№ 523.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

Элементарной Математики,

издаваемый

В. А. Гернетомъ

подъ редакціей

Приватъ-Доцента В. Ф. Кагана.

XLIV-го Семестра № 7-й.

ОДЕССА.
Типографія Акц. Южно-Русскаго О-ва Печ. Дѣла. Пушкинская, 18.
1910.

XLIV Сем. № 7.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 523.

О вписанныхъ четырехугольникахъ.

Д. Ефремова.

Объ ортоцентрѣ вписаннаго четырехугольника.

1. Было доказано, что перпендикуляры изъ рединъ сторонъ вписаннаго четырехугольника на стороны противоположныя (считая въ числѣ противоположныхъ сторонъ четырехугольника и двѣ діагонали его) пересѣкаются въ одной точкѣ*); эта точка была названа ортоцентромъ вписаннаго четырехугольника.

Извѣстно также, что прямая, соединяющая ортоцентръ вписаннаго четырехугольника съ центромъ описаннаго круга, проходитъ черезъ центръ медіанъ четырехугольника и дѣлится въ немъ пополамъ.

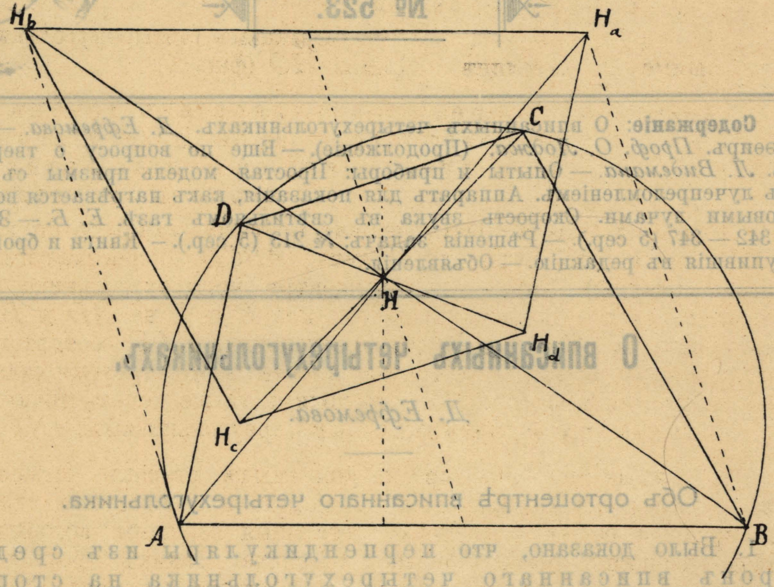
Оказывается, что, кромѣ этихъ семи прямыхъ, черезъ ту же точку проходятъ еще двадцать прямыхъ, связанныхъ съ четырехугольникомъ**).

*) См. „Вѣстникъ", № 448—449, стр. 97.

**) „Nouv. Ann. de Mathém.", 1908, p. 442.

2. Теорема. Прямыя, соединяющія вершины вписаннаго четырехугольника, съ ортоцентрами треугольниковъ, составленныхъ тремя другими вершинами его, пересѣкаются въ ортоцентрѣ H этого четырехугольника.

Дѣйствительно, если H_a, H_b, H_c, H_d суть ортоцентры треугольниковъ BCD, CDA, DAB и ABC, то четырехугольникъ $H_a H_b H_c H_d$ равенъ и гомотетиченъ съ четырехугольникомъ $ABCD$ *); центромъ гомотетіи этихъ четырехугольниковъ служитъ точка пересѣченія діагоналей параллелограмма ABH_aH_b или средина прямой, соединяющей средины противоположныхъ сторонъ его AB и $H_a H_b$; пря-



Фиг. 1.

