дуги круговъ $A_1, \dots A_k$—, всецѣло заключена въ кругахъ: $A_{k+1}, \dots A_n$. Тогда точки $A_{k+1}, \dots A_n$— исключаемъ изъ разсмотрѣнія, такъ какъ на основаніи § 11 вопросъ нашъ сводится къ нахожденію наименьшаго круга точекъ $A_1, \dots A_k$. Затѣмъ проводимъ прямыя, соединяющія точки пересѣченія каждой пары оставшихся круговъ $A_1, \dots A_k$. Эти прямыя, числомъ $\frac{k(k-1)}{1.2}$, будутъ перпендикулярами, возстановленными изъ срединъ отрѣзковъ, соединяющихъ точки $A_1, \ldots A_k$. Пересѣкаясь по три въ одной точкѣ, онѣ опредѣлятъ $\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}$ центровъ $C_1, C_2, \ldots$—круговъ, описанныхъ около всевозможныхъ треугольниковъ, которые образуются различными сочетаніями точекъ $A_1, \ldots A_k$—по три. Одинъ изъ этихъ центровъ и будетъ центромъ искомаго наименьшаго круга. Чтобы опредѣлить, какой именно, можно поступать двоякимъ образомъ. Но предварительно замѣтимъ, что на основаніи § 7 мы можемъ прямо отбросить тѣ центры, которые лежатъ внѣ периметра, соединяющаго периферическія точки, или которые соотвѣтствуютъ тупоугольнымъ треугольникамъ.

a) По каждому изъ центровъ строимъ кругъ, описанный около соотвѣтствующаго треугольника. Изъ такихъ круговъ выбираемъ вмѣщающіе всѣ точки: $A_1, \ldots A_k$—, а изъ послѣднихъ сравненіемъ радіусовъ выбираемъ наименьшій (стр. § 5).

b) Можно рѣшить вопросъ о томъ, не будетъ ли одинъ изъ центровъ C_i центромъ наименьшаго круга для каждаго изъ нихъ въ отдѣльности. Пусть центру C_i соотвѣтствуетъ треугольникъ $A_i' A_i'' A_i'''$ съ радіусомъ описаннаго круга R_i. Этимъ радіусомъ R_i изъ всѣхъ точекъ: $A_1, \ldots A_k$—за исключеніемъ A_i', A_i'', A_i''' опишемъ круги. Треугольникъ $A_i' A_i'' A_i'''$ можемъ считать остроугольнымъ, а потому, принимая во вниманіе приведенное въ § 10 условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы данный отрѣзокъ былъ радіусомъ наименьшаго круга, заключаемъ, что круги, описанные изъ A_i', A_i'', A_i''' радіусомъ R_i, имѣютъ лишь единственную общую точку C_i. Если C_i кромѣ того будетъ заключаться въ кругахъ, описанныхъ изъ остальныхъ точекъ системы тѣмъ же радіусомъ R_i, то R_i и C_i и будутъ соотвѣтственно искомыми радіусомъ и центромъ наименьшаго круга. Въ противномъ случаѣ подвергаемъ тому же испытанію другой центръ и т. д. до тѣхъ поръ пока не отыщемъ центра наименьшаго круга.

Къ сказанному добавимъ слѣдующее замѣчаніе. Если между точками $C_1, C_2 \ldots$—найдутся такія, которыя будутъ центрами круговъ, проходящихъ чрезъ четыре и болѣе точекъ системы, то испытаніе выгоднѣе начинать именно съ этихъ точекъ. Въ самомъ дѣлѣ, точка, которая служитъ центромъ круга, описаннаго около четыреугольника, одна замѣняетъ четыре обыкновенныхъ точки, а потому и испытаніе этой точки получаетъ большее значеніе. Указанныя точки найти не трудно: въ точкѣ, служащей центромъ круга, проходящаго черезъ i точекъ системы, пересѣкаются $\frac{i(i-1)}{1.2}$ прямыхъ, соотвѣтствующихъ столькимъ же отрѣзкамъ, соединяющимъ эти i точекъ.

§ 14. Можно опредѣлить центръ и радіусъ наименьшаго круга нѣсколько инымъ способомъ. Начнемъ съ того, что выдѣливъ периферическія точки, опишемъ изъ нихъ радіусомъ R круги, такъ чтобы всѣ они имѣли общую площадь. Соединяемъ точки пересѣченія каждой пары круговъ прямыми, пересѣченіемъ которыхъ опредѣлятся центры C_1, C_2, ... Смотримъ далѣе, существуютъ ли между ними такіе, соотвѣтствующіе которымъ круги проходятъ чрезъ четыре или болѣе точекъ системы. Относительно такихъ центровъ, если они окажутся, дѣлаемъ испытанія по способу предыдущаго §, не будетъ ли какой-либо изъ нихъ центромъ наименьшаго круга. Если это обстоятельство имѣетъ мѣсто—вопросъ рѣшенъ. Въ противномъ же случаѣ,—а также если круговъ, проходящихъ не менѣе, чѣмъ чрезъ четыре точки сисемы, не существуетъ,—заключаемъ, что искомый наименьшій кругъ проходитъ только черезъ три или двѣ точки. Эти точки, опредѣляющія наименьшій кругъ, могутъ быть найдены слѣдующими построеніями.

Изъ точекъ системы описываемъ круги перемѣнными радіусами:

$$\frac{R}{2}, \frac{R}{4}, \frac{R}{8} \ldots . \text{ и т. д.—},$$

которые уменьшаемъ указаннымъ образомъ до тѣхъ поръ, пока общая площадь круговъ, существовавшая при радіусѣ R, не исчезнетъ. Положимъ для простоты, что она исчезаетъ при $\frac{R}{2}$. На основаніи § 10 заключаемъ, что радіусъ ρ наименьшаго круга содержится между предѣлами R и $\frac{R}{2}$ разность которыхъ есть $\frac{R}{2}$. Затѣмъ беремъ среднее ариѳметическое $^3/_4 R$ этихъ предѣловъ, описываемъ изъ точекъ системы круги радіусомъ $^3/_4 R$ и въ зависимости отъ того, имѣютъ ли построенные круги общую площадь или нѣтъ, заключаемъ, что ρ содержится между $^3/_4 R$ и $^1/_2 R$ въ первомъ случаѣ и между R и $^3/_4 R$ во второмъ. Разность этихъ предѣловъ составляетъ уже $^1/_2 R$. Пусть напр.,

$$^3/_4 R > \rho > {}^1/_2 R;$$

беремъ снова среднее ариѳметическое найденныхъ предѣловъ, т. е., $^5/_8 R$ и тѣмъ же самымъ пріемомъ находимъ, въ какомъ изъ двухъ предѣловъ: $^3/_4 R$ и $^5/_8 R$ или $^5/_8 R$ и $^1/_2 R$ — содержится радіусъ ρ. Всякій разъ, какъ только при какомъ-либо построеніи оказывается, что общая площадь круговъ A_1, . . . A_k — всецѣло заключается въ кругахъ A_{k+1}, ... A_n, мы исключаемъ точки A_{k+1}, ... A_n изъ дальнѣйшаго разсмотрѣнія. Для оставшихся точекъ повторяемъ тѣ же построенія круговъ перемѣнныхъ радіусовъ и продолжаемъ это дѣлать до тѣхъ поръ, пока у насъ не останутся только три или двѣ точки, что *непремѣнно* должно случиться послѣ нѣкотораго, хотя и неизвѣстнаго заранѣе, но во всякомъ случаѣ конечнаго числа построеній. Въ самомъ дѣлѣ, оперируя вышеуказаннымъ образомъ, мы, какъ то легко видѣть, послѣдовательно и безпредѣльно приближаемся къ радіусу ρ наименьшаго круга. Но, какъ мы уже убѣдились, наименьшій кругъ проходитъ только черезъ три или двѣ точки и, слѣдовательно, не проходитъ черезъ n—3 или n—2 точки. На основаніи теоремы § 12 эти послѣднія точки, послѣ нѣсколькихъ построеній окажутся центрами круговъ, всецѣло вмѣщающихъ общую площадь остальныхъ круговъ, а потому и выйдутъ изъ разсмотрѣнія. Найдя такимъ образомъ три или двѣ точки системы, строимъ для нихъ наименьшій кругъ, что не представляетъ никакого затрудненія. По § 12 этотъ кругъ и будетъ искомымъ наименьшимъ кругомъ для системы всѣхъ круговъ.

