Обложка
ищется

Обложка
ищется

XXXIV Сем. № 6.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 402.

ИСТОРИЧЕСКІЙ ОЧЕРКЪ
развитія ученія объ основаніяхъ геометріи.

Привать-доцента В. Кагана.

(*Продолженіе* *).

Геометрическія свойства поверхности, которыя опредѣляются элементомъ длины, образуютъ такъ называемую *геометрическую систему поверхности.* Этотъ терминъ принадлежитъ, такимъ образомъ, послѣднему времени; до Гаусса его не существовало; геометры знали только двѣ двумѣрныя геометрическія системы: плоскую и сферическую. Сферическая геометрія была изучена въ глубокой древности. Полагаютъ, что еще Евдоксъ [1]) написалъ сферическую геометрію [2]); во всякомъ случаѣ Θеодосій Триполійскій и Менелай Александрійскій посвятили уже этому предмету обширныя сочиненія [3]). Сочиненіе Θеодосія по сфери-

---

[1]) См. стр. 5.

[2]) *P. Tannery.* „La Céométrie grecque" стр. 34.

[3]) Θεοδόσιος и Μενέλαος ὁ 'Αλεξανδρεὺς жили: — первый, повидимому, въ I вѣкѣ до Р. Хр., а второй въ I вѣкѣ послѣ Р. Хр. Сочиненія Θеодосія дошли до насъ въ оригиналѣ, а „Сферика" Менелая только въ переводахъ на арабскій, древне-еврейскій и латинскій языки.

*) См № 396 „Вѣстника".

ческой геометріи („Σφαιρικά") состоитъ изъ трехъ книгъ и содержитъ довольно полное изложеніе геометріи на шаровой поверхности, кромѣ метрической стороны дѣла. Напротивъ того, сочиненіе Менелая представляетъ собой нѣчто въ родѣ сферической тригонометріи. Такіе ранніе успѣхи сферической геометріи объясняются тѣмъ, что она развивается въ значительной мѣрѣ аналогично плоской геометріи; при этомъ роль прямыхъ линій играютъ, конечно, геодезическія линіи сферы, — окружности большихъ круговъ. Наиболѣе важная сторона этой аналогіи заключается въ томъ, что на сферѣ возможенъ методъ наложенія, такъ какъ части сферы могутъ передвигаться по ней безъ деформаціи съ тремя степенями свободы—совершенно такъ же, какъ плоскія фигуры передвигаются въ своей плоскости. Это даетъ возможность провести нѣкоторые отдѣлы сферической геометріи совершенно параллельно соотвѣтствующимъ отдѣламъ плоской геометріи. То же обстоятельство, что двѣ точки на сферѣ не всегда опредѣляютъ окружность большого круга, является причиной различія, которое существуетъ между одной и другой системой.

Но плоскость и сфера суть единственныя поверхности, по которымъ возможно такое свободное передвиженіе фигуръ безъ деформаціи. Поэтому ни съ какой другой поверхностью не связывалось представленіе о геометрической системѣ, знали только геометрію плоскую и сферическую.

Въ предисловіи къ своему знаменитому мемуару: „Опытъ истолкованія неевклидовой геометріи", о которомъ мы подробно будемъ говорить ниже, Бельтрами говоритъ слѣдующее:

„Слѣдствія всякаго доказательства необходимо обнимаютъ цѣлую категорію объектовъ, которые обладаютъ всѣми условіями, нужными для законности этого доказательства. Если, однако, мы построили нѣкоторое доказательство, имѣя въ виду опредѣленную категорію объектовъ, а между тѣмъ въ дѣйствительности не ввели тѣхъ опредѣленій, которыя выдѣляютъ означенный рядъ объектовъ изъ категоріи болѣе общей, то слѣдствія этого доказательства, очевидно, пріобрѣтаютъ большую общность, нежели та, которую мы имѣли въ виду".

Эта идея примѣнима вполнѣ къ геометрическимъ доказательствамъ, опирающимся на методъ наложенія. Какъ Евклидъ, такъ и всѣ геометры до послѣдняго времени, пользуясь методомъ наложенія, представляли себѣ налагаемыя фигуры твердыми, неизмѣняемыми. Между тѣмъ доказательство ни въ какой мѣрѣ не опирается именно на это свойство налагаемыхъ фигуръ. Посредствомъ наложенія мы убѣждаемся въ конгруэнтности фигуръ, въ равенствѣ длинъ, угловъ и площадей. Но при изгибаніи (и только при изгибаніи) поверхностей длины, углы и площади расположенныхъ на нихъ образовъ не измѣняются; если поэтому мы присоединимъ еще соглашеніе разумѣть подъ конгруэнтными фигурами такія, которыя могутъ быть приведены въ совмѣщеніе посредствомъ изгибанія, то методъ наложенія въ томъ видѣ, въ какомъ онъ примѣняется на плоскости, можетъ быть примѣненъ не только къ плоскости и къ сферѣ, но и ко всякой поверхности, на которой возможно передвиженіе ея частей съ тремя степенями свободы, хотя бы это передвиженіе и сопровождалось изгибаніемъ. Такъ напримѣръ, вся евклидова планиметрія можетъ быть дословно перенесена на поверхность всякаго цилиндра, директрисса котораго простирается безконечно въ обѣ стороны (напримѣръ, параболическаго); геодезическія линіи такого цилиндра обладаютъ всѣми свойствами, выраженными въ евклидовыхъ постулатахъ прямой. На другихъ поверхностяхъ, развертывающихся на плоскость, геометрическая система въ цѣломъ можетъ болѣе или менѣе отступать отъ плоской геометріи Евклида; но геометрическія свойства образовъ на какой либо части такой поверхности совпадаютъ со свойствами соотвѣтствующихъ образовъ на той части плоскости, которая на эту часть поверхности развертывается, не покрывая себя самое.

Итакъ, съ указанной точки зрѣнія число типовъ поверхностей, на которыхъ можетъ быть построена геометрическая система, опирающаяся на методъ наложенія, значительно возрастаетъ; изслѣдованія же Гаусса и Миндинга даютъ общую характеристику этихъ поверхностей. Согласно этимъ изслѣдованіямъ, условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы поверхность могла, изгибаясь, перемѣщаться вдоль себя самой съ тремя степенями свободы, заключается въ томъ, чтобы она имѣла постоянную кривизну. Стало быть, геометрическая система, опирающаяся на методъ наложенія, можетъ быть развита только на поверхностяхъ постоянной кривизны. Таковъ первый выводъ, который можно сдѣлать изъ теоріи, изложенной въ предыдущей главѣ, и который былъ впервые въ ясной и опредѣленной формѣ высказанъ Бельтрами въ названномъ выше (стр. 122) мемуарѣ.

Другой замѣчательный и любопытный выводъ изъ той же теоріи заключается въ томъ признакѣ, которымъ опредѣляется свобода передвиженія на этихъ поверхностяхъ. Если поверхность можетъ, изгибаясь, перемѣщаться по себѣ самой такимъ образомъ, что любая ея точка можетъ придти въ совмѣщеніе съ любой другой точкой на поверхности, то это передвиженіе вполнѣ аналогично передвиженію плоскости въ самой себѣ, т. е. это передвиженіе имѣетъ три степени свободы и возможность вращательнаго движенія уже обусловливается возможностью свободнаго поступательнаго движенія. Причина этого заключается въ томъ, что передвиженіе поверхности по самой себѣ, какъ мы видѣли выше, можетъ имѣть либо только одну степень свободы, либо три.