мая же эта совпадаетъ съ высотами четырехугольниковъ $ABCD$ и $H_a H_b H_c H_d$ **), соотвѣтствующими сторонамъ ихъ CD и $H_c H_d$; слѣдовательно, средина ея совпадаетъ съ общимъ ортоцентромъ H этихъ четырехугольниковъ, а потому прямыя AH_a, BH_b, CH_c, и DH_d пересѣкаются въ точкѣ H (фиг. 1).

3. Теорема. Прямая Симсона, соотвѣтствующая вершинѣ вписаннаго четырехугольника, относительно трехугольника, составленнаго тремя другими вершинами его, проходитъ черезъ ортоцентръ четырехугольника.

---

*) См. „Нѣкоторыя свойства вписаннаго четырехугольника“ въ № 320 „Вѣстника“.

**) Такъ называются перпендикуляры изъ средины каждой стороны четырехугольника на сторону противоположную.

Ибо прямая Симсона вершины A относительно треугольника BCD проходитъ черезъ середину AH_a (фиг. 1), которая совпадаетъ съ ортоцентромъ H четырехугольника $ABCD$. То же справедливо и для прямыхъ Симсона вершинъ B, C, D относительно треугольниковъ CDA, DAB и ABC.

Такимъ образомъ, четыре прямыя Симсона, соотвѣтствующія вершинамъ вписаннаго четырехугольника, пересѣкаются въ ортоцентрѣ этого четырехугольника.

4. Теорема. Три прямыя, соединяющія точки, симметричныя съ центромъ круга, описаннаго около четырехугольника, относительно противоположныхъ сторонъ его (или діагоналей), пересѣкаются въ ортоцентрѣ четырехугольника.

Ибо эти прямыя параллельны медіанамъ четырехугольника, пересѣкающимся въ серединѣ I прямой HO (фиг. 1).

5. Теорема. Три перпендикуляра изъ точекъ пересѣченія противоположныхъ сторонъ (и діагоналей) вписаннаго четырехугольника на медіаны этихъ сторонъ проходятъ черезъ ортоцентръ четырехугольника.

Положимъ, что KL есть медіана противоположныхъ сторонъ BC и AD вписаннаго четырехугольника $ABCD$, пересѣкающихся въ точкѣ E (фиг. 2). Такъ какъ ортоцентръ четырехугольника H есть точка пересѣченія перпендикуляровъ изъ K и L на AD и BC, перпендикуляры же эти суть высоты треугольника KLE, соотвѣтствующія вершинамъ его K и L, то третья высота этого треугольника, т. е. перпендикуляръ изъ E на KL, проходитъ также черезъ точку H.

Тѣ же разсужденія примѣнимы и къ треугольникамъ MNF и PQG.

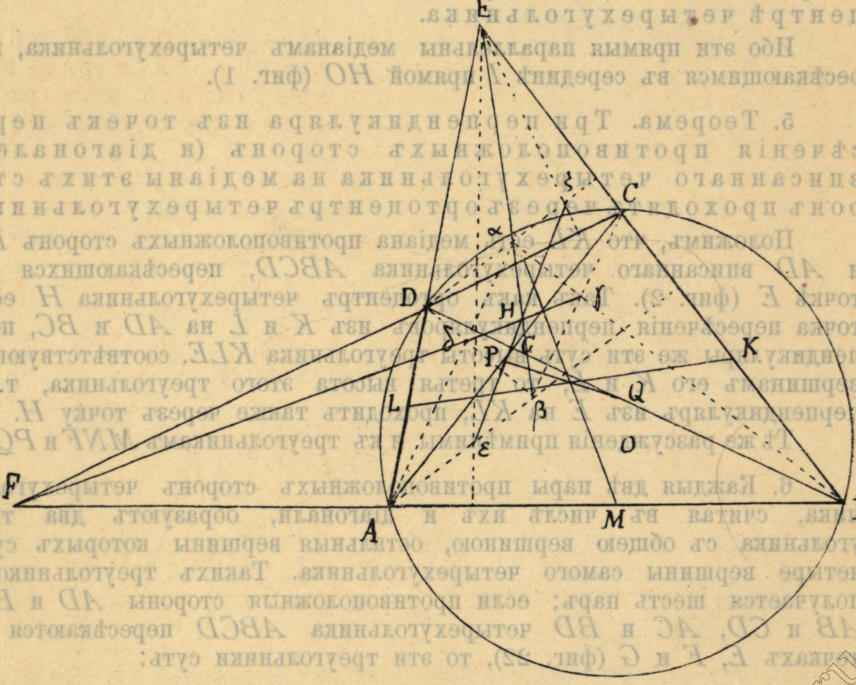
6. Каждыя двѣ пары противоположныхъ сторонъ четырехугольника, считая въ числѣ ихъ и діагонали, образуютъ два треугольника съ общею вершиною, остальныя вершины которыхъ суть четыре вершины самого четырехугольника. Такихъ треугольниковъ получается шесть паръ; если противоположныя стороны AD и BC, AB и CD, AC и BD четырехугольника $ABCD$ пересѣкаются въ точкахъ E, F и G (фиг. 22), то эти треугольники суть:

