

Обложка  
щется

Обложка  
щется

## ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

И  
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 496.

**Содержаніе:** Комета Галлея. *К. Граффа.*— Отецъ радія. *Проф. Ф. Содди.* (Окончаніе).— Лекціи по арифметикѣ. *Проф. Ф. Клейна* (Продолженіе).— Задачи №№ 204—209 (5 сер.).— Рѣшенія задачъ №№ 136 и 139 (5 сер.).— Объявленія.

## Комета Галлея.

*К. Граффа.*

Предстоящее въ 1910 году возвращеніе кометы Галлея въ поле зрѣнія земли начинаетъ занимать не только специалистовъ, но и все болѣе широкіе круги. Протекло больше человѣческой жизни съ того момента, какъ ее въ послѣдній разъ видѣлъ глазъ наблюдателя,—и полныхъ 50 лѣтъ съ тѣхъ поръ, какъ на нашемъ звѣздномъ небѣ красовалась по истинѣ большая и яркая комета—блестящая осенняя комета 1858 года, носящая имя астронома Донати (Donati). Если бы рѣчь шла даже о менѣе замѣчательной звѣздѣ, то и тогда было бы достаточно поводовъ для того, чтобы съ напряженнымъ вниманіемъ слѣдить за ея возвращеніемъ и заблаговременно готовиться къ наблюденіямъ предстоящаго ея появленія. Правда, въ послѣднее время было не мало кометъ, которыя, во время наиболѣе благопріятнаго положенія своего и при ясной погодѣ, были видимы въ теченіе нѣсколькихъ дней и невооруженному глазу; однако, положеніе ихъ въ западной и восточной сторонѣ неба въ нашихъ широтахъ оказывалось въ большинствѣ случаевъ столь мало благопріятнымъ, что отысканіе ихъ возможно было только при помощи звѣздной карты и точнѣйшихъ эфемеридъ; въ большихъ же городахъ для этого, кромѣ того, было еще необходимо пользоваться биноклемъ или подзорной трубой.

Но интересъ возрастаетъ еще болѣе, когда мы узнаемъ, что на этотъ разъ рѣчь идетъ о кометѣ, которая, какъ доказано, въ теченіе свыше тысячи лѣтъ регулярно посѣщала земную орбиту; кромѣ того, эти краткія, въ сравненіи съ приблизительно 75-лѣтнимъ отсутствіемъ, посѣщенія, какъ весьма вѣроятно, можно было уже въ



древности наблюдать такъ же регулярно, какъ извѣстные соединенія и противостоянія планетъ по отношенію къ солнцу. Во избѣжаніе недоразумѣній замѣтимъ тутъ же, что главный интересъ, возбуждаемый кометою Галлея въ исторіи открытій этихъ небесныхъ свѣтилъ, заключается не столько въ ея особенной яркости или въ ея величинѣ, сколько въ замѣчательномъ, правильно-періодическомъ возвращеніи и въ большомъ постоянствѣ ея появленія. Вѣроятно, комета эта до сихъ поръ въ каждое свое появленіе бывала въ теченіе нѣкотораго времени ясно видима и невооруженному глазу и обращала на себя вниманіе даже случайныхъ наблюдателей звѣзднаго неба; но особенно блестящее зрѣлище представляла она для земныхъ наблюдателей только въ совершенно исключительныхъ случаяхъ; и въ такихъ случаяхъ, какъ, на примѣръ, въ 1456 году, событія міровой исторіи, совершенно случайно совпавшія съ появленіемъ кометы, повидимому, содѣйствовали тому, что ея исключительные размѣры стали постепенно приводить въ связь съ важностью современныхъ или грядущихъ событій.

Предстоящее прохожденіе кометы Галлея черезъ перигелій оставалось необыкновенно долго безъ вниманія даже въ научныхъ кругахъ; и только за полтора года до ея возвращенія границы ея прохожденія черезъ перигелій были ближе отмѣчены, такъ что можно уже набросить приблизительную картину предстоящаго появленія кометы-ветерана въ 1910 году.

При прохожденіи кометы черезъ перигелій въ 1835 году удалось, какъ мы увидимъ ниже, предсказать моментъ ближайшаго разстоянія ея отъ солнца съ точностью почти до 1 дня. Счастливейшій вычислитель тогдашней орбиты Понтекуланъ (Pontécoulant) взялъ на себя задачу — приближенно опредѣлить также элементы слѣдующаго возвращенія кометы, принимая во вниманіе вліяніе на ея орбиту возмущающихъ ее большихъ планетъ, и для предстоящаго прохожденія ея черезъ перигелій получилъ дату — 16 мая 1910 года. До самаго послѣдняго времени мы не располагали относительно деталей прохожденія кометы черезъ перигелій и видимости ея въ это время никакими матеріалами, кромѣ данныхъ Понтекулана; только нѣсколько мѣсяцевъ тому назадъ два гринвичскихъ астронома Кромелинъ (Crommelin) и Коуель (Cowell) закончили трудныя и обширныя вычисленія относительно вліянія на орбиту кометы всей совокупности возмущеній, обусловливаемыхъ большими планетами отъ Венеры до Нептуна, и при этомъ пришли къ результату, значительно отличающемуся отъ прежняго; именно, какъ на вѣроятнѣйшій моментъ слѣдующаго прохожденія кометы черезъ перигелій, они указали на 8 апрѣля 1910 года. Ниже мы подробнѣе остановимся на этихъ результатахъ и предвѣщаемыхъ ими условіяхъ видимости этого интереснаго небеснаго свѣтила, хотя эти факты приобретутъ болѣе живой интересъ нѣсколько позже. Уже и теперь, однако, упомянутая работа заслуживаетъ всеобщаго вниманія въ виду содержащейся въ ней исторической части: вычислителямъ удалось къ обнаруженнымъ въ то время семи послѣднимъ появленіямъ звѣзды, слѣдовавшимъ одно за другимъ между 1378 и 1835 г.г., прибавить еще пять, такъ что мы



теперь въ общемъ располагаемъ непрерывнымъ рядомъ въ двѣнадцать установленныхъ прохожденій этой замѣчательной звѣзды черезъ перигелий, начиная съ 989 года. Нѣкоторые же болѣе раннія даты появленія кометы Галлея пытались уже, какъ извѣстно, установить около половины прошедшаго столѣтія Ложье (Logier) въ Парижѣ и Гиндъ (Hind) въ Лондонѣ. Съ высокой степенью достовѣрности это удалось только Ложье по отношенію къ кометѣ 760 года, а въ особенности къ кометѣ 451 г.; благодаря вычисленіямъ Кроммелина и Коуеля теперь доказано, что и вторая изъ этихъ двухъ датъ также несомнѣнно правильна, и что изъ двухъ появленій кометы Галлея въ IX и X столѣтіяхъ, а именно въ 837 г. и въ 912 г., первое вполне согласуется съ системой элементовъ кометы, а второе, въ виду недостатка въ наблюденіяхъ,—только съ нѣкоторымъ приближеніемъ. Если бы и это прохожденіе черезъ перигелий было подтверждено, то мы располагали бы уже приличнымъ числомъ, 15 послѣдовательными появленіями, не считая вовсе болѣе древнихъ датъ, отмѣченныхъ историками, естественно, только въ случаяхъ особеннаго блеска кометы при прохожденіи ея черезъ перигелий.

Прежде, чѣмъ говорить подробнѣе объ отдѣльныхъ появленіяхъ нашей кометы, удостовѣренныхъ исторически или съ помощью вычисленій, мы раньше составимъ таблицу всѣхъ точно установленныхъ и предпола-

№	День прохожденія кометы черезъ перигелий по наблюденіямъ:	По чьимъ указаніямъ:	День прохожденія черезъ перигелий по вычисленіямъ:	Кто вычислилъ:
1	11 г. до Р. Хр. окт. 9. Юл. сч.	Гиндъ	—	—
2	66 по „ янв. 26. „	„	—	—
3	141 „ марта 29. „	„	—	—
4	218 „ апр. 6 „	„	—	—
5	295 „ апр. „	„	—	—
6	373 „ нач. ноября? „	„	—	—
7	451 „ юля 3 „	Ложье	—	—
8	530 „ нач. ноября? „	Гиндъ	—	—
9	608 „ кон. октября? „	„	—	—
10	684 „ окт.? „	„	—	—
11	760 „ юня 11. „	Ложье	юня 15	Кроммелинъ и К.
12	837 „ марта 1. „	Пенгрэ	февраля 25	„
13	912 „ нач. Апрѣля „	Гиндъ	юля 19	„
14	989 „ сент. 12. „	Бурггардъ	октября 9	„
15	1066 „ апр. 1. „	Гиндъ	марта 27	„
16	1145 „ апр. 19. „	„	апрѣля 6	„
17	1222 „ авг. 22. „	Кроммелинъ и К.	сентября 10	„
18	1301 „ окт. 23. „	Гиндъ	октября 26	„
19	1378 „ нояб. 9. „	Ложье	—	—
20	1456 „ юня 8. „	Пенгрэ и Челорія	—	—
21	1531 „ авг. 26. „	Галлей	—	—
22	1607 „ окт. 27. Грег. сч. „	„	октября 27	Леманъ
23	1682 „ сент. 14 „	„	сентября 15	„
24	1759 „ марта 13 „	различные вычислители	марта 13	Розенбергъ
25	1835 „ нояб. 16 „	„	ноября 15	Понтекуланъ
26	1910 „ „ „	„	апрѣля 8	Кроммелинъ и К.