Поверхностями постоянной не исчезающей кривизны впервые занимается Миндингъ. Въ мемуарѣ, помѣщенномъ въ XVIII томѣ журнала Крелля [1]), онъ даетъ искусственный способъ, посредствомъ котораго иногда возможно находить нѣкоторыя изгибанія заданныхъ поверхностей. Между прочимъ онъ находитъ этимъ пріемомъ систему поверхностей, которыя выражаются уравненіями:

$$x=a\cos u\sin\left(\frac{v}{a}\right),\quad y=a\cos u\cos\left(\frac{v}{a}\right),\quad z=\int_0^u\sqrt{1-a^2\sin^2 u}\,du.$$

Это суть поверхности вращенія, постоянная кривизна которыхъ равна 1; при $a=1$ это есть шаръ, при a, отличномъ отъ единицы и нуля, это суть поверхности, налагающіяся на сферу. Но въ мемуарѣ того же автора, помѣщенномъ въ XIX томѣ Крелля [2]), о которомъ мы говорили подробно въ предыдущей главѣ, вопросъ поставленъ гораздо шире. Здѣсь найдены всѣ поверхности вращенія, имѣющія постоянную положительную кривизну.

Если мы въ уравненіи (4) предыдущей главы положимъ K равнымъ постоянной величинѣ k, то оно представитъ собой дифференціальное уравненіе поверхностей постоянной кривизны. Это уравненіе Миндингъ преобразовываетъ къ новымъ перемѣннымъ, полагая

$$x=r\cos\psi,\quad y=r\sin\psi.$$

Выполнивъ преобразованіе, онъ замѣняетъ названное дифференціальное уравненіе слѣдующимъ:

$$\frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2}\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial\psi^2}+r\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)-\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial r\partial\psi}-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial\psi}\right)^2}{r^2\left[1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial\psi}\right)^2\right]^2}=k.$$

Чтобы выдѣлить поверхности вращенія, мы замѣтимъ, что, въ случаѣ поверхности вращенія, z зависитъ только отъ r, если за ось z-овъ принята ось вращенія.

Полагая поэтому [3])

$$\frac{\partial z}{\partial\psi}=0,$$

мы получимъ обыкновенное дифференціальное уравненіе втораго

---

[1]) *F. Minding* „Ueber die Biegung krummer Flächen". Journal für reine und angew. Mathem. B. XVIII. 1838.

[2]) См. ссылку на стр. 272 въ № 396.

[3]) Миндингъ изслѣдуетъ даже болѣе общій случай, когда $\dfrac{\partial z}{\partial\varphi}=\text{Const}.$

порядка, которое приводится къ виду:

$$\frac{d\left(\frac{dz}{dr}\right)^2}{dr} = 2kr\left[1+\left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right]^2.$$

Это уравненіе имѣетъ первый интегралъ:

$$\left[1+\left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right]^{-1} = \alpha - kr^2,$$

гдѣ α произвольная постоянная; отсюда

$$\frac{dz}{dr} = \pm\sqrt{\frac{kr^2-(\alpha-1)}{\alpha-kr^2}}. \qquad (1)$$

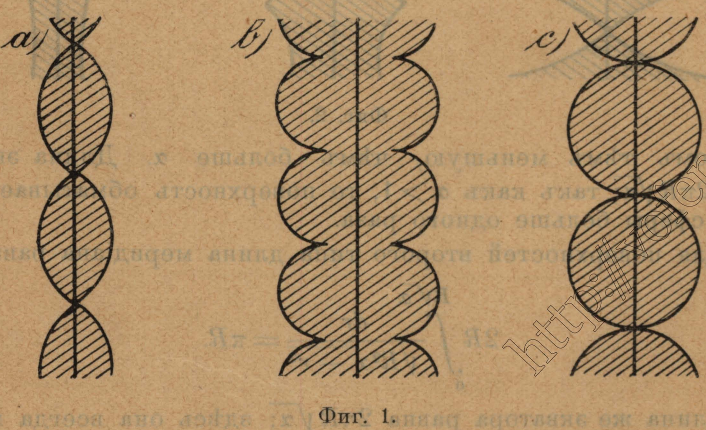
Замѣтимъ, что интегралъ этого уравненія представляетъ уравненіе меридіана въ прямоугольныхъ декартовыхъ координатахъ z и r. Общій интегралъ выражается эллиптическими функціями; но форму меридіана можно изслѣдовать, не прибѣгая къ нему. Для этого остановимся предварительно на томъ случаѣ, когда k есть положительное количество; полагая $k=\frac{1}{R^2}$, мы представимъ предыдущее выраженіе въ видѣ:

$$\frac{dz}{dr} = \pm\sqrt{\frac{r^2-(\alpha-1)R^2}{\alpha R^2-r^2}}.$$

Если $\alpha > 1$, то r можетъ заключаться въ предѣлахъ:

$$R\sqrt{\alpha-1} \leqslant r \leqslant R\sqrt{\alpha}.$$

Сверхъ того производная $\frac{dr}{dz}$ можетъ измѣнить знакъ только, пройдя черезъ нуль или безконечность, а потому кривая состоитъ изъ вѣтокъ, изображенныхъ на фиг. (1b).



Фиг. 1.

Если $\alpha = 1$, то кривая представляетъ собой окружность, имѣющую центръ на оси вращенія (фиг. 1c).

Если $\alpha < 1$, то числитель предыдущаго выраженія всегда представляетъ собою положительное число; поэтому знаменатель также долженъ быть положительнымъ числомъ; α должно быть больше нуля, и r можетъ заключаться въ предѣлахъ:

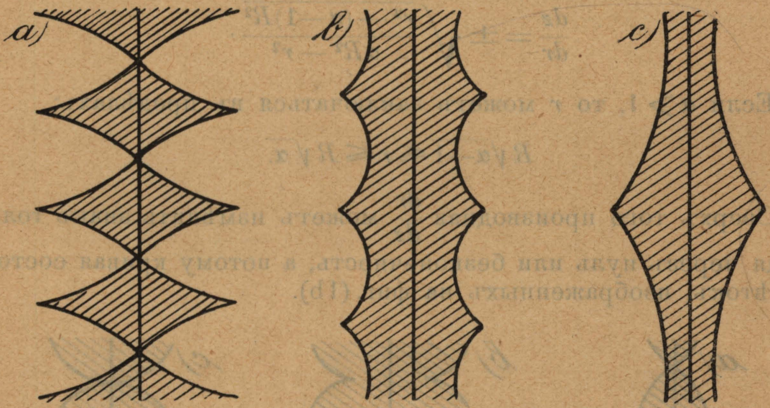
$$R\sqrt{\alpha} \geqslant r \geqslant 0.$$

Кривая состоитъ изъ вѣтокъ, изображенныхъ на фиг. (1,a).

Таковы поверхности вращенія, налагающіяся на сферу радіуса R. Чтобы опредѣлить часть сферы, на которую налагаются эти поверхности вращенія, нужно опредѣлить длины меридіана и экватора и сравнить съ длинами меридіана и экватора сферы. Такъ длина вѣтки меридіана перваго типа равна

$$2R\int\limits_{R\sqrt{\alpha-1}}^{R\sqrt{\alpha}} \frac{dr}{\sqrt{\alpha R^2 - r^2}} = R\left(\pi - 2\arcsin\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right).$$

Отсюда мы видимъ, что при наложеніи на сферу поверхности этого типа покрываютъ зону, меньшую, нежели вся сфера,



Фиг. 2.

