№ 382.

ВѢСТНИКЪ

ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

И

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

издаваемый

В. А. Гернетомъ

подъ редакціей

Привать-Доцента В. Ѳ. Кагана.

XXXII-го Семестра № 10-й.

ОДЕССА.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66.
1904.

XXXII Сем. № 10.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

30 Ноября № 382. 1904 г.

Символы элементарной математики.

Проф. А. Клоссовскаго.

II.

Происхожденіе символовъ отрицательныхъ, дробныхъ, ирраціональныхъ и мнимыхъ. Обобщеніе опредѣленій основныхъ операцій. Реализированіе символовъ.

*(Окончаніе *).*

До сихъ поръ мы допускали, что операціи приводятъ всегда къ одному изъ символовъ первоначальнаго ряда $1, 2, 3 \ldots a$. Но задача можетъ привести насъ къ рѣшенію одного изъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} 10 + x &= 9 \\ 7 \,.\, x &= 2 \\ x^2 &= 3 \\ 10^x &= 2 \end{aligned}\right\} \quad (23).$$

Въ первоначальномъ ряду символовъ мы не найдемъ такого символа, который бы рѣшалъ одно изъ предыдущихъ уравненій. Въ этомъ случаѣ можемъ поступить двоякимъ образомъ: 1) или подобныя задачи будемъ считать невозможными, или 2) введемъ

*) См. № 380 „Вѣстника“.

новые символы, рѣшающіе каждую изъ нашихъ задачъ, и эти символы будемъ разсматривать какъ корни уравненій (23). Но для того, чтобы раздвинуть область аналитическихъ операцій, необходимо установить законы, которымъ подчиняются наши новые символы и ихъ операціи, а также найти ихъ отношеніе къ символъ прежняго ряда. Чтобы не остаться въ сферѣ чисто абстрактной, необходимо, далѣе, реализировать эти символы, т. е. подыскать ту область объектовъ, которые могутъ служить ихъ реальными субстратами.

Начнемъ съ уравненія:

$$10+x=9.$$

Подобныя задачи, вообще, рѣшаются дѣйствіемъ вычитанія; въ виду этого обозначимъ дѣйствіе въ этомъ случаѣ:

$$x=9-10 \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

и это обозначеніе будемъ разсматривать какъ новый символъ (корень), рѣшающій уравненіе $10+x=9$, т. е.:

$$10+(9-10)=9$$

или

$$(9-10)+10=9.$$

Для краткости обозначимъ этотъ новый символъ знакомъ $1'$. По опредѣленію символа $1'$, имѣемъ:

$$10+1'=9.$$

Изъ этого новаго символа составимъ рядъ, аналогичный первоначальному ряду:

$$1'+1'=2',$$

$$1'+1'+1'=3'$$

и т. д.

Покажемъ, прежде всего, что символъ $1'$ рѣшаетъ не только уравненіе (24), но вообще всякое уравненіе, въ которомъ уменьшаемое меньше вычитаемаго на одну единицу.

И дѣйствительно:

$$\begin{array}{l} 10+1'=\ 9 \\ \quad +1 \quad\ +1 \\ 11+1'=10 \\ \quad +1 \quad\ +1 \\ 12+1'=11 \end{array}$$

и вообще:

$$(a+1)+1'=a.$$

Не трудно показать далѣе, что символы $2'$, $3'$, $4'$, . . . можно разсматривать какъ корни уравненій, въ которыхъ уменьшаемое меньше вычитаемаго на двѣ, три и болѣе единицы; и дѣйствительно:

$$\left.\begin{array}{l} 10+1'=9 \\ \quad\;+1' \quad +1' \\ 10+2'=9+1'=8 \\ \quad\;+1' \quad +1' \\ 10+3'=8+1'=7 \\ \quad\text{и т. д.} \end{array}\right\} \quad (25)$$

Изъ уравненій (25) видно, что символы $1'$, $2'$, $3'$, ... обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что, будучи приложены къ какому-либо числу первоначальнаго ряда, они *уменьшаютъ* это число на одну, двѣ, три и т. д. единицы. Другими словами, уравненія (25) равносильны уравненіямъ:

$$10-1=9$$
$$10-2=8$$
$$10-3=7$$
$$\text{и т. д.,}$$

т. е. приложеніе къ какому-нибудь числу первоначальнаго ряда символовъ $1'$, $2'$, $3'$, . . . аналититически равносильно присоединенію къ этому же числу выраженій -1, -2, -3 и т. д. Въ аналитическихъ выкладкахъ, поэтому, мы вправѣ аналитическую форму $(a-1)-a=1'$ замѣнить формой -1.

Введеніе символовъ -1, -2, -3 и т. д., вмѣсто $1'$, $2'$, $3'$ и т. д., находитъ себѣ также *аналитическое* оправданіе въ слѣдующемъ. Пусть

$$x+b=c, \text{ гдѣ } c<b, \text{ т. е. } b=c+d,$$
$$x+c+d=c,$$
$$(x+d)+c=c,$$
$$x+d=c-c.$$

Введемъ такой новый символъ O, который обладаетъ свойствомъ

$$c+0=c \text{ или}$$
$$c-c=0, \text{ слѣдовательно}$$
$$x+d=0,$$
$$x=0-d$$

или, по свойству символа O:

$$x=-d.$$

Но могутъ ли имѣть эти новые символы, которые назовемъ *отрицательными* (въ противоположность числамъ первоначальнаго ряда, *положительнымъ*), какое-нибудь реальное значеніе? Для этого необходимо подыскать такую область объектовъ или соотношеній, которые обладали бы такими же свойствами, какъ положительные и отрицательные символы. Очевидно, что положительные и отрицательные символы могутъ имѣть примѣненіе тамъ, гдѣ ряду объектовъ, сосчитываемыхъ отъ извѣстной точки (нуля), можно противопоставить *обратный* рядъ; напримѣръ, длины, считаемыя вправо и влѣво, силы, дѣйствующія по двумъ, прямо противоположнымъ, направленіямъ, капиталъ и долгъ, температуры отъ точки таянія снѣга вверхъ и внизъ и т. под.

Во всѣхъ этихъ случаяхъ, если числа первоначальнаго ряда (положительныя) будутъ служить для обозначенія объектовъ, расположенныхъ по извѣстному направленію, числа отрицательныя найдутъ себѣ реальный образъ въ объектахъ прямо противоположнаго ряда. Или еще общнѣе. Положительныя и отрицательныя числа тамъ найдутъ примѣненіе, гдѣ считаемому можно противопоставить обратное положеніе. Подобное противоположеніе имѣетъ вообще мѣсто тогда, когда рѣчь идетъ не о числѣ предметовъ, въ ихъ *абсолютномъ* значеніи, а объ отношеніяхъ между ними. А для этого необходимо, чтобы эти объекты можно было разсматривать какъ рядъ A, B, C, ..., расположенный такъ, что переходъ отъ A къ B равенъ переходу отъ B къ C и т. д. Если въ этомъ ряду переходъ отъ A къ B обозначимъ черезъ $+1$, то переходъ отъ B къ A долженъ быть -1. Если мы такой рядъ продолжимъ въ обѣ стороны неопредѣленно, то каждое цѣлое число (положительное или отрицательное) представитъ собою отношеніе (или переходъ) какого-нибудь произвольнаго члена этой строки къ другому опредѣленному члену того же ряда.

Но въ частныхъ случаяхъ или въ частныхъ задачахъ могутъ представиться ряды объектовъ, не допускающіе имъ противоположныхъ; напримѣръ, въ задачахъ, въ которыхъ ищется абсолютная сила свѣта или температура отъ точки абсолютнаго нуля. Съ другой стороны, возможно представить себѣ задачу, въ которой возможны только переходы прямые отъ A къ B, отъ B къ C, ..., но не обратные. Такъ, напримѣръ, можно себѣ представить механизмъ, колесо котораго вращается только по одному извѣстному направленію. Въ подобныхъ частныхъ случаяхъ отрицательное рѣшеніе будетъ служить признакомъ невозможности задачи. Но отрицательный символъ, какъ аналитическая форма, настолько же возможенъ и логиченъ, какъ и рѣшеніе положительное.

Совершенно аналогично можно представить себѣ происхожденіе другого символа—дроби. Пусть дано уравненіе.

$$x.15 = 7 \ldots . \quad (26)$$

Въ ряду символовъ 1, 2, 3 .... не находимъ символа, рѣшающаго это уравненіе.

Введемъ новый символъ, который будемъ разсматривать какъ корень, рѣшающій уравненіе (26). Обозначимъ аналитически рѣшеніе предыдущаго уравненія:

$$x = \frac{7}{15}$$

и это обозначеніе будемъ разсматривать, какъ новый символъ, рѣшающій уравненіе (26). Постараемся его реализировать.