AGB и CGD, BGC и AGD,
AEB и CED, BFC и AFD,
AEC и BED, AFC и BFD.

Относительно этихъ треугольниковъ М. Детёфъ (M. Deteuf) доказалъ слѣдующую теорему:

Теорема. Прямыя, соединяющія ортоцентры двухъ треугольниковъ, составленныхъ двумя парами противоположныхъ сторонъ вписаннаго четырехугольника, проходятъ черезъ ортоцентръ этого четырехугольника.

Обозначимъ ортоцентры двухъ паръ треугольниковъ AGB и CGD, BGC и AGD черезъ α и β, γ и δ. Такъ какъ $\alpha\delta$ и $\beta\gamma$ перпендикулярны къ BD, а $\alpha\gamma$ и $\beta\delta$ перпендикулярны къ AC, то четырехугольникъ $\alpha\gamma\beta\delta$ — параллелограммъ, и пересѣченіе діагоналей его $\alpha\beta$ и $\gamma\delta$ совпадаетъ съ пересѣченіемъ прямыхъ, проведенныхъ черезъ середины $\alpha\delta$ и $\beta\delta$ параллельно $\alpha\gamma$ и $\alpha\delta$; эти же прямыя совпадаютъ съ перпендикулярами изъ срединъ BD и AC на AC и BD и потому пересѣкаются въ ортоцентрѣ четырехугольника H; слѣдовательно, и прямыя $\alpha\beta$ и $\gamma\delta$ пересѣкаются въ H. Обозначивъ затѣмъ черезъ ε и ζ ортоцентры треугольниковъ AEB и CED, изъ параллелограмма $\alpha\varepsilon\beta\zeta$, заключаемъ, что діагональ его $\varepsilon\zeta$ также проходитъ черезъ H, и т. д.



Фиг. 2.

Такимъ образомъ, шесть прямыхъ, соединяющихъ ортоцентры каждой пары указанныхъ выше треугольниковъ, пересѣкаются въ ортоцентрѣ вписаннаго четырехугольника.

7. Изъ указанныхъ теоремъ видно, что въ ортоцентрѣ H вписаннаго четырехугольника пересѣкаются слѣдующія 27 прямыхъ:

a) шесть перпендикуляровъ изъ средины каждой стороны четырехугольника на противоположную сторону его;

b) прямая, соединяющая центръ описаннаго круга съ центромъ медіанъ четырехугольника;

c) четыре прямыя, соединяющія вершины четырехугольника съ ортоцентрами противолежащихъ треугольниковъ;