и притомъ тѣмъ меньшую, чѣмъ больше α. Длина экватора равна $2\pi R\sqrt{\alpha}$; такъ какъ $\alpha > 1$, то поверхность обматывается вокругъ сферы больше одного раза.

Для поверхностей второго типа длина меридіана равна

$$2R\int\limits_{0}^{R\sqrt{\alpha}} \frac{dr}{\sqrt{R^2\alpha - r^2}} = \pi R.$$

Длина же экватора равна $2\pi R\sqrt{\alpha}$; здѣсь она всегда меньше экватора сферы. Поверхность налагается въ этомъ случаѣ на сферическій вырѣзокъ, который тѣмъ больше, чѣмъ больше α.

Геометрія на поверхности второго типа совпадаетъ съ геометріей той части сферы, на которую она развертывается. Геометрія же поверхностей перваго типа уже отличается во многихъ пунктахъ отъ геометріи сферы, благодаря тому, что она налагается на сферическую зону больше одного раза. Напримѣръ, на поверхностяхъ этого типа геодезическая линія, сдѣлавъ полный оборотъ вокругъ оси, обыкновенно не возвращается въ точку исхода и т. п.

Обратимся теперь къ поверхностямъ вращенія, имѣющимъ постоянную отрицательную кривизну. Полагая въ уравненіи (1) $k = -\frac{1}{R^2}$, мы представимъ его въ видѣ:

$$\frac{dz}{dr} = \pm\sqrt{\frac{R^2(1-\alpha)-r^2}{\alpha R^2 + r^2}}.$$

Здѣсь нужно снова различать три случая.

Если $\alpha > 0$, то въ предыдущемъ выраженіи числитель долженъ имѣть положительное значеніе; поэтому α должно быть меньше 1, а r заключается въ предѣлахъ

$$0 \leqslant r \leqslant R\sqrt{1-\alpha}.$$

Кривыя этого типа состоятъ изъ вѣтокъ, изображенныхъ на фиг. (2,a).

Если $\alpha < 0$, то полагая $\alpha = -\beta$, мы представимъ предыдущее уравненіе въ видѣ:

$$\frac{dz}{dr} = \pm\sqrt{\frac{R^2(\beta+1)-r^2}{r^2-\beta R^2}}.$$

Въ этомъ случаѣ r заключается въ предѣлахъ

$$R\sqrt{\beta+1} \geqslant r \geqslant R\sqrt{\beta}.$$

Кривая состоитъ изъ вѣтокъ, изображенныхъ на фиг. (2,b). Наконецъ, случай $\alpha = 0$ составляетъ переходный типъ. Дифференціальное уравненіе кривой принимаетъ видъ:

$$\frac{dz}{dr} = \pm\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{r}.$$

Чтобы получить въ этомъ случаѣ окончательныя уравненія кривой, полагаемъ:

$$r = R\sin\varphi; \qquad (2)$$

тогда оказывается:

$$dz = \pm\frac{R\cos^2\varphi d\varphi}{\sin\varphi},$$

$$z - l = \pm R[\cos\varphi + lgtg\,{}^1/_2\varphi], \qquad (3)$$

гдѣ l есть произвольная постоянная. Кривая, изображаемая уравненіями (2) и (3), извѣстна подъ именемъ трактрисы. Наибольшее удаленіе отъ оси (R) соотвѣтствуетъ точкѣ возврата ($\varphi=0$), отъ которой она расходится въ двѣ стороны и ассимптотически приближается къ оси. (См. фиг. (2,c)). Замѣчательное свойство этой кривой заключается въ томъ, что отрѣзокъ касательной отъ точки касанія до пересѣченія съ осью имѣетъ постоянную длину.

Ф. Клейнъ называетъ три типа поверхностей вращенія, соотвѣтствующіе этимъ тремъ видамъ меридіана, *коническимъ*, *кольцеобразнымъ* и *аперіодическимъ* [1]).

Замѣчательно, что всѣ три типа поверхностей вращенія имѣютъ ребра; если поверхность описана одной вѣткой какой либо изъ разсмотрѣнныхъ кривыхъ, то она всегда представляетъ зону, обрѣзанную по наибольшей параллели; для поверхностей аперіодическаго типа эта зона въ одну сторону простирается безконечно, постоянно суживаясь; съ другой же стороны, по наибольшей параллели радіуса R она обрѣзана. Если поверхность образована вращеніемъ нѣсколькихъ вѣтокъ, то въ мѣстахъ соединенія наибольшихъ параллелей образуются ребра. Вдоль этихъ реберъ нѣтъ касательной плоскости и Гауссовы коэффиціенты E, F, G на этихъ параллеляхъ не имѣютъ опредѣленнаго значенія.

(Продолженіе слѣдуетъ).

О прямой Эйлера.

Дм. Ефремова (Иваново-Вознесенскъ).

Предлагаемая статья распадается на двѣ части.

Въ первой части ея, съ цѣлью опредѣлить положеніе прямой Эйлера относительно сторонъ треугольника, опредѣляются углы, составляемые этою прямою со сторонами треугольника, и на основаніи полученныхъ формулъ дѣлаются выводы относительно положенія этой прямой для нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ.

Во второй части разсматриваются треугольники, получающіеся отъ пересѣченія сторонъ главнаго треугольника съ его прямою Эйлера, и полученные результаты прилагаются къ доказательству двухъ теоремъ, выражающихъ одно изъ наиболѣе замѣчательныхъ свойствъ этой прямой.

[1]) *F. Klein.* „Nicht-euclidische Geometrie". Vorlesungen gehalten während des Wintersemesters 1889—1890. Ausgearbeitet von Fr. Schilling. Göttingen 1893. Литографированное изданіе. Стр. 188.

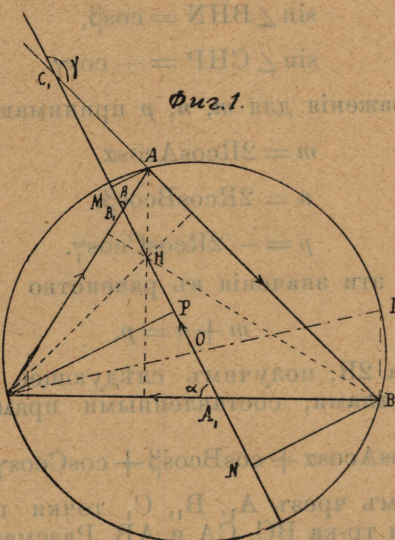
I.

1. Обозначимъ чрезъ H и O ортоцентръ и центръ описаннаго круга треугольника ABC. Такъ какъ прямая Эйлера этого тр-ка OH проходитъ чрезъ барицентръ его G и пересѣкаетъ самый тр-къ такъ, что двѣ вершины его, напр. A и B, находятся отъ нея по одну сторону, а третья C—по другую (фиг. 1), то, обозначивъ чрезъ AM, BN, CP перпендикуляры изъ A, B, C на OH и положивъ

$$AM = m, \quad BN = n, \quad CP = p,$$

получимъ *)

$$m + n = p.$$



Фиг. 1.

Обозначимъ чрезъ R радіусъ круга, описаннаго около тр-ка, и проведемъ чрезъ вершину C діаметръ этого круга CD; такъ какъ

$$AH = DB,$$

то

$$m = AM = AH.\sin\angle AHM = BD.\sin\angle AHM;$$

но

$$BD = CD.\cos\angle BDC = 2R\cos A;$$

поэтому

$$m = 2R\cos A.\sin\angle AHM.$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ, что

$$n = 2R\cos B.\sin\angle BHN$$

*) См. „Новая геометрія тр-ка“ Д. Ефремова, I, 29.