Возьмемъ уравненіе:

$$x.15=1,$$

$$x=\frac{1}{15}.$$

Обозначимъ, для краткости, этотъ новый символъ знакомъ $1''$; слѣдовательно,

$$1''.15=1 \text{ или}$$

$$\underbrace{1''+1''+1''+\ldots.=1}_{15 \text{ разъ}}.$$

Слѣдовательно, символъ $1''$ обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что, взятый (повторенный) 15 разъ, онъ даетъ единицу (1); но подобнымъ свойствомъ обладаетъ пятнадцатая доля единицы. Слѣдовательно, символъ $1''$ можетъ служить для выраженія пятнадцатой доли единицы.

Составимъ изъ этого новаго символа—новый рядъ:

$$1''+1''=2''$$

$$1''+1''+1''=3'' \text{ и т. д.}$$

Предполагаемъ при этомъ, что, при составленіи этого новаго ряда, наши символы подчиняются ассоціативному и перемѣстительному законамъ. Въ области реальныхъ объектовъ эти символы будутъ выражать двѣ, три, четыре и т. д. пятнадцатыя доли единицы. Не трудно показать, что эти новые символы можно разсматривать какъ корни уравненій

$$x.2=15,$$

$$x.3=15$$

и т. д.

Прежде всего очевидно, что эти новые символы можно соединять съ прежними знакомъ $+$ по закону ассоціаціи, ибо:

$$\underbrace{1''+1''+1''+\ .\ .\ .\ .+1''}_{15 \text{ разъ}}=1+1'',$$

$$\underbrace{1''+1''+1''+\ .\ .\ .\ .}_{15 \text{ разъ}}\underbrace{+1''+1''+1''\ .\ .\ .\ .}_{15 \text{ разъ}}+1''=1+1+1''=2+1''.$$

Возьмемъ теперь уравненіе:

$$x.15=1;\quad x=\frac{1}{15}=1'',$$

$$\begin{array}{r} 1''.15=1 \\ +1 \quad\ +1 \end{array}$$

$$1''.15+1=2 \text{ или } \underbrace{(1''+1''+\ .\ .\ .\ .)}_{15 \text{ разъ}}+\underbrace{(1''+1''+\ .\ .\ .\ .\ )}_{15 \text{ разъ}}=2,$$

или $2''.15=2.$

Точно также:

$$3''.\,15 = 3,$$

$$4''.\,15 = 4$$

и т. д.

Изъ всего сказаннаго видно, что область, охваченная символами, сравнительно съ первоначальнымъ рядомъ, значительно расширена. Теперь мы имѣемъ ряды для выраженія какъ прямого, такъ и обратнаго ряда объектовъ и соотношеній; кромѣ того, символы вида:

$$\frac{1}{10},\ \frac{1}{11},\ \frac{1}{12},\ \ldots.$$

заполняютъ промежутки между символами 1, 2, 3, ... Вслѣдствіе этого кругъ задачъ, рѣшаемый символами, значительно расширяется. Всѣ тѣ задачи, которыя, казалось, приводятъ къ рѣшеніямъ невозможнымъ, получаютъ вполнѣ опредѣленный смыслъ. Мы раньше указали, что существуютъ задачи, не допускающія *отрицательныхъ* рѣшеній; точно также возможны задачи, не допускающія *дробныхъ* рѣшеній; напримѣръ, задачи, въ которыхъ рѣчь идетъ объ абсолютномъ числѣ *недѣлимыхъ* объектовъ. Въ этомъ случаѣ дробное рѣшеніе будетъ служить признакомъ невозможности задачи.

Но всѣ эти символы должны быть орудіемъ анализа, а потому необходимо установить законы операцій надъ ними. Операціи должны быть установлены такимъ образомъ, чтобы въ дальнѣйшемъ ходѣ выкладокъ можно было оперировать, независимо отъ принадлежности входящихъ въ формулу буквъ къ тому или другому ряду символовъ. А для этого необходимо и достаточно, чтобы новыя опредѣленія операцій, съ появленіемъ каждаго новаго символа, представляли собою болѣе общія формы прежнихъ опредѣленій и не вносили собою никакихъ внутреннихъ противорѣчій. Послѣ этого останется только раскрыть реальный смыслъ обобщенной операціи по отношенію къ каждому ряду символовъ. Исходя изъ этого положенія, распространимъ понятія сложенія и умноженія на новые наши ряды, отрицательные и дробные.

Будемъ называть сложеніемъ, въ болѣе общемъ смыслѣ, тотъ результатъ, который получится, если мы данныя слагаемыя припишемъ одно къ другому съ ихъ собственными знаками, затѣмъ сложимъ слагаемыя, передъ которыми стоитъ знакъ $+$, затѣмъ сложимъ тѣ, передъ которыми стоитъ знакъ $-$; изъ большей суммы вычтемъ меньшую и передъ результатомъ поставимъ знакъ большей суммы. Очевидно, что это опредѣленіе заключаетъ въ себѣ прежнее, какъ частный случай. Сумма, полученная подобнымъ образомъ, подчиняется законамъ ассоціаціи и перемѣстительному. Но эта сумма дастъ результатъ не прямого абсолютнаго счета, но включитъ въ себѣ прямой и обратный ходъ сочетанія данныхъ. Операція вычитанія вытекаетъ изъ понятія объ обратности. Пусть:

$$a-(-b)=x,$$
$$a=x+(-b)=x-b,$$
$$x=a+b,$$
$$a-(-b)=a+b.$$

Такъ же и для другихъ случаевъ вычитанія.

Суммой нѣсколькихъ дробей съ одинаковыми знаменателями будемъ называть тотъ результатъ, который получится, если мы сложимъ числителей и подпишемъ ихъ общаго знаменателя. Реальный смыслъ сложенія дробей равносиленъ сложенію или совокупленію въ одно цѣлое ряда одноименныхъ долей. Это опредѣленіе включаетъ въ себѣ понятіе сложенія цѣлыхъ чиселъ, ибо каждое цѣлое число можно представить въ видѣ:

$$a.1=a;\quad a=\frac{a}{1}\cdot$$

Вычитаніе дробей есть дѣйствіе, обратное сложенію. Въ результатѣ вычитанія могутъ явиться новые символы, именно, *отрицательныя* дроби.

Произведеніемъ двухъ символовъ будемъ называть тотъ результатъ, который получится, если мы абсолютныя ихъ значенія перемножимъ и поставимъ знакъ $+$, въ томъ случаѣ, если множители съ одинаковыми знаками, и знакъ $-$, если множители съ различными знаками. Это болѣе общее понятіе объ умноженіи заключаетъ въ себѣ прежнее и, кромѣ того, подлежитъ закону ассоціаціи, коммутативному и распредѣлительному, ибо

$$(+a).(-b).(-c)=(-b).(+a)(-c)=-abc.$$

Точно также:

$$(a+b).-c=-[(a+b).c]\text{ или:}$$

$$-\left[\begin{array}{c} a+b \\ a+b \\ \cdot\ \ \cdot \end{array}\right] c\text{ разъ}=-ac-bc.$$

Понятіе объ умноженіи на отрицательное особенно легко реализировать въ геометріи или механикѣ. Пусть дано $a.(-c)$, гдѣ a—есть нѣкоторая длина. На основаніи опредѣленія умноженія, мы должны a увеличить въ b разъ, а затѣмъ измѣнить ея направленіе въ противоположное; слѣдовательно, умноженіе на -1 въ геометріи и механикѣ соотвѣтствуетъ поворачиванію линіи или силы на 180^0.

Вообще, аналитическія операціи надъ символами, въ области реальныхъ объектовъ и ихъ соотношеній, соотвѣтствуютъ совершенно опредѣленнымъ манипуляціямъ; каждому новому шагу выкладокъ можно дать реальные образы.

Впрочемъ, нѣкоторые моменты аналитическихъ операцій, особенно, въ высшей математикѣ, какъ бы выходятъ изъ сферы реальныхъ образовъ и манипуляцій и не находятъ себѣ толкованій. Это возможно вслѣдствіе двухъ причинъ: или эти моменты операцій дѣйствительно не имѣютъ реальныхъ образовъ и представляютъ собою только чисто абстрактные обороты мысли, или намъ еще неизвѣстны тѣ области объектовъ и ихъ соотношеній, въ которыхъ можно найти образы для этихъ моментовъ анализа.

Понятіе о дѣленіи отрицательныхъ чиселъ вытекаетъ изъ понятія объ обратности дѣйствія. Пусть дано

$$(+a):(-b)=x$$

$$+a=x.(-b).$$

Но произведеніе двухъ множителей тогда положительно, когда множители съ одинаковыми знаками, т. е. x должно быть съ $-$; а слѣдовательно:

$$(+):(-)=(-).$$

Точно также:

$$(-):(+)=(-),$$

$$(-):(-)=(+).$$

Произведеніемъ двухъ дробей будемъ называть тотъ результатъ, который получится, если мы произведеніе числителей раздѣлимъ на произведеніе знаменателей; слѣдовательно:

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}=\frac{a}{d}\times\frac{c}{b};$$

$$\frac{a}{b}\times c=\frac{a}{b}\times\frac{c}{1}=\frac{ac}{b}=a\times\frac{c}{b}$$

$$a\times\frac{b}{c}=\frac{a}{1}\times\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}=\frac{a}{c}\times b.$$

Операція умноженія на дробь рѣшаетъ вопросъ о нахожденіи части по данному цѣлому; и дѣйствительно:

$$a\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{d}=\frac{a}{d}\times c,$$

т. е. a дѣлится на d равныхъ частей и такихъ частей нужно взять c.