Въ томъ случаѣ, когда предварительнаго изслѣдованія относительно того, не проходитъ ли наименьшій кругъ чрезъ четыре или болѣе точекъ системы, произведено не было, послѣдній способъ построенія круговъ перемѣнныхъ радіусовъ можетъ дать лишь приближенное съ любою, впрочемъ, степенью точности значеніе для радіуса наименьшаго круга и приближенное мѣсто для его центра. Если бы, напримѣръ, наименьшій кругъ данной системы проходилъ черезъ пять точекъ системы, то дуги перемѣнныхъ круговъ, имѣющихъ эти точки центрами, постоянно входили бы въ составъ границы общей площади всѣхъ круговъ. Безъ предварительнаго изслѣдованія мы не можемъ сказать, обусловливается ли это обстоятельство тѣмъ, что взятый радіусъ не достаточно близокъ къ радіусу наименьшаго круга, или тѣмъ, что наименьшій кругъ проходитъ черезъ пять точекъ.

§ 15. Въ заключеніе замѣтимъ, что разобранная задача можетъ, повидимому, имѣть нѣкоторыя практическія приложенія. Пусть, напр., требуется освѣтить данную систему точекъ на плоскости такимъ образомъ, чтобы въ каждой точкѣ степень освѣщенія была не ниже нѣкотораго даннаго предѣла. Тогда источникъ свѣта всего выгоднѣе помѣстить въ центрѣ наименьшаго круга точекъ. Въ самомъ дѣлѣ, при такомъ положеніи источника наиболѣе удаленная отъ него точка системы находится на разстояніи ρ радіуса наименьшаго круга. При всякомъ же другомъ положеніи источника разстояніе наиболѣе удаленной точки будетъ болѣе ρ. Слѣдовательно, чтобы получить въ послѣднемъ случаѣ ту же минимальную степень освѣщенія въ самой дальней точкѣ, нужно взять болѣе сильный источникъ свѣта, нежели тогда, когда источникъ занимаетъ положеніе центра наименьшаго круга.

Расширеніе нашихъ чувствъ.

Вступительная лекція, прочитанная 19-го мая 1900 г. *Otto Wiener'омъ* ординарнымъ профессоромъ Лейпцигскаго Университета.

Переводъ Д. Шора.

*(Продолженіе *).*

Гораздо сложнѣе та функція чувства осязанія, благодаря которой мы воспринимаемъ раздраженія въ различныхъ частяхъ кожи, какъ пространственно отдѣленныя другъ отъ друга. Чувствительность этого воспріятія измѣряется тѣмъ разстояніемъ двухъ ножекъ циркуля, прикасающихся къ кожѣ, при которомъ мы еще ощущаемъ ихъ раздѣльно. По *Weber'у* это наименьшее разстояніе достигаетъ приблизительно 1-го миллиметра на чувствительнѣйшемъ въ этомъ отношеніи органѣ—языкѣ [23]).

Но чувствомъ зрѣнія мы различаемъ протяженія значительно меньшихъ размѣровъ. Глазъ въ состояніи отличить другъ отъ друга двѣ черты, разстояніе между которыми составляетъ $^1/_{40}$ миллиметра, если онѣ находятся столь близко къ нему, какъ это только возможно [24]).

Именно по отношенію къ глазу особенно ясно, что наши инструменты составляютъ естественное расширеніе нашихъ чувствъ. Изъ частей нашего глаза, производящихъ изображеніе, самую важную роль играетъ чечевица; если по какой-либо причинѣ ее необходимо удалить, то мы можемъ замѣнить ее стеклянной чечевицею, помѣщенной передъ глазомъ. Мы не создаемъ ничего существенно новаго, если присоединяемъ сюда еще нѣсколько чечевицъ. Такъ возникаетъ одинъ изъ важнѣйшихъ нашихъ инструментовъ—микроскопъ. Лучшіе микроскопы могутъ дать раздѣльныя изображенія двухъ тонкихъ черточекъ, отстоящихъ другъ отъ друга приблизительно на одну седьмую часть тысячной доли миллиметра [25]). Они даютъ, такимъ образомъ, приблизительно въ двѣсти разъ больше, чѣмъ глазъ.

Какое значеніе имѣетъ это расширеніе нашихъ чувствъ въ борьбѣ за существованіе и въ приспособленіи къ окружающему міру, становится яснымъ, когда подумаешь, что при помощи ми-

---

*) См. № 303 „Вѣстника".

[23]) См. книгу *Hermann'a* (стр. 483), цитированную въ прим. 11-омъ.

[24]) См. тамъ же, стр. 580.

[25]) Вычислено для наклоннаго узкаго или центральнаго широкаго освѣщенія и свѣта длины волны въ 0,0004 миллиметра и числовой апертуры 1,4, наибольшей у находящихся въ продажѣ Zeiss'овскихъ объективовъ съ однородной иммерзіей. Въ такомъ случаѣ еще различимое разстояніе $= \frac{0{,}0004}{2{,}14}$ миллиметра. (См. напр. *Müller-Pouillet*, „Lehrbuch der Physik", Bd. 2, 9. Auflage, стр. 717—720, 1897).

кроскопа мы узнали и научились побѣждать опаснѣйшихъ враговъ человѣческаго рода — бактеріи и грибки. Защита отъ инфекціонныхъ болѣзней различнаго рода гигіеническими мѣрами въ маломъ и большомъ масштабѣ, въ особенности гигіеническія учрежденія нашихъ городовъ обусловливаютъ уменьшеніе смертности; вслѣдствіе этого человѣчество можетъ размножаться съ небывалою быстротой. А между тѣмъ, несмотря на все ея значеніе, эта борьба—самая кроткая, какую только можно себѣ представить. Даже величайшіе поборники гуманности и чувствительнѣйшіе члены обществъ покровительства животнымъ врядъ-ли будутъ имѣть что-либо противъ того, чтобы соблюденіемъ строгой чистоты заставлять бактеріи умирать съ голоду или даже убивать ихъ карболкой.

Несмотря на эти огромные успѣхи нашихъ современныхъ микроскоповъ, анатомія и біологія мельчайшихъ клѣтокъ и отдѣльныхъ существъ натолкнулась на трудности, которыя, вѣроятно, могли бы быть уничтожены, если бы удалось достигнуть еще болѣе сильнаго увеличенія. Многіе изъ васъ пожалуй подумаютъ: что мѣшаетъ намъ примѣнить еще болѣе сильныя чечевицы? Но *Abbe* [26]) и *Helmholtz* [26]) показали, при какихъ условіяхъ это средство не можетъ болѣе вести къ цѣли. Подробное разъясненіе этого вопроса отвлекло бы меня слишкомъ далеко. Я могу только сказать, что причина, по которой дальнѣйшее усовершенствованіе микроскопа этимъ способомъ невозможно, лежитъ въ свойствахъ самаго свѣта, состоящаго изъ мельчайшихъ волнообразныхъ движеній. Длина волны, т. е. разстояніе между двумя возвышеніями, доходитъ у крайнихъ фіолетовыхъ лучей спектра, которые мы еще въ состояніи воспринимать глазомъ, приблизительно до 400 милліонныхъ долей миллиметра. Если размѣры изслѣдуемаго тѣла сравнимы съ этой величиной, то возникаетъ явленіе диффракціи, т. е. огибанія непрозрачныхъ тѣлъ лучами; при меньшихъ размѣрахъ изображеніе вовсе не можетъ возникнуть.

Czapski [27]) указалъ на то, что въ настоящее время единственный надежный путь для усовершенствованія микроскопа — это примѣненіе свѣта малой длины волны, т. е. ультрафіолетовыхъ лучей спектра. Послѣдніе весьма слабо дѣйствуютъ на нашъ глазъ или вовсе имъ не воспринимаются; но зато они дѣйствуютъ на фотографическую пластинку, которая во многихъ отношеніяхъ представляетъ собой значительное расширеніе нашего чувства зрѣнія. *Dr. Schumann'у* въ Лейпцигѣ мы обязаны открытіемъ ультрафіолетовыхъ лучей, длина волны которыхъ достигаетъ только 100 милліонныхъ долей миллиметра [28]). Этимъ

---

[26]) См. напр. въ цитированномъ только-что учебникѣ стр. 715.