и $$p = 2R\cos C \sin\angle CHP.$$

Примемъ за направленія сторонъ тр-ка направленія ихъ отъ B къ C, отъ C къ A и отъ A къ B и обозначимъ углы, составленные этими направленіями съ направленіемъ прямой Эйлера отъ O къ H, чрезъ α, β, γ; не трудно убѣдиться, что

$$\angle AHM = 90^0 - \alpha,$$

$$\angle BHN = 90^0 - \beta,$$

и $$\angle CHP = -(90^0 - \gamma);$$

поэтому,

$$\sin\angle AHM = \cos\alpha,$$

$$\sin\angle BHN = \cos\beta,$$

$$\sin\angle CHP = -\cos\gamma$$

и найденныя выраженія для m, n, p принимаютъ видъ

$$m = 2R\cos A\cos\alpha,$$

$$n = 2R\cos B\cos\beta, \qquad (1)$$

$$p = -2R\cos C\cos\gamma.$$

Подставивъ эти значенія въ равенство

$$m + n = p,$$

по сокращеніи на 2R, получимъ слѣдующее соотноменіе между углами тр-ка и углами, составленными прямою Эйлера съ его сторонами:

$$\cos A\cos\alpha + \cos B\cos\beta + \cos C\cos\gamma = 0. \qquad (I)$$

2. Обозначимъ чрезъ A_1, B_1, C_1 точки пересѣченія прямой OH со сторонами тр-ка BC, CA и AB. Разсматривая тр-ки A_1BC_1, A_1B_1C и AB_1C_1, замѣчаемъ, что

$$\alpha + \beta = 180^0 - C,$$

$$\gamma + \alpha = 180^0 + B \qquad (II)$$

и $$\gamma - \beta = 180^0 - A.$$

Легко убѣдиться, что каждое изъ этихъ равенствъ есть слѣдствіе двухъ другихъ; поэтому, для опредѣленія α, β, γ чрезъ A, B, C нужно пользоваться ур-ями (II) совмѣстно съ ур-емъ (I).

Выразивъ изъ ур-ній (II) β и γ чрезъ α, получимъ

$$\beta = 180^0 - (C + \alpha)$$

и $$\gamma = 180^0 + (B - \alpha);$$

поэтому,

$$\cos\beta = -\cos(C + \alpha)$$

$$\cos\gamma = -\cos(B - \alpha);$$

подставивъ эти выраженія въ ур-ніе (I), получимъ ур-ніе для опредѣленія α:

$$\cos A.\cos\alpha - \cos B.\cos(C+\alpha) - \cos C\cos(B-\alpha) = 0,$$

которое приводится къ виду:

$$(\cos A - 2\cos B\cos C)\cos\alpha = \sin(B-C).\sin\alpha;$$

отсюда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos A - 2\cos B\cos C}{\sin(B-C)} = \frac{2\cos B\cos C - \cos A}{\sin(C-B)};$$

исключивъ отсюда A при помощи равенства

$$A = 180^0 - (B+C)$$

или

$$\cos A = -\cos(B+C),$$

получимъ:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3 - \operatorname{tg}B.\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}C - \operatorname{tg}B}.$$

Такимъ же путемъ находятся $\operatorname{tg}\beta$ и $\operatorname{tg}\gamma$.

Итакъ, углы α, β, γ опредѣляются слѣдующими формулами:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\cos B\cos C - \cos A}{\sin(C-B)} = \frac{3 - \operatorname{tg}B.\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}C - \operatorname{tg}B},$$

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{2\cos C\cos A - \cos B}{\sin(A-C)} = -\frac{3 - \operatorname{tg}C.\operatorname{tg}A}{\operatorname{tg}A - \operatorname{tg}C}, \qquad (2)$$

$$\operatorname{tg}\gamma = -\frac{2\cos A\cos B - \cos C}{\sin(B-A)} = -\frac{3 - \operatorname{tg}A.\operatorname{tg}B}{\operatorname{tg}B - \operatorname{tg}A}.$$

3. Далѣе придется часто имѣть дѣло съ $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ и $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$. Для опредѣленія $\cos\alpha$ воспользуемся найденнымъ выше уравненіемъ

$$(\cos A - 2\cos B\cos C)\cos\alpha = \sin(B-C)\sin\alpha$$

или

$$(2\cos B\cos C - \cos A)\cos\alpha = \sin(C-B)\sin\alpha;$$

возведя обѣ части его въ квадратъ и исключивъ изъ него $\sin\alpha$, при помощи равенства

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha,$$

получимъ:

$$\left[(2\cos B\cos C - \cos A)^2 + \sin^2(C-B)\right]\cos^2\alpha = \sin^2(C-B);$$

но

$$(2\cos B\cos C - \cos A)^2 + \sin^2(C-B) =$$

$$= (3\cos B\cos C - \sin B\sin C)^2 + (\sin C\cos B - \cos C\sin B)^2 =$$

$$= \sin^2 C - 8\sin B\cos B\sin C\cos C + 8\cos^2 B\cos^2 C + \cos^2 C =$$

$$= 1 + 8\cos B\cos C(\cos B\cos C - \sin B\sin C) =$$

$$= 1 + 8\cos B\cos C\cos(B + C) =$$

$$= 1 - 8\cos A\cos B\cos C;$$

поэтому

$$(1 - 8\cos A\cos B\cos C)\cos^2\alpha = \sin^2(C - B),$$

откуда

$$\cos\alpha = \frac{\pm\sin(C - B)}{\sqrt{1 - 8\cos A\cos B\mathrm{sos}C}}.$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ, что

$$\cos\beta = \frac{\pm\sin(A - C)}{\sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C}}$$

и

$$\cos\gamma = \frac{\pm\sin(B - A)}{\sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C}}.$$

Знаки ($\pm$) въ полученныхъ выраженіяхъ должны быть выбраны такъ, чтобы удовлетворялось уравненіе (I); путемъ подстановки легко убѣлиться, что всѣ три выраженія слѣдуетъ брать одновременно со знакомъ $+$ или $-$. Такимъ образомъ, получаемъ слѣдующія формулы:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\sin(C - B)}{\sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C}}, \\ \cos\beta &= \frac{\sin(A - C)}{\sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C}}, \\ \cos\gamma &= \frac{\sin(B - A)}{\sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C}}, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

въ которыхъ радикалъ можетъ быть взятъ и съ $+$ и съ $-$. (Въ первомъ случаѣ и эти формулы соотвѣтствуютъ чертежу (фиг. 1), на которомъ $A > C > B$).