Дѣленіе дробей есть дѣйствіе обратное умноженію:

$$a:\frac{b}{c}=x;\quad a=\frac{b}{c}x;\quad a=\frac{bx}{c};$$

$$ac=bx;\text{ отсюда } x=\frac{ac}{b}=a:\frac{b}{c}\cdot$$

Точно также:

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc};$$

$$\frac{a}{b} : c = x; \quad \frac{a}{b} = cx; \quad a = bcx;$$

$$\frac{a}{bc} = x = \frac{a}{b} : c;$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Не трудно показать, что раздѣлить на дробь значитъ по части найти цѣлое.

Уравненія на страницахъ отъ (169) до (173) выведены лишь въ предположеніи, что символы наши и дѣйствія надъ ними подчиняются законамъ ассоціаціи, перемѣстительному и соединительному. Новые наши символы и операціи надъ ними подчиняются тоже лишь этимъ законамъ, а слѣдовательно, вся совокупность уравненій имѣетъ мѣсто и для отрицательныхъ и дробныхъ символовъ. А изъ этихъ уравненій вытекаютъ разнообразнѣйшія теоремы относительно измѣняемости суммы и разности, произведенія и частнаго, измѣняемость дробей съ измѣненіемъ числителя и знаменателя, а также различныя преобразованія, т. е. сокращеніе дробей и приведеніе ихъ къ одному знаменателю.

Задача можетъ привести, наконецъ, къ одному изъ уравненій:

$$x^2 = 5$$

или

$$x^2 = -1.$$

Но въ рядахъ извѣстныхъ намъ до сихъ поръ символовъ нѣтъ символа, рѣшающаго эти уравненія. Приходится ввести новый символъ, какъ корень этихъ уравненій. Корень, рѣшающій первое уравненій, обозначимъ

$$x = \sqrt{5}.$$

Этотъ новый символъ назовемъ *ирраціональнымъ* количествомъ. Свойство его выражается уравненіемъ

$$(\sqrt{5})^2 = 5.$$

Корень, рѣшающій второе уравненіе, обозначаютъ

$$x = \sqrt{-1}$$

и называютъ *мнимымъ* количествомъ. Свойство его выражается уравненіемъ:

$$(\sqrt{-1})^2 = -1.$$

Изученіе свойствъ этихъ новыхъ символовъ и операцій надъ ними выходитъ за предѣлы элементарной математики. Замѣтимъ лишь, что простѣйшимъ изъ этихъ символовъ можно дать геометрическое значеніе; напримѣръ, символъ $\sqrt{5}$ можно разсматривать, какъ сторону квадрата, площадь котораго равна 5 или какъ гипотенузу прямоугольнаго треугольника, катеты котораго равны 2 и 1. Точно также $\sqrt[3]{7}$ геометрически представляетъ сторону куба, объемъ котораго равенъ 7. Выраженіе $5\sqrt{13}$ можно разсматривать какъ гипотенузу прямоугольнаго треугольника, катеты котораго 3 и 2, увеличенную въ 5 разъ, и т. д.

Для того, чтобы показать, что и символъ $\sqrt{-1}$ можно реализировать въ извѣстной области объектовъ, ограничимся лишь слѣдующими разсужденіями, не имѣющими строгой точности.

Назовемъ суммой результатъ, который получимъ, если символы свяжемъ прямо знакомъ $+$. Слѣдовательно, сумма $(+5)$ и $7\sqrt{-1}$ будетъ

$$5+7\sqrt{-1}.$$

Назовемъ произведеніемъ результатъ, который получится, если перемножимъ множители, стоящіе передъ знакомъ корня, перемножимъ множители, стоящіе подъ знакомъ корня, и покроемъ ихъ общимъ знакомъ корня; слѣдовательно,

$$7\sqrt{2}.7\sqrt{3}=35\sqrt{6}\,;$$

$$5\times\sqrt{-1}=5\sqrt{-1}\,;$$

$$5\times(\sqrt{-1})^2=-5.$$

Изъ послѣдняго равенства видно, что умножить прямую, равную 5 единицамъ, на $(\sqrt{-1})^2$ значитъ повернуть ее на 180^0; умноженіе, слѣдовательно, на $\sqrt{-1}$ можетъ соотвѣтствовать повороту на 90^0.

Иллюстрируемъ значеніе и пользу различныхъ символовъ на двухъ геометрическихъ задачахъ:

I. Между точками A и B найти точку C, которая дѣлила бы прямую AB въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

Обозначимъ одинъ отрѣзокъ прямой AB буквой $AC=x$; другой отрѣзокъ CB выразится $a-x$; по требованію задачи:

$$a:x=x:(a-x)$$

$$x^2+ax-a^2=o$$

$$x_1=-\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}$$

$$x_2=-\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}.$$

Задача, какъ видно, имѣетъ два рѣшенія. Построимъ первое изъ нихъ. Первое рѣшеніе получится, если мы изъ $\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}$ вычтемъ $\frac{a}{2}$; но $\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}$ есть гипотенуза прямоугольнаго треугольника, катеты котораго равны a и $\frac{a}{2}$; на чертежѣ она выразится прямой AO; изъ этой гипотенузы нужно вычесть $\frac{a}{2}$; получится прямая AD. Радіусомъ AD опишемъ дугу. Очевидно, точка C будетъ искомая.

Но задача имѣетъ и другое рѣшеніе, именно:

$$x_2 = -(AO + OB) = -AF.$$

По смыслу *отрицательныхъ* рѣшеній, нужно прямую AF отложить *влѣво* отъ точки A; а для этого радіусомъ AF опишемъ дугу; получится точка C'. Эта точка не отвѣчаетъ на требованіе нашей задачи. Но это рѣшеніе пріобрѣтетъ смыслъ, если мы обобщимъ нашу задачу: на прямой, проходящей черезъ двѣ точки A и B, найти такую точку C, чтобы $AB : AC = AC : CB$.

II. Между точками A и B найти точку C такъ, чтобы прямоугольникъ, составленный изъ отрѣзковъ $AC \times CB$ имѣлъ данную площадь c^2. Пусть разстояніе $AB = a$, отрѣзокъ $AC = x$, отрѣзокъ $CB = a - x$; тогда

$$x(a - x) = c^2,$$

$$x^2 - ax + c^2 = 0,$$

$$x_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - c^2},$$

$$x_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - c^2}.$$

Задача также имѣетъ два рѣшенія.

Для полученія перваго рѣшенія нужно къ $\frac{a}{2}$ придать катетъ прямоугольнаго треугольника, гипотенуза коего равна $\frac{a}{2}$, а другой катетъ $= c$.

Для этого прямую AB раздѣлимъ пополамъ въ точкѣ D и на отрѣзкѣ DB построимъ полукругъ; изъ точки B радіусомъ $= c$ опишемъ дугу и точку пересѣченія E соединимъ съ точкой D. Очевидно, $ED = \sqrt{\frac{a^2}{4} - c^2}$;

$$x_1 = AD + DE = AE';$$

$$x_2 = AD - ED = AE''.$$

Но до сихъ поръ мы предполагали, что $\frac{a_2}{4} > c^2$; если $\frac{a^2}{4} < c^2$, то рѣшеніе получается мнимое. На основаніи замѣчанія, сдѣланнаго выше, построимъ геометрически это рѣшеніе. Преобразуемъ наше выраженіе;

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{-1}\sqrt{c^2 - \frac{a^2}{2}}.$$

Для полученія перваго корня нужно на прямой AB отъ точки A отложить $\frac{a}{2}$ до точки D; затѣмъ отъ точки D на прямой DB построить катетъ прямоугольнаго треугольника, гипотенуза коего равна c, а другой катетъ $\frac{a}{2}$, и повернуть этотъ катетъ на 90⁰ вверхъ, т. е. отложить его по перпендикуляру, возставленному къ прямой DB въ точкѣ D; оконечность этого перпендикуляра опредѣлитъ точку C'; второе рѣшеніе получится, если мы повернемъ катетъ $\sqrt{c^2 - \frac{a^2}{4}}$ на 90^0 внизъ, при чемъ получится на плоскости вторая точка C''. Очевидно, что эти два рѣшенія C' и C'' не соотвѣтствуютъ требованіямъ задачи. Но эти рѣшенія получатъ геометрическое значеніе, если мы обобщимъ задачу: на плоскости найти точку такъ, чтобы прямоугольникъ, составленный изъ отрѣзковъ AC и BC, имѣлъ данную площадь c^2. Эта обобщенная задача имѣетъ 4 рѣшенія. Такимъ образомъ, отрицательныя и мнимыя рѣшенія не только получили вполнѣ реальное значеніе, но даже указали на возможность обобщить задачу.