[27]) См. *Czapski*, „Die voraussichtlichen Grenzen der Leistungsfähigkeit des Mikroskopes", Zeitschr. f. wissensch. Mikroskopie u. f. mikroskop. Technik, Bd. 8, S. 145, 1891.

[28]) *Victor Schumann*, Sitzungsber. d. k. k. Akad. d. Wiss. in Wien, mathematisch-naturw. Klasse, Bd. 102, Abth. IIa, S. 66, 1893.

теоретически указана возможность построенія микроскопа, который приблизительно въ четыре раза совершеннѣе нашего; практически же здѣсь возникаютъ затрудненія другого рода; эти лучи сильно поглощаются большею частью тѣлъ, которыя прозрачны для другихъ лучей; такъ слой воздуха, въ нѣсколько сантиметровъ толщиною, поглощаетъ ихъ почти совершенно.

Когда же дѣло идетъ объ измѣреніи толщины весьма тонкихъ пластинокъ, то мы имѣемъ средство, которое даетъ значительно лучшіе результаты. Для этого измѣренія масштабомъ служитъ намъ длина свѣтовой волны. Если положить двѣ стеклянныхъ пластинки другъ на друга и разсматривать содержащійся между ними тонкій слой воздуха, освѣщенный одноцвѣтными лучами, напримѣръ желтыми лучами раскаленныхъ паровъ натрія, то видѣнъ рядъ попеременно свѣтлыхъ и темныхъ полосъ — такъ называемыхъ полосъ интерференціи; онѣ происходятъ отъ взаимнаго усиленія и ослабленія лучей, отраженныхъ отъ обѣихъ поверхностей воздушнаго слоя. Расположеніе полосъ зависитъ отъ толщины слоя воздуха въ данной точкѣ; если на стеклѣ находится гдѣ-либо маленькое углубленіе, то здѣсь возникаетъ перемѣщеніе полосъ. Отношеніе величины этого перемѣщенія къ двойному разстоянію смежныхъ полосъ даетъ величину углубленія, если принять за единицу длину волны свѣта натрія, (т. е. около 0,0006 миллиметра).

Подобнымъ же способомъ разрѣшенъ вопросъ, какова должна быть наименьшая толщина осажденнаго на стеклѣ слоя серебра, чтобы это серебро, вслѣдствіе большей способности отраженія, еще можно было отличить отъ стекла, имъ не покрытаго. Отвѣтъ получился такой: приблизительно въ седьмую часть милліонной доли миллиметра [29]).

Этимъ мы далеко еще не достигли предѣла въ измѣреніи длинъ. Но для дальнѣйшаго намъ необходимо познакомиться съ новымъ расширеніемъ чувства зрѣнія.

Если мы имѣемъ соединеніе звуковъ, то мы въ состояніи отличать въ немъ отдѣльные тоны; между тѣмъ въ смѣси цвѣтовъ мы не можемъ распознать отдѣльные составляющіе цвѣта. Но построенный *Kirchhoff'омъ* и *Bunsen'омъ* спектроскопъ даетъ намъ возможность достигнуть этого. Какое расширеніе нашего кругозора далъ спектральный анализъ—слишкомъ извѣстно, чтобы на этомъ нужно было останавливаться.

Мы скажемъ только нѣсколько словъ о чувствительности этого метода. Чтобы замѣтно окрасить пламя, достаточна примѣсь, содержащая меньше одной милліонной миллиграмма натрія [30]). Этотъ методъ, такимъ образомъ, значительно превосходитъ своей чувствительностью обыкновенный способъ

[29]) *O. Wiener*, Wied. Ann. Bd. 31, S. 666, 1887.

[30]) *G. Kirchhoff* и *R. Bunsen*, Pogg. Ann. Bd. 110, S. 168, 1860; здѣсь слѣдуетъ читать 1:300000 миллиграмма соли натрія (хлористокислый натрій) вмѣсто 1:3000000, на что указано въ нижеприведенной статьѣ *Fischer'a* и *Penzoldt'a*, см. прим. 31.

химическаго анализа. Не смотря на это, наше обоняніе—одно изъ нашихъ естественныхъ химическихъ чувствъ—во многихъ случаяхъ идетъ дальше, чѣмъ спектральный анализъ. По опытамъ *Emil'я Fischer'а* и *Penzoldt'а* [31]) меркаптанъ въ состояніи раздражать наши нервы обонянія въ количествѣ, составляющемъ только 250-ую часть вышеупомянутаго количества натрія, т. е. въ количествѣ $^1/_{460}$ части милліонной доли миллиграмма. Если мы представимъ себѣ, что у собаки обоняніе реагируетъ съ такой же чувствительностью на многія тѣла, то мы поймемъ, какое значеніе для нея имѣетъ это чувство. Всѣмъ извѣстно, что знатоки опредѣляютъ языкомъ качество вина лучше, нежели это можетъ быть сдѣлано химическими методами. Физическая химія, которая и теперь уже богата чувствительнѣйшими методами, должна поставить себѣ задачей достигнуть той точности, которую достигаютъ наши химическія чувства [32]).

Возвратимся къ спектроскопу. Онъ разлагаетъ на составныя части лучи, соотвѣтствующія различной длинѣ свѣтовой волны и составляющія вмѣстѣ бѣлый свѣтъ. Задача измѣренія мельчайшихъ разстояній сводится такимъ образомъ къ распознаванію двухъ цвѣтовъ при самой малой разницѣ въ длинѣ волны *). Въ этомъ отношеніи еще одинъ приборъ, диффракціонная рѣшетка, превосходитъ спектроскопъ; принципъ этой рѣшетки основывается на томъ же явленіи диффракціи, которое служитъ намъ помѣхой при усовершенствованіи микроскопа. *Rowland'у* удалось при помощи автоматическихъ машинъ нанести на металлическое зеркало столько узкихъ и равномѣрно другъ отъ друга отстоящихъ линій, что получился диффракціонный спектръ въ два метра длиной, при чрезвычайной яркости. Въ то время какъ человѣческій глазъ въ самомъ растянутомъ спектрѣ различаетъ только около 500 различныхъ цвѣтовъ [33]), измѣреніе можетъ отличить ихъ въ ви-

---

[31]) *Emil Fischer* и *Franz Penzoldt*, „Ueber die Empfindlichkeit des Geruchssinnes", Liebigs Ann. Bd. 238, S. 135, 1887.

[32]) Позже я узналъ, что, на самомъ дѣлѣ, уже недавно найдены были физикохимическія реакціи, которыя незначительно уступаютъ вышеприведенному. *G. Bredig* и *R. Müller von Berneck* сообщаютъ въ Zeitschr. f. physikal. Chem., Bd. 31, S. 276, 1899, между прочимъ, что платина въ каллоидальномъ растворѣ *Bredig'а* въ количествѣ $\frac{1}{300000}$ миллиграмма каталитически ускоряетъ разложеніе перекиси водорода.

*) Эта мысль, быть можетъ, требуетъ нѣкотораго разъясненія. Пояснимъ ее на примѣрѣ. Измѣряя толщину весьма тонкихъ пластинокъ, мы выражаемъ ее въ единицахъ, равныхъ длинѣ волны лучей, которыми мы производимъ освѣщеніе. Измѣреніе будетъ поэтому произведено тѣмъ точнѣе, чѣмъ строже установлена единица, т. е. чѣмъ точнѣе опредѣлена длина волны лучей, которыми мы производимъ освѣщеніе. Если поэтому мы пріобрѣтаемъ возможность различать лучи, которые мы раньше считали одноцвѣтными, то мы тѣмъ самымъ дѣлаемъ шагъ впередъ въ производствѣ этого измѣренія.
Прим. Ред.

[33]) Вычислено по наблюденіямъ *A. König'а* и *C. Dieterici*, Wied. Ann., Bd. 22, S. 585, 1884.

димой области спектра отъ 20000 до 40000. Наименьшая разница въ длинѣ волнъ различаемыхъ при этомъ цвѣтовъ простирается приблизительно отъ пятидесятой до сотой части милліонной доли миллиметра.