гаемых моментов прохождений нашей кометы через перигелий за послѣднія два тысячелѣтія; эта таблица, основанная на показаніяхъ древнихъ лѣтописцевъ, дастъ намъ наилучшее представленіе о томъ, чего намъ слѣдуетъ ожидать отъ возвращающагося весною 1910 года рѣдкаго гостя. Нижеслѣдующая таблица содержитъ въ 1-омъ ряду произвольную нумерацію прохождений черезъ перигелий, начиная отъ Р. Хр.; во 2-мъ — моменты прохождения кометы черезъ перигелий, установленные наблюденіями, въ 3-мъ — имя наблюдателя. Въ 4-мъ ряду помѣщены времена прохождений кометы черезъ перигелий, теоретически вычисленные на основаніи закона тяготѣнія между массами большихъ планетъ нашей солнечной системы, а въ 5-омъ — имя соотвѣтствующаго вычислителя.

На вычисленіе возмущеній за періодъ до 760 года никто еще не отваживался. Трудная работа едва ли была бы вознаграждена уже потому, что для точнаго опредѣленія орбиты недостаетъ необходимыхъ наблюденій за время великаго переселенія народовъ. Не слѣдуетъ забывать, что до времени Тихо, Кеплера и Ньютона не было еще вообще научнаго и специально астрономическаго интереса къ появленіямъ кометы. Поскольку въ то время вообще рѣшались отнестись критически къ этому замѣчательному и таинственному явленію природы и объяснить его научно, кометы считались тогда за дурныя испаренія земной почвы, въ лучшемъ случаѣ, слѣдовательно, за метеорологическія явленія, — взглядъ, котораго придерживались отъ Аристотеля вплоть до новаго времени. Поэтому основаній къ тому, чтобы слѣдить за движеніями кометъ между неподвижными звѣздами такъ же, какъ за движеніями планетъ, не существовало; поэтому въ болѣе древнихъ лѣтописяхъ, даже объ очень блестящихъ кометахъ мы находимъ только чрезвычайно скудныя сообщенія, касающіяся, большею частью, ихъ доступности наблюденію въ восточной и западной сторонахъ неба, яркости, длины хвоста и тому подобныхъ совершенно общихъ наблюденій. По этимъ даннымъ, казалось бы, можно установить, по крайней мѣрѣ, приблизительное время прохождения кометы черезъ перигелий въ прежнія эпохи, такъ какъ наблюденія показываютъ, что самое интенсивное развитіе какъ яркости кометы, такъ и ея хвоста обыкновенно наступаетъ либо при самомъ прохожденіи черезъ перигелий, либо незадолго до него, либо вскорѣ послѣ него; между тѣмъ, именно въ древнихъ записяхъ въ подобныхъ случаяхъ ошибки на цѣлыя годы не являются чѣмъ-либо необыкновеннымъ; поэтому пользоваться средневѣковыми лѣтописцами слѣдуетъ только съ величайшею осторожностью: научную цѣнность можно придавать только такимъ показаніямъ, точность которыхъ можетъ быть подтверждена либо болѣе подробными свѣдѣніями относительно даты, либо же другими наблюденіями.

Къ счастью, можно сказать, рѣдкія и поразительныя появленія кометы въ то суевѣрное время приводили въ связь со всевозможными событіями на небѣ и на землѣ. Съ одной стороны, наводящее страхъ внезапное появленіе необычной звѣзды ставилось въ опредѣленную связь съ предшествовавшими соединеніями планетъ, или ему приписывалось происхожденіе солнечныхъ и лунныхъ затменій; съ другой



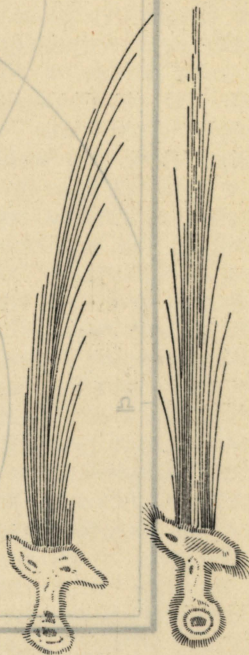
стороны, на комету смотрѣли, какъ на предвѣстницу войны, повальныхъ болѣзней, смерти свѣтскихъ или духовныхъ властителей и т. п. Лѣтописцы имѣли обыкновеніе къ свѣдѣнію о кометѣ приобщать списокъ благопріятныхъ и еще болѣе подробный перечень неблагопріятныхъ міровыхъ событій, виновницей которыхъ они считали комету. Этимъ они, правда, содѣйствовали тому, что съ теченіемъ времени въ народѣ получили распространеніе невѣжественныя правила, въ родѣ слѣдующаго:

„Восемь главныхъ значеній имѣтъ комета, когда она стоитъ на небѣ: вѣтеръ, голодъ, моръ, войну, засуху, землетрясеніе, смѣну и смерть государя“.

Но какъ ни печально само по себѣ это заблужденіе, въ которомъ человѣчество пребывало много столѣтій, для астрономіи кометъ оно оказалось чрезвычайно полезнымъ.

Отъ одного уже сопоставленія столькихъ событій эти древнія записи, отмѣченныя руками не-спеціалистовъ, принимаютъ при критическомъ взглядѣ изслѣдователя осязательныя формы; мало того, вопреки своей совершенно безыскусственной ненаучной формѣ, онѣ могутъ иногда оказаться научными документами неопѣнимаго достоинства, какъ это наилучшимъ образомъ обнаруживается изслѣдованіемъ по этимъ записямъ предыдущихъ появленій кометы Галлея.

Благопріятными и цѣнными дополненіями къ записямъ о кометахъ, сдѣланнымъ въ западныхъ странахъ, могутъ служить многочисленныя сообщенія китайскихъ историковъ; болѣе того, когда рѣчь идетъ о томъ, чтобы установить самый важный астрономическій фактъ — приблизительную орбиту даннаго небеснаго тѣла среди звѣздъ во время его доступности невооруженному глазу, то восточно-азиатскія отмѣтки часто однѣ только и имѣютъ значеніе. Особенно тщательно отмѣчается въ Китаѣ моментъ перваго появленія кометы и моментъ ея исчезновенія на небѣ, такъ что можно съ увѣренностью утверждать, что тамъ



Древнія изображенія кометъ (Zahn, Specula Physico-Mathematico-Historica).

издревле усердно производились наблюденія надъ этими явленіями. Хотя свѣдѣнія относительно видимыхъ орбитъ даны въ этихъ записяхъ въ грубой формѣ, но благодаря тому, что въ нихъ указаны извѣстныя созвѣздія, онѣ пріобрѣтаютъ научную цѣнность; только по отношенію къ физическимъ явленіямъ, въ особенности, къ яркости, формѣ и длинѣ хвоста, онѣ уступаютъ иногда европейскимъ отчетамъ, главнымъ образомъ, потому, что всякія разстоянія на небесной сферѣ весьма



часто выражены въ нихъ не въ угловыхъ единицахъ, а въ линейныхъ мѣрахъ, которыя долго и постоянно мѣнялись. Для опредѣленія орбитъ эти сообщенія восточно-азиатскихъ лѣтописцевъ, какъ выше замѣчено, оказались чрезвычайно полезными и плодотворными по своимъ многочисленнымъ указаніямъ относительно положенія кометы.

Въ добавленіе къ обзору послѣднихъ 26 прохожденій черезъ перигелій кометы Галлея будетъ цѣлесообразно разбраться еще въ нѣкоторыхъ подробностяхъ, касающихся орбиты этого небеснаго тѣла.



Положеніе эллиптической орбиты кометы Галлея относительно планетныхъ орбитъ между землей и Нептуномъ.

Уже по промежуткамъ между послѣдовательными появленіями кометы въблизи солнца можно замѣтить, что комета для совершенія своего длиннаго пути по орбитѣ употребляетъ не всегда одинаковое время. Въ среднемъ оно составляетъ около 77 лѣтъ; однако, встрѣчаются значительныя отклоненія отъ этого періода. Такъ, промежутокъ времени между прохожденіями кометы черезъ перигелій въ 1222 и 1301 годахъ составляетъ 79 лѣтъ и 2 мѣсяца; и нѣсколько короче былъ онъ между 1066 и 1145 г.г., между тѣмъ какъ теперь мы



ожидаемъ возвращенія рѣдкаго гостя послѣ перерыва только въ 74 года и 5 мѣсяцевъ. Изъ этого можно уже усмотрѣть, какъ мало допустимо отождествленіе какой-либо старой кометы съ ожидаемой только на основаніи изученія періода ея обращенія, если не принимать во вниманіе точнаго изслѣдованія силъ, вліяющихъ на ускореніе или на замедленіе ея движенія. Такъ, напримѣръ, прохожденіе кометы черезъ перигелій въ іюлѣ 1223 года, вычисленное въ свое время Гиндомъ почти исключительно на основаніи періода обращенія, въ нашей таблицѣ не отмѣчено, а замѣнено кометой 1222 г.; точно такъ же дата прохожденія черезъ перигелій кометы 912 года, установленная по наблюденіямъ, отличается отъ вычисленной болѣе, чѣмъ на 3 мѣсяца, и, быть можетъ, она вообще къ кометѣ Галлея не относится.

