Обложка
ищется

Обложка
ищется

XXXIX Сем. № 7.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 463.

Объ объемѣ шара, шарового сегмента и шарового слоя.

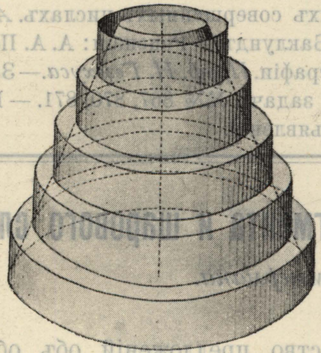
Проф. В. А. Циммермана.

Желая найти простое доказательство предложеній объ объемѣ шара, шарового сегмента и шарового слоя, я пришелъ къ одной теоремѣ, изъ которой могутъ быть выведены помощью весьма несложныхъ выкладокъ извѣстныя выраженія для объема шара, сегмента и слоя. Возможно, что эта теорема, или теорема аналогичная, была уже кѣмъ-либо доказана и опубликована. Но такъ какъ указаній, которыя подтверждали бы такое предположеніе, я не встрѣчалъ, найденная же мною теорема не лишена, какъ мнѣ кажется, извѣстнаго интереса, то я и рѣшилъ опубликовать ее въ „Вѣстникѣ" съ болѣе или менѣе полнымъ доказательствомъ и съ выводомъ изъ нея предложеній объ объемѣ шара, сегмента и слоя.

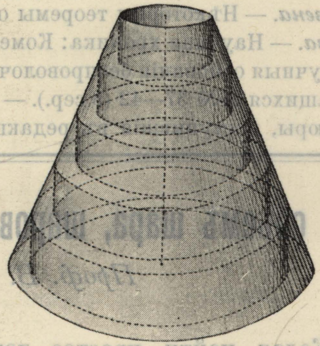
1. Пусть данъ усѣченный прямой круговой конусъ. Раздѣливши высоту его на n равныхъ частей и проведя черезъ каждую изъ $n-1$ точекъ дѣленія сѣкущую плоскость, параллельную плоскостямъ основаній конуса, построимъ n прямыхъ круговыхъ цилиндровъ, имѣющихъ одну и ту же высоту, равную n'ой части высоты усѣченнаго конуса, расположенныхъ соотвѣтственно между плоскостью большаго основанія усѣченнаго конуса и первой (ближайшей къ плоскости большаго основанія) сѣкущей плоскостью, между первой и второй сѣкущей плоскостью, ..., между $(n-1)$'ой сѣкущей плоскостью и плоскостью меньшаго основанія усѣченнаго конуса,—такимъ образомъ, чтобы основаніемъ пер-

ваго цилиндра служило бо́льшее основаніе усѣченнаго конуса, основаніемъ второго цилиндра—сѣченіе конуса первой сѣкущей плоскостью [первое сѣченіе конуса], основаніемъ третьяго цилиндра—сѣченіе конуса второю сѣкущею плоскостью [второе сѣченіе конуса], . . ., основаніемъ n'аго цилиндра—сѣченіе конуса $(n-1)$'ою сѣкущею плоскостью [$(n-1)$'ое сѣченіе конуса]. Построенные такимъ образомъ цилиндры будемъ называть n выходящими цилиндрами даннаго усѣченнаго конуса (фиг. 1). Сумма V'_n объемовъ ихъ будетъ, очевидно, больше объема V даннаго усѣченнаго конуса.

2. Построимъ затѣмъ n прямыхъ круговыхъ цилиндровъ, имѣющихъ одну и ту же высоту, равную n'ой части высоты даннаго усѣченнаго конуса, расположенныхъ соотвѣтственно между плоскостью бо́льшаго основанія конуса и плоскостью перваго сѣченія, между плоскостью перваго сѣченія и плоскостью второго сѣченія и т. д., при томъ



Фиг. 1.



Фиг. 2.

такъ, чтобы первое сѣченіе конуса служило основаніемъ перваго цилиндра, второе сѣченіе конуса—основаніемъ второго цилиндра, . . ., меньшее основаніе усѣченнаго конуса—основаніемъ n'аго цилиндра. Цилиндры эти будемъ называть n входящими цилиндрами даннаго усѣченнаго конуса (фиг. 2). Сумма V_n объемовъ ихъ будетъ, очевидно, меньше объема V усѣченнаго конуса.

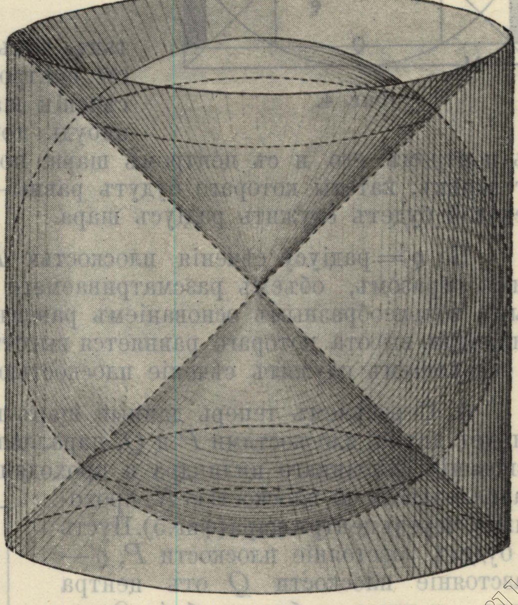
3. Первый изъ n входящихъ цилиндровъ и второй изъ n выходящихъ цилиндровъ будутъ равны, какъ прямые цилиндры, имѣющіе равныя основанія и равныя высоты; точно такъ же будутъ равны второй входящій цилиндръ и третій выходящій цилиндръ, . . ., $(n-1)$'ый входящій и n'ый выходящій цилиндръ. Отсюда слѣдуетъ, что разность $V'_n - V_n$ между суммою объемовъ n выходящихъ цилиндровъ и суммою объемовъ n входящихъ цилиндровъ равна разности объемовъ перваго выходящаго и n'аго входящаго цилиндра, будетъ, слѣдовательно, меньше объема перваго выходящаго цилиндра,—объема, стремящагося при безпредѣльномъ возрастаніи n къ нулю, и, такимъ образомъ, будетъ представлять собою величину, при неограниченномъ возрастаніи n стремящуюся къ нулю. А такъ какъ при всякомъ n разность $V'_n - V_n$ будетъ больше

разности $V - V_n$, то и эта послѣдняя разность будетъ стремиться къ нулю при неограниченномъ возрастаніи n, откуда слѣдуетъ, что

$$V = \text{пред. } V_n.$$

Итакъ, объемъ усѣченнаго конуса представляетъ собою предѣлъ, къ которому стремится сумма объемовъ n входящихъ цилиндровъ, когда число ихъ безпредѣльно возрастаетъ.

4. Пусть данъ шаръ радіуса R и описанный около него прямой круговой цилиндръ (цилиндръ, основаніями котораго служатъ два круга радіуса R, лежащіе въ параллельныхъ плоскостяхъ, касательныхъ къ поверхности даннаго шара, и имѣющіе центры въ точкахъ касанія этихъ плоскостей) (фиг. 3). Построимъ два конуса, принявъ одно основаніе описаннаго около шара цилиндра за основаніе одного конуса, другое основаніе цилиндра—за основаніе другого конуса и центръ шара—за общую вершину конусовъ. Такъ какъ высота каждаго конуса, равная R, будетъ равняться радіусу основанія конуса, то радіусъ сѣченія любого изъ нихъ плоскостью, параллельною основанію, будетъ равенъ разстоянію сѣченія отъ вершины. Мы условимся называть геометрическое тѣло, состоящее изъ двухъ построенныхъ нами конусовъ, двуполымъ конусомъ K, основанія обоихъ конусовъ—основаніями двуполаго конуса K и центръ шара—вершиною двуполаго конуса K.

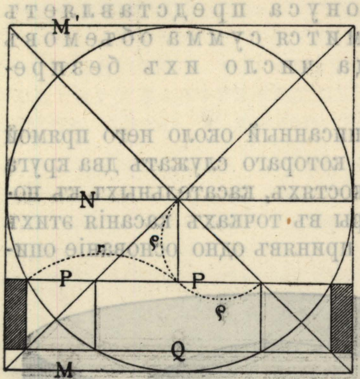


Фиг. 3.

Изъ вышесказаннаго слѣдуетъ, что радіусъ всякаго сѣченія двуполаго конуса K плоскостью, параллельною его основаніямъ, будетъ равенъ разстоянію сѣкущей плоскости отъ вершины двуполаго конуса K (отъ центра шара).