Еще большаго результата достигаетъ интерферометръ *Michelson'a* [34])—аппаратъ, изслѣдующій интерференцію свѣта при очень большой разности хода. Желтый свѣтъ натрія, который при употребленіи лучшей диффракціонной рѣшетки кажется состоящимъ только изъ двухъ цвѣтовъ, раздѣляется этимъ аппаратомъ на восемь различныхъ цвѣтовъ или спектральныхъ линій [35]). Наименьшая разность въ длинѣ волны доходитъ при этомъ приблизительно до *тысячной части милліонной доли миллиметра.* Въ дѣйствительности каждая изъ этихъ линій, въ свою очередь, представляетъ собой смѣсь цвѣтовъ, которые въ извѣстныхъ предѣлахъ непрерывно переходятъ другъ въ друга. Присутствіе столь многихъ цвѣтовъ обусловливается тѣмъ, что частицы свѣтящагося газа движутся съ большими и разнообразными скоростями. Подобно движущимся звѣздамъ онѣ по принципу *Doppler'a* посылаютъ наблюдателю свѣтъ съ мѣняющейся длиной волны, соотвѣтственно измѣненію скорости ихъ движенія относительно наблюдателя. Но даже измѣреніе этихъ малыхъ величинъ не имѣло бы особенно важнаго значенія, такъ какъ мысленно всякое дѣленіе можетъ быть продолжено сколь угодно далеко; но дѣло въ томъ, что въ этомъ случаѣ мы измѣряемъ длины меньшія, нежели тѣ, которыя должны имѣть діаметры молекулъ; именно, по многимъ соображеніямъ, приходится принять что діаметръ молекулъ выражается въ десятимилліонныхъ доляхъ миллиметра.

Другое чувство, которымъ мы также воспринимаемъ протяженную величину, — это чувство времени. Напоминаю вкратцѣ, что по *Exner'y* мы можемъ въ благопріятномъ случаѣ воспринять разность временъ въ $^1/_{500}$ секунды; а именно это имѣетъ мѣсто, когда мы раздѣльно воспринимаемъ два послѣдовательныхъ удара электрическихъ искръ [36]). Аппаратъ же *Dr. Feddersen'a* [37]) (въ Лейпцигѣ) со вращающимся зеркаломъ доведенъ до чувствительности, которая даетъ возможность измѣрять *сотую часть милліонной доли секунды* [38]).

Разсматривая различныя чувства, мы до сихъ поръ ни разу (кромѣ чувства давленія) не обращали вниманія на степень раз-

[34]) *A. Michelson*, Philosoph. Magazine, 5. Serie, томъ 31, стр. 338, 1891, и томъ 34, стр. 280, 1892. Обозначеніе „интерферометръ" („Interferometer") *Michelson* употребляетъ для своего аппарата въ томѣ 44, стр. 109, 1897.

[35]) Тамъ же, томъ 34, стр. 290, 1892, и фиг. 6а на таблицѣ V и таблицѣ VIII.

[36]) См. книгу *Hermann'a* (стр. 469 и 470), цитированную въ прим. 11-омъ.

[37]) *B. W. Feddersen*, Pogg. Ann., Bd. 103, S. 69, 1858.

[38]) *J. Trowbridge* и *W. Duane*, Philosoph. Magazine, 5. Serie, томъ 40, стр. 223, 1895.

драженія. Если мы займемся теперь изслѣдованіемъ чувствительности уха и глаза по отношенію къ силѣ звука и свѣта, то прежде всего возникаетъ вопросъ, чѣмъ измѣрить эту силу. Правда, мы могли бы воспользоваться какими-либо единицами силы звука и свѣта, но тогда мы не были бы въ состояніи сравнивать между собой въ этомъ отношеніи различныя чувства. Единственная величина, дающая возможность измѣрять одною и тою же мѣрою эффекты, относящіеся къ различнымъ областямъ физики,—это ихъ энергія или способность произвести работу; или, еще иначе, способность произвести работу, отнесенная къ единицѣ времени, опредѣленной. Что наши чувства реагируютъ на разность энергіи между воспринимающимъ органомъ и окружающей средой, — это недавно настойчиво высказалъ *Ostwald* [39]). Если это и не всегда справедливо, напр., когда рука, находясь въ покоѣ, ощущаетъ давленіе лежащаго на ней груза или когда пружинные вѣсы, оставаясь въ равновѣсіи, указываютъ вѣсъ, то все-таки переходъ отъ неотягощеннаго состоянія къ отягощенному связанъ съ затратой работы *).

Для нашей цѣли необходима небольшая единица работы, и этому требованію удовлетворяетъ употребляемый въ физикѣ *эргъ*, т. е. приблизительно работа, которую необходимо затратить, чтобы поднять миллиграммъ вѣса на одинъ сантиметръ. Каждый разъ, какъ мы моргнемъ глазомъ, мы расходуемъ болѣе, чѣмъ сто этихъ малыхъ единицъ работы.

Теперь мы въ состояніи оцѣнивать одной и той же мѣрой чувствительность нашихъ чувствъ и инструментовъ *по порогу ихъ энергіи;* другими словами по наименьшему количеству энергіи, необходимому для приведенія ихъ изъ невозбужденнаго состоянія въ состояніе самаго слабаго раздраженія, которые мы способны ощущать. Порогъ энергіи нашего чувства давленія на лицѣ, напримѣръ, т. е. на самой чувствительной части тѣла, измѣряется приблизительно, одною десятитысячною долей эрга [40]). Порогъ энергіи чувствительнѣйшихъ вѣсовъ достигаетъ приблизительно

---

[39]) *W. Ostwald*, Verhandlungen der Gesellsch. deutscher Naturforscher und Ärzte, 67. Vers. zu Lübeck, 1. Theil (die allgemeine Sitzung, S. 161, 1895). —Русскій переводъ *В. Гернета: В. Оствальдъ.* „Побѣда надъ научнымъ матеріализмомъ". Изд. „Вѣстника Оп. Физики".

*) По *Ostwald'у* мы, напр., ощущаемъ тепло потому, что окружающая среда содержитъ больше тепловой энергіи, чѣмъ наша кожа.

Прим. Ред.

[40]) Не найдя никакихъ данныхъ относительно этого въ литературѣ, я произвелъ примѣрный опытъ, и нашелъ, что при накладываніи груза въ 3 миллиграмма на щеку онъ погружался приблизительно на 2 тысячныхъ доли миллиметра; если допустить что погруженіе пропорціонально вѣсу, то, согласно этимъ даннымъ, наименьшій ощущаемый грузъ въ 1 миллиграммъ погрузился бы на 0,0007 миллиметровъ, что соотвѣтствуетъ, круглымъ числомъ, работѣ въ 0,0001 эргъ.

одной стомилліонной эрга [41]). Ухо по *Max'y Wien'y* [42]) приблизительно столь же чувствительно; не существуетъ болѣе чувствительнаго инструмента, непосредственно реагирующаго на звуковую энергію. Порогъ энергіи для глаза приблизительно такъ же великъ [43]), т. е. составляетъ приблизительно стомилліонную часть эрга. Глазъ несомнѣнно въ сто разъ чувствительнѣе самой чувствительной фотографической пластинки [44]).

Не смотря на это наши звукочувствительные и свѣточувствительные аппараты могутъ во многихъ отношеніяхъ значительно превосходить невооруженный глазъ и ухо. Телефонные провода передаютъ электрическую энергію, превращенную изъ энергіи звука, а приборъ снабженный микрофономъ превращая звуковую энергію въ электрическую, даетъ возможность использовать ее въ большемъ количествѣ и переносить на сотни километровъ [45]).

Точно такъ-же и фотографическая пластинка при непрерывномъ дѣйствіи свѣта можетъ превзойти глазъ, если ее экспонировать нѣсколько часовъ подъ-рядъ [46]); свѣтовое же впечатлѣніе, которое не ощущается черезъ нѣсколько секундъ, не подѣйствуетъ на глазъ въ теченіе сколь угодно продолжительнаго промежутка времени.