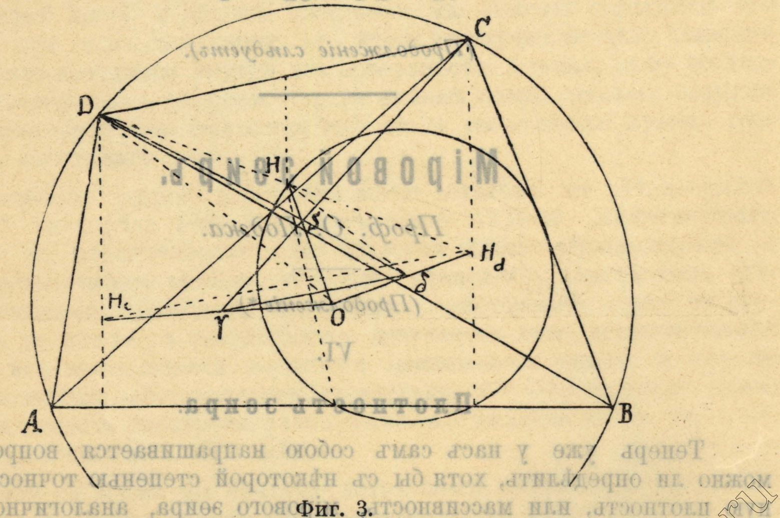
d) четыре прямыя Симсона, построенныя для каждой вершины четырехугольника относительно противолежащаго треугольника;

e) три прямыя, соединяющія точки, симметричныя съ центромъ описаннаго круга относительно каждой пары противоположныхъ сторонъ четырехугольника;

f) три перпендикуляра изъ точекъ пересѣченія противоположныхъ сторонъ четырехугольника на медіаны этихъ сторонъ;

g) шесть прямыхъ, соединяющихъ ортоцентры двухъ треугольниковъ съ общею вершиною, составленныхъ двумя парами противоположныхъ сторонъ четырехугольника.

8. Теорема. Окружности Эйлера четырехъ треугольниковъ, составленныхъ двумя послѣдовательными сторонами и діагональю вписаннаго четырехугольника, проходятъ черезъ ортоцентръ этого четырехугольника.



Фиг. 3.

Обозначимъ черезъ H_d ортоцентръ треугольника ABC, составленнаго сторонами AB и BC и діагональю AC вписаннаго четырехугольника $ABCD$ (фиг. 3). Такъ какъ центръ круга Эйлера для этого треугольника есть средина OH_d, ортоцентръ же четырехугольника H есть средина DH_d (2), то разстояніе точки H отъ центра круга Эйлера равно $\frac{1}{2}$ OD; слѣдовательно, окружность Эйлера треугольника ABC проходитъ черезъ H.

Разсужденіе и выводъ этотъ примѣнимы и къ треугольникамъ BCD, CDA и DAB.

9. Теорема. Прямыя, соединяющія вершины вписаннаго четырехугольника съ центрами окружностей Эйлера противолежащихъ треугольниковъ, пересѣкаются на прямой, соединяющей ортоцентръ четырехугольника съ центромъ описаннаго круга.

Обозначимъ черезъ α, β, γ, δ центры окружностей Эйлера треугольниковъ BCD, CDA, DAB и ABC (фиг. 3). Прямыя OH и $D\delta$ суть медіаны треугольника ODH_d; поэтому, если эти прямыя пересѣкаются въ S, то

$$\frac{OS}{HS}=2;$$

отсюда ясно, что прямыя $A\alpha$, $B\beta$ и $C\gamma$ проходятъ также черезъ точку S.

10. Слѣдствіе. Четырехугольникъ $\alpha\beta\gamma\delta$ обратно гомотетиченъ съ четырехугольникомъ $ABCD$ въ отношеніи 1:2; центромъ гомотетіи для нихъ служитъ точка S; ибо изъ треугольниковъ $\gamma S\delta$ и CSD видно, что

$$\frac{\gamma S}{CS}=\frac{\delta S}{DS}=\frac{\gamma\delta}{CD}=\frac{1}{2}.$$

(Продолженіе слѣдуетъ).

Міровой эѳиръ.

Проф. О. Лоджа.

*(Продолженіе *).*

VI.

Плотность эѳира.