5. Пусть M будетъ плоскость одного изъ основаній описаннаго цилиндра, N—параллельная ей плоскость, проходящая черезъ центръ шара (фиг. 4). Пересѣчемъ шаръ и цилиндръ двумя плоскостями P и Q, параллельными плоскости M и проходящими между плоскостями M и N. Пусть разстояніе ϱ плоскости P отъ центра даннаго шара будетъ меньше разстоянія плоскости Q отъ центра шара, и, слѣдовательно, ра-

діусъ r круга g, получаемаго въ сѣченіи шара плоскостью P, больше радіуса сѣченія шара плоскостью Q. Принявъ упомянутый кругъ g радіуса r за основаніе, построимъ прямой круговой цилиндръ, имѣющій высоту, равную разстоянію h между плоскостями P и Q, и расположенный между этими плоскостями. Боковая поверхность этого цилиндра, боковая поверхность даннаго, описаннаго около шара, цилиндра, и плоскости P и Q будутъ ограничивать кольцеобразное тѣло, которое мы будемъ называть прямымъ цилиндромъ съ круглымъ кольцеобразнымъ основаніемъ. Объемъ этого тѣла будетъ, очевидно, равенъ $\pi h(R^2 - r^2)$, или



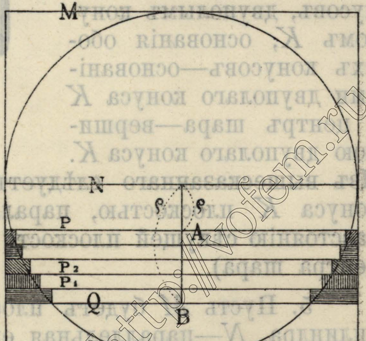
Фиг. 4.

$$\pi h \varrho^2,$$

такъ какъ, соединивши центръ шара съ центромъ круга, получаемаго въ сѣченіи шара плоскостью P, и какую-нибудь точку окружности этого круга съ центромъ его и съ центромъ шара, получимъ прямоугольный треугольникъ, катеты котораго будутъ равны—одинъ ϱ, другой r, а гипотенузой будетъ служить радіусъ шара.

Но $\varrho =$ радіусу сѣченія плоскостью P двуполаго конуса K. Такимъ образомъ, объемъ разсматриваемаго прямого цилиндра съ круглымъ кольцеобразнымъ основаніемъ равенъ объему прямого круговаго цилиндра, высота котораго равняется высотѣ кольцеобразнаго цилиндра, а основаніемъ служитъ сѣченіе плоскостью P двуполаго конуса K.

6. Пересѣчемъ теперь данный шаръ и описанный около него цилиндръ двумя плоскостями P и Q, параллельными плоскостямъ M и M' основаній описаннаго цилиндра и проходящими между плоскостью M и параллельною ей плоскостью N, проходящею черезъ центръ шара (фиг. 5). Пусть ϱ будетъ разстояніе плоскости P, ϱ'—разстояніе плоскости Q отъ центра шара,—и пусть ϱ будетъ $< \varrho'$. Опредѣлимъ объемъ тѣла L, ограниченнаго боковою поверхностью даннаго цилиндра, поверхностью даннаго шара и плоскостями P и Q. Проведя діаметръ, перпендикулярный къ плоскости M (и, слѣдовательно, перпендикулярный плоскостямъ P и Q), раздѣлимъ заключенный между плоскостями P и Q отрѣзокъ AB этого діаметра, равный $\varrho' - \varrho$, на n равныхъ частей и

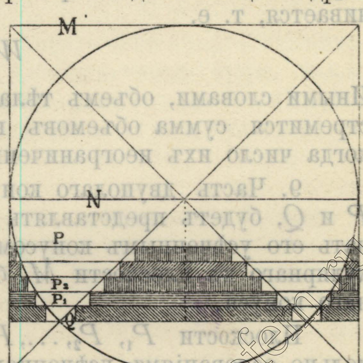


Фиг. 5.

проведемъ черезъ каждую изъ $n - 1$ точекъ дѣленія сѣкущую плоскость, параллельную плоскости M; пусть P_1 будетъ ближайшая изъ этихъ плоскостей къ плоскости Q, P_2—ближайшая къ Q изъ остальныхъ $n-2$ плоскостей и т. д. Принявъ затѣмъ за основаніе сѣченіе шара плоскостью Q, построимъ прямой цилиндръ, имѣющій высоту, равную $\frac{\varrho'-\varrho}{n}$, и расположенный между плоскостями Q и P_1; тѣло, ограниченное боковою поверхностью этого цилиндра, боковою поверхностью даннаго описаннаго около шара цилиндра и плоскостями Q и P_1, будемъ называть *первымъ выходящимъ кольцеобразнымъ цилиндромъ* тѣла L; объемъ его будетъ больше объема части тѣла L, заключенной между плоскостями Q и P_1. Принявши затѣмъ за основаніе сѣченіе шара плоскостью P_1, построимъ прямой цилиндръ, имѣющій высоту, равную $\frac{\varrho'-\varrho}{n}$, и расположенный между плоскостями P_1 и P_2; тѣло, ограниченное боковою поверхностью этого цилиндра, боковою поверхностью даннаго описаннаго около шара цилиндра и плоскостямя P_1 и P_2, будемъ называть *вторымъ выходящимъ кольцеобразнымъ цилиндромъ* тѣла L; объемъ его будетъ больше объема части тѣла L, заключенной между плоскостями P_1 и P_2. И т. д.

Сумма W'_n объемовъ полученныхъ такимъ образомъ n *выходящихъ кольцеобразныхъ цилиндровъ* тѣла L будетъ больше объема W тѣла L.

7. Принявши за основаніе сѣченіе шара плоскостью P_1, построимъ прямой цилиндръ, имѣющій высоту, равную $\frac{\varrho'-\varrho}{n}$, и расположенный между плоскостями P_1 и Q (фиг. 6); тѣло, ограниченное боковою поверхностью этого цилиндра, боковою поверхностью даннаго цилиндра и плоскостями Q и P_1, будемъ называть *первымъ входящимъ кольцеобразнымъ цилиндромъ* тѣла L; объемъ его будетъ меньше объема части тѣла L, заключенной между плоскостями тѣла Q и P_1. Принявши затѣмъ за основаніе сѣченіе шара плоскостью P_2, построимъ прямой цилиндръ, имѣющій высоту, равную $\frac{\varrho'-\varrho}{n}$, и расположенный между плоскостями P_2 и P_1; тѣло, ограниченное боковою поверхностью этого цилиндра, боковою поверхностью даннаго цилиндра и плоскостями P_1 и P_2, будемъ называть *вторымъ входящимъ кольцеобразнымъ цилиндромъ* тѣла L; объемъ его будетъ меньше объема части тѣла L, заключенной между плоскостями P_1 и P_2. И т. д.



Фиг. 6.

Сумма W_n объемовъ полученныхъ такимъ образомъ n *входящихъ кольцеобразныхъ цилиндровъ* тѣла L будетъ меньше объема W тѣла L и, слѣдовательно, меньше W'_n.

8. Обозначивши радіусъ сѣченія шара плоскостью P_1 черезъ r_1, найдемъ, что объемъ второго выходящаго кольцеобразнаго цилиндра будетъ равняться

$$\pi(R^2 - r_1^2)\,\frac{\varrho' - \varrho}{n}\,.$$

Такое же выраженіе найдемъ и для объема перваго входящаго кольцеобразнаго цилиндра. Объемъ второго выходящаго кольцеобразнаго цилиндра равенъ, такимъ образомъ, объему перваго входящаго кольцеобразнаго цилиндра. (Это вытекаетъ также изъ того, что оба кольцеобразные цилиндра имѣютъ общее основаніе и равныя высоты и, слѣдовательно, могутъ быть приведены въ совмѣщеніе). Точно такъ же убѣждаемся, что объемъ третьяго выходящаго кольцеобразнаго цилиндра равенъ объему второго входящаго, и т. д., объемъ n'аго выходящаго кольцеобразнаго цилиндра равенъ объему $(n-1)$'аго входящаго. Отсюда слѣдуетъ, что разность $W'_n - W_n$ между суммою объемовъ выходящихъ кольцеобразныхъ цилиндровъ и суммою объемовъ входящихъ кольцеобразныхъ цилиндровъ будетъ равняться разности объемовъ перваго выходящаго кольцеобразнаго цилиндра и n'аго входящаго кольцеобразнаго цилиндра и будетъ, слѣдовательно, меньше объема перваго выходящаго кольцеобразнаго цилиндра. Объемъ послѣдняго, составляя часть стремящагося—при безпредѣльномъ возрастаніи n—къ нулю объема цилиндра, ограниченнаго боковою поверхностью даннаго (описаннаго около шара) цилиндра и плоскостями Q и P_1, представляетъ величину, также стремящуюся къ нулю при неограниченномъ возрастаніи n. Такимъ образомъ разность $W'_n - W_n$, а, слѣдовательно, и разность $W - W_n$ стремится къ нулю, когда n безпредѣльно увеличивается, т. е.

$$W = \text{пред. } W_n.$$

Иными словами, объемъ тѣла L представляетъ предѣлъ, къ которому стремится сумма объемовъ входящихъ кольцеобразныхъ цилиндровъ, когда число ихъ неограниченно возрастаетъ.

9. Часть двуполаго конуса K, заключенная между плоскостями P и Q, будетъ представлять собою усѣченный конусъ; будемъ называть его усѣченнымъ конусомъ K_1. Отрѣзокъ AB діаметра, перпендикулярнаго къ плоскости M, будетъ представлять высоту этого усѣченнаго конуса.

Плоскости $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ суть плоскости, проведенныя параллельно основаніямъ усѣченнаго конуса K_1 черезъ $n-1$ точекъ дѣленія высоты AB, раздѣленной на n равныхъ частей.