Изъ всѣхъ многочисленныхъ примѣненій фотографической пластинки, которыми она пополняетъ наше чувство зрѣнія, мы упомянемъ только объ одномъ. Можно приготовить столь тонкія и прозрачныя пластинки, что онѣ представляютъ собою какъ бы прозрачный глазъ, т. е. глазъ, который одновременно смотритъ въ обѣ стороны, и видитъ поэтому многія явленія, остающіяся по существу своему не видимыми для человѣка [47]) *).

(Окончаніе слѣдуетъ).

---

[41]) По работамъ *Warburg'a* и *Ihmori*, упомянутымъ въ 13 и 14 примѣчаніяхъ, порогъ энергіи ихъ вѣсовъ, при чувствительнѣйшей конструкціи, равенъ 0,05 милліонныхъ эрга. При этомъ порогъ возбудимости давленія равенъ 0,0005 миллиграмма. Чувствительнѣйшіе же вѣсы *Stückrath'a* по *Gruntach'y* (прим. 10 и 12) еще въ 5 разъ чувствительнѣе. Порогъ ихъ энергіи, при томъ же отклоненіи, былъ бы въ пять разъ меньше, чѣмъ у вѣсовъ *Warburg'a* и *Ihmori*, т. е. составлялъ бы 0,01 милліонныхъ эрга.

[42]) *Max Wien*, Dissertation, Berlin, S. 46, 1888, Druck von Julius Feiertag.

[43]) Тамъ же (стр. 49) *Wien* сравниваетъ — во всякомъ случаѣ только приближеннымъ способомъ — значенія пороговъ энергіи для свѣта и звука, дѣйствующихъ въ теченіе одной секунды; онъ находитъ отношеніе ихъ для глаза и уха около 1:6. Для того, чтобы установить абсолютный порогъ энергіи для глаза, недостаетъ еще свѣдѣній о томъ, каковъ долженъ быть minimum времени воздѣйствія, необходимый для воспріятія впечатлѣнія.

[44]) См. *J. Scheiner*, Archiv für wissenschaftliche Photographie; 1. Jahrgang, S. 2, 1899.

[45]) Телефонные провода между Нью-Іоркомъ и Чикаго простираются напр. на 1600 километровъ для каждой изъ проволокъ. См. „Das Buch der Erfindungen", Bd. 3, S. 582, 1897.

[46]) *J. Scheiner*, см. прим. 44.

[47]) *O. Wiener*, Wied. Ann., Bd. 40, S. 243, 1890. *)

*) Эта мысль, пожалуй, можетъ показаться неясной. *Wiener*, очевидно, хочетъ сказать этимъ слѣдующее: Изслѣдуя какое-нибудь свѣтовое явленіе,

Развитіе телеграфическихъ знаковъ.

Реферировано по статьѣ, помѣщенной въ Почтово-Телеграфномъ Журналѣ. *)

Время, необходимое для воспроизведенія телеграфическаго знака, зависитъ отъ устройства употребляемыхъ для этого аппаратовъ, отъ батареи, отъ длины и состоянія линіи и т. д. Съ другой стороны, скорость передачи ряда послѣдовательныхъ знаковъ обусловливается главнымъ образомъ продолжительностью заряда и разряда линіи. Это, въ свою очередь, зависитъ отъ того обстоятельства, что для полученія знака недостаточно, чтобы токъ достигъ извѣстной силы; необходимо еще, чтобы онъ дѣйствовалъ съ этой силой въ теченіе промежутка времени, достаточнаго для приведенія аппарата въ дѣйствіе.

Всѣ многочисленныя попытки къ увеличенію производительности телеграфныхъ проводовъ и къ возможному сокращенію затрачиваемаго времени сводились главнымъ образомъ къ замѣнѣ ручной работы автоматической, къ увеличенію чувствительности аппаратовъ и, наконецъ, къ одновременной передачѣ нѣсколькихъ телеграммъ на одномъ проводѣ.

Обзоръ этихъ попытокъ представляетъ много поучительнаго.

Въ 1821 году Амперъ, воспользовавшись отклоненіемъ магнитной стрѣлки подъ дѣйствіемъ тока, устроилъ аппаратъ, состоявшій изъ 25-ти стрѣлокъ, по одной для каждой буквы принятаго алфавита; при чемъ для каждой стрѣлки требовалось двѣ проволоки. Вскорѣ удалось сократить число проволокъ на половину, пользуясь однимъ общимъ обратнымъ проводникомъ для всѣхъ цѣпей (токопроводимость земли еще не была извѣстна).

Позже стало возможнымъ ограничиться 14-ю проволоками, благодаря тому, что стали пользоваться для сигналовъ или зна-

---

мы либо разсматриваемъ его глазомъ либо снимаемъ его на фотографическую пластинку. Какъ въ первомъ, такъ и во второмъ случаѣ свѣтъ приходитъ лишь съ одной стороны, и на границѣ сѣтчатой оболочки глаза или на поверхности фотографической пластинки свѣтовыя движенія прекращаются. Способъ же *Wiener'a* (на которомъ, между прочимъ, основана такъ называемая Липпмановская фотографія въ естественныхъ цвѣтахъ) даетъ возможность изслѣдовать свѣтовыя колебанія на томъ самомъ мѣстѣ, гдѣ они происходятъ. Его пленка (толщиною въ $^1/_{30}$ длины волны свѣта натрія), приготовленная изъ коллодіума хлористаго серебра, помѣщалась передъ зеркаломъ, слегка наклонно къ нему. Это зеркало освѣщалось перпендикулярными къ его поверхности лучами, и отраженный свѣтъ вмѣстѣ съ падающимъ давалъ стоячія волны; послѣднія химически дѣйствовали на пластинку, а именно сильнѣе въ мѣстахъ пучностей, слабѣе въ узлахъ. Фиксируя затѣмъ пленку обыкновеннымъ фотографическимъ способомъ, *Wiener* получалъ какъ бы изображеніе сѣченія поля, въ которомъ колеблются стоячія волны свѣта; при этомъ, такъ какъ плоскость сѣченія (т. е. пленки) была почти перпендикулярна къ направленію волнъ, то разстоянія между узлами получались столь большими, что ихъ можно было видѣть простымъ глазомъ.

Примѣчаніе переводчика.

*) Апрѣль, 1901 г., стр. 343.

ковъ тремя состояніями проволоки: нейтральнымъ состояніемъ, и состояніями положительнаго и отрицательнаго заряда.

Баронъ Шиллингъ въ 1832 году сдѣлалъ громадный шагъ впередъ, предложивъ употреблять одну только стрѣлку, при чемъ знаки составлялись изъ нѣсколько разъ повторяемыхъ отклоненій стрѣлки въ лѣвую или правую сторону.

Однако какъ эта система, такъ и система Гаусса и Вебера въ Геттингенѣ, отличавшаяся болѣе простой комбинацией знаковъ, не нашли практическаго примѣненія, вслѣдствіе медленности передачи и затруднительности отсчитыванія знаковъ. Всѣ эти аппараты, какъ и аппаратъ Ватстона, включившаго въ цѣпь звонокъ, давали только видимые для глаза, но не остающіеся знаки.

Отцомъ нынѣшней системы пишущаго электромагнитнаго телеграфа надо по справедливости считать Штейнгеля въ Мюнхенѣ, который не только упростилъ прежнюю систему до одного лишь проводника, воспользовавшись землею для обратнаго проведенія тока, но далъ также возможность письменной передачи знаковъ. Для возбужденія тока Штейнгель пользовался вмѣсто гальванической батареи индуктивными токами магнито-электрической машины. Передатчикъ Штейнгеля состоялъ изъ двухъ стрѣлокъ, вращающихся внутри проволочной катушки. Концы стрѣлокъ были снабжены пишущими приборами и на подвижной бумажной лентѣ получались точки, различныя комбинаціи которыхъ изображали буквы и цыфры.

Открытіе Араго магнитизирующаго дѣйствія тока на желѣзо привело къ устройству электромагнита и этимъ далеко подвинуло впередъ телеграфное дѣло.

Этимъ открытіемъ воспользовался американецъ Морзе, который устроилъ аппаратъ съ якоремъ, приводимымъ въ дѣйствіе электромагнитомъ и снабженнымъ пишущимъ штифтикомъ. Алфавитъ Морзе состоялъ изъ комбинацій точекъ и тире и нѣсколько отличался отъ нынѣшняго.