Какъ видно изъ помѣщеннаго выше рисунка, перигелій кометы Галлея лежитъ еще внутри земной орбиты, даже внутри орбиты Венеры, между тѣмъ какъ афелій падаетъ за орбиту Нептуна и отстоитъ отъ солнца вдвое дальше Урана. Разстояніе кометы отъ солнца въ перигеліи составляетъ 0,6, въ афеліи же 35 астрономическихъ единицъ, т. е. около 90 000 000 и 5 000 000 000 *к.м.* Въ то время, какъ у перигелія комета движется чрезвычайно быстро, пробѣгая въ секунду 54 *к.м.*, у афелія на такое же разстояніе она употребляетъ въ 60 разъ болѣе времени, т. е. минуту. Она движется, какъ показано на рисункѣ, по своей орбитѣ по направленію часовой стрѣлки и, слѣдовательно, по направленію, обратному движенію планетъ вокругъ солнца. Благодаря этому обратному направленію движенія при извѣстныхъ благоприятныхъ прохожденіяхъ кометы черезъ перигелій, въ особенности при прохожденіяхъ падающихъ на мѣсяцы іюнь и іюль, комета и земля движутся непосредственно одна за другой, такъ что въ такихъ случаяхъ комета оказывается въ наивыгоднѣйшихъ условіяхъ для наблюденія какъ по яркости, такъ и по размѣрамъ ея хвоста. Плоскость орбиты наклонена къ плоскости эклиптики подъ угломъ въ  $17\frac{1}{2}^{\circ}$ , и линія пересѣченія обѣихъ плоскостей (линія узловъ) расположена такимъ образомъ, что комета, лишь незадолго до вступленія ея въ область орбиты Марса, поднимается надъ эклипикой и послѣ прохожденія черезъ перигелій, находясь еще внутри земной орбиты, переходитъ изъ сѣверныхъ отъ эклиптики широтъ въ южныя. Въ области, благоприятной для наблюденія съ земли, она пребываетъ всего около  $2\frac{1}{2}$  мѣсяцевъ; пользуясь этими данными для проверки прежнихъ появленій кометы, нетрудно видѣть, что этотъ промежутокъ времени совпадаетъ какъ разъ съ тѣмъ періодомъ, въ теченіе котораго комета въ наиболѣе благоприятныхъ условіяхъ была доступна для наблюденій невооруженнымъ глазомъ, если исключить время, когда она находилась въ соединеніи съ солнцемъ.

(Продолженіе слѣдуетъ).



## Отець радія.

Фридриха Содди, профессора Глазговскаго университета.

(Окончаніе\*).

Въ 1903 году я началъ серію опытовъ, которые съ тѣхъ поръ непрерывно продолжалъ, съ цѣлью обнаружить непосредственное образование радія въ уранѣ, тщательно очищенномъ отъ всякихъ слѣдовъ радія. Способъ нахождения малѣйшихъ слѣдовъ радія очень простъ и очень точенъ; онъ позволяетъ съ увѣренностью обнаружить и точно измѣрить количества радія, которыя не превышаютъ нѣсколькихъ билліонныхъ долей грамма. Для этой цѣли пользуются характерной эманацией, испускаемой радіемъ. Уранъ не даетъ никакой эманации. Растворъ урана, который мы хотимъ изслѣдовать на радій, сохраняется въ запаянной трубкѣ, — по крайней мѣрѣ, въ теченіе мѣсяца — для того, чтобы могло образоваться количество эманации, соотвѣтствующее состоянію равновѣсія; затѣмъ онъ подвергается кипяченію въ безвоздушномъ пространствѣ: выдѣлившіеся газы собираютъ и проводятъ въ чувствительный электроскопъ съ золотыми листочками. Если въ растворѣ есть радій, то его эманация уничтожаетъ зарядъ на золотыхъ листочкахъ, а быстрота разряда при надлежащихъ условіяхъ можетъ служить точнымъ мѣриломъ наличнаго количества радія. Этотъ опытъ имѣетъ въ такой же степени качественный характеръ, какъ и количественный, такъ какъ въ виду образования „активнаго отложенія“ быстрота разряда согласно характерному закону непрерывно возрастаетъ въ теченіе трехъ часовъ послѣ введенія газа, а затѣмъ остается постоянной, если не считать медленнаго пониженія наполовину въ четыре дня, происходящаго отъ превращенія самой эманации. Если извлечь эманацию изъ электроскопа, то это отложеніе остается, активность же его быстро уменьшается, подчиняясь уже другому, столь же характерному закону. Слѣдовательно, невозможно ошибиться относительно присутствія именно эманации и радія, изъ котораго она происходитъ. Въ первомъ опытѣ 1 кг. продажнаго азотно-кислаго урана былъ очень тщательно очищенъ отъ радія осажденіемъ въ растворѣ сѣрно-кислаго барія, — методъ, дѣйствительность котораго испытана даже для отдѣленія послѣднихъ слѣдовъ радія. Растворъ сохранялся и періодически подвергался испытаніямъ на присутствіе радія. Употребленные методы не были такъ точны для количественной оцѣнки, какъ тѣ, которые теперь въ ходу, но уже первая серія опытовъ устанавливаетъ съ несомнѣнностью, что, съ одной стороны, образующееся количество радія чрезвычайно мало, въ лучшемъ случаѣ это тысячная доля того количества, которое вырабатывалось бы, если бы радій непосредственно происходилъ изъ урана, и что, съ другой стороны,

\* ) См. № 494 „Вѣстника“.



появленіе радія въ растворѣ, хотя и въ ничтожномъ количествѣ, являлось, тѣмъ не менѣе, несомнѣннымъ. Эти результаты, давая первое указаніе на способъ зарожденія радія въ настоящее время, съ очевидностью указывали на то, что уранъ не является его прямымъ производителемъ. Ясно, что результаты моихъ опытовъ были бы объяснены, если бы удалось обнаружить существованіе одного или нѣсколькихъ промежуточныхъ предковъ радія въ ряду веществъ, отдѣляющихъ его отъ урана. Эти соображенія согласуются съ фактомъ, что разность между атомнымъ вѣсомъ урана и радія равняется почти 12 единицамъ. Было извѣстно только одно превращеніе, испускающее лучи  $\alpha$ , т. е. производящее гелій, а именно — превращеніе самого урана, которое должно было уменьшить атомный вѣсъ на 4 единицы; такимъ образомъ, оставалось мѣсто для двухъ другихъ такихъ же превращеній между радіемъ и ураномъ, не считая, быть можетъ, такихъ превращеній, которые не испускаютъ вовсе никакихъ лучей или испускаютъ только лучи  $\beta$ .

Въ то время, какъ производились всѣ эти изслѣдованія, этотъ вопросъ сдѣлалъ новый шагъ впередъ, благодаря независимымъ работамъ Макъ Койя (Mc Coy), Стрѣтта (Strutt) и Больтвуда (Boltwood). Эти ученые подошли къ вопросу косвеннымъ путемъ. Мы видѣли, что, если уранъ является первымъ предкомъ радія, то отношеніе имѣющихся въ минералахъ количествъ обоихъ элементовъ должно быть постояннымъ, такъ какъ оно не отличается отъ отношенія среднихъ продолжительностей жизни обоихъ тѣлъ. Добросовѣстнымъ изслѣдованіямъ Стрѣтта и Больтвуда мы обязаны прямой проверкой этого положенія путемъ опыта. Во всѣхъ изслѣдованныхъ урановыхъ минералахъ обнаружена прямая пропорціональность между количествами урана и радія. Совмѣстной работѣ Рѣтгерфорда и Больтвуда мы обязаны точнымъ опредѣленіемъ этой важной постоянной пропорціональности. Они нашли, что одной части радія всегда соотвѣтствуютъ 3 000 000 частей урана. Эта постоянная даетъ непосредственно отношеніе среднихъ длительностей жизни обоихъ элементовъ, если не считать незначительныхъ уклоненій, вносимыхъ неизвѣстными факторами. Какъ мы видѣли, средняя продолжительность жизни радія есть  $2\frac{1}{2}$  тысячи лѣтъ. Изъ этого слѣдуетъ, что періодъ жизни урана равенъ 7 500 000 000 лѣтъ.

Работы, которые мы только-что приводили, давали вполне убѣдительное доказательство, хотя и косвенное, того факта, что уранъ является ближайшимъ предкомъ радія, и нужно замѣтить, что онѣ пока представляютъ собой единственное доказательство, на которое можно сослаться.