Изъ всего сказаннаго видно, что въ анализѣ не существуетъ возможныхъ и невозможныхъ символовъ, нѣтъ абсурдныхъ величинъ; съ чисто аналитической стороны, всѣ символы одинаково возможны и логичны; всѣ они представляютъ собою извѣстныя, болѣе или менѣе сложныя, аналитическія формы, какъ результатъ извѣстныхъ логическихъ построеній. Во избѣжаніе недоразумѣній, слѣдуетъ исключить даже самый терминъ мнимой величины. Математикъ называетъ невозможнымъ только то, что логически невозможно, т. е. то, что противорѣчитъ самому себѣ. Нѣтъ надобности доказывать, что въ этомъ смыслѣ не существуетъ невозможныхъ чиселъ. Мы уже раньше замѣтили, что не каждая область объектовъ допускаетъ реализацію всѣхъ символовъ. Если мы оперируемъ надъ объектами недѣлимыми и получится дробное рѣшеніе, то это будетъ служить признакомъ невозможности. Но, съ другой стороны, мнимое рѣшеніе будетъ настолько же реально и возможно въ области извѣстныхъ геометрическихъ вопросовъ, какъ положительные, отрицательные или дробные корни.

Въ элементарной математикѣ встрѣчаются еще символы ∞ и $\frac{0}{0}$. Не будемъ входить въ ихъ разсмотрѣніе; замѣтимъ только, что символъ $\frac{0}{0}$ есть символическое обозначеніе корня уравненія:

$$x.0 = 0.$$

Но этому уравненію удовлетворяетъ всякая величина, подставленная вмѣсто x; слѣдовательно, символъ $\frac{0}{0}$ есть признакъ неопредѣленности.

Символъ ∞ рѣшаетъ аналитически уравненія

$$x = 0a,$$

$$x = \frac{a}{0} = \infty.$$

По аналогіи, можно разсматривать этотъ символъ, какъ предѣлъ возрастанія чиселъ.

„N лучи“.

Докладъ въ Математическомъ Отдѣленіи Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей 19 ноября 1904 года.

*(Продолженіе *).*

9. Мало того,—такое же увеличеніе яркости и ясности изображенія слабо освѣщенной поверхности получалось еще отчетливѣе въ томъ случаѣ, если источникъ N лучей подносили не къ освѣщенной поверхности, а *къ глазу* наблюдателя. Такимъ образомъ отсюда слѣдовало, что N лучи вызываютъ не увеличеніе испусканія свѣтовыхъ лучей тѣломъ самосвѣтящимся или освѣщеннымъ, а усиленіе ихъ дѣйствія на глазъ, что̀, въ свою очередь, можно приписать повышенію остроты зрѣнія.

Какъ на особенность усиленія яркости слабо свѣтящихся или освѣщенныхъ поверхностей подъ вліяніемъ N лучей, Blondlot указываетъ на то обстоятельство, что такое усиленіе обнаруживается только въ направленіяхъ, близкихъ къ нормалямъ къ этой поверхности; „если же смотрѣть параллельно поверхности“, то подъ вліяніемъ N лучей получается уменьшеніе яркости. Въ промежуточныхъ же направленіяхъ не получается никакихъ измѣненій, что̀ является—помимо необходимости полнаго молчанія, выдержки глаза въ темнотѣ, отсутствію мозговыхъ усилій и проч.—однимъ изъ главныхъ препятствій къ демонстрированію опытовъ съ N лучами предъ цѣлою аудиторіею. Замѣчу, что Blondlot указываетъ на такое различіе въ измѣненіяхъ яркости, напр., экрана фосфоресцирующаго сѣрнистаго кальція, разсматриваемаго съ различныхъ направленій, какъ на отличіе дѣйствія N лучей отъ дѣйствія на тотъ же экранъ тепловыхъ лучей, усиливающихъ фосфоресценцію независимо отъ направленія, въ какомъ разсматривается экранъ. Кромѣ того, усиленное свѣченіе фосфоресцирующаго экрана при нагрѣваніи сопровождается болѣе быстрымъ истощеніемъ свѣтового запаса этого экрана, чего подъ вліяніемъ N лучей не наблюдается. Замѣтимъ, что Blondlot,—котораго вообще при обсужденіи вопроса о степени достовѣрности свѣдѣній объ N лучахъ надо совершенно отдѣлить отъ его послѣдователей,—принималъ въ своихъ наблюденіяхъ рядъ предосторожностей, чтобы выдѣлить возможныя вліянія инфракрасныхъ лучей на свои фосфоресцирующіе экраны, (напримѣръ, фильтровалъ N лучи чрезъ рядъ экрановъ изъ дерева, изъ тонкихъ листовъ алюминія, изъ картона),—чего никакъ нельзя о другихъ изслѣдователяхъ, въ особенности, о физіологахъ и медикахъ.

По мнѣнію J. Becquerel'я, усиленіе яркости испускающихъ слабый свѣтъ поверхностей при паденіи *на нихъ* N лучей объясняется также повышеніемъ остроты зрѣнія, такъ какъ при этихъ опытахъ N лучи попадаютъ вмѣстѣ съ тѣмъ и въ глазъ

*) См. № 381 „Вѣстника“.

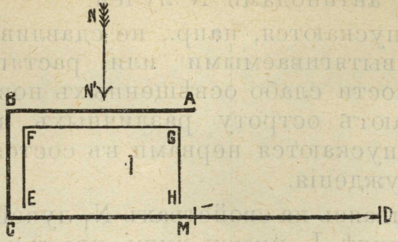
наблюдателя. Въ подтвержденіе справедливости такого объясненія, Becquerel приводитъ такой опытъ: между экраномъ сѣрнистаго кальція, освѣщаемымъ сзади N лучами, и глазомъ онъ помѣщалъ кювeтку съ соленою водою, которая N лучи пропускаетъ, или кювету съ чистою водою, которая N лучей не пропускаетъ; въ первомъ случаѣ измѣненія въ яркости экрана при послѣдовательномъ загражденіи паденія на него N лучей и ихъ пропусканіи наблюдались съ такою же отчетливостью, какъ безъ всякой кюветки, во второмъ же случаѣ никакихъ измѣненій въ яркости не получалось, ибо N лучи, попадавшіе на экранъ, не могли попасть въ глазъ и не производили измѣненій въ его чувствительности.

10. Глазъ не является исключительнымъ по своему отношенію къ N лучамъ: подъ вліяніемъ ихъ повышается также чувствительность и другихъ органовъ чувствъ. Такъ, если удалить пахучее вещество (Charpentier совѣтуетъ банку съ кассіевою эссенціею) на такое разстояніе отъ носа, которое соотвѣтствуетъ предѣлу замѣтности его запаха, то приближеніе къ носу источника N лучей повышаетъ остроту обонянія и замѣтно увеличиваетъ интенсивность замѣчаемаго запаха. Аналогичные результаты получаются при помѣщеніи звучащаго тѣла,—напр., часовъ,—на предѣлѣ остроты слуха и при приближеніи къ уху источника N лучей. Точно также, если положить на кончикъ языка щепотку соли или сахара, раскрыть ротъ и не дышать, то поднесеніе ко рту, напр., велосипеднаго шарика (деревяными щипчиками) усиливаетъ или заставляетъ появиться вкусовое ощущеніе.

Такія же повышенія остроты чувствъ получаются при приближеніи источниковъ N лучей не къ самому органу чувства, а къ соотвѣтствующему нервному центру.

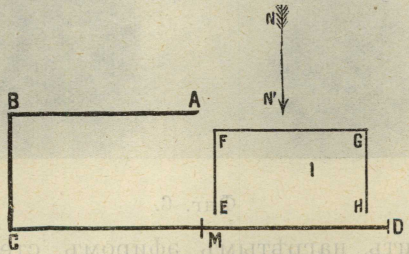
11. Всѣ перечисленные методы обнаруженія N лучей—методы, вполнѣ субъективные. До сихъ поръ, за тѣ полтора года, которые прошли съ „открытія“ N лучей, ни одного объективнаго метода,—въ которомъ эти лучи дѣйствовали бы не непосредственно на тотъ или другой органъ чувствъ наблюдателя,—не дано: N лучи не нагрѣваютъ, не дѣйствуютъ химически, не дѣйствуютъ на фотографическую пластинку, не измѣняютъ сопротивленія селена. Blondlot, однако, уже въ одномъ изъ первыхъ своихъ сообщеній Парижской Академіи Наукъ (замѣтимъ, что почти всѣ работы по N лучамъ помѣщены въ Comptes Rendus этой Академіи за 1903 и 1904 годы; работы Blondlot по мартъ 1904 г. перепечатаны также въ видѣ отдѣльной книжечки „Rayons „N“ par R. Blondlot“, Paris, Gauthier-Villars, pp. 78, 1904) далъ результаты примѣненія фотографіи къ изслѣдованію N лучей, а именно, снимки съ искорки (сквозь матовое стекло), освѣщаемой N лучами и не освѣщаемой ими,—снимки, по своей контрастности, не оставляющіе, повидимому, сомнѣнія въ томъ, что усиленіе яркости не есть субъективное явленіе, а явленіе, имѣющее мѣсто въ дѣйствительности.