Изъ равенствъ (2) и (3) чрезъ умноженіе находимъ, что

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{2\cos B\cos C - \cos A}{\sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C}}, \\ \sin\beta &= -\frac{2\cos C\cos A - \cos B}{\sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C}}, \\ \sin\gamma &= -\frac{2\cos A\cos B - \cos C}{\sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C}}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

4. На основаніи формулъ (3) равенства (1) принимаютъ видъ:

$$m = 2R\cdot\frac{\cos A.\sin(C - B)}{\sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C}},$$

$$n = 2R \cdot \frac{\cos B \cdot \sin(A-C)}{\sqrt{1-8\cos A\cos B\cos C}}, \qquad (5)$$

$$p = -2R \cdot \frac{\cos C.\sin(B-A)}{\sqrt{1-8\cos A\cos B\cos C}};$$

отсюда слѣдуетъ, что

$$\frac{m}{\cos A\sin(C-B)} = \frac{n}{\cos B.\sin(A-C)} = \frac{p}{-\cos C.\sin(B-A)} = \qquad (6)$$

$$= \frac{2R}{\sqrt{1-8\cos A\cos B\cos C}}.$$

Такъ какъ m, n и p разсматриваются какъ величины положительныя, то отношенія эти возможны лишь тогда, когда знаменатели ихъ всѣ положительны, или всѣ отрицательны, т. е. когда

$$\cos A.\sin(C-B) > 0,$$

$$\cos B.\sin(A-C) > 0,$$

$$\cos C.\sin(B-A) < 0,$$

или

$$\cos A.\sin(C-B) < 0,$$

$$\cos B.\sin(A-C) < 0,$$

$$\cos C.\sin(B-A) > 0.$$

Если тр-къ остроугольный, то эти неравенства принимаютъ слѣдующій болѣе простой видъ:

$$\sin(C-B) > 0, \quad \sin(A-C) > 0, \quad \sin(B-A) < 0,$$

и

$$\sin(C-B) < 0, \quad \sin(A-C) < 0, \quad \sin(B-A) > 0;$$

отсюда видно, что въ первомъ случаѣ

$$A > C > B,$$

а во второмъ —

$$A < C < B.$$

Эти неравенства, въ связи съ равенствомъ

$$m + n = p,$$

обнаруживаютъ, что, *въ случаѣ остроугольнаго тр-ка, наибольшее изъ разстояній прямой Эйлера отъ вершинъ тр-ка (p) соотвѣтствуетъ углу (C), среднему по величинѣ.* Другими словами: прямая Эйлера остроугольнаго тр-ка пересѣкается съ средней по величинѣ стороной его на ея продолженіи.

Если тр-къ тупоугольный, то ортоцентръ и центръ описаннаго круга находятся въ вертикальныхъ углахъ, составленныхъ сторонами тупого угла, а потому прямая Эйлера пересѣкаетъ сторону противоположную этому углу между вершинами двухъ другихъ угловъ. Полагая въ равенствахъ (6) $A > 90^0$, т. е. $\cos A < 0$, подобно предыдущему, найдемъ, что

$$\sin(C-B) < 0, \quad \sin(A-C) > 0, \quad \sin(B-A) < 0,$$

т. е. что

$$A > B > C.$$

Значитъ, *наибольшее разстояніе (p) прямой Эйлера тупоугольнаго тр-ка отъ его вершинъ соотвѣтствуетъ его наименьшему углу (C)*, т. е. прямая Эйлера тупоугольнаго тр-ка пересѣкается съ наименьшею стороною его на ея продолженіи.

Прямая Эйлера прямоугольнаго тр-ка проходитъ чрезъ вершину прямого угла и чрезъ середину гипотенузы, т. е. равно отстоитъ отъ вершинъ острыхъ угловъ.

5. **Теорема**. *Если одинъ изъ угловъ тр-ка равенъ 60⁰ или 120⁰, то стороны этого угла образуютъ равные углы съ прямой Эйлера.*

Дѣйствительно, полагая въ формулахъ (2) $C = 60^0$, т. е. $\operatorname{tg} C = \sqrt{3}$, получимъ

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3-\sqrt{3}.\operatorname{tg}B}{\sqrt{3}-\operatorname{tg}B} = \sqrt{3},$$

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{3-\sqrt{3}\,.\operatorname{tg}A}{\operatorname{tg}A-\sqrt{3}} = \sqrt{3};$$

слѣдовательно,

$$\alpha = \beta = 60^0.$$

Подобнымъ же образомъ убѣждаемся въ справедливости теоремы при $C = 120^0$.

Обратно:

Если двѣ стороны тр-ка образуютъ съ прямой Эйлера равные углы, то уголъ, составленный этими сторонами, равенъ 60⁰ или 120⁰.

Ибо, если

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta,$$

то, по формуламъ (2),

$$\frac{3-\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}C-\operatorname{tg}B} = -\frac{3-\operatorname{tg}C.\operatorname{tg}A}{\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}C};$$

отсюда находимъ, что

$$\operatorname{tg}^2 C = 3 \text{ и } \operatorname{tg} C = \pm\sqrt{3},$$

т. е.

$$C = 60^0 \text{ или } 120^0.$$

6. Если прямая OH параллельна сторонѣ тр-ка AB, то

$$\alpha = B,\quad \beta = A,\quad \gamma = 180^0;$$

въ этомъ случаѣ, слѣдовательно, $\mathrm{tg}\gamma = 0^0$, т. е, на основанiи формулъ (2),

$$\mathrm{tg}A.\mathrm{tg}B = 3. \qquad \text{(a)}$$

Обратно, если углы тр-ка A и B удовлетворяютъ этому условiю, то прямая Эйлера параллельна сторонѣ AB.

Такъ такъ

$$\mathrm{tg}(A+B) = \mathrm{tg}(180^0 - C) - \mathrm{tg}C$$

и

$$\mathrm{tg}(A+B) = \frac{\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B}{1 - \mathrm{tg}A.\mathrm{tg}B},$$

то, на основанiи предыдущаго условiя (a),

$$-\mathrm{tg}C = \frac{\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B}{-2}$$

или

$$\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B = 2\mathrm{tg}C. \qquad \text{(b)}$$

Отсюда видно, что уголъ C долженъ быть острымъ; ибо, если $C = 90^0$, то

$$\mathrm{tg}C = \infty \text{ и } \mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B = \infty,$$

т. е. какой нибудь изъ угловъ A и B тоже равенъ 90^0, что невозможно. Если же $C > 90^0$, то

$$\mathrm{tg}C < 0 \text{ и } \mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B < 0,$$

а потому одинъ изъ угловъ A и B долженъ быть тоже $> 90^0$, что также невозможно.

На основанiи равенствъ (a) и (b), tg-сы угловъ A и B, при которыхъ прямая Эйлера параллельна сторонѣ тр-ка AB, можно разсматривать какъ корни квадратнаго ур-iя

$$x^2 - 2x\mathrm{tg}C + 3 = 0,$$

гдѣ уголъ C предполагается заданнымъ.

Такъ какъ это ур-iе имѣетъ дѣйствительные корни при

$$\mathrm{tg}^2C \geqslant 3,$$

т. е. при

$$\mathrm{tg}C \geqslant \pm\sqrt{3},$$

то, имѣя въ виду, что $C < 90^0$, заключаемъ, *что прямая Эйлера можетъ быть параллельна одной изъ сторонъ тр-ка только тогда, когда уголъ, противулежащiй этой сторонѣ, острый и не меньше 60^0.*

7. Если прямая OH антипараллельна AB относительно BC и CA, то

$$\alpha = A \text{ и } \beta = B,$$

а потому, на основаніи равенствъ (II),

$$\gamma = 180^0 + (B - A)$$

$$tg\gamma = tg(B - A),$$

или, на основаніи формулъ (2),

$$tg(B-A) = -\frac{3 - tgA.tgB}{tgB - tgA},$$

откуда

$$tg^2A.tg^2B - tg^2A - tg^2B = 3.$$

Замѣнивъ здѣсь tgA и tgB чрезъ $\frac{\sin A}{\cos B}$ и $\frac{\sin B}{\cos B}$, получимъ равенство

$$\sin^2A.\sin^2B - \sin^2A\cos B - \cos^2A\sin^2B - 3\cos^2A\cos^2B = 0,$$

которое, по исключеніи изъ него cosA и cosB, принимаетъ видъ

$$2\sin^2A + 2\sin^2B = 3;$$

это же равенство, на основаніи равенствъ

$$2\sin^2A = 1 - \cos 2A \text{ и } 2\sin^2B = 1 - \cos 2B,$$

преобразуется въ слѣдующее:

$$\cos 2A + \cos 2B = -1,$$

или

$$2\cos(A + B)\cos(A - B) = -1;$$

но

$$\cos(A + B) = \cos(180^0 - C) = -\cos C;$$

слѣдовательно,

$$2\cos C.\cos(A - B) = 1,$$

откуда

$$\cos(A - B) = \frac{1}{2\cos C}.$$

Этотъ результатъ обнаруживаетъ, что уголъ C не можетъ быть тупымъ; ибо, если $C > 90^0$, то

$$\cos C < 0,$$

а потому и

$$\cos(A - B) < 0,$$

что невозможно, такъ какъ это неравенство можетъ имѣть мѣсто только тогда, когда одинъ изъ угловъ A и B тупой.