Долгое время Морзе придумывалъ различныя системы составленія алфавита съ цѣлью ускорить передачу, при чемъ исходнымъ средствомъ служило увеличеніе числа проволокъ. Комбинируя количество проволокъ съ количествомъ точекъ и тире, Морзе удалось при помощи 2 проволокъ изобразить алфавитъ знаками, требовавшими для каждой проволоки не болѣе одной точки и одного тире, а при трехъ проволокахъ онъ могъ уже совсѣмъ опустить тире, употребляя однѣ точки. Но въ концѣ концовъ пришлось остановиться на системѣ черточекъ и точекъ при одной проволокѣ; эта система завоевала весь міръ, благодаря тому что она болѣе другихъ отвѣчала практическимъ требованіямъ.

Первоначально устроенный аппаратъ Морзе могъ работать только при самыхъ короткихъ разстояніяхъ, такъ какъ его электромагнитъ обладалъ незначительною энергіей. Въ то время установился взглядъ, что электромагнитъ тѣмъ сильнѣе, чѣмъ слабѣе сопротивленіе его обмотки. Поэтому для устройства катушекъ брали толстую проволоку. Только послѣ того, какъ Витстонъ взялъ для электромагнитовъ тонкую проволоку, аппаратъ Морзе могъ служить для передачи на болѣе значительныя разстоянія.

Почти одновременно съ аппаратомъ Морзе былъ въ 1838 г. привилегированъ химическій аппаратъ Деви. При помощи этого аппарата Деви изображалъ на трехъ проводахъ 26 остающихся знаковъ однѣми точками, пользуясь обоими направленіями тока. Химическіе составы, которыми были пропитаны ленты, подъ вліяніемъ тока разлагались, и въ мѣстахъ прохожденія тока получалась точка. При помощи аппарата Деви, благодаря короткимъ импульсамъ тока и одновременному дѣйствію трехъ проволокъ удавалось сократить время сравнительно съ аппаратомъ Морзе. Изъ послѣдующихъ попытокъ передачи помощью комбинаціи точекъ слѣдуетъ упомянуть попытки братьевъ Гайтонъ достигнуть автоматической передачи и попытку Уайтгауза устроить передачу при помощи пяти или шести проводовъ и клавишей. Затѣмъ на долгое время прекратились попытки пользоваться комбинаціями точекъ.

Въ 1874 г. появился аппаратъ Мимо, имѣвшій пять клавишей и особый комбинаторъ, дававшій возможность посылать короткіе токи. Одновременными манипуляціями пятью клавишами составлялись знаки, напоминающіе письменное изображеніе буквъ.

Въ томъ же году появился аппаратъ Бадо, относящійся къ новой системѣ многократной передачи, которою достигается большая утилизація линіи. Аппараты этой группы основаны на принципѣ дѣленія времени, при чемъ любая единица времени дѣлится на нѣсколько долей соотвѣтственно числу работниковъ и на это время аппаратъ каждаго работника соединяется съ общимъ проводомъ. Это дѣленіе производится посредствомъ круга, раздѣленнаго на нѣсколько изолированныхъ частей. При помощи этого распредѣлительнаго круга каждой работающей станціи удѣляется опредѣленная доля единицы времени. Но если принять во вниманіе, что токъ продолжительностью въ $^1/_{333}$ секунды еще производитъ ясные знаки въ другомъ концѣ телеграфной линіи въ 350—800 километровъ длины, то станетъ понятнымъ, что при ручной работѣ невозможно достигнуть максимальной утилизаціи линіи. Чиновнику, работающему на аппаратѣ, необходимъ кратковременный отдыхъ послѣ каждаго посылаемаго имъ знака. Распредѣлитель предоставляетъ на это время аппаратъ другому чиновнику, и тѣмъ достигается бо́льшая утилизація линіи.

Изъ аппаратовъ этой системы, бывшихъ въ употребленіи въ Германіи слѣдуетъ упомянуть аппаратъ Мейера. Такимъ образомъ съ развитіемъ телеграфнаго дѣла преимущественнымъ вниманіемъ начинаютъ пользоваться системы, основанныя на многократной телеграфіи, ускоряющіе корреспонденцію тѣмъ, что по одному проводу можно передавать одновременно нѣсколько телеграммъ въ одномъ или встрѣчномъ направленіи.

Но наибольшей скорости достигаютъ такъ называемые *скородѣйствующіе аппараты*. Для передачи помощью этихъ аппаратовъ телеграммы должны быть предварительно заготовлены. Заготовка заключается въ томъ, что телеграфные знаки выбиваются на бумажной лентѣ или наводятся изолирующею массою на металлическую полоску. Нынѣ принятъ первый способъ. Если заставить пробитую ленту (перфорированную) подвигаться по токопосылателю, то изъ послѣдовательныхъ импульсовъ и перерывовъ тока составляются соотвѣтствующіе знаки.

Скородѣйствующій аппаратъ Витстона, въ которомъ въ основаніи принятъ алфавитъ Морзе, въ состояніи дать до 600 словъ въ минуту.

Наибольшую до сихъ поръ достигнутую скорость передачи даетъ аппаратъ Поллака и Вирага, въ которомъ электрическіе токи проходятъ черезъ телефонъ, колебанія пластинки котораго воспроизводятся фотографическимъ способомъ при помощи зеркальца, прикрѣпленнаго къ пластинкѣ и отражающаго падающій на него лучъ на ленту. Колебанія зеркальца производятъ колебанія луча на фотографической лентѣ, и на ней остается волнистая линія шрифта Морзе.

Съ помощью этого аппарата можетъ быть достигнута скорость въ 14000 словъ въ часъ.

РЕЦЕНЗІИ.

„Физическое Обозрѣніе“. Журналъ, издаваемый **проф. П. А. Зиловымъ**, Т. I. Варшава, 1900 г.

Въ прошломъ году наша небогатая періодическая литература по физикѣ обогатилась новымъ журналомъ; во главѣ изданія сталъ нашъ уважаемый профессоръ П. А. Зиловъ, изъ подъ пера котораго вышло уже не одно прекрасное произведеніе. Неудивительно поэтому, что издаваемое имъ „Физическое Обозрѣніе“ сразу обратило на себя вниманіе читающей публики и сумѣло удержать его. Разсчитанное, собственно, на кругъ преподавателей физики въ средней школѣ, оно скоро перешло за эти скромные предѣлы и стало достояніемъ тѣхъ, кто живо интересуется физикою и ея успѣхами.

„Физическое Обозрѣніе“ есть органъ, посвященный интересамъ одной физики, и въ этомъ единствѣ, по моему мнѣнію, его огромное значеніе. Оно даетъ журналу вполнѣ опредѣленное направленіе. Что касается его содержанія, то въ немъ популярно изложены различные физическіе вопросы, крупные и мелкіе, съ цѣлью держать читателя въ курсѣ научныхъ интересовъ переживаемаго времени. Для выполненія такой нелегкой задачи П. А. Зиловъ позаботился о составленіи обзоровъ по болѣе важнымъ и животрепещущимъ вопросамъ. За прошлый годъ ихъ напечатано нѣсколько: о сжиженіи газовъ—Л. П. Соколова; о катодныхъ лучахъ—П. А. Зилова; о высокихъ температурахъ—П. Н. Лебедева; о новыхъ газахъ атмосферы—Г. Липпманна и т. д. Кромѣ восьми обзоровъ было напечатано еще шесть рѣчей и лекцій, прочитанныхъ въ разныхъ углахъ земного шара такими извѣстными физиками, какъ Пуанкарэ, Корню, Пойтингъ, Зееманъ и другіе.

Какъ видно, П. А. Зиловъ сумѣлъ найти въ современной литературѣ не мало готовыхъ темъ, разработанныхъ заграницею. Но онъ не упустилъ изъ вида, что для процвѣтанія журнала внутри Россіи необходимо привлечь къ участію въ немъ ея производительныя силы. Благодаря его энергіи и добрымъ отношеніямъ къ семьѣ русскихъ физиковъ, онъ нашелъ себѣ сочувственный откликъ среди послѣднихъ. Среди авторовъ за прошлый годъ мы видимъ имена профессоровъ Н. Н. Шиллера, Л. П. Соколова, П. Н. Лебедева, а среди сотрудниковъ профессоровъ Д. Л. Гольдгаммера, В. С. Щеголева, В. А. Ульянина, Н. П. Кастерина, которые согласились разработать опредѣленные вопросы по соглашенію съ редакторомъ.