Снимки эти производились слѣдующимъ образомъ. Надъ фотографическою пластинкою CD (фиг. 4) помѣщался картонный ящичекъ EFGH съ искоркою j, открытый только со стороны



Фиг. 4.

пластинки, такъ что искра могла дѣйствовать лишь на ту половину пластинки, надъ которою въ данный моментъ находился ящичекъ EFGH. Одна половина пластинки находилась подъ свинцовымъ экраномъ ABC, покрытымъ мокрою бумагою, такъ что N лучи, посылаемые по направленію NN', могли дѣйствовать на искорку лишь тогда, когда ящичекъ EFGH находился надъ половиною MD (фиг. 5). Такимъ образомъ половина CM получала впечатлѣніе отъ искорки, не освѣщенной N лучами, а половина



Фиг. 5.

MD *(втеченіе равнаго промежутка времени)*—отъ искорки, освѣщенной ими. Фиг. 6 представляетъ результатъ одного изъ такихъ опытовъ, въ которомъ Blondlot получалъ N лучи при помощи двухъ большихъ напильниковъ.

Эти снимки представляются очень существенными для рѣшенія вопроса о реальности N лучей и потому, откладывая ихъ обсужденіе до второй части доклада, запомнимъ теперь то обстоятельство, что вблизи искорки въ то время, когда она была защищена отъ N лучей свинцовымъ экраномъ, находилась проводящая электричество пластинка.

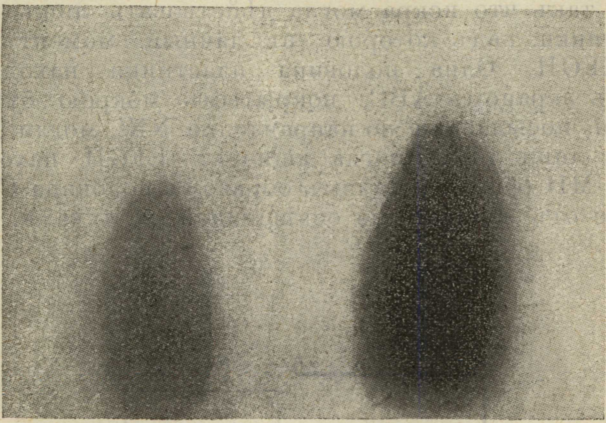
---

12. Изучая разложенный въ спектръ, при помощи алюминіевой призмы, пучокъ N лучей весьма узкою полоскою фосфоресцирующаго сѣрнистаго кальція и обнаруживъ рядъ максимумовъ свѣченія его, указывавшій на существованіе въ пучкѣ N лучей нѣсколькихъ сортовъ этихъ лучей, Blondlot замѣтилъ, что существуютъ также положенія экрана, въ которыхъ онъ свѣтится *менѣе* ярко, чѣмъ внѣ этого спектра. Изслѣдуя подробнѣе это

явленіе, Blondlot обнаружилъ существованіе особыхъ излученій, которыя онъ назвалъ лучами N_1 и которыя, по своимъ свойствамъ, являются какъ бы антиподами N лучей.

Лучи эти испускаются, напр., не сдавливаемыми или сжимаемыми тѣлами, а вытягиваемыми или растягиваемыми; они не увеличиваютъ яркости слабо освѣщенныхъ поверхностей, а уменьшаютъ ее; понижаютъ остроту различныхъ чувствъ, а не повышаютъ ее; они испускаются нервами въ состояніи угнетенія, а не въ состояніи возбужденія.

Не останавливаясь на свойствахъ N_1 лучей, которыя даны, для сравненія, въ таблицѣ I, укажу лишь два-три опыта съ ними.



Фиг. 6.

Если наполнить нагрѣтымъ эфиромъ стеклянную трубку и запаять ее такъ, чтобы надъ эфиромъ не осталось ни пузырька воздуха, то при охлажденіи эфиръ, приставшій ко всѣмъ стѣнкамъ трубки, можетъ остаться растянутымъ,—не смотря на значительное переохлажденіе, при которомъ онъ долженъ былъ бы занять меньшій объемъ, чѣмъ емкость меньше его сжавшейся стекляной трубки. Такой растянутый эфиръ является источникомъ N_1 лучей и уменьшаетъ яркость свѣченія сѣрнистаго кальція.

Если помѣстить экранъ съ кальціемъ подъ колоколъ воздушнаго насоса, то при выкачиваніи воздуха экранъ свѣтится слабѣе. Подобнымъ же образомъ даетъ N_1 лучи трубка Крукса въ покоѣ, лампочка накаливанія (безъ тока) и т. д.

13. Для полноты обзора укажемъ, что при особыхъ условіяхъ опыта, а именно, изолируя какой-нибудь металлическій предметъ—напр., вогнутое зеркало—Bichat замѣтилъ *періодическія измѣненія* яркости экрана, находящагося около этого предмета,—въ частности, въ фокусѣ вогнутаго зеркала. Такія періодическія измѣненія прекращались при соединеніи этого предмета

чистою и не изломанною мѣдною проволокою съ землею (съ водопроводными трубами). Нелишнимъ для дальнѣйшаго обсужденія будетъ обратить вниманіе на то, что Bichat, открывшій это и другія не менѣе странныя явленія, представляетъ собой, какъ мы уже упоминали, наблюдателя, отмѣчающаго наблюдаемые имъ факты безъ всякой предвзятой мысли.

Такимъ образомъ, мы въ описаніяхъ опытовъ со всѣми этими новыми лучами имѣемъ, какъ случаи увеличенія яркости экрановъ, приписываемые вліянію N лучей, такъ и случаи уменьшенія яркости, приписываемые вліянію N_1 лучей, такъ и случаи неизмѣнности яркости, приписываемые совмѣстному испусканію и тѣхъ, и другихъ лучей, такъ и случаи періодическаго измѣненія этой яркости. Замѣтимъ вдобавокъ, что увеличенія или уменьшенія яркости наступаютъ черезъ нѣкоторый довольно значительный, періодъ времени, величина котораго, равно какъ и величина періода колебаній яркости въ опытахъ Bichat, зависитъ отъ причинъ, которыя еще не выяснены и ждутъ дальнѣйшихъ изслѣдованій.

---

14. Перейдемъ теперь къ обзору физическихъ свойствъ лучей N и N_1,—обзору, который облегчитъ намъ таблица II.

Таблица II.

	Поглощеніе: Свинцомъ 0·1 мм.	Поглощеніе: Стекломъ 1·6 мм.	Поглощеніе: Серебромъ 3·0 мм.	Поглощеніе: Золотомъ 2·0 мм.	Поглощеніе: Никкелемъ 0·2 мм.	Длина волны въ μμ. (миллимикронахъ)	Показатель преломленія: Алюминіемъ.	Показатель преломленія: Стекломъ.	Уголъ вращенія плоскости поляризаціи: 16% растворомъ сахара, 1 мм.	Уголъ вращенія плоскости поляризаціи: Магнитнымъ полемъ въ 52 C. G. S., 2 см.: Въ алюминіи.	Уголъ вращенія плоскости поляризаціи: Магнитнымъ полемъ въ 52 C. G. S., 2 см.: Въ сѣроуглеродѣ.
N_1						3·0	1·004				
N						4·8	1·006				
N_1						5·6	1·009				
N						6·7	1·011				
N_1						7·4	1·013				
N	+	+	—	+	+	8·2	1·041	1·56	79°·8	45°·2	54°·5
N	+	+	—	+	+	9·9	1·19	1·77	72·6	40·5	51·0
N	+	+	—	—	+		1·29	1·89	63·7	37·0	45·5
N	—	+	—	+	+		1·36	2·03	61·3	27·5	38·8
N	+	+	—	+	+	11·7	1·40	2·09	51·9	22·8	33·8
N	—	—	—	—	+		1·48	2·22	48·8	20·2	32·5
N	+	+	—	—	+	14·6	1.68	2·63	37·6	19·0	25·0
N	—	—	—	—	+	17·6	1·85	2·90	24·5	12·5	21·5

Для лучей N и N_1 прозрачно большинство тѣлъ. Хорошо задерживаютъ ихъ никкель, иридій, платина и, особенно, вода: достаточно смоченнаго водою листка папиросной бумаги, достаточно быть влажною поверхности какого-нибудь тѣла, чтобы N лучи цѣликомъ поглотились. Свинецъ самъ по себѣ, по мнѣнію Becquerel'я, прозраченъ, но весьма задерживающею является окись свинца,—и, вслѣдствіе этого, обычный въ обиходѣ лабораторій листовой свинецъ является вполнѣ задерживающимъ N лучи, какъ утверждалъ Blondlot.

По отношенію къ поглощаемости, между N лучами и N_1 лучами наблюдаются нѣкоторыя отличія,—того же рода, какъ между N лучами, испускаемыми различными источниками; на этихъ отличіяхъ мы не будемъ останавливаться.