Принявши сѣченіе двуполаго конуса K плоскостью P_1 за основаніе и построивши прямой цилиндръ, имѣющій высоту, равную $\frac{\varrho' - \varrho}{n}$ (n'ой части AB), и расположенный между плоскостями Q и P_1; принявши затѣмъ сѣченіе двуполаго конуса K плоскостью P_2 за основаніе и построивши прямой цилиндръ, имѣющій высоту, равную $\frac{\varrho' - \varrho}{n}$, и расположенный между плоскостями P_1 и P_2, и т. д., получимъ n входящихъ цилиндровъ усѣченнаго конуса K_1. Сумма V_n объемовъ этихъ цилиндровъ будетъ имѣть предѣлъ, равный объему V усѣченнаго конуса K_1.

10. Объемъ i'аго входящаго кольцеобразнаго цилиндра тѣла L, равный объему прямого кругового цилиндра, высота котораго равна $\frac{\varrho'-\varrho}{n}$, а основаніемъ служитъ сѣченіе двуполаго конуса K плоскостью P_i(n^o 5), будетъ равняться объему i'аго входящаго цилиндра усѣченнаго конуса K_1. Отсюда слѣдуетъ, что сумма объемовъ n входящихъ кольцеобразныхъ цилиндровъ тѣла L будетъ равна суммѣ объемовъ n входящихъ цилиндровъ конуса K_1, т. е.

$$W_n = V_n.$$

Такъ какъ послѣднее равенство имѣетъ мѣсто при всякомъ n, то изъ него вытекаетъ, что

$$\text{пред. } W_n = \text{пред. } V_n,$$

т. е.

$$W = V.$$

Иными словами, объемъ тѣла L (ограниченнаго поверхностью шара, боковою поверхностью описаннаго около него цилиндра и двумя плоскостями P и Q, параллельными плоскости M основанія описаннаго цилиндра и расположенными между плоскостью M и плоскостью N, параллельною M и проходящею черезъ центръ шара) равенъ объему части K_1 двуполаго конуса K, заключенной между плоскостями P и Q.

11. Пусть U будетъ объемъ части даннаго описаннаго цилиндра, заключенной между плоскостями P и Q. Объемъ части шара, заключенной между тѣми же плоскостями, будетъ равенъ разности между объемомъ этой части цилиндра и объемомъ тѣла L, т. е. будетъ равенъ

$$U - W.$$

Возьмемъ, съ другой стороны, тѣло T, ограниченное боковою поверхностью даннаго цилиндра и боковою поверхностью двуполаго конуса K (T можно разсматривать, какъ тѣло, образуемое вращеніемъ — вокругъ перпендикулярнаго къ плоскости M діаметра шара — равнобедреннаго треугольника CDO, вершина O котораго совпадаетъ съ центромъ шара, основаніе CD параллельно и равно діаметру, а высота равна радіусу шара). Объемъ части тѣла T, заключенной между плоскостями P и Q, будетъ равенъ разности между объемомъ части описаннаго цилиндра, заключенной между тѣми же плоскостями, и объемомъ части K_1 двуполаго конуса K, т. е. будетъ равенъ

$$U - V.$$

Замѣчая, что разности $U-W$ и $U-V$, въ силу равенства $W=V$, равны, приходимъ къ заключенію, что объемъ части шара, заключенной между плоскостями P и Q, равенъ объему части тѣла T, заключенной между тѣми же плоскостями.

12. Доказанное предложеніе будетъ справедливо не только въ томъ случаѣ, когда сѣкущія шаръ параллельныя плоскости P и Q расположены по одну сторону параллельной имъ плоскости N, проходящей черезъ центръ шара (предложеніе наше доказано при такомъ предположеніи), но и въ томъ случаѣ, когда плоскость P будетъ совпадать съ плоскостью N, а также тогда, когда плоскость N будетъ расположена между сѣкущими параллельными плоскостями P и Q.

Въ самомъ дѣлѣ, если предположимъ, что плоскость P приближается къ плоскости N такъ, что разстояніе ϱ между ними стремится къ нулю, то при этомъ объемъ части шара, заключенной между плоскостями P и Q, будетъ приближаться къ предѣлу, равному объему части шара, заключенной между плоскостями N и Q (ибо разность между объемомъ этой части шара и объемомъ измѣняющейся части шара, заключенной между плоскостями P и Q, будетъ меньше стремящагося къ нулю объема части описаннаго цилиндра, заключенной между плоскостями N и P); точно такъ же, объемъ части тѣла T, заключенной между плоскостями P и Q, будетъ стремиться къ предѣлу, равному объему части этого тѣла, заключенной между плоскостями N и Q. И такъ какъ значенія упомянутыхъ перемѣнныхъ объемовъ, отвѣчающія одному и тому же значенію ϱ (т. е. одному и тому же положенію плоскости P), равны, то равны и ихъ предѣлы, т. е., иными словами, объемъ части шара, заключенной между плоскостью N и сѣкущею плоскостью Q, равенъ объему части тѣла T, заключенной между тѣми же плоскостями.

Предположимъ, далѣе, что плоскость N расположена между плоскостями P и Q. Замѣчая, 1) что равны объемы—части шара, заключенной между плоскостями N и Q, и части тѣла T, заключенной между тѣми же плоскостями, и, 2) что часть шара и часть тѣла T, заключенныя между плоскостями N и P, также имѣютъ равные объемы,—приходимъ къ заключенію, что объемъ части шара, заключенной между плоскостями P и Q, и объемъ части тѣла T, заключенной между тѣми же плоскостями, равны.

Итакъ, какъ бы ни были расположены двѣ сѣкущія шаръ параллельныя основаніямъ описаннаго цилиндра плоскости P и Q, часть шара и часть тѣла, ограниченнаго боковою поверхностью описаннаго цилиндра и боковою поверхностью двуполаго конуса K, заключенныя между плоскостями P и Q, имѣютъ равные объемы.

13. Если сѣкущая плоскость Q приближается къ плоскости M такъ, что разстояніе δ между ними стремится къ нулю, то объемъ части шара, заключенной между плоскостями P и Q, стремится при этомъ къ предѣлу, равному объему части шара, заключенной между плоскостями P и M (что слѣдуетъ изъ того, что разность между объемомъ части шара, заключенной между плоскостями P и M, и объ-

емомъ части шара, заключенной между плоскостями P и Q,—равная объему части шара, заключенной между плоскостями Q и M,—будетъ меньше стремящагося къ нулю объема части описаннаго цилиндра, заключенной между плоскостями Q и M), объемъ же части тѣла T, заключенной между плоскостями P и Q, стремится къ объему части этого тѣла, заключенной между плоскостями P и M. Отсюда слѣдуетъ, что доказанное въ предыдущемъ n^o предложеніе справедливо и въ томъ случаѣ, когда одна изъ параллельныхъ плоскостей P и Q пересѣкаетъ шаръ, а другая совпадаетъ съ плоскостью одного изъ основаній описаннаго цилиндра и представляетъ плоскость, касательную къ поверхности шара.

Предположивши, наконецъ, что плоскость Q совпадаетъ съ плоскостью M одного основанія, а плоскость P приближается къ плоскости M' другого основанія описаннаго цилиндра, придемъ къ заключенію,—примѣнивши тотъ же пріемъ перехода къ предѣлу,—что объемъ шара равенъ объему тѣла T.

14. Такимъ образомъ, нами доказано слѣдующее предложеніе:

Объемъ шара равенъ объему тѣла T, ограниченнаго боковою поверхностью описаннаго около шара прямого цилиндра и боковою поверхностью двуполаго конуса, вершина котораго совпадаетъ съ центромъ шара, а основаніями служатъ основанія описаннаго цилиндра. Объемъ части шара, заключенной между какими-нибудь двумя плоскостями, перпендикулярными образующимъ описаннаго цилиндра, равенъ объему части вышеупомянутаго тѣла T, заключенной между тѣми же плоскостями*).

---

*) Предложеніе это можетъ быть доказано весьма просто, если, разсматривая часть шара, заключенную между двумя параллельными плоскостями, какъ тѣло вращенія, воспользуемся для вычисленія ея объема извѣстнымъ выраженіемъ $\pi\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$.

Принявъ прямую, проходящую черезъ центръ шара и перпендикулярную къ даннымъ двумъ параллельнымъ плоскостямъ P и Q, ограничивающимъ разсматриваемую часть шара, за ось абсциссъ и центръ шара за начало, и обозначивши черезъ x_2 и x_1 абсциссы точекъ, въ которыхъ плоскости P и Q пересѣкаютъ ось абсциссъ (при чемъ мы будемъ предполагать, что $x_2 > x_1$), найдемъ для объема разсматриваемой части шара выраженіе:

$$\pi\int_{x_1}^{x_2} (R^2 - x^2)dx,$$

или,—такъ какъ $\int_{x_1}^{x_2} (R^2 - x^2)dx = \Big|_{x_1}^{x_2} \left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right) = R^2(x_2 - x_1) - \left(\frac{x_2^3}{3} - \frac{x_1^3}{3}\right)$,—

$$\pi R^2(x_2 - x_1) - \left(\frac{\pi x_2^3}{3} - \frac{\pi x_1^3}{3}\right).$$

Разность $x_2 - x_1$ представляетъ разстояніе между параллельными плоскостями P и Q, и, такимъ образомъ, объемъ заключенной между этими плоскостями части описаннаго около шара цилиндра, основанія котораго парал-

Изъ этого предложенія вытекаетъ, что объемъ шара равенъ объему описаннаго около него цилиндра безъ удвоеннаго объема прямого конуса, основаніемъ котораго служитъ большой кругъ шара, а высота равна радіусу шара,—и, слѣдовательно, равенъ

$$\pi R^2 . 2R - \pi R^2 . \frac{R}{3} . 2,$$

т. е.

$$\frac{4}{3}\pi R^3,$$

гдѣ R—радіусъ шара.