Во второй серіи опытовъ, начатыхъ въ 1905 году надъ образованіемъ радія въ урановыхъ растворахъ, мнѣ помогали Макензи (T. D. Mackenzie). Они отличались отъ предыдущихъ въ двухъ отношеніяхъ: съ одной стороны, нами были примѣнены усовершенствованные методы измѣренія малыхъ количествъ радія, которыми пользовались Стрѣттъ и Больтвудъ въ своихъ изслѣдованіяхъ; съ



другой стороны, мы употребили новые методы очистки радия. Существование промежуточных ступеней, отделяющих радий от урана, которое было обнаружено первыми опытами, заставило очищать уранъ не только от радия, но и от промежуточных веществъ, которыя могли къ нему примѣшаться въ минералѣ, содержащемъ уранъ, и которыя обуславливали образование радия въ указанномъ выше растврѣ. Безъ этого результаты количественно не могли имѣть никакого значенія для рѣшенія вопроса о ходѣ образованія радия изъ урана.

Съ того времени эти опыты велись болѣе трехъ лѣтъ. 2 кг. урана подвергались по частямъ въ нѣсколько приѣмовъ обработкѣ эфиромъ, и можно предположить, что такимъ образомъ уранъ былъ очищенъ отъ всякихъ примѣсей, а не только отъ радия, какъ въ первомъ опытѣ. Въ первомъ растврѣ было обнаружено появленіе неизмѣримо малаго количества радия, которое къ концу трехъ лѣтъ достигло лишь  $10^{-11}$  части грамма, тогда какъ во второмъ по простествіи двухъ лѣтъ нельзя было наблюдать сколько-нибудь замѣтнаго присутствія радия. Возможно, что въ первомъ случаѣ появленіе радия слѣдуетъ приписать ничтожнымъ количествамъ какого-то промежуточного предка, котораго не удалось удалить, тогда какъ во второмъ случаѣ очистка была болѣе совершенной. Будущее скоро дастъ намъ указанія насчетъ этой стороны вопроса. Ниже мы вернемся къ количественной сторонѣ этихъ изслѣдованій.

Въ послѣднихъ опытахъ были сохранены осадки, полученные при очисткѣ эфиромъ; очистивъ ихъ отъ радия по указанному началу методу — при помощи сѣрно-кислаго барія, ихъ подвергли періодическимъ испытаніямъ на радій. Эти осадки должны были содержать промежуточного предка радия, которому обязанъ своимъ появленіемъ, хотя и въ небольшомъ количествѣ, радій, несомнѣнно наблюдавшійся въ первомъ опытѣ. Если только этотъ первый опытъ былъ правиленъ, то эти осадки должны были, въ свою очередь, дать новое количество радия. Это ожиданіе вполне подтвердилось. Въ теченіе одного года образовалось незначительное количество радия, въ существованіи котораго, однако, не могло быть никакихъ сомнѣній. Количество прямого предка радия, содержащагося въ соляхъ обыкновеннаго продажнаго урана, однако, очень невелико; оно, обыкновенно, колеблется въ предѣлахъ отъ одной десятитысячной до одной тысячной доли того количества, которое должно существовать въ минералахъ совокупно съ ураномъ въ состояніи равновѣсія.

Въ то время, когда производились эти изысканія, Бальтвудъ очистилъ небольшое количество азотно-кислаго урана посредствомъ повторной кристаллизаціи въ водѣ и къ концу года не могъ замѣтить сколько-нибудь значительнаго присутствія радия. Онъ заключилъ, что мое первое наблюденіе относительно отпа радия было результатомъ экспериментальной ошибки; но это было, какъ мы видѣли, неправильное объясненіе фактовъ. Его послѣдніе результаты съ кускомъ азотно-кислаго урана вѣсомъ въ 100 гр. показываютъ, что къ концу двухъ съ половиной лѣтъ не образовалось сколько-нибудь замѣт-



наго количества радія; это пока находится въ согласіи съ тѣмъ, что показали второй рядъ наблюденій надъ препаратами, очищенными Макензи и мною.

Такимъ образомъ, въ настоящее время косвенный методъ рѣшительно указываетъ, что уранъ является отцомъ радія, тогда какъ прямые опыты показали, что уранъ не есть непосредственный его предокъ, но что въ соляхъ продажнаго урана содержится небольшое количество прямого предка радія, который можно отдѣлить отъ урана обыкновенными приемами очищенія.

Что касается непосредственнаго производителя радія, то вопросъ о немъ былъ ярко освѣщенъ недавними опытами Болътвуда, который исходилъ отъ радиоактивныхъ минераловъ. Въ этихъ минералахъ количество производителя должно быть таково, чтобы онъ давалъ столько же радія, сколько его разрушается. Въ 1 *гр.* образцовой урановой руды, которая содержитъ 50% урана, имѣется  $1.5 \times 10^{-7}$  *гр.*

радія,  $\frac{1}{2500}$  доля котораго, т. е.  $6 \times 10^{-11}$  *гр.*, должна распасться въ теченіе одного года. Родитель радія долженъ, такимъ образомъ, произвести въ теченіе года въ этомъ количествѣ руды  $6 \times 10^{-11}$  *гр.* радія, — количество, которое достаточно велико, чтобы его легко было обнаружить экспериментально. Болътвуду дѣйствительно удалось посредствомъ химическихъ методовъ выдѣлить практически все количество прямого предка радія, который находится въ одномъ изъ урановыхъ минераловъ. Въ своихъ первыхъ опытахъ онъ выдѣлилъ настолько совершенно, насколько это было возможно, актиній изъ пробы карнотита (фосфорно-кислый уранъ и ванадій, въ изобиліи встрѣчающійся въ Америкѣ). Болътвудъ нашелъ, что растворъ урана постепенно производилъ радій со скоростью, указывающей на то, что во всякомъ случаѣ большая часть предка была извлечена; руководствуясь этимъ, онъ сдѣлалъ предварительное допущеніе, что актиній представляетъ собой элементъ, промежуточный между ураномъ и радіемъ, и является истиннымъ отцомъ послѣдняго. Однако, Редгерфордъ, подтвердившему это наблюденіе и показавшему, что радій дѣйствительно очень быстро образуется въ растворахъ продажнаго актинія, удалось доказать, что самъ актиній все-таки не есть отецъ радія. Онъ химически выдѣлилъ изъ этого вещества цѣликомъ весь актиній, а также часть, не дающую совершенно радія, а между тѣмъ остатокъ продолжалъ производить радій съ той же скоростью, какъ и весь препаратъ, до химическаго раздѣленія. Актиній легко осаждается изъ своихъ растворовъ амміакомъ, и Редгерфордъ нашелъ, что такимъ образомъ можно его почти вполне очистить отъ готоваго уже радія и отъ продуктовъ, получающихся при его собственномъ распаденіи (актиній X), но скорость производства радія при этомъ не измѣняется. Если же вмѣсто амміака осаждаютъ актиній сернистымъ аммономъ, то большая его часть остается въ растворѣ. Эта часть не производитъ радія, и, слѣдовательно, актиній не можетъ быть отцомъ радія. Растворъ, содержащій только малую часть актинія, заключалъ въ себѣ цѣликомъ производителя радія и выдѣлялъ радій съ той же



скоростью, какъ первый препаратъ до осажденія его сѣрнистымъ аммоніемъ.

Большуду удалось другимъ методомъ очистить производителя радія отъ актинія. Его способъ состоитъ въ слѣдующемъ: нужно прибавить небольшое количество торія къ раствору, а потомъ снова отдѣлить торій посредствомъ щавелевой кислоты. При всякомъ химическомъ изслѣдованіи наиболѣе радиоактивныхъ веществъ, которыя всегда представлены ничтожными, обыкновенно недоступными взвѣшиванію количествами, извѣстный методъ заключается въ томъ, чтобы разыскать элементъ, который по своей химической природѣ ближе всего подходитъ къ вновь изучаемому радиоактивному элементу; если же такого извѣстнаго уже тѣла въ изучаемомъ веществѣ нѣтъ, то нужно прибавить маленькое количество его, а затѣмъ выделить его обычными методами химического анализа. Такимъ именно способомъ г-жа Кюри выделила радій вмѣстѣ съ баріемъ, а полоній вмѣстѣ съ висмутомъ, изъ содержащей ихъ руды (Pechblende). Большудъ нашелъ, что дѣйствительно новый предокъ радія до того сильно схожъ съ торіемъ, что до настоящаго времени ихъ не удалось отдѣлить другъ отъ друга никакимъ методомъ.

Ганъ (Hahn) подтвердилъ это сходство между торіемъ и отцомъ радія новымъ способомъ. Обыкновенно готовятъ для продажи соли торія, исходя изъ моназита — песка, состоящаго въ среднемъ изъ 5 процентовъ торія и 0,3 процентовъ урана.