Такимъ образомъ, послѣднее равенство возможно только при условіи, что

$$\frac{1}{2\cos C} \leqslant 1,$$

т. е. когда

$$\cos C \geqslant {}^1/_2,$$

или

$$C \leqslant 60^0.$$

Итакъ, *прямая Эйлера тр-ка можетъ быть антипараллельна съ одной изъ его сторонъ относительно двухъ другихъ только тогда, когда уголъ, противолежащій этой сторонѣ, не больше 60^0.*

(Продолженіе слѣдуетъ).

Нѣсколько тригонометрическихъ тожествъ.

Прапорщика Е. Григорьева въ Ташкентѣ.

Въ курсахъ тригонометріи можной найти слѣдующія формулы:

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\cos\alpha\cos\gamma + \sin\gamma\cos\alpha\cos\beta -$$
$$- \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \qquad (1)$$

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\sin\alpha\sin\gamma -$$
$$- \cos\gamma\sin\alpha\sin\beta. \qquad (2)$$

Полагая $\alpha+\beta+\gamma = 180^0$, а слѣдовательно, $\sin(\alpha+\beta+\gamma) = 0$, $\cos(\alpha+\beta+\gamma) = -1$ и вычитая тожества (1) и (2) получаемъ послѣ прибавленія къ обѣимъ частямъ по $2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$:

$$1 + 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma =$$
$$= \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\cos\alpha\cos\gamma + \sin\gamma\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma +$$
$$+ \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\gamma\sin\alpha\sin\beta.$$

Легко видѣть, что вторая часть здѣсь представляетъ произведеніе трехъ биномовъ, такимъ образомъ имѣемъ:

$$1 + 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma =$$
$$= (\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\beta+\cos\beta)(\sin\gamma+\cos\gamma).$$

Но извѣстно, что

$$\sin z + \cos z = 2\sin 45^0\cos(45^0 - z) = \sqrt{2}\cos(45^0 - z)$$

слѣд.,

$$1 + 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma =$$
$$= 2\sqrt{2}\cos(45^0-\alpha)\cos(45^0-\beta)\cos(45^0-\gamma). \qquad (3)$$

Выбирая три угла A, B, C такъ, чтобы $A+B+C=180^0$, мы можемъ положить

$$\alpha=90^0-\frac{A}{2},\quad \beta=90^0-\frac{B}{2},\quad \gamma=90^0-\frac{C}{2},$$

такъ какъ необходимое условіе $\alpha+\beta+\gamma=180^0$ при этомъ выполняется.

Тогда вмѣсто (3) получимъ

$$1+2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=$$

$$=2\sqrt{2}\cos\left(45^0-\frac{A}{2}\right)\cos\left(45^0-\frac{B}{2}\right)\cos\left(45^0-\frac{C}{2}\right). \quad (4)$$

Обращаясь теперь къ двумъ извѣстнымъ тожествамъ, существующимъ при условіи $A+B+C=180^0$, а именно:

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \quad (5)$$

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

мы преобразуемъ при помощи ихъ лѣвую часть (4) и находимъ

$$1+\sin A+\sin B+\sin C+\cos A+\cos B+\cos C=$$

$$=4\sqrt{2}\cos\left(45^0-\frac{A}{2}\right)\cos\left(45^0-\frac{B}{2}\right)\cos\left(45^0-\frac{C}{2}\right). \quad (6)$$

Это тожество, которагo, замѣтимъ кстати, мы не имѣли случая встрѣчать раньше, показываетъ, что сумма, стоящая въ лѣвой его части способна приводиться къ логариѳмическому виду. Оно можетъ служить источникомъ многихъ другихъ, аналогичныхъ ему тожествъ, нѣкоторыя изъ которыхъ мы сейчасъ дадимъ.

Такъ замѣняя въ (6) A, B, C углами 360^0-A, $-B$, $-C$, сумма которыхъ также равна 180^0, мы имѣемъ:

$$1-\sin A-\sin B-\sin C+\cos A+\cos B+\cos C=-$$

$$=-4\sqrt{2}\cos\left(45^0+\frac{A}{2}\right)\cos\left(45^0+\frac{B}{2}\right)\cos\left(45^0+\frac{C}{2}\right). \quad (7)$$

Подставляя въ тожества (6) и (7) вмѣсто A, B, C углы 180^0-A, 180^0-B, $-C$, получаемъ два новыхъ

$$1+\sin A+\sin B-\sin C-\cos A-\cos B+\cos C=$$

$$=4\sqrt{2}\cos\left(45^0-\frac{A}{2}\right)\cos\left(45^0-\frac{B}{2}\right)\cos\left(45^0+\frac{C}{2}\right)$$

и
$$1-\sin A-\sin B+\sin C-\cos A-\cos B+\cos C=$$
$$=-4\sqrt{2}\cos\left(45^0+\frac{A}{2}\right)\cos\left(45^0+\frac{B}{2}\right)\cos\left(45-\frac{C}{2}\right).$$

Применяя тѣ же тожества (6) и (7) къ угламъ $180-A$, $90-B$, $90-C$, имѣемъ еще

$$1+\sin A+\sin B+\sin C-\cos A+\cos B+\cos C=$$
$$=4\sqrt{2}\cos\left(45^0-\frac{A}{2}\right)\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$1-\sin A+\sin B+\sin C-\cos A-\cos B-\cos C=$$
$$=4\sqrt{2}\cos\left(45^0+\frac{A}{2}\right)\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Въ послѣднихъ 4-хъ тожествахъ буквы A, B, C могутъ переставляться.

Кромѣ указанныхъ подстановокъ можно употреблять и другія, напримѣръ:

$$90^0-\frac{A}{2},\quad 90^0-\frac{B}{2},\quad 90^0-\frac{C}{2},$$

или 180^0-2A, 180^0-2B, 180^0-2C и т. д.

Такимъ образомъ получаются еще тожества

$$1+\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}+\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=$$
$$=4\sqrt{2}\cos\frac{A}{4}\cos\frac{B}{4}\cos\frac{C}{4}$$

$$1+\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{A}{2}-\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{C}{2}=$$
$$=-4\sqrt{4}\sin\frac{A}{4}\sin\frac{B}{4}\sin\frac{C}{4}\quad \text{и т. д.}$$

Различныя комбинаціи выведенныхъ формулъ могутъ приводить къ интереснымъ соотношеніямъ. Напримѣръ, изъ двухъ послѣднихъ тожествъ при помощи (5), примѣненнаго къ угламъ $90^0-\frac{A}{2}$, $90^0-\frac{B}{2}$, $90^0-\frac{C}{2}$, получается такое тожество:

$$\cos\frac{A}{4}\cos\frac{B}{4}\cos\frac{C}{4}+\sin\frac{A}{4}\sin\frac{B}{4}\sin\frac{C}{4}=$$
$$=\sqrt{2}\cos\left(45^0-\frac{A}{4}\right)\cos\left(45^0-\frac{B}{4}\right)\cos\left(45^0-\frac{C}{4}\right).$$

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Въ среднихъ числахъ сентября сего года въ Меранѣ состоялося *годичный съѣздъ союза нѣмецкихъ математиковъ*. Первые два реферата были посвящены вопросу *о введеніи элементовъ высшаго анализа въ курсъ средней школы*.