Теперь уже у насъ самъ собою напрашивается вопросъ — возможно ли опредѣлить, хотя бы съ нѣкоторой степенью точности, истинную плотность, или массивность, мірового эѳира, аналогично соотвѣтствующей величинѣ для веществъ, привычныхъ нашимъ чувствамъ.

Посылки, на которыхъ можетъ быть основана оцѣнка плотности, или массивности, мірового эѳира, по сравненію съ тою же величиною для матеріи, основываются на нижеслѣдующихъ соображеніяхъ, опирающихся, въ свою очередь, на электрическую теорію вещества. Послѣдняя теорія, или, вѣрнѣе, рабочая гипотеза, основана на нѣкоторомъ допущеніи; однако, допущеніе это оправдывается многими соображеніями, и доводы въ его пользу приведены во многихъ книгахъ, — между прочимъ, въ моей книгѣ „Электроны", а также въ концѣ новаго изданія „Совре-

* См. № 522 „Вѣстника".

менныхъ взглядовъ на электричество“ и въ моей „Роменсовской лекціи“, напечатанной въ 1903 году. Говоря коротко, допущеніе это заключается въ томъ, что матерія составлена, тѣмъ или инымъ способомъ, изъ электроновъ; послѣдніе же, въ свою очередь, разсматриваются, какъ особый своеобразный видъ, или опредѣленное структурное состояніе, того же самаго эѳира. Дѣйствительно, для теоріи, о которой идетъ рѣчь, достаточно разсматривать только электроны, допустивъ, что они имѣютъ ту массу, которую приходится приписать имъ на основаніи опыта, и тѣ размѣры, которые вытекаютъ для нихъ изъ теоріи электричества. Въ основѣ этой идеи, уже имѣющей въ настоящее время опытное подтвержденіе, лежитъ отождествленіе инерціи электроновъ съ ихъ самоиндукціей, т. е. съ дѣйствіемъ на нихъ магнитнаго поля, окружающаго ихъ все время, пока они находятся въ движеніи.

Масса, или инерція, электрона есть величина того же порядка, что и тысячная доля атома водорода. Линейный размѣръ электрона,— скажемъ, его діаметръ,—приблизительно равенъ одной стотысячной части того, что обыкновенно называютъ размѣромъ молекулы или атома; а эта послѣдняя величина равна одной десятимилліонной долѣ *мм.*

Но зная массу и объемъ электрона, мы можемъ опредѣлить его плотность при томъ допущеніи, что масса электрона всецѣло зависитъ отъ того, что находится внутри его поверхности. Однако, этого послѣдняго допущенія мы съ увѣренностью не имѣемъ права сдѣлать: бо́льшая часть массы электрона находится внѣ его и вычисляется путемъ разсмотрѣнія магнитнаго поля.

Излагаемый вопросъ разобранъ мною детально въ „Philosophical Magazine“ за апрѣль 1907 года и въ главѣ XVII-ой „Современныхъ взглядовъ на электричество“. Не повторяя здѣсь доказательствъ, я считаю достаточнымъ сказать, что, хотя вычисленіе можетъ быть сдѣлано различными способами, совершенно непохожими одинъ на другой, тѣмъ не менѣе въ результатахъ получается лишь незначительная разница; всѣ вычисленныя плотности оказываются одного и того же порядка величины, составляя приблизительно 10^{12} CGS единицъ; иначе сказать, плотность электрона равна милліону милліоновъ *гр.* на 1 *кб. см.*, или тысячѣ тоннъ на 1 *кб. мм.*

Наряду съ этимъ мы повсюду встрѣчаемъ данныя, заставляющія утверждать, что эѳиръ несжимаемъ; доказательства въ пользу этого приведены въ главѣ I ой „Современныхъ взглядовъ на электричество“. И въ самомъ дѣлѣ, основная среда, наполняющая пространство, — если только она вообще существуетъ, — должна быть, по моему сужденію, абсолютно несжимаема; въ противномъ случаѣ, она состояла бы изъ частей, и намъ пришлось бы искать нѣчто еще болѣе основное для заполненія промежутковъ.