При выдѣленіи торія весь предокъ радія, цѣликомъ соединенный съ ураномъ, также увлекается, и вслѣдствіе этого всѣ препараты торія производятъ радій со вполне измѣримой быстротой, на которую не вліяетъ удаленіе уже образовавшагося радія осажденіемъ торія посредствомъ амміака. Слѣдовательно, если бы въ началѣ выборъ вѣроятнаго предка радія палъ на торій вмѣсто актинія, то опытъ, повидимому, подтвердилъ бы эту гипотезу. Такъ какъ мы не владемъ ни однимъ химическимъ методомъ отдѣленія предка радія отъ торія, то было бы невозможно, пользуясь способомъ, аналогичнымъ тому, какой былъ примѣненъ для актинія, доказать, что торій не настоящій предокъ радія. Такимъ образомъ, мы имѣли бы дѣло съ грубой ошибкой, которую, безъ сомнѣнія, удалось бы разсѣять лишь послѣ безконечной путаницы. Но, такъ какъ тождество химическихъ свойствъ предка радія и торія было вначалѣ найдено Большудомъ и такъ какъ это вещество было найдено въ рудѣ, не содержащей торія, раньше, чѣмъ въ соляхъ послѣдняго, то мы, къ счастью, избѣгли этой ошибки. Это показываетъ намъ, какъ выгодно для наблюдателя руководствоваться въ своихъ изслѣдованіяхъ теоріей. Теорія распада указывала на генетическую связь между ураномъ и радіемъ и не указывала никакой связи между торіемъ и радіемъ. Впрочемъ, можно было бы, конечно, привести доводы и въ противоположномъ смыслѣ. Могутъ быть случаи, когда полезно перестать смотрѣть на все съ точки зрѣнія теоріи и, оглядываясь вокругъ себя, дать нѣкоторую волю своей фантазіи.

Прибавляя небольшое количество торія къ раствору минерала, содержащаго радій, и снова отдѣляя торій, а затѣмъ очищая его обыч-



ными методами, мы въ то же время удаляемъ цѣликомъ всего производителя радія. Оба тѣла до того близко связаны химически, что можно подвергнуть торій любому изъ извѣстныхъ методовъ очищенія, не отдѣляя этимъ предка радія. Такимъ образомъ, Болътвудъ недавно удалось выдѣлить изъ радиоактивнаго минерала почти цѣликомъ содержащагося въ немъ предка радія и получить его въ чистомъ видѣ, не считая примѣси торія, дѣйствіе котораго легко учесть. Онъ нашелъ при этомъ, что эти препараты обладаютъ гораздо большей и характерной радиоактивностью, чѣмъ та, которая соответствовала бы содержанию ими торію и которую нельзя приписать ни одному извѣстному намъ радиоактивному веществу. Въ различныхъ препаратахъ вновь получающаяся радиоактивность пропорціональна способности производить радій; изъ этого Болътвудъ заключаетъ, что и прародитель радія также радиоактивенъ, т. е. испускаетъ лучи, которые можно наблюдать во время его распада. Въ одномъ изъ его послѣднихъ препаратовъ, который содержитъ только нѣсколько миллиграммовъ торія и цѣликомъ предка радія, полученнаго изъ килограмма карнотита, радиоактивность въ тысячу разъ больше, чѣмъ самого торія. Испускаемые лучи состоятъ, главнымъ образомъ, изъ лучей  $\alpha$  съ очень слабымъ проникающимъ дѣйствіемъ, которые въ воздухѣ при атмосферномъ давленіи обладаютъ „проникающей способностью“ въ 2.8 см. вмѣсто 3.5 см. присущихъ наименѣе проникающимъ изъ всѣхъ извѣстныхъ до сихъ поръ лучей  $\alpha$ . Теоретически нѣтъ необходимости въ томъ чтобы производитель радія былъ самъ радиоактивенъ. Онъ могъ бы, какъ это въ различныхъ случаяхъ наблюдалъ Рѣтгерфордъ подвергаться распаденію и производить радій, не испуская лучей, или, по крайней мѣрѣ, — что сводится къ тому же, — не испуская доступныхъ наблюденію лучей. Работы Болътвуда ясно показываютъ, что этотъ предокъ испускаетъ частицу  $\alpha$  или атомъ гелія при своемъ распаденіи; возможно, что онъ такъ же выбрасываетъ и частицу  $\beta$ , однако, этотъ вопросъ остается открытымъ. Характеръ распредѣленія всей активности въ рудѣ, содержащей радій, между ураномъ и 6 прочими послѣдовательными продуктами, испускающими лучи  $\alpha$ , находится, какъ показалъ Болътвудъ, въ согласіи съ мнѣніемъ, что каждый изъ этихъ шести продуктовъ, включая новое тѣло, выбрасываетъ частицу  $\alpha$  при своемъ распаденіи. Самъ же уранъ является исключеніемъ, такъ какъ онъ, повидимому, испускаетъ изъ каждаго распадающагося атома вдвое больше частицъ  $\alpha$ , чѣмъ каждый изъ его продуктовъ. Возможно, что излученіе  $\alpha$  самого урана есть послѣдствіе двухъ превращеній, еще не выясненныхъ; но подробный разборъ этого вопроса отвлекъ бы насъ отъ нашей темы.

Болътвудъ въ виду сдѣланнаго имъ открытія, что новое вещество, слѣдую въ этомъ другимъ радиоактивнымъ элементамъ, испускаетъ лучи  $\alpha$ , ионизирующіе газы, предложилъ назвать его іоніемъ. Номенклатура радиоактивности въ общемъ требовала бы систематизаціи, и названіе іоній едва ли можетъ считаться удачнымъ. Въдѣ свойство испускать ионизирующіе лучи не было причиною открытія этого вещества и потому не представляетъ особеннаго значенія. Свойство же производить радій, повѣдшее къ его открытію, является наиболѣе важ-



нымъ и поэтому можно пожалѣть, что не оно послужило основаніемъ для его названія. Само собой напрашивается названіе „субрадіумъ“ (потому что предлогъ sub съ винительнымъ падежомъ означаетъ, когда рѣчь идетъ о движеніи, „до“ и, когда рѣчь идетъ о времени, „непосредственно предшествующій“); пока мнѣ кажется наиболѣе удобнымъ обозначать это вещество попросту названіемъ „отецъ радія“.

Интереснымъ послѣдствіемъ работъ Бальтвуда которыя мы только что изложили, является новое опредѣленіе средней продолжительности жизни радія. Какъ уже было выше объяснено, если часть  $\lambda$  радиоактивнаго вещества превращается въ одинъ годъ, то средняя его жизнь равна  $\frac{1}{\lambda}$  годамъ. Количество радія, произведенное тѣмъ количествомъ предка, которое можно извлечь изъ 1 кг. карнотита, было сравнено съ полнымъ количествомъ радія, бывшаго первоначально въ этомъ минералѣ. Количество же радія въ этомъ минералѣ уже давно достигло равновѣсія, при которомъ количество, образующееся за годъ, равно распадающемуся. А вслѣдствіе этого количество, образующееся за годъ, — то именно, которое установлено опытомъ, — дѣйствительно, представляетъ собой въ то же время количество, которое въ теченіе года распадается; такъ какъ опредѣляютъ еще и общее количество, то отношеніе этихъ двухъ количествъ есть не что иное, какъ та часть всей массы, которая распадается за годъ. Обратная дробь есть средняя жизнь радія, выраженная въ годахъ. Значеніе, полученное для дроби, выражающей часть, распадающуюся за годъ, было  $1/2875$ , такъ что средняя жизнь радія составляетъ 2875 лѣтъ, а, слѣдовательно, время, необходимое для того, чтобы половина всего количества подвергалось превращенію составляетъ приблизительно 2000 лѣтъ. Это значеніе совпадаетъ съ болѣею частью другихъ результатовъ, полученныхъ иными способами. Нужно только замѣтить, что найденная продолжительность можетъ оказаться слишкомъ большою, такъ какъ трудно имѣть полную увѣренность, что предокъ радія былъ выдѣленъ изъ минерала цѣликомъ. Рѣтгерфордъ указалъ недавно, какъ на наиболѣе вѣроятную въ настоящее время продолжительность половиннаго превращенія 1760 лѣтъ, что соответствовало бы 2550 годамъ для средней жизни, такъ что эту важную постоянную можно уже считать извѣстной съ достаточной степенью точности.

Наконецъ, оказалось возможнымъ вычислить минимальную продолжительность средней жизни отца радія, какая необходима, чтобы объяснить, почему невозможно признать образованія радія изъ урана. Уже было объяснено, что существованіе между ураномъ и радіемъ одного или нѣсколькихъ промежуточныхъ тѣлъ, обладающихъ болѣе продолжительной средней жизнью, прежде всего замѣдлитъ бы образованія радія изъ урана. Зная продолжительность опыта, количество употребленнаго урана и количество образовавшагося радія, можно, какъ показалъ Рѣтгерфордъ, вычислить среднюю жизнь промежуточнаго вещества въ предположеніи, что таковое имѣется только одно. Или же, если замѣтнаго количества радія во время опыта вовсе не образовалось и если извѣстно то минимальное количество, присутствіе



котораго еще можно было бы открыть, то мы можем придти къ опредѣленію минимума продолжительности средней жизни. Если  $R$  есть количество образовавшагося радія въ граммахъ въ теченіе  $t$  лѣтъ, когда мы исходили отъ  $U$  граммовъ урана и если  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  соответственно означаютъ части всего количества урана и промежуточнаго тѣла, которыя преобразовываются въ теченіе года, то мы имѣемъ вначалѣ:

$$R = \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda_2 U t^2,$$

или

$$\lambda_2 = \frac{2R}{\lambda_1 U t^2}.$$

$\lambda_1$  равно  $1.2 \times 10^{-10}$ . Для 1 кг. урана  $\lambda_1 U$  равно  $1.2 \times 10^{-7}$ . Зная  $R$  и  $t$ , можно вычислить  $\lambda_2$ , а слѣдовательно, и  $1/\lambda_2$ , т. е. среднюю жизнь отпа радія.