Интереснѣе вопросъ о дисперсіи этихъ лучей, которую Blondlot обнаружилъ, преломляя при помощи алюминіевой призмы пучокъ ихъ, пропущенный щелью въ 5 мм. ширины, вырѣзанною въ мокромъ картонѣ. Такимъ путемъ Blondlot удалось выдѣлить 10 различныхъ сортовъ N лучей и 3 сорта N_1 лучей. При этомъ, напр., для пятаго рода N лучей получился, при помощи призмы съ угломъ въ 27^0, показатель преломленія 1·19, при помощи призмы съ угломъ въ 60^0—1·15, а при помощи алюминіевой же чечевицы—1·20,—числа, какъ видимъ, весьма близкія между собою, если принять во вниманіе трудность опредѣленія положенія максимумовъ свѣченія экрана, состоявшаго изъ листа картона съ прорѣзомъ въ 1 мм. толщиною, набитый сѣрнистымъ кальціемъ. Запомнимъ по поводу этихъ опытовъ, что щель была толщиною въ 5 мм., а экранъ—въ 1 мм., т. е. гораздо уже щели и, слѣд., самого пучка лучей.

Первоначально Blondlot считалъ N лучи лежащими между крайними ультракрасными — „остаточными" лучами Rubens'а — и наиболѣе короткими электрическими, — и эту догадку подтверждалъ Sagnac, разсматривавшій существованіе нѣсколькихъ максимумовъ дѣйствія N лучей вдоль оси кварцевой чечевицы, не какъ доказательство существованія нѣсколькихъ сортовъ лучей различной преломляемости, а какъ результатъ диффракціи однородныхъ, монохроматическихъ лучей большой длины волны. Позднѣе Blondlot непосредственно измѣрилъ длины волнъ отдѣльныхъ однородныхъ N лучей, выходящихъ изъ алюминіевой призмы, при помощи оптической рѣшетки и получилъ чрезвычайно малыя величины,—въ нѣсколько $\mu\mu$ (миллимикроновъ), — тогда какъ длина наиболѣе короткихъ ультрафіолетовыхъ волнъ равна $0{\cdot}1\ \mu = 100\ \mu\mu$. Blondlot выдѣлялъ пучокъ N лучей щелью *въ 1·5 мм.* шириною и изслѣдовалъ щелью-экраномъ *въ* $\frac{1}{15}$ *мм.* шириною; уголъ, на который приходилось поворачивать алидаду съ этимъ экраномъ, былъ такъ малъ, что онъ измѣрялся по способу зеркала и шкалы. Эти опредѣленія онъ провѣрилъ по методу колецъ Ньютона, сосчитывая число этихъ колецъ для N лучей между двумя кольцами для натроваго пламени. Какъ примѣръ согласія результатовъ, приведу числа, полученныя Blondlot для лучей показателя преломленія 1·04: при помощи рѣшетокъ съ 200, 100 и 50 черточками на миллиметръ и при помощи Ньютоновыхъ колецъ получилось для длины волны соотвѣтственно: 8·13 $\mu\mu$, 7·95 $\mu\mu$, 8·39 $\mu\mu$ и 8·5 $\mu\mu$. Измѣреніе длинъ волнъ показало, что дисперсія N лучей является аномальною.

Bagard (въ Dijon'ѣ) изучилъ, при помощи искорки, вращеніе плоскости поляризаціи, какъ естественное, такъ и магнитное, при чемъ получились углы поворота, во много сотъ разъ превышающіе углы поворота для лучей свѣтовыхъ; дисперсія здѣсь оказалась нормальною. Считаю необходимымъ указать, что уголъ поворота оказался пропорціональнымъ толщинѣ слоя,— въ предѣлахъ ошибокъ, довольно значительныхъ, какъ указываетъ самъ авторъ, при этихъ весьма тонкихъ наблюденіяхъ.

15. N лучи, какъ открылъ Charpentier и изслѣдовалъ подробно Bichat, обладаютъ еще однимъ удивительнымъ свойствомъ: они *проводятся* различными тѣлами, которыя для нихъ прозрачны,—напр., мѣдными проволоками, свинцовыми полосами, соленою водою и т. д. Наилучшимъ проводникомъ для нихъ является мѣдь, но при условіи, чтобы проволока не имѣла рѣзкихъ изгибовъ и чтобы ея поверхность была блестящею. Эти особенности передачи N лучей Bichat объясняетъ уподобленіемъ проволоки, по которой идутъ N лучи, свѣтящемуся фонтану, въ которомъ свѣтовые лучи, испытывая полное внутреннее отраженіе отъ поверхности струи, идутъ по кривымъ линіямъ. Точно также N лучи идутъ по мѣдной проволокѣ, выходя наружу въ мѣстахъ ея рѣзкихъ изгибовъ и разсѣиваясь съ шероховатыхъ или окисленныхъ частей ея поверхности.

Этимъ свойствомъ N лучей особенно много пользовались физіологи, которые, благодаря ему, съ одной стороны, имѣли возможность приводить N лучи къ опредѣленнымъ участкамъ, напр., мозга, а съ другой стороны, касаясь однимъ концомъ проволоки нерва и наблюдая прикрѣпленный къ другому концу ея экранъ сѣрнистаго кальція, могли изслѣдовать лучи, испускаемые тою или другою очень малою частью нерва. Такимъ путемъ Charpentier, напр., „доказалъ" существованіе періодическихъ возмущеній, которыя распространяются вдоль нерва и которыя онъ лишь прежде предположительно допускалъ на основаніи различныхъ соображеній. Прикасаясь концами двухъ проволокъ къ очкамъ нерва, находящимся на послѣдовательно возраставшихъ разстояніяхъ другъ отъ друга, и раздражая нервъ, Charpentier получалъ попеременно увеличеніе яркости экрана и постоянство этого свѣченія. Изъ этихъ наблюденій онъ вывелъ и длину волны этихъ возмущеній — 35 мм. — , оказавшуюся близкою къ его прежнимъ предположеніямъ.

Мало того, помѣщая отражающую поверхность на извѣстномъ разстояніи отъ той или другой части тѣла,—напр., мраморную доску параллельно груди или животу,—и изслѣдуя промежуточное пространство проволокою, соединенною съ фосфоресцирующимъ экраномъ, Charpentier обнаружилъ стоячія волны отъ тѣхъ „физіологическихъ излученій", которыя испускаются тѣломъ и длина волны которыхъ оказалась соотвѣтствующею длинѣ волны нервныхъ возмущеній.

Отмѣтимъ еще одно наблюденіе Bichat надъ проведеніемъ N лучей ниткою, пропитанною коллодіемъ съ сѣрнистымъ кальціемъ: если одинъ конецъ такой нити, находящійся въ одной комнатѣ, освѣтить N лучами или, напр., свѣтомъ магнія, который вызываетъ вторичное испусканіе этихъ лучей самимъ кальціемъ, то остальная часть этой нити, наблюдаемой въ темной комнатѣ, начинаетъ послѣдовательно становиться ярче, при чемъ эти измѣненія яркости періодически перебѣгаютъ вдоль нити до самаго ея конца.

На этомъ мы закончимъ изложеніе тѣхъ свойствъ N лучей, которыя приписываются имъ тѣми, кому удалось обнаружить ихъ дѣйствіе,—и перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію отношенія къ этимъ сенсаціоннымъ открытіямъ другихъ физиковъ и физіологовъ.

(Продолженіе слѣдуетъ).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Второй международный философскій конгрессъ въ Женевѣ; секціи философіи и исторіи наукъ. Конгрессъ продолжался отъ 4-го до 8-го сентября (н. с.) истекающ. года. Подобно III международному математическому конгрессу (см. „В. О. Ф." № 378), и этотъ конгрессъ постановилъ присоединиться къ пожеланію, высказанному на международномъ конгрессѣ историческикъ наукъ въ Римѣ (апрѣль 1903 г.), о необходимости систематическаго изученія исторіи наукъ въ университетахъ и о введеніи элементарныхъ историческихъ свѣдѣній въ соотвѣтственные курсы старшихъ классовъ средней школы. Изъ рефератовъ, представленныхъ въ секцію философіи наукъ, большая часть посвящена основнымъ понятіямъ механики, выясненіе которыхъ, какъ замѣтилъ H. Poincaré въ извѣстной книгѣ „Наука и Гипотеза", отнюдь нельзя считать законченнымъ. По мнѣнію однихъ ученыхъ, механика, по своему характеру, представляетъ собою экспериментальную науку, примыкающую къ физикѣ; другіе предпочитаютъ разсматривать ее, какъ дедуктивную науку, составляющую отрасль математики. Изъ рефератовъ, выясняющихъ первую точку зрѣнія, назовемъ:

L. Hartmann: „Физическое опредѣленіе понятія силы".

Th. Tommasina: „Основныя понятія физики по Спенсеру. Критическій опытъ".