Берлинская академія наукъ присудила профессору Lenard'у въ Килѣ *премію* въ 5000 марокъ за его выдающіяся работы о катодныхъ лучахъ.

Учрежденіе преміи имени Bolyai. По случаю столѣтія годовщины со дня рожденія J. Bolyai венгерская академія наукъ постановила увѣковѣчить память знаменитаго математика и его отца и учителя учрежденіемъ преміи имени Bolyai. Премія эта состоитъ изъ медали и десяти тысячи кронъ Она будетъ присуждена за лучшую работу по математикѣ, безразлично на какомъ языкѣ и въ какой формѣ работа будетъ опубликована Первое присужденіе состоится въ Будапештѣ въ октябрѣ сего года, а затѣмъ черезъ каждые пять лѣтъ. Члены коммиссіи для присужденія преміи выбираются академіей въ числѣ четырехъ ученыхъ: двухъ венгерскихъ и двухъ иностранныхъ. Въ настоящее время членами жюри состоятъ: G. Darboux изъ Парижа, Felix Klein изъ Геттингена, J. König и G. Rados изъ Будапешта.

Международный конгрессъ для изученія радіологіи и іонизаціи. Въ первыхъ числахъ сентября сего года въ Льежѣ одновременно съ всемірной выставкой состоялся первый международный конгрессъ посвященный вопросамъ радіологіи и іонизаціи Предсѣдателемъ былъ H. Becquerel.

Докторъ *H. A. Lorentz*, профессоръ физики въ Лейденскомъ Университетѣ избранъ *членомъ-корреспондентомъ Прусской королевской академіи наукъ.*

Лордъ Rayleigh оставилъ кафедру физики въ Королевскомъ Институтѣ. Кафедру эту онъ занималъ въ теченіе 18 лѣтъ, теперь онъ избранъ почетнымъ профессоромъ. *Замѣстителемъ* его назначенъ профессоръ Кембриджскаго университета *J. J. Thomson*.

Адресная книга астрономовъ, математиковъ и физиковъ всего міра. Изданіе этой книги предпринято W. Junk'омъ въ Берлинѣ (Rathenower str. 22). Цѣна по подпискѣ 3 марки.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги: 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ" и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 677 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$x^3=\left(\frac{b-c}{y-z}\right)^2,$$

$$y^3=\left(\frac{c-a}{z-x}\right)^2,$$

$$z^3=\left(\frac{a-b}{x-y}\right)^2.$$

Е. Григорьевъ (Ташкентъ).

№ 678 (4 сер.). Построить трапецію, зная ея углы, одну изъ параллельныхъ сторонъ и уголъ между діагоналями.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 679 (4 сер.). По даннымъ діагоналямъ m и n построить ортодіагональный четыреугольникъ, вписанный въ кругъ радіуса R и вычислить его стороны *).

Д. Е.

№ 680 (4 сер.). Доказать справедливость тожества

$$\frac{1}{a_1}+\frac{a_1+r}{a_1a_2}+\frac{(a_1+r)(a_2+r)r}{a_1a_2a_3}+\ldots+\frac{(a_1+r)(a_2+r)\ldots(a_{n-1}+r)}{a_1a_2\ldots a_{n-1}a_n}=$$

$$=\frac{1}{r}\left(\frac{(a_1+r)(a_2+r)\ldots(a_{n-1}+r)(a_n+r)}{a_1a_2a_3\ldots a_{n-1}a_n}-1\right).$$

А. Брюхановъ (Иркутскъ).

№ 681 (4 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$x^2-22x+40=3^y.$$

Н. С. (Одесса).

№ 682 (4 сер.). Кусокъ металла, коэффиціентъ линейнаго расширенія котораго равенъ α, погружаютъ въ ртуть. При этомъ металлъ теряетъ въ своемъ вѣсѣ p граммовъ при 0^0 и p' граммовъ при 60^0. Выразить коэффиціентъ абсолютнаго расширенія ртути въ функціи величинъ α, p и p'. Примѣнить полученную формулу къ тому случаю, когда $\alpha=857.10^{-8}$, $p=50$ граммовъ, $p'=49{,}5415$ граммовъ. Плотность ртути при 0^0 равна 13,6.

(Заимств.) *М. Г.*

*) О свойствахъ ортодіагональнаго треугольника см. „Новая геометрія треугольника" Д. Ефремова.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ

№ 577 (4 сер.). *Рѣшить систему уравненій*

$$x+y+z=9,\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1,\quad yz+zx+xy=27.$$

Заимств. изъ *Supplemento al Periodico di Matematica.*

Представивъ второе изъ данныхъ уравненій въ видѣ

$$\frac{yz+zx+xy}{xyz}=1$$

и подставляя вмѣсто $yz+zx+xy$ его значеніе изъ третьяго уравненія, получимъ $\frac{27}{xyz}=1$, откуда $xyz=27$. Итакъ, $x+y+z=9$, $yz+zx+xy=27$, $xyz=27$, откуда видно, что x, y, z суть корни уравненія

$$t^3-9t^2+27t-27=0,$$

или $(t-3)^3=0$. Такимъ образомъ $t=3$, т. е. $x=y=z=3$.

А. Варенцовъ (Ростовъ н/Д); *М. Кузнецовъ* (Астрахань); *В. Дьяковъ* (Новочеркасскъ); *В. Гейманъ* (Ѳеодосія); *Н. Агрономовъ* (Вологда); *Г. Оганянцъ* (Москва); *Я. Виленкинъ* (Елатьма); *А. Турчаниновъ* (Брестъ); *Д. Колянковскій* (Немировъ); *С. Конюховъ* (Никитовка); *В. Смирновъ* (Москва); *Н. Доброгаевъ* (Немировъ); *Э. Лейнъкъ* (Рига); *Е. Хандановъ* (Тифлисъ); *М. Сейдель* (Ростовъ н/Д).

№ 580 (4 сер.). *Найти три цѣлыхъ положительныхъ числа, каждое изъ которыхъ болѣе единицы, подъ условіемъ, чтобы произведеніе каждыхъ двухъ изъ нихъ, увеличенное единицей, дѣлилось на третье.*

Обозначимъ искомыя числа черезъ x, y, z. Тогда

$$\frac{yz+1}{x}=u,\quad \frac{zx+1}{y}=v,\quad \frac{xy+1}{z}=t, \qquad (1)$$

гдѣ u, v, t суть числа цѣлыя. Перемноживъ равенство (1), получимъ:

$$\frac{x^2y^2z^2+yzx^2+zxy^2+xyz^2+yz+zx+xy+1}{xyz}=uvt,$$

или

$$xyz+x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{xyz}=uvt,$$

откуда

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{xyz}=uvt-xyz-x-y-z=m, \qquad (2)$$