Въ одномъ изъ опытовъ, сдѣланныхъ мною совместно съ Т. Д. Макензи, о которомъ рѣчь уже шла выше, образованіе радія отъ 1 кг. урана не превышала  $5 \times 10^{-11}$  гр. въ теченіе 2 лѣтъ и 9 мѣсяцевъ. Въ другомъ опытѣ образованіе радія не превышало  $10^{-11}$  гр. въ теченіе года и 8 мѣсяцевъ. Первый результатъ приводитъ насъ къ опредѣленію средней жизни промежуточнаго вещества, минимумъ, въ 10 000 лѣтъ, а второй результатъ — минимумъ, въ 16 000 лѣтъ. Другими словами, эти опыты окончательно показываютъ, что, если существуетъ только одно промежуточное тѣло между ураномъ и радіемъ, то его средняя жизнь должна быть, по меньшей мѣрѣ, въ шесть разъ продолжительнѣе жизни радія. Отсюда слѣдуетъ, что въ минералахъ должно заключаться, по крайней мѣрѣ, въ шесть разъ больше этого тѣла, чѣмъ радія, т. е. въ хорошей рудѣ *Reschblende*, приблизительно, одна миллионная часть.

Есть, впрочемъ, много основаній предполагать, что существуетъ больше одного промежуточнаго тѣла между ураномъ и радіемъ съ очень продолжительной средней жизнью. Если средняя жизнь каждаго велика въ сравненіи съ продолжительностью опыта, то можно установить общее соотношеніе:

$$R = \frac{1}{n!} (\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_n) t^n \times 1.2 \times 10^{-7},$$

выражающее количественно первоначальное образованіе радія изъ 1 кг. урана, когда происходитъ  $n$  превращеній, при переходѣ урана въ радій.  $\lambda_2$  представляетъ собой часть второго тѣла серіи (первое, если не считать урана), которое превращается въ одинъ годъ,  $\lambda_3$  — часть третьяго тѣла (или второго промежуточнаго восходящаго для радія) и  $\lambda_n$  часть  $n$ -го тѣла (или  $(n-1)$ -го промежуточнаго предка). Для двухъ промежуточныхъ тѣлъ мы имѣемъ:

$$R = \frac{1}{6} (\lambda_2 \lambda_3) t^3 \times 1.2 \times 10^{-7}.$$



Упомянутые опыты показывают, что, если есть два промежуточных тѣла, то произведение продолжительности ихъ средней жизни составляетъ, по крайней мѣрѣ, 10 000 лѣтъ. Очень интересно отмѣтить, что первоначальная скорость образованія радія пропорціональна такой степени времени, показателемъ которой служить число промежуточныхъ превращеній при образованіи радія; такимъ образомъ, если опыты настолько продолжительны, что можно будетъ получить количество радія, доступное измѣренію, то можно вычислить число промежуточныхъ тѣлъ и произведение продолжительностей ихъ среднихъ жизней. Очистка этихъ большихъ количествъ и ихъ постоянное изученіе въ теченіе нѣсколькихъ лѣтъ съ точки зрѣнія образованія радія, не давшая до сего времени никакого положительнаго результата, была, конечно, дѣломъ тяжелымъ и до сихъ поръ безрезультатнымъ.

Но нѣкоторые признаки намъ предсказываютъ, что этотъ длинный періодъ ожиданія приходитъ къ концу и, такъ какъ разъ начавшись, образованіе радія, будетъ происходить, какъ можно предполагать пропорціонально нѣкоторой степени времени, то мы можемъ даже въ очень короткій періодъ времени рассчитывать на интересные результаты. Такъ какъ часть урана, которая превращается ежегодно, меньше единицы, дѣленной на 5 миллиардовъ, то этотъ результатъ превосходилъ бы тотъ, на который можно надѣяться. Однако, если, превращеніе урана въ радій было бы непосредственнымъ, то количество радія, образующающееся только въ теченіе часа, могло бы быть уже съ увѣренностью опредѣлено въ выше описанныхъ опытахъ и было бы равно тому, которое дѣйствительно было получено въ теченіе трехъ лѣтъ!

## Лекціи по ариметикѣ для учителей\*),

читанныя въ 1907/8 академическомъ году профессоромъ Ф. Клейномъ въ Гёттингенѣ.

(Продолженіе \*).

Обращаюсь теперь къ пятому пункту, именно къ обращенію раціональныхъ дробей въ десятичныя. Подробную теорію вы найдете въ книгѣ Вебера-Вельштейна; я же хочу выяснитъ здѣсь только принципы этой теоріи на простѣйшемъ типичномъ примѣрѣ. Разсмотримъ дробь  $\frac{1}{p}$ , гдѣ  $p$  есть простое число, отличное отъ 2 и 5; мы покажемъ, что дробь  $\frac{1}{p}$  разворачивается въ безконечную періодическую дробь и что число цифръ  $\delta$  періода есть наименьшій показатель, при которомъ  $10^\delta$  даетъ при дѣленіи на  $p$  въ остаткѣ 1, или,

\*) См. „Вѣстник“, № 495.



выражаясь языкомъ теоріи чиселъ,  $\delta$  есть наименьшій показатель, при которомъ имѣетъ мѣсто сравненіе

$$10^\delta \equiv 1 \pmod{p}.$$

Доказательство прежде всего предполагаетъ извѣстнымъ, что такое сравненіе всегда возможно; это устанавливается такъ называемой малой теоремой Фермата, заключающейся въ томъ, что при всякомъ простомъ  $p$ , не дѣлящемъ числа 10,

$$10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

На доказательствѣ этого основного предложенія, служащаго постояннымъ орудіемъ изслѣдованія всякому математику, я здѣсь не буду останавливаться. Далѣе, изъ теоріи чиселъ мы должны заимствовать еще предложеніе, что наименьшій показатель  $\delta$ , о которомъ идетъ выше рѣчь, либо равенъ числу  $p-1$ , либо есть дѣлитель этого числа. Это мы можемъ примѣнить къ нашему числу  $p$  и получимъ, такимъ образомъ, что

$$\frac{10^\delta - 1}{p} = \frac{1}{11}$$

есть цѣлое число  $N$ , такъ что

$$\frac{10^\delta}{p} = \frac{1}{p} + N.$$

Если мы поэтому представимъ себѣ дроби  $\frac{1}{p}$  и  $\frac{10^\delta}{p}$  обращенными въ десятичныя, то соответствующіе десятичные знаки должны будутъ совпадать, такъ какъ разность между этими дробями есть цѣлое число. Такъ какъ, съ другой стороны, дробь  $\frac{10^\delta}{p}$  получается изъ дроби

$\frac{1}{p}$  перенесеніемъ запятой вправо на  $\delta$  десятичныхъ знаковъ, то отсюда слѣдуетъ, что отъ такого перенесенія запятой десятичные знаки дроби  $\frac{1}{p}$  не измѣняются, иными словами, что десятичные знаки

дроби  $\frac{1}{p}$  представляютъ собой послѣдовательное повтореніе періода, состоящаго изъ  $\delta$  цифръ. Теперь покажемъ, что не можетъ быть меньшаго періода, состоящаго изъ  $\delta' < \delta$  цифръ. Для этого намъ достаточно обнаружить, что число цифръ  $\delta'$  каждаго періода удовлетворяетъ сравненію  $10^{\delta'} \equiv 1$ ; намъ же извѣстно, что  $\delta$  есть наименьшее рѣшеніе этого сравненія \*). Это доказательство представляетъ собой простое обращеніе прежняго

\*) Если это предложеніе будетъ доказано и мы допустимъ, что существуетъ періодъ, содержащій  $\delta' < \delta$  цифръ, то будетъ существовать число  $\delta' < \delta$ , при которомъ  $10^{\delta'} \equiv 1 \pmod{p}$ ; это противно условію



разсужденія. Въ самомъ дѣлѣ, изъ условія слѣдуетъ, что дроби  $\frac{1}{p}$  и  $\frac{10^{d'}}{p}$  имѣютъ одни и тѣ же десятичные знаки; слѣдовательно, разность этихъ дробей  $\frac{10^{d'}}{p} - \frac{1}{p}$  есть цѣлое число  $N$ , а потому  $10^{d'} - 1$  дѣлится на  $p$ ; такимъ образомъ, дѣйствительно,  $10^{d'} \equiv 1 \pmod{p}$ ; этимъ вполне исчерпывается доказательство.