15. Найдемъ выраженіе для объема шарового сегмента. Пусть R будетъ радіусъ шара, H—высота сегмента. Если вообразимъ себѣ тѣло T, ограниченное боковою поверхностью описаннаго около шара цилиндра, основанія котораго параллельны основаніямъ сегмента, и боковою поверхностью двуполаго конуса K, основанія котораго совпадаютъ съ основаніями описаннаго цилиндра, а вершина совпадаетъ съ центромъ шара, то, какъ мы знаемъ, объемъ сегмента будетъ равенъ объему части тѣла T, заключенной между двумя параллельными плоскостями,—плоскостью P основанія сегмента и параллельною ей плоскостью M, касательной къ поверхности шара,—между которыми заключенъ данный сегментъ. Объемъ же части тѣла T, заключенной между плоскостями M и P, будетъ равенъ объему части цилиндра описаннаго около шара, заключенной между этими плоскостями, безъ объема части двуполаго конуса K, заключенной между тѣми же плоскостями.

Такимъ образомъ:

1. Если высота сегмента $H < R$, объемъ сегмента будетъ равенъ объему $\pi R^2 H$ части цилиндра, заключенной между плоскостями M и P, безъ объема

$$\left[\pi R^2 . \frac{R}{3} - \pi (R-H)^2 . \frac{R-H}{3}\right]$$

части двуполаго конуса K, заключенной между тѣми же плоскостями, т. е. будетъ равенъ

$$\pi R^2 H - \frac{\pi}{3}(3R^2 H - 3RH^2 + H^3),$$

или

$$\pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right).$$

лельны плоскостямъ P и Q, будетъ равенъ уменьшаемому полученнаго нами выраженія, а объемъ части двуполаго конуса K, заключенной между тѣми же плоскостями P и Q, будетъ равенъ вычитаемому того же выраженія; откуда слѣдуетъ, что объемъ разсматриваемой части шара равняется разности объемовъ вышеупомянутыхъ частей цилиндра и двуполаго конуса, т. е. равняется объему части тѣла T, заключенной между плоскостями P и Q.

2. Если высота сегмента $H > R$, объемъ сегмента будетъ равенъ объему $\pi R^2 H$ части цилиндра, заключенной между плоскостями M и P, безъ объема

$$\left[\pi R^2 \frac{R}{3} + \pi (H-R)^2 \frac{H-R}{3}\right]$$

части двуполаго конуса K, заключенной между тѣми же плоскостями, и, слѣдовательно, будетъ равенъ

$$\pi H^2 \left(R - \frac{H}{3}\right).$$

Замѣчая, что сегментъ, высота котораго $H = R$, представляетъ полусферу, и объемъ его, равный $\frac{2}{3}\pi R^3$, равенъ $\pi R^2 \left(R - \frac{R}{3}\right)$, или $\pi H^2 \left(R - \frac{H}{3}\right)$, приходимъ къ заключенію, что объемъ всякаго шарового сегмента, какова бы ни была его высота H, равняется

$$\pi H^2 \left(R - \frac{H}{3}\right).$$

16. Найдемъ, въ заключеніе, выраженіе для объема шарового слоя.

Пусть R будетъ радіусъ шара, H — высота слоя. Объемъ слоя будетъ равенъ объему части описаннаго около шара цилиндра, основанія котораго параллельны основаніямъ слоя заключенной между плоскостями P и Q основаній слоя, безъ объема части двуполаго конуса K, заключенной между тѣми же плоскостями.

Такимъ образомъ:

1. Если основанія слоя не проходятъ черезъ центръ шара, и центръ не лежитъ между ними, объемъ слоя будетъ равенъ

$$\pi R^2 H - \left(\pi x_1^2 \cdot \frac{x_1}{3} - \pi x_2^2 \cdot \frac{x_2}{3}\right),$$

или

$$\pi\left[R^2 \cdot H - (x_1 - x_2)\left(\frac{x_1^2}{3} + \frac{x_1 x_2}{3} + \frac{x_2^2}{3}\right)\right],$$

гдѣ x_1 и x_2 суть разстоянія плоскостей P и Q отъ центра шара (причемъ x_1 означаетъ разстояніе отъ центра шара той изъ плоскостей P и Q, которая дальше отстоитъ отъ центра).

Такъ какъ $x_1 - x_2 = H$, то полученное выраженіе можно представить въ видѣ

$$\pi H\left[R^2 - \frac{x_1^2}{3} - \frac{x_1 x_2}{3} - \frac{x_2^2}{3}\right],$$

или

$$\pi H\left[\frac{1}{2}R^2-\frac{x_1{}^2}{2}+\frac{1}{2}R^2-\frac{x_2{}^2}{2}+\frac{x_1{}^2}{6}-\frac{x_1x_2}{3}+\frac{x_2{}^2}{6}\right].$$

Если обозначимъ черезъ r_1 и r_2 радіусы основаній слоя и замѣтимъ, что

$$\frac{1}{2}R^2-\frac{x_1{}^2}{2}=\frac{1}{2}r_1{}^2,\quad \frac{1}{2}R^2-\frac{x_2{}^2}{2}=\frac{1}{2}r_2{}^2,$$

$$\frac{x_1{}^2}{6}-\frac{x_1x_2}{3}+\frac{x_2{}^2}{6}=\frac{1}{6}(x_1-x_2)^2=\frac{1}{6}H^2,$$

то получимъ слѣдующее выраженіе для объема слоя:

$$\frac{1}{2}\pi(r_1{}^2+r_2{}^2)H+\frac{1}{6}\pi H^3.$$

2. Если предположимъ, что центръ шара лежитъ между основаніями слоя, то найдемъ для объема слоя выраженіе

$$\pi R^2H-\left(\pi x_1{}^2\frac{x_1}{3}+\pi x_2{}^2\frac{x_2}{3}\right),$$

гдѣ x_1 и x_2 — разстоянія основаній слоя отъ центра шара.

Замѣтивши, что $x_1+x_2=H$, представимъ это выраженіе въ видѣ:

$$\pi H\left(R^2-\frac{x_2{}^2}{3}+\frac{x_1x_2}{3}-\frac{x_2{}^2}{3}\right).$$

Такъ какъ

$$R^2-\frac{x_1{}^2}{3}+\frac{x_1x_2}{3}-\frac{x_2{}^2}{3}=\frac{1}{2}R^2-\frac{x_1{}^2}{2}+\frac{1}{2}R^2-\frac{x_2{}^2}{2}+\frac{x_1{}^2}{6}+\frac{x_1x_2}{3}+\frac{x_2{}^2}{6}$$

$$=\frac{1}{2}r_1{}^2+\frac{1}{2}r_2{}^2+\frac{1}{6}(x_1+x_2)^2=$$

$$=\frac{1}{2}r_1{}^2+\frac{1}{2}r_2{}^2+\frac{1}{6}H^2,$$

гдѣ r_1 и r_2 — радіусы основаній слоя, то полученное выше выраженіе можно представить въ видѣ:

$$\frac{1}{2}\pi(r_1{}^2+r_2{}^2)H+\frac{1}{6}\pi H^3.$$

3. Если, наконецъ, предположимъ, что одно изъ основаній слоя представляетъ большой кругъ, то для объема слоя найдемъ выраженіе:

$$\pi R^2H-\frac{1}{3}\pi H^3.$$

Выраженіе это можно представить въ видѣ

$$\pi H\left(\frac{1}{2}R^2+\frac{1}{2}R^2-\frac{1}{2}H^2+\frac{1}{6}H^2\right),$$

или

$$\pi H\left(\frac{1}{2}R^2+\frac{1}{2}r^2+\frac{1}{6}H^2\right),$$

или, наконецъ,

$$\frac{1}{2}\pi(R^2+r^2)H+\frac{1}{6}\pi H^3,$$

гдѣ R и r — радіусы основаній слоя.

Такимъ образомъ, во всѣхъ случаяхъ для объема шарового слоя получаемъ извѣстное выраженіе

$$\frac{1}{2}\pi(r_1{}^2+r_2{}^2)H+\frac{1}{6}\pi H^3.$$

Реформа преподаванія элементарной математики*).

Т. Бонезенъ.

За послѣднія два десятилѣтія во многихъ странахъ идетъ усиленная работа по реформѣ преподаванія элементарной математики, въ особенности геометріи. Мотивами этой работы служатъ отчасти практическія нужды, отчасти же чисто педагогическія соображенія. Главную цѣль школьнаго преподаванія элементарной математики въ прежнее время составляло развитіе логическихъ способностей: дедуктивной формѣ преподаванія придавали большее значеніе, чѣмъ содержанію теоремъ; теперь же мало-по-малу перевѣсъ получаетъ практическое примѣненіе математики. Съ каждымъ годомъ возрастаетъ число тѣхъ учащихся средней школы, которые намѣрены посвятить себя техническимъ профессіямъ, для которыхъ поэтому математика составляетъ необходимое орудіе. Вотъ почему преподаваніе должно быть организовано такимъ образомъ, чтобы оно давало также практическія знанія. Недостаточно, чтобы учащійся имѣлъ ясное понятіе о математическихъ теоріяхъ; отъ него требуется также умѣнье примѣнять ихъ къ рѣшенію практическихъ вопросовъ.