Для всякаго популярнаго изданія было бы вполнѣ достаточнымъ ввести въ свою программу „обзоры" и „рѣчи" съ лекціями. Но П. А. Зиловъ правильно взглянулъ на дѣло, когда рѣшилъ образовать въ своемъ журналѣ еще два отдѣла: „преподаванія физики" и „хроники". Въ отдѣлѣ преподаванія физики изложены болѣе мелкіе вопросы, но очень важные для преподаванія физики: по методикѣ, по составленію кабинета, по улучшенію демонстрацій тѣхъ или иныхъ классныхъ опытовъ. Въ отдѣлѣ хроники помѣщены отчеты о съѣздѣ преподавателей физикохимическихъ наукъ, о выставкѣ физическихъ приборовъ, о международномъ физическомъ конгрессѣ въ Парижѣ.

Весь этотъ матеріалъ распредѣленъ въ шести выпускахъ: три весною и три осенью—in 8^0, всего 306 страницъ за годъ. Изданіе очень опрятное, съ достаточнымъ числомъ хорошо исполненныхъ чертежей, и стоитъ всего 3 руб. въ годъ.

Мы горячо привѣтствуемъ появленіе этого журнала и думаемъ что онъ уже занялъ почетное мѣсто среди нашей учебной періодической литературы. Намъ кажется, однако, что въ интересахъ читателей-преподавателей можно было бы пожелать бóльшаго развитія отдѣла „преподаваніе физики", въ которомъ обсуждались бы старые, но спорные и почему-либо неясные и трудные вопросы. Такихъ имѣется не мало, и выяснять ихъ весьма полезно. Быть въ курсѣ новостей необходимо, но преподавателю не менѣе необходимо имѣть возможность вполнѣ уяснить себѣ старое. А это лучше всего достигается путемъ обмѣна мыслей между преподавателями, такъ какъ учебникъ далеко не всегда говоритъ наилучше и наипроще. Мы не сомнѣваемся, что съ развитіемъ журнала и этотъ отдѣлъ самъ собою станетъ полнѣе.

Итакъ, П. А. Зиловъ взялъ на себя большое и трудное дѣло и справляется съ нимъ прекрасно. Потребность въ самостоятельномъ русскомъ физическомъ журналѣ уже ощущалась давно, такъ какъ до сихъ поръ физическая литература находила себѣ пріютъ въ разнообразныхъ русскихъ журналахъ, то при химіи, то при математикѣ, то среди университетскихъ изданій, и выглядѣла какъ-то разбросанно и сиротливо. П. А. Зиловъ понялъ это и рѣшилъ посвятить физикѣ въ Россіи свой журналъ, свой трудъ и свое знаніе. Пожелаемъ же ему отъ всей души съ успѣхомъ вести многіе годы народившееся „Физическое Обозрѣніе" для пользы тѣхъ, которые любятъ физику, интересуются ею и преподаютъ ее подрастающему поколѣнію.

Кіевъ, Августъ 1901 г. *Проф. Г. Де-Метцъ.*

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 88 (4 сер.). Сумма цыфръ трехзначнаго числа, записаннаго по десятичной системѣ равна 7. Доказать, что необходимое и достаточное условіе дѣлимости этого числа на 7 заключается въ томъ, чтобы цыфра единицъ была равна цыфрѣ десятковъ.

Заимств. изъ *Supplemento al periodico di matematica.*

№ 89 (4 сер.). Въ треугольникѣ ABC провести сѣкущія $a_1a_2 \parallel BC$, $b_1b_2 \parallel CA$, $c_1c_2 \parallel AB$ (стороны a_2a_1, b_2c_1, c_2a_1 шестиугольника лежатъ соотвѣтственоо на сторонахъ AB, BC и AC) такъ, чтобы шестиугольникъ $a_1\,a_2\,b_1\,b_2\,c_1\,c_2$ оказался равностороннимъ. Пусть x—сторона этого шестиугольника, и a, b, c—стороны даннаго треугольника. Доказать, что

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Заимств. изъ *Casopis.*

№ 90 (4 сер.). Доказать, что въ вышеуказанномъ шестиугольникѣ прямыя a_1b_2, b_1c_2, c_1a_2 встрѣчаются въ одной точкѣ, разстоянія которой отъ сторонъ треугольника ABC находятся въ отношеніяхъ

$$(b+c):(c+a):(a+b).$$

Заимств. изъ *Casopis.*

№ 91 (4 сер.). Построить треугольникъ по двумъ сторонамъ, зная, что сумма соотвѣтствующихъ имъ высотъ равна третьей высотѣ.

Заимств. *Journal de mathématiques élémentaires.*

№ 92 (4 сер.). Даны прямая AB и двѣ точки C и D, лежащія внѣ этой прямой. Найти построеніемъ такую точку X на прямой AB, чтобы прямыя CX и DX образовали съ прямой AB углы, одинъ изъ которыхъ вдвое болѣе другого (углы эти предполагаются отсчитанными отъ противоположныхъ частей прямой AB и при томъ, въ противоположныхъ или въ одномъ направленіи, смотря по тому, по одну или по разныя стороны отъ прямой AB лежатъ точки C и D).

Д. Шоръ (Одесса).

№ 93 (4 сер.). 1) Опредѣлить емкость сосуда, если извѣстно, что пустой онъ вѣситъ 100 грамм., а наполненный ртутью (плотности 13,6)—7400 граммовъ. 2) Вычислить объемъ стѣнокъ сосуда и ихъ плотность, зная, что сосудъ, наполненный ртутью и погруженный въ жидкость плотности 0,8 вѣситъ 6570 граммовъ. 3) Какой объемъ свинца (плотность свинца 11,3) надо положить въ этотъ сосудъ, чтобы при погруженіи въ воду онъ оставался въ равновѣсіи?

Journal de Physique, Chimie et Histoire naturelle élémentaires.

(Сообщилъ *М. Гербановскій*).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 11 (4 сер.). *На данной хордѣ данной окружности построить вписанную въ эту окружность трапецію, въ которой дано отношеніе боковой стороны къ діагонали.*

Дѣлимъ данную хорду AB въ отношеніи, равномъ данному отношенію боковой стороны къ діагонали, внутреннимъ и внѣшнимъ образомъ соотвѣтственно въ точкахъ x и y. Затѣмъ строимъ на отрѣзкѣ xy окружность, какъ на діаметрѣ. Эта окружность, какъ извѣстно, есть геометрическое мѣсто точекъ, разстоянія которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ находятся въ данномъ отношеніи. Черезъ точки пересѣченія C и C' этой окружности съ данной окружностью проводимъ хорды CD и $C'D'$, параллельныя хордѣ AB. Трапеціи $ABCD$ и $ABC'D'$ суть искомыя. Задача допускаетъ вообще два рѣшенія.

Б. Мерцаловъ (Орелъ); *К. Гудковъ* (Свеаборгъ).

№ 14 (4 сер.). *Если многочленъ*

$$x^4+px^2+qx+a^2$$

дѣлится на x^2-1, то онъ дѣлится и на x^2-a^2.

Раздѣливъ многочленъ $x^4+px^2+qx+a^2$ на x^2-1, получимъ въ остаткѣ $qx+a^2+p+1$. Пусть предложенный многочленъ дѣлится на x^2-1; тогда

$$q=0, \quad a^2+p+1=0 \qquad (1).$$

Раздѣливъ данный многочленъ на x^2-a^2, получаемъ въ остаткѣ

$$qx+a^2(a^2+p)+a^2=qx+a^2(a^2+p+1) \qquad (2).$$

Если данный многочленъ дѣлится на x^2-1, то остатокъ (2) на основаніи равенствъ (1) приводится къ нулю, а потому въ этомъ случаѣ многочленъ дѣлится и на x^2-a^2.

Н. Готлибъ (Митава); *Б. Мерцаловъ* (Орелъ); *К. Гудковъ* (Свеаборгъ).