Я приведу еще нѣкоторые возможно болѣе простые и поучительные примѣры, изъ которыхъ вы увидите, что  $\delta$  дѣйствительно можетъ принять всѣ возможные значенія, какъ меньшія  $p - 1$ , такъ и равныя  $p - 1$ . Замѣтимъ прежде всего, что для дроби

$\frac{1}{3} = 0,333\dots$  число десятичныхъ знаковъ  $\delta = 1$ ; и въ самомъ дѣлѣ, уже  $10^1 \equiv 1 \pmod{3}$ . Далѣе мы находимъ, что для дроби

$$\frac{1}{11} = 0,09\dots$$

$\delta = 2$ , и, соотвѣтственно этому,

$$10^1 \equiv 10, 10^2 \equiv 1 \pmod{11}.$$

Наивысшее значеніе  $\delta = p - 1$  мы встрѣчаемъ при разложеніи дроби

$$\frac{1}{7} = 0,142857142857\dots;$$

здѣсь  $\delta = 6$ . И дѣйствительно, не трудно видѣть, что по модулю 7

$$10^1 \equiv 3, 10^2 \equiv 2, 10^3 \equiv 6, 10^4 \equiv 4, 10^5 \equiv 5 \text{ и, наконецъ, } 10^6 \equiv 1.$$

Аналогичнымъ образомъ я хочу остановиться на вопросѣ, содержащемся въ шестомъ пунктѣ предыдущаго перечисленія, именно на непрерывныхъ дробяхъ. При этомъ я не буду здѣсь, однако, приводить обыкновеннаго отвлеченнаго ариметическаго изложенія, которое вы найдете во многихъ другихъ сочиненіяхъ, напримѣръ, у Вебера-Вельштейна. Напротивъ, я воспользуюсь случаемъ, чтобы вамъ показать, какую ясную и понятную форму приобрѣтаютъ вопросы теоріи чиселъ при наглядномъ геометрическомъ ихъ изложеніи. Къ тому же, прибѣгая къ этимъ геометрическимъ приемамъ въ области теоріи чиселъ, мы возвращаемся только къ тѣмъ путямъ, по которымъ шли Гауссъ и Дирихле. Лишь новѣйшіе математики, начиная примѣрно съ 1860 года, изгнали эти методы изъ теоріи чиселъ. Само собой разумѣется, что здѣсь я имѣю возможность кратко привести только ходъ разсужденій и важнѣйшія теоремы безъ доказательствъ; я естественно предполагаю также, что начала элементарной теоріи непрерывныхъ дробей вамъ безызвѣстны. Впрочемъ, обстоя-



тельное изложение вы можете найти въ моихъ литографированныхъ лекціяхъ по теоріи чиселъ.

Вы знаете, какъ разворачивается данное положительное число  $\omega$  въ непрерывную дробь: мы выделяемъ наибольшее цѣлое число  $n_0$ , содержащееся въ  $\omega$ , и полагаемъ:

$$\omega = n_0 + r_0,$$

$$\text{гдѣ} \quad 0 \leq r_0 < 1;$$

дальше, съ дробью  $\frac{1}{r_0}$  мы поступаемъ такъ же, какъ съ числомъ  $\omega$ :

$$\frac{1}{r_0} = n_1 + r_1,$$

$$\text{гдѣ} \quad 0 \leq r_1 < 1,$$

и этотъ процессъ ведемъ дальше:

$$\frac{1}{r_1} = n_2 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < 1,$$

$$\frac{1}{r_2} = n_3 + r_3, \quad 0 \leq r_3 < 1,$$

$$\dots$$

Если  $\omega$  есть рациональное число, то этотъ процессъ обрывается послѣ конечнаго числа ступеней; если же  $\omega$  есть иррациональное число, то процессъ продолжается безконечно. Во всякомъ случаѣ мы будемъ писать кратко „разложеніе числа  $\omega$  въ непрерывную дробь“:

$$\omega = n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \dots}}}$$

Въ видѣ примѣра приведу разложеніе въ непрерывную дробь числа  $\pi$ .

$$\pi = 3,14159265\dots = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{292 + \dots}}}$$

Если мы оборвемъ непрерывную дробь на первомъ, второмъ, третьемъ... частномъ, то мы получимъ рациональныя, такъ называемыя „подходящія дроби“:

$$n_0 = \frac{p_0}{q_0}, \quad n_0 + \frac{1}{n_1} = \frac{p_1}{q_1}, \quad n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2}} = \frac{p_2}{q_2}, \dots$$



Эти дроби представляют собой чрезвычайно хорошія приближенія къ числу  $\omega$ ; выражаясь точнѣе, каждое изъ нихъ даетъ самое лучшее приближеніе, какого только возможно достигнуть, не увеличивая знаменателя приближенной дроби.

Благодаря этому свойству подходящихъ дробей теорія непрерывныхъ дробей приобретаетъ практически важное значеніе во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, гдѣ нужно выразить ирраціональныя числа или даже раціональныя дроби, но имѣющія большихъ знаменателей (напримѣръ, десятичныя дроби со многими знаками) возможно простыми дробями, т. е. дробями съ возможно меньшими знаменателями. Насколько хорошее мы получаемъ приближеніе, можно видѣть изъ слѣдующей таблицы, содержащей обратное перечисленіе первыхъ подходящихъ числа  $\pi$  въ десятичныя дроби.

$$\pi = 3,14159265\dots$$

$$\frac{p_0}{q_0} = 3, \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{22}{7} = 3,14285\dots; \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{333}{106} = 3,141509\dots,$$

$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{355}{113} = 3,14159292\dots$$

Кстати вы замѣчаете на этихъ примѣрахъ, что подходящія дроби попеременно то больше  $\pi$ , то меньше его; это есть, какъ извѣстно, общее свойство подходящихъ дробей: развертывая число  $\omega$  въ непрерывную дробь, мы заключаемъ его при помощи подходящихъ дробей въ предѣлы, постоянно суживающіеся сверху и снизу.

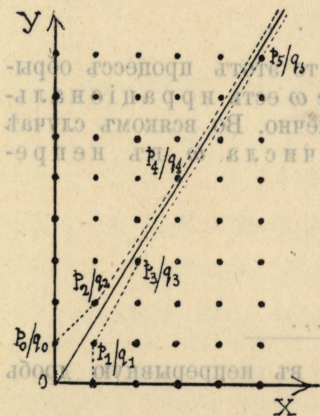


Рис. 9.

Оживимъ теперь всѣ эти вещи геометрическимъ образомъ. Съ этою цѣлью представимъ себѣ въ положительномъ квадратѣ плоскости  $xu$ —овъ (предполагая, что мы ограничиваемся положительными числами) всѣ точки, которыя имѣютъ координатами цѣлыя числа; они образуютъ такъ называемую „сѣть точекъ“<sup>\*)</sup>. Будемъ разсматривать эту сѣть — я могъ бы даже сказать это „звѣздное небо“ — точекъ изъ начала координатъ  $O$  (фиг. 13); лучъ,

идущій отъ начала къ точкѣ  $x = a$ ,  $y = b$ , имѣетъ уравненіе

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b};$$

и обратно, на каждомъ лучѣ  $\frac{x}{y} = \lambda$ , гдѣ  $\lambda$  есть раціональное число  $\frac{a}{b}$ , лежитъ безчисленное множество цѣлочисленныхъ точекъ  $(ma, mb)$ , гдѣ  $m$  есть произвольное цѣлое число. Такимъ образомъ, изъ точки  $O$

\*) „Punktgitter“, сравнительно новый терминъ, который былъ введенъ Г. Миньковскимъ.



во всѣхъ возможныхъ рациональныхъ направленіяхъ и только въ этихъ направленіяхъ мы видимъ точки нашей рѣшетки; поле зрѣнію всюду ступлено и заполнено „звѣздами“, но оно еще не свободно отъ пробѣловъ, оно не заполнено ими непрерывно, оно какъ бы напоминаетъ „млечный путь“. На ирраціональномъ лучѣ  $\frac{x}{y} = \omega$ , гдѣ  $\omega$  есть число ирраціональное, не лежитъ, слѣдовательно, ни одной цѣлочисленной точки—фактъ, замѣчательный уже и самъ по себѣ. Но, очевидно, такого рода прямая, выражаясь терминомъ, напоминающимъ Дедекиндово опредѣленіе ирраціональныхъ чиселъ, производить сѣченіе въ области всѣхъ цѣлочисленныхъ точекъ, именно, она разбиваетъ ихъ на двѣ группы точекъ, расположенныхъ справа и слѣва отъ прямой. Если мы спросимъ себя теперь, гдѣ же у нашего луча отдѣляются другъ отъ друга эти группы, то мы придемъ къ чрезвычайно интересному свойству разложенія числа  $\omega$  въ непрерывную дробь. Именно, если мы отбѣтимъ точки  $x = p_r$ ,

$y = q_r$ , соотвѣтствующія каждой подходящей дроби  $\frac{p_r}{q_r}$  въ разложеніи числа  $\omega$  ( $p_r$  и  $q_r$  суть числа первыя между собой), то лучи, идущіе къ этимъ точкамъ, должны все ближе и ближе подходить къ лучу  $\frac{x}{y} = \omega$ , и при томъ попеременно, то съ одной, то съ другой стороны; это приближеніе должно происходить съ такой же быстротой, съ какой дробь  $\frac{p_r}{q_r}$  приближается къ ирраціональному числу  $\omega$ . Развѣтіе этой идеи приводитъ къ слѣдующей теоремѣ, которую не трудно доказать, пользуясь извѣстными въ теоріи чиселъ свойствами чиселъ  $p_r$  и  $q_r$ .