Съ точки зрѣнія чисто педагогической вопросъ постоянно ставится такимъ образомъ: какимъ путемъ вѣрнѣе достигается цѣль преподава-

---

*) Rivista di Scienza. I, 4. Печатая эту статью, мы имѣемъ только въ виду ознакомленіе съ тѣми тенденціями, которыя здѣсь охарактеризованы.

Ред.

нія? Сторонники реформы въ своей критикѣ традиціоннаго преподаванія ссылаются на практическія цѣли; школа стремится развить логическія способности съ помощью формальнаго мышленія; однако же, врядъ ли мы достигаемъ этой цѣли, лишая математику ея существеннаго содержанія и пренебрегая практическими ея приложеніями, которыя могутъ возбудить интересъ учащагося; врядъ ли полезно вмѣсто этого учить его доказывать рядъ теоремъ, которыя представляются ему странными и даже ненужными. Такъ какъ ученикъ ничего не можетъ возразить противъ разсужденій преподавателя, то ему приходится допускать справедливость теоремъ безъ пониманія ихъ истиннаго значенія.

Изученіе элементарныхъ курсовъ различныхъ странъ не даетъ полнаго представленія о преподаваніи математики: этимъ путемъ можно лишь составить себѣ понятіе о руководящей идеѣ системы. Не легко также опредѣлить съ вышеизложенной точки зрѣнія, какія страны находятся въ болѣе трудномъ положеніи: тѣ ли, въ которыхъ въ томъ или другомъ видѣ сохранилась система Евклида, или же тѣ, которыя обходятъ постулаты и аксіомы, предпочитая строить геометрію по чутью. Но если вѣрить французской поговоркѣ: „всякій знаетъ, гдѣ у него жметъ башмакъ“, то нужно полагать, что недостатки традиціонной системы съ особенной силой даютъ себя чувствовать въ Англіи: эта страна есть очагъ движенія въ пользу реформы; отсюда исходятъ наиболѣе сильныя нападки на преподаваніе по Евклиду.

Инженеръ Перри (I. Perry) первый поднялъ обсужденіе этого вопроса. Нужно изучить его различныя полемическія статьи*), чтобы понять, съ какимъ пыломъ и энергіей онъ сводитъ къ нулю педагогическое значеніе Евклидовой геометріи; взамѣнъ ея онъ предлагаетъ свои собственные методы; читатель вмѣстѣ съ тѣмъ убѣдится, что работа Перри уже дала результаты, что его взгляды нашли себѣ множество весьма компетентныхъ сторонниковъ (British Association). Въ настоящее время появилось довольно внушительное число элементарныхъ курсовъ, въ основу которыхъ легли принципы Перри. Каталоги англійскихъ книгоиздательствъ пестрятъ учебниками „практической математики“, начало которымъ положилъ тотъ же Перри своими курсами для рабочихъ**). Мы рекомендуемъ читателю ознакомиться съ этими элементарными курсами; онъ увидитъ тогда, какъ хорошо англичане умѣютъ разработать учебный методъ, которымъ долженъ руководиться преподаватель.

Существенныя черты программы Перри заключаются въ слѣдующемъ: преподаватель геометріи основывается на опытахъ и измѣреніяхъ, съ помощью которыхъ учащіеся пріобрѣтаютъ свѣдѣнія изъ геометріи такимъ же образомъ, какимъ это достигается опытами при преподаваніи физики. Однако же, еще при прохожденіи начальнаго курса учащіеся должны усвоить нѣкоторыя идеи дедуктивнаго характера. Производство

*) I. Perry—Englands neglect of Science—British Association. Meeting at Glasgow, 1901. Discussion on the teaching of Mathematics. Ed. by I. Perry. London, 1901.

**) I. Perry—Practical Mathematics. Lessons delivered to working men. London.

измѣреній продолжается въ теченіе всего курса геометріи; отчасти пособіемъ служитъ бумага въ клѣткахъ. Такимъ образомъ, ариѳметика уже съ самаго начала сливается съ геометріей. У Перри нѣтъ вовсе чистой геометріи. Съ другой стороны, графическій методъ широко примѣняется при преподаваніи ариѳметики и алгебры: именно этимъ способомъ вводится понятіе о функціи. Этимъ же достигается совершенное сліяніе математическихъ дисциплинъ.

Противники реформы возразятъ, быть можетъ, противъ вышеизложеннаго метода, что такимъ путемъ математика теряетъ свое значеніе, какъ орудіе интеллектуальнаго воспитанія, что для развитія мышленія нѣтъ лучшаго средства, чѣмъ Евклидъ. Въ отвѣтъ на это возраженіе Перри и его сторонники стараются показать, что они стремятся развивать мыслительныя способности учащагося, пользуясь тѣми же средствами, какъ и сама жизнь; они стараются развивать здравый смыслъ, избѣгая всякихъ схоластическихъ методовъ.

Сліяніе ариѳметики съ геометріей и, въ особенности, достигаемое такимъ путемъ введеніе общихъ идей нашли себѣ въ Германіи энергичнаго апостола въ лицѣ Феликса Клейна (въ Гёттингенѣ). Въ теченіе зимняго семестра 1904—5 акад. года Клейнъ прочелъ курсъ о преподаваніи математики (курсъ этотъ недавно началъ печататься*). Помимо изложенія своихъ собственныхъ проектовъ реформы, Клейнъ здѣсь знакомитъ насъ съ различными обстоятельствами, имѣющими отношеніе къ данному вопросу какъ въ Германіи, такъ и въ другихъ странахъ; словомъ, эта работа представляетъ собою превосходное обозрѣніе всѣхъ вопросовъ, касающихся преподаванія математики. Въ нѣмецкихъ школахъ первую ступень въ преподаваніи геометріи составляетъ пропедевтическій курсъ, гдѣ особенное вниманіе удѣляется развитію интуиціи учащихся. Однако же, по моему мнѣнію, англійскіе курсы „практической математики“ даютъ учащимся болѣе богатый запасъ геометрическихъ опытовъ. Вотъ почему Клейнъ подчеркиваетъ необходимость непосредственныхъ измѣреній на открытомъ воздухѣ, настаивая, съ другой стороны, на полномъ сліяніи геометріи съ ариѳметикой.

Образецъ для своей реформы Германія можетъ найти не только въ Англіи, но еще и во Франціи, гдѣ новые „Учебные планы 1902 г.“ значительно видоизмѣнили преподаваніе математики. Чтобы составить себѣ понятіе объ этихъ планахъ, лучше всего изучить новые учебники**), гдѣ уже въ самомъ началѣ вводится понятіе о функціи. Реформа преподаванія геометріи здѣсь также находится на пути къ осуществленію; это видно, напримѣръ, по анкетѣ, предложенной въ недавно вышедшемъ первомъ выпускѣ новаго періодическаго изданія „Revue de l'enseignement des sciences“. Просматривая геометрію Бореля***), мы най-

*) Klein u. Schumacher—Der Mathematische Unterricht an den höheren Schulen. I. Leipzig, 1907.

**) Напр. Emile Borel—Algèbre, premier et second cycle. Paris, 1903.

***) Emile Borel—Géométrie. Premier et second cycle. Paris, 1905. См. также: A. Grevy—Questions pédagogiques. L'enseignement secondaire.

демъ, что усилія автора направлены въ ту же сторону, что и Перри. Но хотя Борель и желаетъ оставить традиціонный путь, все же, какъ мнѣ кажется, онъ не столько напираетъ на непосредственное измѣреніе, т. е., такъ сказать, на экспериментальную геометрію, сколько стремится къ упрощенію геометрическихъ доказательствъ, широко пользуясь понятіемъ движенія. Борель пользуется движеніями фигуръ не только для доказательства равенства ихъ; поступательныя и вращательныя движенія въ качествѣ способовъ доказательства лежатъ въ основаніи всей его системы; коренная роль этихъ операцій основана на томъ, что нѣкоторыя присущія имъ свойства разсматриваются, какъ очевидныя, что даетъ возможность упростить традиціонныя доказательства. Такое направленіе реформы представляется мнѣ не столь благопріятнымъ: этотъ методъ не даетъ учащимся ни положительныхъ опытовъ, ни логическаго объясненія истины справедливости теоремъ. Здѣсь, по моему мнѣнію, заключается центральный пунктъ вопроса. Важно, чтобы учащійся въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ понималъ, имѣетъ ли онъ дѣло съ опытнымъ фактомъ, или же съ логической дедукціей. Практика показала, что замаскированное смѣшеніе разсужденій съ очевидными явленіями ведетъ къ путаницѣ и можетъ отразиться на моральной сторонѣ преподаванія (понимая этотъ терминъ въ томъ смыслѣ, какой придаетъ ему I. Tannery въ своей превосходной статьѣ въ I книгѣ „Rivista di Scienza“ *). Въ противоположность Перри и Клейну, Борель до нѣкоторой степени является сторонникомъ чистой геометріи, и въ этомъ отношеніи я раздѣляю его взгляды.