Вторую точку зрѣнія проводятъ г. *J. Andrade*, представившій, рефератъ: „О механичеекой геометріи", гдѣ онъ, между прочимъ показываетъ, какъ полезно иногда бываетъ введеніе понятія массы въ геометрію для рѣшенія задачъ чисто геометрическаго характера, и г. *René de Saussure*, докладъ котораго носитъ названіе: „Основныя величины механики". Отмѣтимъ еще слѣдующіе рефераты:

Pierre Boutroux: „Понятіе соотвѣтствія въ математическомъ анализѣ".

J. Bulliot Аббатъ: „Аристотелевская наука и современная наука".

Raoul Pictet: „Потенціалъ въ современной наукѣ".

Изъ рефератовъ, представленныхъ въ секцію исторіи наукъ, отмѣтимъ слѣдующіе:

H. G. Zeuthen: „Теорема Пиѳагора, какъ начало научной геометріи".

P. Duhem: „Объ ускореніи, производимомъ постоянной силой. Матеріалы къ исторіи динамики".

Ernest Lebon: „Къ исторіи гипотезъ о природѣ солнечныхъ пятенъ".

F. Meutre: „Объ одновременности открытій".

(L'enseignement mathématique).

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 556 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$(y+z)(y^2+z^2-2x^2)=a,$$

$$(z+x)(z^2+x^2-2y^2)=b,$$

$$(x+y)(x^2+y^2-2z^2)=c.$$

Е. Григорьевъ (Казань).

№ 557 (4 сер.). Въ треугольникъ ABC вписать равнобедренный треугольникъ DEM такъ, чтобы вершина одного изъ равныхъ угловъ лежала въ данной точкѣ M на сторонѣ BC, чтобы вершины D и E лежали соотвѣтственно на сторонахъ AB и BC и чтобы одна изъ равныхъ сторонъ DE была перпендикулярна къ AB.

И. Голубаевъ (Усть-Медвѣдица).

№ 558 (4 сер.). Доказать, что при n цѣломъ и не меньшемъ нуля число

$$3^{2n+2}\cdot 4+32n-36$$

кратно 64.

И. Коровинъ (Екатеринбургъ).

№ 559 (4 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\sqrt[7]{2137+10x}+\sqrt[7]{178-10x}=5.$$

Н. Пѣтуховъ (Екатеринбургъ).

№ 560 (4 сер.). При какихъ раціональныхъ значеніяхъ n дробь

$$\frac{n^2+1}{n(n^2-1)}$$

несократима?

(Заимств.).

№ 561 (4 сер.). Сколько килограммовъ льда при -30^0 надо для сгущенія 11 килограммовъ водяного пара при 100^0 и при давленіи 760^0 въ воду, температура которой была бы 0^0. Скрытая теплота испаренія водяного пара 537. Теплота плавленія льда 80 калорій; удѣльная теплота льда 0,5.

П. Грицынъ (Ст. Цымлянская).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 480 (4 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$2z^6-7z^5+7z^4-7z^2+7z-2=0.$$

Представляя уравненіе въ видѣ $2(z^6-1)-7z(z^4-1)+7z^2(z^2-1)=0$, разлагаемъ лѣвую часть на множителей: $(z^2-1)(2z^4-7z^3+9z^2-7z+2)=0$, такъ что либо

$$z^2-1=0,\text{ откуда } z_1=1,\ z_2=-1,$$

либо

$$2z^4-7z^3+9z^2-7z+2=0.$$

Послѣднее уравненіе рѣшается, какъ возвратное:

$$2\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)-7\left(z+\frac{1}{z}\right)+9=0\ (1).$$

Полагая $z+\frac{1}{z}=u$, имѣемъ:

$$z^2+\frac{1}{z^2}=u^2-2.$$

Такимъ образомъ уравненіе (1) приводится къ виду:

$$2(u^2-2)-7u+9=0,\quad 2u^2-7u+5=0,\quad\text{откуда } u=\frac{7\pm\sqrt{49-40}}{4},$$

$$u_1=1,\ u_2=\frac{5}{2},\ \text{т. е. или}$$

$$z+\frac{1}{z}=1,\ z^2-z+1=0\ (2),\ \text{или } z+\frac{1}{z}=\frac{5}{2},\ 2z^2-5z+2=0\ (3).$$

Изъ уравненій (2) и (3), находимъ:

$$z_3=\frac{1+i\sqrt{3}}{2},\quad z_4=\frac{1-i\sqrt{3}}{2};\ z_5=2,\ z_6=-\frac{1}{2}.$$

И. Поляковъ (Москва); *В. Гейманъ* (Θеодосія); *Н. Агрономовъ* (Вологда); *В. Винокуровъ* (Калязинъ); *В. Парѳеновъ* (Спб.); *А. Шенкманъ* (Спб.); *А. Чесскій* (Москва); *Н. Пѣтуховъ* (Екатеринбургъ); *Н. Доброгаевъ* (Спб.).

№ 485 (4 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$2\sqrt{3\sin x} = \frac{3\mathrm{tg} x}{2\sqrt{\sin x} - 1} - \sqrt{3}.$$

Представивъ уравненіе въ видѣ $2\sqrt{3\sin x} + \sqrt{3} = \dfrac{3\mathrm{tg}x}{2\sqrt{\sin x} - 1}$, дѣлимъ обѣ части на $\sqrt{3}$ и освобождаемся отъ знаменателя. Тогда получимъ:

$$(2\sqrt{\sin x} + 1)(2\sqrt{\sin x} - 1) = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}x, \text{ или}$$

$$4\sin x - 1 = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}x \quad (1).$$

Помноживъ обѣ части уравненія (1) на $\cos x$, найдемъ:

$$4\sin x\cos x - \cos x = \sqrt{3}\,\sin x,$$

откуда

$$4\sin x\cos x = \sqrt{3}\,\sin x + \cos x;\quad 2\sin x\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x \qquad (2).$$

Замѣняя (см. (2)) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ черезъ $\cos 30^0$, а $\dfrac{1}{2}$ черезъ $\sin 30^0$, получимъ:

$$2\sin x\cos x = \sin x\cos 30^0 + \sin 30^0\cos x, \text{ или } \sin 2x = \sin(x + 30^0) \qquad (3).$$

Такъ какъ синусы угловъ $2x$ и $x + 30^0$ оказываются равны, то, по извѣстной теоремѣ,

$$x + 30^0 = n.180^0 + (-1)^n.2x \qquad (4),$$

гдѣ n—произвольное цѣлое число. Если n есть четное число, т. е. $n = 2k'$, гдѣ k'—нѣкоторое цѣлое число, то изъ уравненія (4) находимъ

$$x + 30^0 = 2k'.180^0 + 2x,$$

откуда

$$x = -2k'.180^0 + 30^0 = 2.(-k').180^0 + 30^0, \text{ т. е.}$$

$$x = k.360^0 + 30^0,$$

гдѣ k—произвольное цѣлое число (вслѣдствіе произвольности k').

Если n число нечетное, т. е. $n = 2k + 1$, гдѣ k—число цѣлое, то (см. 4))

$$x + 30^0 = (2k + 1)180^0 - 2x,$$

откуда

$$x = k.120^0 + 50^0,$$

гдѣ k— произвольное цѣлое число.

А. Чесскій (Москва); *В. Винокуровъ* (Калязинъ).

№ 490 (4 сер.). *Рѣшить систему уравненій*

$$\frac{xy}{x+z} = a,$$

$$\frac{yz}{x+y} = b,$$

$$\frac{y+z}{yz} + \frac{(y+z)^2}{xyz} - \frac{2}{x} = c.$$

Представимъ первое и второе изъ данныхъ уравненій въ видѣ

$$\frac{x+z}{xy} = \frac{1}{a},\quad \frac{x+y}{yz} = \frac{1}{b},$$

или

$$\frac{1}{y} + \frac{z}{xy} = \frac{1}{a} \;(1),\quad \frac{x}{yx} + \frac{1}{z} = \frac{1}{b} \;(2),$$

а третье въ видѣ

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{y^2+z^2+2yz}{xyz}-\frac{2}{x}=c, \text{ или } \frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{y}{xz}+\frac{z}{xy}+\frac{2}{x}-\frac{2}{x}=c,$$

т. е.