Представимъ себѣ, что во всѣ цѣлочисленные точки воткнуты штифтики или булавки, какъ на китайскомъ билліардѣ. Каждую изъ двухъ группъ булавокъ,

расположенныхъ справа и слѣва отъ луча  $\frac{x}{y} = \omega$ , мы обведемъ нитью; если мы натянемъ каждую нить такъ, чтобы она охватывала соотвѣтствующую группу булавокъ и прилегалла бы вплотную къ ближайшимъ, то она приметъ форму выпуклой ломанной линіи; вершинами этой ломанной именно и будутъ служить точки  $p_r, q_r$ , координатами которыхъ служатъ соотвѣтственные числители и знаменатели подходящихъ дробей; при этомъ слѣва будутъ лежать точки, отвѣчающія четнымъ подходящимъ дробямъ, а справа нечетнымъ.

Этимъ путемъ мы приходимъ къ новому и, нужно сказать, чрезвычайно наглядному геометрическому опредѣленію разложенія числа въ непрерывную дробь. Приведенный выше рис. 13 относится къ случаю:

$$\omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$



тѣхъ къ ирраціональному числу, выражающему отношеніе сторонъ правильного десятиугольника къ радіусу. Здѣсь первыми вершинами двухъ ломаныхъ линій будутъ:

слѣва:  $p_0 = 0, q_0 = 1; p_2 = 1, q_2 = 2; p_4 = 3, q_4 = 5; \dots$

справа:  $p_1 = 1, q_1 = 1; p_3 = 2, q_3 = 3; p_5 = 5, q_5 = 8; \dots$

Для числа  $\pi$  значенія  $p_r, q_r$  возрастаютъ гораздо быстрее, такъ что нанести соответствующую фигуру на чертежъ было бы довольно трудно. Полное же доказательство указаннаго предложенія вы можете найти въ упомянутыхъ выше моихъ литографированныхъ лекціяхъ.

(Продолженіе слѣдуетъ).

## ЗАДАЧИ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

**№ 204** (5 сер.). Рѣшить систему уравненій:

$$\frac{(b-yz)b}{y(z+x)} + \frac{(c-yz)c}{z(x+y)} = a,$$

$$\frac{(c-zx)c}{z(x+y)} + \frac{(a-zx)a}{x(y+z)} = b,$$

$$\frac{(a-xy)a}{x(y+z)} + \frac{(b-xy)b}{y(z+x)} = c.$$

Н. Агрономовъ (Немме).

**№ 205** (5 сер.). Рѣшить уравненіе

$$(b^2z^2 - a^2)^2 - 4ab(bz^3 - a)(az - b) = 0.$$

С. Адамовичъ (Варшава).

**№ 206** (5 сер.). Доказать слѣдующій признакъ дѣлимости на 13: на 13 дѣлятся только такія числа, у которыхъ, сумма числа всѣхъ десятковъ и учетверенной цифры единиц дѣлится на 13. Показать, что, примѣняя этотъ признакъ достаточное число разъ, всегда можно привести вопросъ о дѣлимости многозначнаго числа къ испытанію двузначнаго числа.

Б. Щигольвъ (Варшава).



**№ 207** (5 сер.). Привести къ виду, удобному для логарифмированія, выраженіе

$$\operatorname{cosec}^2 \alpha \operatorname{cosec}^2 \beta \operatorname{cosec}^2 \gamma - \operatorname{cosec}^2 \alpha \operatorname{cosec}^2 \beta - \operatorname{cosec}^2 \beta \operatorname{cosec}^2 \gamma - \operatorname{cosec}^2 \gamma \operatorname{cosec}^2 \alpha + \\ + \operatorname{cosec}^2 \alpha + \operatorname{cosec}^2 \beta + \operatorname{cosec}^2 \gamma - 1.$$

В. Тюнинг (Уфа).

**№ 208** (5 сер.). На плоскости даны окружность и точки  $A$  и  $O$ . Построить треугольник  $ABC$  такъ, чтобы вершины  $B$  и  $C$  его лежали на окружности, и чтобы центр тяжести его лежалъ въ  $O$ .

Н. С. (Одесса).

**№ 209** (5 сер.). Найти арифметическую прогрессию, сумма  $m$  членовъ которой относится къ суммѣ  $n$  ея членовъ, какъ

$$(am^2 + bm) : (an^2 + bn),$$

гдѣ  $a$  и  $b$  суть данныя числа, при всякихъ цѣлыхъ и положительныхъ значеніяхъ  $m$  и  $n$ . Разсмотрѣть случай, когда  $b = 0$ .

Н. Рейпольскій (Харьковъ).

## РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

**№ 136** (5 сер.). Я родился въ девятнадцатомъ вѣкѣ. Въ 1908 году число моихъ лѣтъ равнялось суммѣ цифръ года моего рожденія. Когда я родился?

Согласно съ условіемъ задачи, годъ рожденія разсматриваемаго лица выражается числомъ  $1800 + 10x + y$ , гдѣ  $x$  и  $y$  суть однозначныя числа. Въ 1908 году возрастъ разсматриваемаго лица выражается разностью

$$1908 - 1800 - 10x - y = 108 - 10x - y,$$

а сумма цифръ года рожденія есть:

$$1 + 8 + x + y = 9 + x + y.$$

Слѣдовательно, согласно съ условіемъ задачи,

$$108 - 10x - y = x + y + 9,$$

откуда

$$2y = 99 - 11x. \quad (1)$$

Такъ какъ  $x$  число цѣлое, то правая часть равенства (1) дѣлится на 11, а потому и  $2y$  должно дѣлиться на 11. Такъ какъ  $2y$  не кратнѣ 11, если предположить, что  $y$  есть значащая цифра, то остается допустить, что  $y$  равно нулю; поэтому [см. (1)]  $99 - 11x = 0$ , откуда  $x = 9$ . Итакъ, годъ рожденія разсматриваемаго лица выражается числомъ 1890.

А. Соловьевъ-Дербовъ (Барановичи); Н. Н.; Т. Сваричовскій (Брянскъ); Г. О-яниъ (Владикавказъ); О. Гулевичъ (Брацлавъ); М. Добровольскій (Сердобскъ); П. Безчеревныхъ (Козловъ); Н. Родіоновъ (Тверь); Г. Оппоковъ (Вильна); Н. Морозовъ (Царское Село); В. Рябовъ (Павловскъ); П. Прозоровскій (Тамбовъ); Н. Доброгаевъ (Одесса); Б. Двойринъ (Одесса); Г. Пистракъ (Лодзь); С. Коганъ (Винница); М. Черняевъ (Саратовъ).



№ 139 (5 сер.). Стороны  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  разделены точками  $M$  и  $N$  такъ, что имѣетъ мѣсто равенство

$$\frac{AM}{BM} = \frac{CN}{AN}.$$

Найти геометрическое мѣсто срединъ отръзка  $MN$ .

Назовемъ черезъ  $X$  средину отръзка  $MN$  и проведемъ черезъ  $X$  и  $N$  прямую, параллельную  $BC$ , до встрѣчи съ  $AB$  соответственно въ точкахъ  $P$  и  $N'$ . Тогда изъ параллельности прямыхъ  $NN'$  и  $BC$  и даннаго намъ равенства  $\frac{AM}{BM} = \frac{CN}{AN}$  выводимъ:

$$\frac{AN'}{N'B} = \frac{AN}{NC} = \frac{BM}{AM}, \quad \frac{AN'}{AN' + N'B} = \frac{BM}{AM + BM} = \frac{AN'}{AB} = \frac{BM}{AB},$$

а потому

$$AN' = MB. \quad (1)$$

Съ другой стороны, изъ параллельности прямыхъ  $NN'$  и  $XP$  имѣемъ:

$$\frac{N'P}{PM} = \frac{NX}{MX} = 1,$$

откуда

$$N'P = PM. \quad (2)$$

Изъ равенствъ (1) и (2) слѣдуетъ:

$$AN' + N'P = PM + MB, \text{ или } AP = PB.$$

Итакъ, каждая изъ точекъ  $X$  искомага геометрическаго мѣста лежитъ на прямой  $PX$ , проведенной черезъ средину  $P$  стороны  $AB$  параллельно  $BC$ , или, что все равно, на прямой  $PQ$ , соединяющей средину сторонъ  $AB$  и  $AC$ , а потому эта прямая и есть искомое геометрическое мѣсто.

М. Добровольскій (Сердобскъ); С. Коганъ (Винница); Б. Двойринъ (Одесса); С. Слугиновъ (Казань); П. Безчеревныхъ (Козловъ); В. Богомоловъ (Шацкъ); С. Адамовичъ (Варшава).

(1)

Редакторъ приватъ-доцентъ В. Ф. Каганъ.

Издатель В. А. Гернетъ.



Обложка  
щется



Обложка  
щется