Въ то время, какъ въ Англіи, Германіи и Франціи сторонники реформы, отказываясь отъ строгой точности въ преподаваніи математики, стремятся развить въ учащихся практическое пониманіе и научить ихъ еще въ средней школѣ элементамъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія,—движеніе въ Италіи носитъ другой характеръ. Въ основѣ преподаванія математики въ итальянскихъ лицеяхъ лежитъ тщательно разработанный курсъ элементарной геометріи. Согласно учебнымъ планамъ, при прохожденіи геометріи нужно придерживаться Евклида, если не текстуально, то, по меньшей мѣрѣ, въ смыслѣ точности дедуктивной системы **). На урокѣ геометріи въ итальянскомъ лицеѣ объясненіе ведется на языкѣ, который можно назвать классическимъ: каждое слово имѣетъ значеніе, каждая мелочь доказывается; строя какую-либо точку, всякій разъ доказываютъ существованіе ея, исходя изъ установленныхъ положеній различныхъ авторовъ. Однако же, какъ извѣстно, множество итальянскихъ геометровъ обогатило науку глубокомысленными изысканіями въ области основаній геометріи; результаты, полученные ими, побудили ихъ стремиться къ обновленію системы элементарнаго преподаванія. Въ такомъ духѣ и написаны „Элементы геометріи“ (Elementi di geometria) Веронезе (Veronese), Инграми (Ingrami), Энрикеса и Амальди. Эти три работы всѣ имѣютъ большую цѣнность, но не всѣ онѣ являются одинаково подходящими въ

*) I. Tannery—Questions pédagogiques. L'enseignement secondaire.

**) Elementi di Geometria, Sannia, D'Ovidio, Faifofer, De Paolis.

цѣляхъ преподаванія. Я отдаю предпочтеніе „Элементамъ“ Энрикеса и Амальди, потому что эта книга совмѣщаетъ въ себѣ достоинства точности изложенія и рѣдкаго педагогическаго искусства. Мнѣ кажется, что эта книга является одной изъ наиболѣе замѣчательныхъ среди всѣхъ элементарныхъ курсовъ.

Несмотря на эти усилія, которыя прямо или косвенно несомнѣнно окажутъ вліяніе на преподаваніе въ Италіи и внѣ ея, все же противоположное теченіе, которое я изобразилъ выше, тоже начинаетъ проявляться среди итальянцевъ; несомнѣнно, что оно и здѣсь повлечетъ за собою реформу преподаванія.

Здѣсь, какъ и вездѣ, трудность заключается въ рѣшеніи вопроса, въ какой степени слѣдуетъ сохранить старые методы и теоремы, и въ какой степени ихъ слѣдуетъ замѣнить новыми. Для рѣшенія этого вопроса необходимо выяснить, какова сущность различныхъ методовъ, старыхъ и новыхъ, и каковы преимущества, которыя они доставляютъ учащимся*). Сравнительное разсмотрѣніе принциповъ, лежащихъ въ основаніи различныхъ педагогическихъ системъ, и привело автора этихъ строкъ къ составленію нѣкоторой средней по своему характеру системы, которую онъ развилъ въ курсахъ элементарной геометріи**).

Измѣренія и опыты могутъ намъ дать основныя предложенія геометріи, которыя представятся такимъ образомъ въ видѣ опытныхъ положеній, а не какъ постулаты, которые приходится принимать безъ доказательства. Но и въ послѣдующемъ изложеніи теоремы предварительно составляютъ предметъ экспериментальнаго изслѣдованія, и лишь затѣмъ учащійся переходитъ къ ихъ математическому доказательству. При такомъ совмѣщеніи обоихъ методовъ, мы, съ одной стороны, благодаря первому методу, достигнемъ того, что учащійся дѣйствительно усвоитъ факты геометріи, а съ другой стороны, благодаря второму методу, онъ получитъ ясное представленіе о томъ, какъ должно вести математическое доказательство. Такимъ образомъ, въ моей книгѣ сливаются оба педагогическихъ теченія, какъ англійское, такъ и итальянское. Въ Даніи эта книга знаменуетъ реакцію противъ того метода, который представленъ весьма извѣстной геометріей Юліуса Петерсена: эта послѣдняя въ теченіе многихъ лѣтъ была у насъ основнымъ учебникомъ; я бы охарактеризовалъ его, какъ нѣчто среднее между Лежандромъ и Борелемъ. Лишь во второй***) моей книгѣ алгебра сливается съ геометріей въ графическомъ представленіи функціи, какъ это указывается въ новыхъ учебныхъ планахъ Даніи. Новое движеніе осталось безъ вліянія на эти планы: оно сказалось въ требованіи примѣнять прямоугольныя координаты во всевозможныхъ отрасляхъ преподаванія; кромѣ того, въ программы введены элементы дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія,—главнымъ образомъ, на научномъ отдѣленіи.

---

*) T. Bonnesen—Geometriske Betragtninger. Nyt Tidsskrift for Matematik, 1906. Kôbenhavon.

**) T. Bonnesen—Geometri for Mellemskolen. 1904. Kôbenhavn.

***) T. Bonnesen—Matematik for Gymnasiet etc, 1907. Kôbenhavn.

Нѣкоторыя теоремы о нечетныхъ совершенныхъ числахъ.

А. Турчанинова.

1) Произведенiе двухъ взаимно-простыхъ нечетныхъ совершенныхъ чиселъ никогда не можетъ быть совершеннымъ.

Если M и N суть числа взаимно-простыя, то

$$S(MN) = S(M) \,.\, S(N)\,{}^{*});$$

если же эти числа совершенныя, то

$$S(M) = 2M \quad \text{и} \quad S(N) = 2N,$$

такъ что мы получимъ:

$$S(MN) = 4MN > 2MN,$$

т. е. MN никогда не будетъ совершеннымъ.

2) Если нечетное число $a^{2\alpha-1} b^{2\beta} c^{2\gamma} \ldots l^{2\lambda}$ таково, что числа $b, c, \ldots, l$ суть первообразные корни модуля a, то число это не можетъ быть совершеннымъ.

Имѣемъ:

$$2a^{2\alpha-1} b^{2\beta} c^{2\gamma} \ldots l^{2\lambda} = \frac{a^{2\alpha}-1}{a-1} \cdot \frac{b^{2\beta+1}-1}{b-1} \cdots \frac{l^{2\lambda+1}-1}{l-1}.$$

Отсюда ясно, что удовлетворится одно изъ сравненiй

$$b^{2\beta+1} \equiv 1; \quad c^{2\gamma+1} \equiv 1; \ldots \; l^{2\lambda+1} \equiv 1 \text{ (мод. } a).$$

А такъ-какъ всѣ числа $b, c, \ldots, l$ суть первообразные корни модуля a, то это равносильно тому, что одно изъ чиселъ $2\beta+1, 2\gamma+1 \ldots, 2\lambda+1$ кратно $a-1$, что невозможно, ибо $a-1$ есть число четное.

3) Если нечетное число $a^{2\alpha-1} b^{2\beta} c^{2\gamma} \ldots l^{2\lambda}$ таково, что всѣ числа $b, c, \ldots, l$ одновременно неквадратичные вычеты модуля a, то это число не можетъ быть совершеннымъ.

Имѣемъ:

$$2a^{2\alpha-1} b^{2\beta} c^{2\gamma} \ldots l^{2\lambda} = \frac{a^{2\alpha}-1}{a-1} \cdot \frac{b^{2\beta+1}-1}{b-1} \cdot \frac{c^{2\gamma+1}-1}{c-1} \cdots \frac{l^{2\lambda+1}-1}{l-1}.$$

Отсюда видно, что необходимо должно имѣть мѣсто одно изъ сравненiй:

$$b^{2\beta+2} \equiv b \text{ (мод. } a); \quad c^{2\gamma+2} \equiv c \text{ (мод. } a) \ldots; \; l^{2\lambda+2} \equiv l \text{ (мод. } a),$$

т. е. одно изъ чиселъ $b, c, \ldots l$ непремѣнно должно оказаться квадратичнымъ вычетомъ по модулю a.

---

*) См. обозначенiя, принятыя въ предыдущей статьѣ „Вѣстника“ № 461.

4) Если нечетное число $a^{2\alpha-1} b^{2\beta} c^{2\gamma} \ldots l^{2\lambda}$ таково, что a является неквадратичнымъ вычетомъ каждаго изъ чиселъ $b, c, \ldots, l$, то это число не можетъ быть совершеннымъ.

Въ самомъ дѣлѣ, по предыдущей теоремѣ, по крайней мѣрѣ, одно изъ чиселъ $b, c, \ldots l$ явится квадратичнымъ вычетомъ a, т. е. будетъ

$$\left(\frac{b}{a}\right)=1. \text{ Но } \left(\frac{b}{a}\right)=(-1)^{\frac{b-1}{2}\cdot\frac{a-1}{2}}\left(\frac{a}{b}\right).$$

Съ другой стороны, a есть простое число вида $4n+1$; значитъ, $\frac{a-1}{2}$ есть число четное и

$$\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{b}{a}\right)=1.$$

Итакъ, a явится квадратичнымъ вычетомъ, по крайней мѣрѣ, одного изъ чиселъ $b, c, \ldots, l$.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Комета Энке-Баклундъ. Согласно предвычисленіямъ, комета Энке-Баклундъ должна была появиться въ текущемъ году. И дѣйствительно, проф. Вольфъ открылъ комету, которую онъ склоненъ былъ признать кометой Энке. Мы приводимъ по этому предмету рефератъ г-жи Корольковой-Дмитріевой, помѣщенный въ апрѣльской книжкѣ „Извѣстій Русскаго Астрономическаго общества“.