№ 16 (4 сер.). *Построить треугольникъ, зная радіусъ круга описаннаго, разстояніе между центромъ и ортоцентромъ треугольника и длину одной изъ сторонъ.*

Преположимъ, что задача рѣшена. Пусть ABC — искомый треугольникъ, O — центръ круга описаннаго около этого треугольника, H — его ортоцентръ, AB — данная сторона. Опустимъ изъ центра O перпендикуляръ OL на сторону AB. Тогда по извѣстной теоремѣ Эйлера

$$HC=2OL \qquad (1).$$

Отсюда вытекаетъ построеніе. Изъ произвольной точки O' радіусомъ, равнымъ данному радіусу AO, описываемъ окружность и откладываемъ въ любомъ направленіи отрѣзокъ $O'H'$, равный данному разстоянію OH. Теперь остается въ кругъ O' вписать треугольникъ такъ, чтобы точка H' была его ортоцентромъ и чтобы одна изъ его сторонъ имѣла данную длину AB. Такъ какъ эта извѣстная по длинѣ сторона есть хорда круга O', то легко опредѣлить ея разстояніе отъ точки O'; для этого откладываемъ гдѣ-нибудь на окружности O' хорду $xy=AB$ и опускаемъ изъ центра O' на нее перпендикуляръ $O'L'$. Сдѣлавъ изъ точки H' на окружности O' засѣчку радіусомъ, равнымъ $2O'L'$ (см. (1)), мы опредѣлимъ вершину C' искомаго треугольника, противоположную сторонѣ, длина которой равна AB. Такъ какъ сторона эта должна быть перпендикулярна къ прямой $H'C'$, то для построенія этой стороны описываемъ изъ центра O' радіусомъ $O'L'$ окружность, проводимъ радіусъ $O'X$ этой окружности параллельно прямой $H'C'$ и въ точкѣ X возставляемъ перпендикуляръ къ радіусу $O'X$. Пусть этотъ перпендикуляръ пересѣкаетъ окружность O' въ точкахъ A' и B'. Треугольникъ $A'B'C'$ есть искомый.

Б. Мерцаловъ (Орелъ); *П. Полушкинъ* (Знаменка).

№ 22 (4 сер.). *Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе*

$$4x^3+5=(2x^2+1)(5y^2-17).$$

Раздѣливъ обѣ части предложеннаго уравненія на $2x^2+1$, находимъ:

$$2x+\frac{5-2x}{2x^2+1}=5y^2-17.$$

Такъ какъ x и y должны быть цѣлыми числами, то и выраженіе $\frac{5-2x}{2x^2+1}$ должно представлять собою цѣлое число. Обозначимъ абсолютную величину x черезъ ξ. Тогда абсолютная величина знаменателя дроби

$$\frac{5-2x}{2x^2+1} \qquad (1)$$

есть $2\xi^2+1$, а абсолютная величина числителя *не болѣе* $2\xi+5$. Если

$$\xi>2 \ (2), \text{ то } 2\xi^2+1>2\xi+5 \qquad (3).$$

Дѣйствительно, при $\xi>2$ выраженіе

$$2\xi^2+1-(2\xi+5)=2\xi(\xi-1)-4 \qquad (4)$$

положительно. Въ самомъ дѣлѣ изъ неравенства (2) слѣдуетъ, что множитель 2ξ болѣе 4-хъ, а множитель $\xi-1$ болѣе 1; поэтому произведеніе $2\xi(\xi-1)$ болѣе 4, откуда вытекаетъ, что выраженіе (4) положительно, и слѣдовательно неравенство (3) вытекаетъ изъ неравенства (2). Итакъ, если $\xi>2$, то дробь (1) есть дробь правильная; слѣдовательно, если x и y суть пара искомыхъ цѣлыхъ рѣшеній, то абсолютная величина x не можетъ быть болѣе 2-хъ. Итакъ, единственныя возможныя цѣлыя значенія x суть: 0, ± 1, ± 2. Подставляя каждое изъ этихъ значеній въ предложенное уравненіе и находя соотвѣтствующія значенія y, убѣждаемся, что лишь значенію $x=1$ отвѣчаютъ цѣлыя значенія y, а именно $y=\pm 2$.

Б. Мерцаловъ (Орелъ); *К. Гудковъ* (Свеаборгъ).

№ 30 (4 сер.). *Цѣлое число n выбрано такъ, что сумма*

$$1+2^2+\ldots+n^2$$

не дѣлится на 5. Найти остатокъ отъ дѣленія на 5 суммы

$$1+2+\ldots+n.$$

Сумма $1+2^2+\ldots+n^2$ равна, какъ извѣстно, выраженію:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3.} \qquad (1).$$

Замѣтивъ, что выраженіе это представляетъ собою число цѣлое, предположимъ, что n есть число вида $5m$, $5m-1$ или $5m+2$. Тогда, соотвѣтственно этимъ тремъ предположеніямъ, множители n, $n+1$ или $2n+1$ оказываются кратными 5, а потому и числовая величина выраженія (1) въ этихъ случаяхъ будетъ кратна 5, такъ какъ знаменатель этого выраженія не дѣлится на 5.

Слѣдовательно число n должно быть одного изъ видовъ $5m+1$ или $5m-2$, такъ какъ по предположенію числовая величина выраженія (1) не дѣлится на 5. Поэтому сумма

$$1+2+\ldots+n$$

приводится къ одному изъ двухъ выраженій:

$$\frac{(5m+1)(5m+2)}{2}=\frac{25m^2+15m+2}{2}=\frac{m(5m+3)}{2}\cdot 5+1$$

или
$$\frac{(5m-2)(5m-1)}{2}=\frac{m(5m-3)}{2}\cdot 5+1.$$

Но числа $\frac{m(5m+3)}{2}$ и $\frac{m(5m-3)}{2}$ суть числа цѣлыя, такъ какъ въ каждой парѣ чиселъ m, $5m+3$ и m, $5m-3$ одно изъ чиселъ есть число четное.

Слѣдовательно сумма

$$1+2+\ldots+n$$

по раздѣленіи на 5 даетъ въ остаткѣ 1.

П. Полушкинъ (Знаменка); *Л. Гальперинъ* (Бердичевъ); *Н. Готлибъ* (Дубельнъ).

№ 38 (4 сер.) *Упростить выраженіе*

$$\sqrt{3{,}75+\sqrt{3}+\sqrt{6}+2\sqrt{2}},$$

представивъ его въ видѣ трехчлена.

Подвергнемъ предложенное выраженіе слѣдующему ряду тождественныхъ преобразованій:

$$\sqrt{3{,}75+\sqrt{3}+\sqrt{6}+2\sqrt{2}}=\sqrt{1+\frac{3}{4}+2+\sqrt{3}+\sqrt{6}+2\sqrt{2}}=$$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+(\sqrt{2})^2+2.1.\frac{\sqrt{3}}{2}+2.\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}+2.1.\sqrt{2}}=$$

$$=\sqrt{\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{2}\right)^2}=\pm\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{2}\right).$$

Эти искусственныя преобразованія можно замѣнить слѣдующимъ методомъ: полагая

$$\sqrt{3{,}75+\sqrt{3}+\sqrt{6}+2\sqrt{2}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \qquad (1),$$

узнаемъ, нельзя ли удовлетворить этому равенству раціональными значеніями x, y, z. Для этого обѣ части равенства (1) возвышаемъ въ квадратъ и въ полученномъ равенствѣ приравниваемъ порознь другъ другу раціональные и ирраціональные члены. Тогда получимъ *условную* систему четырехъ уравненій съ тремя неизвѣстными; рѣшая три изъ этихъ уравненій, повѣряемъ найденныя значенія x, y и z, которыя оказываются раціональными, подстановкой въ четвертое уравненіе или же въ равенство (1), которое повѣряемъ, возвышая вторую часть въ квадратъ.

Д. Дьяковъ (ст. Персіяновка); *Б. Мерцаловъ* (Орелъ); *В. Нерехтскій* (Кіевъ).

ПОПРАВКА: Въ задачѣ XXIV, напечатанной въ № 300 „Вѣстника“ вмѣсто числа 7618 должно быть напечатано число 7168.

Редакторы: **В. А. Циммерманъ** и **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса, 15-го сентября 1901 г.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.

Обложка
ищется

Обложка
ищется