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{y}{xz}+\frac{z}{xy}=c \quad (3).$$

Подставляя въ уравненіе (3) вмѣсто $\frac{1}{y}+\frac{z}{xy}$ (см. 1)) $\frac{1}{a}$ и опредѣляя $\frac{y}{xz}$, имѣемъ:

$$\frac{y}{xz}=c-\frac{1}{a}-\frac{1}{z} \quad (4).$$

Съ другой стороны (см. (2)),

$$\frac{x}{yz}=\frac{1}{b}-\frac{1}{z} \quad (5).$$

Перемноживъ равенства (4) и (5), находимъ:

$$\frac{1}{z^2}=\frac{ac-1}{ac}-\frac{1}{z}\left(\frac{ac-1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{z^2}, \text{ или } z\,.\frac{(ac-1)z}{ab}-\left(\frac{ac-1}{a}+\frac{1}{b}\right)=0,$$

откуда

$$z=b+\frac{a}{ac-1} \quad (6).$$

Изъ равенства (5) слѣдуетъ:

$$\frac{x}{y}=\frac{z}{b}-1, \text{ или (см. (6)): } \frac{x}{y}=\frac{a}{b(ac-1)} \quad (7).$$

Но изъ равенства (1) находимъ:

$$\frac{z}{xy}=\frac{1}{a}-\frac{1}{y} \quad (8),$$

а изъ равенства (5) (см. (6)):

$$\frac{x}{yz}=\frac{1}{b}-\frac{1}{b+\frac{a}{ac-1}}, \text{ или } \frac{x}{yz}=\frac{a}{(ac-1)b^2+ab} \quad (10).$$

Перемножая равенства (8) и (10) и обозначая, для краткости, $(ac-1)b^2+ab$ черезъ M, находимъ:

$$\frac{1}{y^2}=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{a}{M}, \text{ откуда}$$

$$y^2-ay-M=0 \quad (11).$$

Изъ уравненія (11) находимъ для y два значенія, которыя мы обозначимъ черезъ α и β. Подставляя ихъ вмѣсто y въ равенство (7), получимъ соотвѣтствующія значенія x:

$$x_1=\frac{a\alpha}{b(ac-1)}, \quad x_2=\frac{a\beta}{b(ac-1)}.$$

С. Конюховъ (Никитовка).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса 11-го Января 1905 г.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66.

Вѣстникъ Знанія

Открыта подписка на 3-й, 1905 г.
изданія журнала подъ редакціею
В. В. БИТНЕРА.

48 книгъ въ годъ 8 р.

Иллюстрированный „толстый“ ежемѣсячный литерат., художеств. и попул. научный журналъ **съ 36 кн.** безплатн. приложеній для самообразованія, а именно:

12 книж. „Общедоступнаго Университета“: „Анатомія и физіологія“, профессоровъ **Закса, Зейлера, Редманна** и др. „Популярные очерки народовѣдѣнія“, проф. **Гааке** и „Жизнь европ. народовъ“. Кромѣ того, признавая громад. воспит. вліяніе рисованія на худож. развитіе учащагося, мы рѣшили въ „Общ. Унив.“ дать—**Самоучитель живописи и рисованія**“. Изъ практическихъ руководствъ мы дадимъ „**Учебникъ стенографіи**“, искусств. быстр. записыванія человѣч. рѣчи. Въ „Общ. Унив.“ будетъ данъ еще „Новый учебникъ международнаго языка Эсперанто“. Изложеніе вполнѣ общедоступное и живое. Масса иллюстрацій.

12 книж. „Энциклопедической Библіотеки для самообразованія“: 1) Проф. **Сеньобосъ** и проф. **Метэнъ**. Современная исторія съ 1815 г. въ 2 ч--хъ, ч. I.—2) Проф. **Фламмаріонъ**. Лекціи по астрономіи. Съ картою звѣзднаго неба.—3) Д-ръ филос. **Эйзенгансъ**. Психологія и логика.—4) Проф. **Боммели**. Систематика растеній. Жизнь грибовъ, водорослей и мховъ.—5) Проф. **Сеньобосъ** и проф. **Метэнъ**. Современная исторія, ч. II.—6) **Систематическій слов. юридич. наукъ** въ 3 ч. Ч. I. Государствен. право (формы правленія, разныя конституціи и пр.), права и обязанности гражданина.—7) Проф. **Беммели**. Исторія раст. царства. Папоротники, хвойныя. Оплодотвореніе цвѣтковыхъ.—8) Системат. словарь юридич. наукъ, ч. II. Основы законовѣдѣнія. Ознакомленіе съ русск. законодательст.—9) Проф. **Гюнтеръ**. Физич. географія.—10) Системат. словарь юридич. наукъ. Ч. III, справочная (формы дѣловыхъ бумагъ, отвѣты на частные случаи юридич. практики и пр.).—11) Проф. **Оствальдъ**. Школа химіи. Химія неорганическая.—12) Проф. **Зомбартъ**. Очерки политич. экономіи. Легкое, живое и популярное изложеніе; масса рисунк., портретовъ, легкая усвояемость.

12 книж. „Читальни“ „Вѣстника Знанія“, состоящей изъ ряда соч. для легкаго самообразоват. чтенія, имѣющаго въ виду широкое образованіе: 1) **Бельше**. Происхожд. человѣка.—Будущность человѣчества.—2) Проф. **Моніе**. Соціологія.—3) Д-ръ **Целль**. Умъ животныхъ.—4) **Дебо**. Популярная физика, въ 2 ч. Ч. I. 5) **Бельше** Прогрессъ дарвинизма.—6) Проф. **Корра**. Позитивная философія.—7) Проф. **Уэльдстинъ**. Искусство въ XIX столѣтіи.—8) **Пеллисье**. Литерат. школы, въ 2-хъ част. Ч. I. Классицизмъ, псевдо-классицизмъ, лирика, лирическая драма.—9) **Э. Кей, I. Тимъ** и др. Воспитаніе и самовоспитаніе человѣка и гражданина. Цѣль жизни.—10) **Дебо**. Популярная физика. Ч. II.—11) **Пеллисье**. Литер. школы. Ч. II. Исторія, критика, старый и новый романъ, поэзія, драма.—12) Проф. **Арнольдъ**. Эпоха возрожденія и гуманизма.

Сверхъ перечисленныхъ **36 кн.** приложеній мы рѣшили, исполняя просьбу подписчиковъ, дать еще **СЛОВАРЬ НАУЧНЫХЪ ТЕРМИНОВЪ, ИНОСТРАННЫХЪ СЛОВЪ И ВЫРАЖЕНІЙ**, вошедшихъ въ употребл. въ рус. яз. Что касается самого „**Вѣстн. Зн.**“ (**12 кн.**), то, въ противоположность друг. „толстымъ“ журн., онъ главное вниманіе обращ. на популяризац. знанія и ознакомленіе со всѣми литер.-научн. теченіями, беллетр. же стоитъ на втор. планѣ. Статьи въ журналѣ невелики и разнообразны, большія же сочин. даются въ приложеніяхъ (убористый шрифтъ позвол. помѣщать крупныя произвед.). Прогрессивное направленіе „**Вѣстн. Зн.**“ лучше всего характеризуется близкимъ участіемъ профессоровъ Париж. Рус. Высш. Шк. Общ. Наукъ. Основа изданія—служеніе интерес. подписчиковъ, выполняется, между прочимъ отдѣлами: „**ВЗАИМОПОМОЩЬ ЧИТАТЕЛЕЙ**“ и „**ОТВѢТЫ**“.

Поддержка стремленія къ знанію въ широкомъ смыслѣ слова, отраженіе жизни и духовныхъ запросовъ общества, всестороннее освѣщеніе вопросовъ дѣйствительности—вотъ задачи, которыя неизмѣнно составляли основу наш. литерат. дѣятельности. „**Вѣстн. Зн.**“ строго прогрессивный органъ, посвящ. служенію обществу. Больш. распростр. журнала даетъ возможность новымъ подписч. узнать у старыхъ о нашемъ добросовѣстномъ отношеніи къ обязательствамъ.

Подписная цѣна на 1905 годъ **(48 кн.)** со „**Словар. иностран. слов.**“ безъ дост. 7 р., съ дост. и пер. 8 р., за границу 11 руб. Разсрочка по 2 руб. за ¼ года.

Спб. Кузнечный, 2.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
И
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

выходитъ 24 раза въ годъ отдѣльными выпусками не менѣе 24-хъ стр. каждый

ПРОГРАММА ЖУРНАЛА: Оригинальныя и переводныя статьи изъ области физики и элементарной математики. Статьи, посвященныя вопросамъ преподаванія математики и физики. Научная хроника. Разныя извѣстія. Математическія мелочи Задачи для рѣшенія. Рѣшенія предложенныхъ задачъ съ фамиліями рѣшившихъ. Упражненія для учениковъ. Задачи на испытаніяхъ зрѣлости. Библіографическій обзоръ. Замѣтки о новыхъ книгахъ. Объявленія.

Подписная цѣна съ пересылкой.

Въ годъ . . . . **6** руб. ‖ Въ полугодіе . . . . **3** руб.

(12 №№ составляютъ отдѣльный томъ).

Учителя и учительницы низшихъ училищъ и всѣ учащіеся **при непосредственныхъ сношеніяхъ съ конторой редакціи** платятъ

Въ годъ . . . . **4** руб. ‖ Въ полугодіе . . . . **2** руб.

Допускается разсрочка платы. **Отдѣльные номера** текущаго семестра продаются по **30** коп., прошлыхъ семестровъ по **25** коп. **Пробный номеръ** высылается безплатно. **Книгопродавцамъ** 5% уступки. **Журналъ за прошлые** годы (семестры 1— . . . по 2 руб. **50** коп., а учащимся и книгопродавцамъ по **2** руб. за семестръ.

Семестры II, XVI и XXIII распроданы.

Адресъ для корреспонденціи: Одесса. Въ Редакцію „Вѣстника Опытной Физики“.

Городской адресъ: Успенская, 69.

Редакторъ прив.-доц. **В. Ф. Каганъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**