Уже первое наблюденіе, произведенное профессоромъ Вольфомъ въ Гейдельбергѣ надъ кометой 1908а, зародило подозрѣніе въ тождественности этого объекта съ кометой Энке: такъ велики были поправки эфемериды Е. Корольковой и М. Каменскаго.

Дальнѣйшія наблюденія Вольфа, опубликованныя въ Astr. N., № 4229, еще болѣе усилили это подозрѣніе, такъ какъ движеніе кометы по склоненію совершенно не согласовалось съ тѣмъ, которое дано въ эфемеридѣ, что хорошо видно изъ слѣдующихъ чиселъ, выражающихъ поправку эфемериды по прямому восхожденію и склоненію для дней наблюденія:

	1907 Дек. 25	1908 Янв. 2	Янв. 13	Янв. 14	Янв, 15	Янв. 18	Янв. 19
$\triangle\alpha$	$+34'.5$	$+35'.2$	$+47'.0$	$+47'.2$	$+47'.0$	$+45'.3$	$+44'.3$
$\triangle\delta$	-24	-24	-4.8	-3.6	-2.4	$+0.5$	$+1.4$

Послѣ 19 января комета не наблюдалась вовсе.

Для того, чтобы рѣшить вопросъ, отъ какихъ причинъ могло произойти подобное разногласіе, и чѣмъ оно можетъ быть объяснено, были предприняты изслѣдованія О. Баклундомъ и М. Каменскимъ, съ одной стороны, и M. Ebell (въ Килѣ), съ другой.

Результаты этихъ изслѣдованій опубликованы въ Astr. N., № 4241, и я имѣю въ виду изложить здѣсь главнѣйшіе выводы, къ которымъ они пришли.

Основная система элементовъ, положенная въ вычисленіе нашей эфемериды*), а также и самая эфемерида кометы, оказались совершенно вѣрными. Но, благодаря тому обстоятельству, что во время своего оборота 1901—1904 комета подходила весьма близко къ Юпитеру (а именно, въ серединѣ мая 1903 года на разстояніе, меньшее единицы), могло возникнуть подозрѣніе, что не принятыя во время этого оборота во вниманіе возмущенія отъ Юпитера второго порядка составляютъ главную причину вышеуказанныхъ уклоненій.

Однако, вычисленіе этихъ возмущеній второго порядка, произведенное М. Каменскимъ и проконтролированное О. Баклундомъ, показало, что они не особенно велики и ни въ какомъ случаѣ не могутъ объяснить наблюденныя разногласія.

Въ самомъ дѣлѣ, вліяніе ихъ на величину прямого восхожденія и склоненія эфемериды будетъ слѣдующее:

	1908 Янв. 3	Янв. 11	Янв. 19
$\triangle\alpha$	$+0'49''.25$	$+0'40''.31$	$+0'27''.50$
$\triangle\delta$	$-2\ 24\ .75$	$-2\ 21\ .69$	$-2\ 21\ .65$.

Съ другой стороны, величины дифференціальныхъ коэффиціентовъ элементовъ кометы за все время наблюденій отъ 25 дек. 1907 до 19 янв 1908 почти не измѣняются, какъ въ прямомъ восхожденіи, такъ и въ склоненіи.

Такъ, напримѣръ, величины дифференціальныхъ коэффиціентовъ по склоненію для 3 и 19 января суть:

1908	$\frac{d\delta}{dM}$	$\frac{d\delta}{d\pi}$	$\frac{d\delta}{d\Omega}$	$\frac{d\delta}{di}$	$\frac{d\delta}{d\varphi}$	$\frac{d\delta}{d\mu}$
Янв. 3	$+0.14$	$+0.50$	-0.14	$+0.48$	$+0.57$	-29.87
Янв. 19	$+0.14$	$+0.44$	-0.12	$+0.46$	$+0.52$	-26.43

Если мы теперь примемъ во вниманіе, что возможное измѣненіе ускоренія средняго суточнаго движенія кометы не можетъ произвести замѣтнаго улучшенія согласія наблюденій съ вычисленіями, то необходимо придемъ къ тому несомнѣнному выводу, что *никакими возможными поправками основной системы элементовъ 22 февр. 1908 года нельзя получить согласія между вычисленными и наблюденными мѣстами кометы.*

На основаніи этого вывода О. Баклундъ заключаетъ, что возможно сдѣлать лишь два предположенія:

1) Свѣтило, наблюденное Вольфомъ съ 25 дек. по 19 января, не было кометой Энке.

2) Комета Энке раздѣлилась, и та часть ея, которая наблюдалась, двигалась вслѣдствіе этого разложенія по пути, отличіе котораго отъ пути кометы можетъ быть извѣстнымъ образомъ охарактеризовано указанными величинами $\triangle\alpha$ и $\triangle\delta$.

Однако, слѣдуетъ замѣтить, что этотъ весьма интересный вопросъ о судьбѣ кометы можетъ быть рѣшенъ лишь послѣ ея прохожденія черезъ перигелій (въ іюнѣ и іюлѣ), когда комета, вслѣдствіе своей близости къ землѣ, легко можетъ быть найдена въ южномъ полушаріи.

Переходя теперь къ работамъ Ebell, замѣтимъ прежде всего, что попытка его согласовать эфемериду кометы съ наблюденіями при помощи измѣненія времени прохожденія кометы черезъ перигелій (что соотвѣтствуетъ введенію эмпирической поправки въ среднюю аномалію) не привела ни къ какимъ результатамъ.

Поэтому онъ пытался опредѣлить на основаніи наблюденій 1908 янв. 2, 13, 19 параболическую орбиту этого свѣтила.

Однако, наблюденіе 25 дек. 1907 года представляетъ вышенаписанную систему элементовъ очень плохо.

---

*) См. Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg, Sept. 1907.

Выше мы указали, что возмущенія второго порядка отъ Юпитера за время 1901—1904 не могли оказать большого вліянія на положеніе кометы въ декабрѣ и январѣ.

Тѣмъ не менѣе, вслѣдствіе близости кометы къ землѣ въ іюнѣ и іюлѣ, а также значительной величины дифференціальныхъ коэффиціентовъ элементовъ кометы, получающіяся отъ этого поправки первой эфемериды кометы могли достигнуть замѣтной величины.

На этомъ основаніи М. Каменскій перевычислилъ вновь эфемериду кометы для ея положенія послѣ перигелія (Astr. N., № 4241), но и эта эфемерида можетъ быть ошибочна отъ 2^m до 3^m въ прямомъ восхожденіи и отъ $10'$ до $12'$ въ склоненіи, такъ какъ вслѣдствіе не принятыхъ во вниманіе возмущеній и измѣненія ускоренія въ среднемъ суточномъ движеніи въ средней аномаліи возможна ошибка отъ $2'$ до $3'$.

РЕЦЕНЗІИ.

А. А. Петровскій. *Научныя основанія безпроволочной телеграфіи.* 1907. Ц. 4 р.

Этотъ серьезный, обстоятельный трудъ посвященъ авторомъ „памяти дорогого учителя, изобрѣтателя безпроволочнаго телеграфа, Александра Степановича Попова". О значеніи книги авторъ говоритъ въ предисловіи: „Книга носитъ теоретическій характеръ по преимуществу. Однако, въ нѣкоторыхъ частяхъ пришлось углубиться въ практическія детали,—напр., въ главѣ III подробно разсмотрѣна работа индукціонной спирали, прерыватели и умформеры. Произошло это потому, что соотвѣтствующихъ данныхъ въ литературѣ не доставало, а недостатокъ ихъ сильно ощущался практикой радіотелеграфированія. Большая часть данныхъ получена мною изъ собственныхъ наблюденій, произведенныхъ въ радіотелеграфной лабораторіи Миннаго Офицерскаго Класса". Со своей стороны я могу къ этому прибавить, что, хотя намѣреніе автора было „дать возможность ознакомиться съ вопросомъ возможно бо́льшему кругу читателей", для чего онъ въ своемъ сочиненіи совершенно избѣгаетъ употребленія математическихъ формулъ, но, по моему мнѣнію, книга А. А. Петровскаго совершенно недоступна для лицъ, не усвоившихъ себѣ основательно, по крайней мѣрѣ, элементарной математики, а также и физики въ объемѣ программы среднихъ учебныхъ заведеній; отсутствіе же формулъ только затрудняетъ чтеніе и удлиняетъ изложеніе. Поэтому я совѣтую читателю, который пожелалъ бы основательно изучить разсматриваемую объемистую книгу, прежде всего, для облегченія себѣ этого значительнаго труда, переписать и вставить въ соотвѣтствующія мѣста текста формулы, приведенныя отдѣльно въ концѣ сочиненія. Кромѣ этого замѣчанія можно еще сдѣлать упрекъ автору въ нѣкоторой растянутости изложенія; можно было бы съ пользою для дѣла коечто посократить. Такъ, напр., для объясненія простого понятія м о щ н о с т ь автору потребовалась почти цѣлая страница; затѣмъ индукція размыканія описывается столь же подробно, какъ и индукція замыканія, когда можно было не повторять почти то же самое, а ограничиться нѣсколькими словами; наконецъ, надо упомянуть, что чертежи и рисунки сдѣланы въ слишкомъ большихъ размѣрахъ. Вотъ тѣ незначительныя погрѣшности, которыя бросились мнѣ въ глаза, и на которыя я обращаю вниманіе автора, въ отвѣтъ на высказанное имъ въ предисловіи пожеланіе объ указаніи недостатковъ его книги. Въ общемъ же своемъ объемѣ разсматриваемая книга заключаетъ много чрезвычайно интересныхъ и отлично изложенныхъ отдѣловъ. Слѣдуетъ въ этомъ отношеніи особенно отмѣтить главы: „Аналогія между электрическими и магнитными явленіями и явленіями упругости", „Опасность, представляемая высокимъ напряженіемъ", „Электромагнитная инерція, или самоиндукція". Очень хорошо, между прочимъ, объяснены на примѣрахъ значенія единицъ для измѣренія электрическаго тока, вольтъ, кулонъ, джуль, амперъ, ваттъ. Разсматриваемая въ общихъ чертахъ книга представляетъ во всякомъ случаѣ выдающееся явленіе въ русской научной литературѣ за послѣдніе годы.