гдѣ m—число цѣлое, такъ какъ u, v, t, x, y, z суть числа цѣлыя. Но по условію $x\geqslant 2$, $y\geqslant 2$, $z\geqslant 2$, откуда

$$\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{2},\quad \frac{1}{y}\leqslant\frac{1}{2},\quad \frac{1}{z}\leqslant\frac{1}{2}, \text{ а потому } \frac{1}{xyz}\leqslant\frac{1}{8}<\frac{1}{2}. \qquad (3)$$

Слѣдовательно, (см. (3), (2))

$$m=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{xyz}<2,$$

откуда вытекаетъ, что m, будучи цѣлымъ положительнымъ числомъ, равно 1, такъ что

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{xyz}=1. \qquad (4)$$

Итакъ, изъ системы уравненій (1) вытекаетъ равенство (4). Наоборотъ, если цѣлыя числа x, y, z удовлетворяютъ равенству (4), то каждое изъ чиселъ $\frac{yz+1}{x}$, $\frac{zx+1}{y}$, $\frac{xy+1}{z}$ есть число цѣлое; дѣйствительно, умножая равенство (4) на yz, имѣемъ $\frac{yz+1}{x}+z+y=yz$, откуда видно, что $\frac{yz+1}{x}$ есть число цѣлое. Слѣдовательно, для рѣшенія задачи достаточно рѣшить уравненіе (4) въ числахъ цѣлыхъ и положительныхъ, полагая $x>1$, $y>1$, $z>1$. Изъ равенства (4) видно, что нельзя допустить одновременно неравенствъ: $x>3$, $y>3$, $z>3$, такъ какъ изъ этого допущенія вытекаетъ, что $\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{4}$, $\frac{1}{y}\leqslant\frac{1}{4}$, $\frac{1}{z}\leqslant\frac{1}{4}$, $\frac{1}{xyz}\leqslant\frac{1}{64}<\frac{1}{4}$, откуда $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{xyz}<1$, что противорѣчитъ равенству (4). Поэтому во всякой системѣ искомыхъ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній равенства (4) хоть одно изъ неизвѣстныхъ, напримѣръ, x удовлетворяетъ условію $x\leqslant 3$, откуда, такъ какъ $x>1$, $x=2$ или 3. Пусть $x=2$. Подставивъ это значеніе x въ равенство (4), получимъ: $\frac{1}{2}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2yz}=1$, или

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2yz}=\frac{1}{2}. \qquad (5)$$

Изъ равенства (5) видно, что нельзя допустить одновременно $y>5$, $z>5$, такъ какъ, при наличности этихъ неравенствъ, мы имѣли бы $\frac{1}{y}\leqslant\frac{1}{6}$, $\frac{1}{z}\leqslant\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2yz}<\frac{1}{6}$, откуда $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2yz}<\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$, что противорѣчитъ равенству (5). Итакъ, полагая, что $x=2$, мы должны допустить, что y равно одному изъ чиселъ 2, 3, 4, 5; но при $y=2$, 4, 5 мы получаемъ для z (см. (5)) дробныя значенія, а при $y=3$ имѣемъ (см. (5)), что $z=7$. Итакъ, при $x=2$ находимъ: $y=3$, $z=7$. Подобнымъ же образомъ при $x=3$ находимъ (см. (4)):

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{3yz}=\frac{2}{3} \qquad (6),$$

откуда видно, что нельзя одновременно допустить неравенствъ $y>4$, $z>4$, такъ какъ тогда $\frac{1}{y}\leqslant\frac{1}{5}$, $\frac{1}{z}\leqslant\frac{1}{5}$, $\frac{4}{3yz}\leqslant\frac{1}{75}<\frac{1}{5}$, а потому $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{3yz}<\frac{3}{5}<\frac{2}{3}$, что противорѣчитъ равенству (6). Итакъ, при $x=3$, $y=2$, 3, 4. Но, при $y=3$, 4, z не получаетъ (см. (6)) цѣлыхъ значеній, а при $y=2$ находимъ $z=7$. Такимъ образомъ мы получили слѣдующія системы рѣшеній:

$$x=2,\ y=2,\ z=7 \text{ или } x=3,\ y=2,\ z=7 \qquad (7).$$

Двѣ эти системы различаются одна отъ другой лишь обмѣномъ значеній x и y. Рѣшая уравненіе (1), мы произвольно предположили $x=2$ или 3 (а не y или z), а въ равенствахъ (5) и (6) произвольно предположили $y=2$, 3, 4, 5 и $y=2$, 3, 4 (а не z). Но вслѣдствіе симметричности условія задачи относительно неизвѣстныхъ, ясно, что другія изъ возможныхъ предположеній приводятъ къ возможности любого обмѣна значеній между неизвѣстными. Итакъ, три искомыхъ числа суть 2, 3, 7.

С. Конюховъ (Никитовка); *Г. Оганянцъ* (с. Ахизъ); *Н. С.* (Одесса); *Е. Хандановъ* (Тифлисъ).

№ 581 (4 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$\sqrt[7]{16330+6x}+\sqrt[7]{182-6x}=6.$$

Полагая $\sqrt[7]{16330+6x}=u$ (1), $\sqrt[7]{182-6x}=v$ (2), приводимъ данное уравненіе къ виду

$$u+v=6 \quad (3).$$

Возвышая равенства (1) и (2) въ седьмую степень и складывая ихъ, получимъ:

$$u^7+v^7=16512.$$

Раздѣливъ послѣднее равенство на равенство (3), имхемъ

$$u^6+v^6-uv(u^4+v^4)+u^2v^2(u^2+v^2)-u^3v^3=2752 \quad (4).$$

Полагая (см. (3)) $u+v=a=6$ (5) и $uv=z$ (6), мы [сравн. рѣшеніе задачи № 559 (4 сер.) въ № 390 „Вѣстника"] можемъ представить равенство (4) въ видѣ

$$-7(z^3-2a^2z^2+a^4z)+a^6=2752$$

или (см. (5))

$$-7(z^3-72z^2+1296z)+46656=2752,$$

откуда, перенося всѣ члены въ правую часть и дѣля обѣ части иа 7, имѣемъ

$$z^3-72z^2+1296z-6272=0 \quad (7).$$

Разложивъ лѣвую часть равенства (7) на множителей, подставимъ его въ видѣ

$$(z-8)(z^2-64z+784)=0,$$

откуда $z=uv=8$ (8) иля $z=uv=32\pm4\sqrt{15}$ (9).

Такимъ обвазомъ (см. (3), (8), (9) v равно одному изъ корней одного изъ уравненій

$$t^2-6t+8=0 \quad (10) \quad \text{или} \quad t^2-6t+32\pm4\sqrt{15}=0. \quad (11)$$

Поэтому (см. (2), (10), (11)

$$v=\sqrt[7]{182-6x}=2, \text{ или } v=\sqrt[7]{182-6x}=4, \text{ или } v=\sqrt[7]{182-6x}=$$

$$=3\pm\sqrt{9-32\pm4\sqrt{15}}=3\pm\sqrt{-23\pm4\sqrt{15}},$$

откуда

$$x=\frac{182-2^7}{6}=9, \text{ или } x=\frac{182-4^7}{6}=-2700\frac{1}{3},$$

или

$$x=\frac{182-\left[3\pm\sqrt{-23\pm4\sqrt{15}}\right]^7}{6}.$$

Г. Оганянцъ (Москва); *С. Конюховъ* (Никитовка); *Н. Плаховъ* (Винница); *А. Брюхановъ* (Иркутскъ); *Н. Доброгаевъ* (Немировъ); *А. Варенцовъ* (Ростовъ н/Д); *Е. Хандановъ* (Тифлисъ); *В. Смирновъ* (Москва).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66.

Обложка
ищется

Обложка
ищется