Проф. Н. Гезехусъ.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 37 (5 сер.). Показать, что предѣломъ, къ которому стремится выраженіе

$$\left(\frac{1}{\sin^n\varphi}-\frac{1}{\varphi^n}\right)\sin^{n-2}\frac{\varphi}{2},$$

гдѣ n—цѣлое положительное число, служитъ, когда φ стремится къ предѣлу, равному нулю, правильная дробь. Напримѣръ, при $n=2$ дробь эта равна $\frac{1}{16}$.

Е. Григорьевъ (Казань).

№ 38 (5 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$\frac{tg\,x}{ctg\,y}+\frac{tg\,y}{ctg\,x}=2a,\quad (sec\,x+sec\,y)(cs\,y-cs\,x)=b\,cs\,x\,cs\,y.$$

И. Коровинъ (Петербургъ).

№ 39 (5 сер.). Доказать, что неопредѣленное уравненіе

$$5x^2-11y=7$$

не можетъ быть рѣшено въ цѣлыхъ числахъ.

Я. Назаревскій (Харьковъ).

№ 40 (5 сер.). Построить трапецію, зная положеніе и величину одного изъ основаній, положеніе точки встрѣчи діагоналей и разстояніе отъ этой точки до одной изъ непараллельныхъ сторонъ.

(Заимств.).

№ 41 (5 сер.). Данъ треугольникъ ABC. На сторонѣ BC взята нѣкоторая точка P и на продолженіи AC взята точка Q такъ, что

$$\frac{PB}{PC}=\frac{QA}{AC}.$$

Найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія прямыхъ AP и BQ.

(Заимств.).

№ 42 (5 сер.). Въ какомъ треугольникѣ углы A, B, C удовлетворяютъ 1) соотношенію

$$\sin A=\frac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}?$$

2) соотношенію

$$\sin C=\cos A+\cos B\,?$$

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 867 (4 сер.) *Найти сумму* n *членовъ ряда*

$$a^{\lg x} + 2a^{\lg x^2} + 3a^{\lg x^3} + \cdots + n\,a^{\lg x^n} + \cdots$$

Замѣчая, что $a^{lg\,x^k} = a^{k\,lg\,x}$, и называя искомую сумму n членовъ ряда черезъ S, имѣемъ $S - S\,a^{lg\,x} = a^{lg\,x} + 2a^{2\,lg\,x} + 3a^{3\,lg\,x} + \cdots + n\,a^{n\,lg\,x} - a^{2\,lg\,x} - 2a^{3\,lg\,x} - 3a^{4\,lg\,x} - \cdots - (n-1)\,a^{n\,lg\,x} - n\,a^{(n+1)\,lg\,x} = a^{lg\,x} + a^{2\,lg\,x} + \cdots + a^{n\,lg\,x} - n\,a^{(n+1)\,lg\,x} = \dfrac{a^{lg\,x} - a^{(n+1)\,lg\,x}}{1 - a^{lg\,x}} - n\,a^{(n+1)\,lg\,x}$,

откуда

$$S = \frac{a^{lg\,x} - a^{(n+1)\,lg\,x}}{(1 - a^{lg\,x})^2} - \frac{n\,a^{(n+1)\,lg\,x}}{1 - a^{lg\,x}}.$$

Я. Шатуновскій (Страсбургъ); *С. Розенблатъ* (Кіевъ); *А. Турчаниновъ* (Одесса); *Н. Агрономовъ* (Ревель).

№ 870 (4 сер.). *Твердое тѣло, вѣсомъ въ* p *граммовъ и удѣльнаго вѣса* d_o *при* 0^0, *будучи совершенно погружено въ нѣкоторую жидкость, удѣльный вѣсъ которой при* 0^0 *равенъ* δ_o, *а коэффиціентъ объемнаго расширенія* k, *вѣситъ при температурѣ* t^0 q *граммовъ. Опредѣлить коэффиціентъ объемнаго расширенія испытуемаго твердаго тѣла.*

Назовемъ искомый коэффиціентъ объемнаго расширенія черезъ x. Объемъ твердаго тѣла при температурѣ O^o равенъ $\dfrac{p}{d_o}$, а при температурѣ t^o равенъ $\dfrac{p}{d_o}(1 + xt)$. Такъ какъ удѣльный вѣсъ жидкости при температурѣ t^o есть $\dfrac{\delta_o}{1 + kt}$, то потеря вѣса тѣла при погруженіи въ жидкость, равная, по закону Архимеда, вѣсу вытѣсненной жидкости, выражается формулой $\dfrac{p}{d_o}(1 + xt)\dfrac{\delta_o}{1 + kt}$, а потому

$$q = p - \frac{p}{d_o}(1 + xt)\frac{\delta_o}{1 + kt},$$

откуда

$$x = \frac{(p - q)(1 + kt)d_o - p\delta_o}{p\delta_o t}.$$

Розенблатъ (Кіевъ); *А. Турчаниновъ* (Одесса).

№ 871 (4 сер.). *Сколько членовъ въ суммѣ*

$$a + b + c + \ldots + v + u,$$

если извѣстно, что ея кубъ содержитъ послѣ приведенія въ $4^2/_3$ *раза болѣе членовъ, чѣмъ ея квадратъ?*

Назовемъ число членовъ въ суммѣ $a + b + c + \ldots + v + u$ черезъ x. Многочленъ $(a + b + \ldots + u)^2$ содержитъ послѣ приведенія члены двухъ типовъ: квадраты отдѣльныхъ буквъ $a, b, \ldots, u$ и члены, полученные отъ приведенія двойныхъ произведеній. Такимъ образомъ, называя число сочетаній изъ x элементовъ по k черезъ C_x^k, мы видимъ, что многочленъ $(a+b+\ldots+u)^2$ содержитъ послѣ приведенія

$$x+C_x^2=x+\frac{x(x-1)}{2}=\frac{x(x+1)}{2}$$

членовъ. Многочленъ $(a+b+\ldots+u)^3$ содержитъ члены четырехъ типовъ: кубы отдѣльныхъ буквъ, члены вида a^2b, въ которыхъ двѣ буквы встрѣчаются во всевозможныхъ сочетаніяхъ, и при томъ первая буква съ показателемъ 2, члены вида ab^2, отличающіеся отъ членовъ второго типа лишь перестановкой показателей, и, наконецъ, члены вида abc, въ которыхъ три буквы встрѣчаются во всевозможныхъ сочетаніяхъ. Поэтому число членовъ многочлена $(a+b+\ldots+u)^3$ послѣ приведенія равно

$$x+C_x^2+C_x^2+C_x^3=x+2\cdot\frac{x(x-1)}{2}+\frac{x(x-1)(x-2)}{6}=\frac{x(x+1)(x+2)}{6}.$$

Согласно съ условіемъ,

$$\frac{x(x+1)(x+2)}{6}=4^2/_3\cdot\frac{x(x+1)}{2},$$

откуда, замѣчая, что, по смыслу задачи, множители x и $x+1$ не равны нулю, находимъ:

$$\frac{x+2}{6}=\frac{14}{6},$$

т. е. $x=12$.

Н. Агрономовъ (Ревель); *Н. С.* (Одесса).

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника", подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

Э. Варбургъ. *Учебникъ опытной физики для студентовъ.* Авторизированный перев. съ 9-го нѣм. изд. Л. В. Николаева подъ редакціей проф. Н. Д. Пильчикова. Съ 428 рисунками. Изд. „Сотрудника". Кіевъ. 1908. Цѣна 2 р. 50 к.

Д. Селивановъ. *Безконечныя десятичныя дроби и ирраціональныя числа.* С.-Петербургъ. 1907. Цѣна 20 коп.

А. В. Сиволобовъ. Директоръ Лодзинскаго мануфактурно-промышленнаго училища. *Всемірное тяготѣніе.* Попытка объяснить его причину и сущность. Варшава. 1907.

Дм. Ройтманъ. Преподаватель гимназіи и реальнаго учил. К. Мая, С.-Пб. Учит. Инст. и женскаго Педагог. Инст. *Курсъ космографіи (начальная астрономія).* Изданіе (2-е, исправленное) книжнаго магазина Н. Д. Тяпкина. С.-Петербургъ. 1908. Цѣна 1 р. 10 коп.

(Продолженіе слѣдуетъ).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Обложка
ищется

Обложка
ищется