Итакъ, эѳиръ несжимаемъ, а электронъ, по предположенію, состоитъ просто и исключительно изъ эѳира; отсюда вытекаетъ, что электронъ не можетъ представлять собою ни сгущенія ни разрѣженія эѳира, а долженъ быть нѣкоторой особенностью строенія или нѣкоторой частью, почему-нибудь отличающейся отъ остального. Возможно, напримѣръ, что онъ представляетъ собою нѣчто аналогичное вихревому кольцу, отличаясь отъ остального эѳира въ кинетическомъ отношенiи, т. е. въ силу своего вращательнаго движенiя; или, быть можетъ, онъ отличается въ статическомъ отношенiи, будучи чѣмъ-нибудь такимъ, что можно назвать центромъ натяженiя или мѣстомъ, гдѣ произошла деформацiя крученiя, или, можетъ быть, даже чѣмъ-нибудь такимъ, чего нельзя въ настоящее время представить себѣ достаточно ясно и опредѣленно; въ этомъ направленiи были сдѣланы, впрочемъ, разныя попытки.

Проще всего будетъ для насъ представлять себѣ электронъ, какъ нѣчто подобное узлу на кускѣ шнурка. Узелъ отличается отъ остального шнурка только въ томъ отношенiи, что шнурокъ въ этомъ мѣстѣ завязанъ; плотность здѣсь та же самая, но отличiе отъ остального все же есть; и чтобы узелъ пересталъ быть узломъ, т. е. развязался, нужно примѣнить къ нему процессъ, произвести который надъ электрономъ мы до сихъ поръ не умѣемъ. Если когда-нибудь этотъ процессъ окажется выполнимымъ, то тѣмъ самымъ электроны можно будетъ разрѣшать, сливая ихъ съ общей массой мiрового эѳира, лишеннаго всякихъ мѣстныхъ особенностей, — съ той частью его, которая независима отъ того, что мы называемъ „матерiей“.

Идея, важная для нашихъ теперешнихъ цѣлей, состоитъ лишь въ слѣдующемъ: плотность простого, или лишеннаго особенностей, эѳира — та же самая, что и плотность закрученнаго, завязаннаго или вообще какъ-нибудь видоизмѣненнаго эѳира, составляющаго электронъ. Поэтому доказательство, упомянутое выше, — по крайней мѣрѣ въ разработанномъ видѣ, — ведетъ къ заключенiю, что плотность эѳира, по порядку своей величины, въ 10^{12} разъ превосходитъ плотность воды.

Эта оцѣнка не должна удивлять насъ (хотя я и допускаю, что въ ней есть кое-что чрезвычайно удивительное); тѣмъ болѣе, что многiя независимыя между собою доказательства приводятъ къ одному и тому же выводу, — что обыкновенная матерiя представляетъ собою вещество очень пористое или волокнистое, съ промежутками большими по сравненiю съ тѣми пространствами, которыя дѣйствительно заняты составляющими его ядрами. Матерiю, построенную изъ электроновъ, необходимо представлять себѣ скорѣе похожей на солнечную систему, или, лучше, на млечный путь; и тамъ и здѣсь имѣются безчисленныя точки съ большими промежутками между ними. Отсюда вытекаетъ, что средняя плотность всей совокупности точекъ или всѣхъ матерiальныхъ частицъ, вмѣстѣ взятыхъ, — другими словами, отношенiе ихъ общей массы къ занятому объему, — есть величина чрезвычайно малая.

Въ необозримомъ пространствѣ Вселенной, какъ цѣлаго, комокъ настоящаго вещества поразительно малъ по сравненiю съ объемомъ пустого пространства, — это видно непосредственно; и вотъ, въ мiрѣ атомовъ мы находимъ въ маломъ размѣрѣ подобныя же условiя. Даже тотъ матерiалъ, который мы считаемъ наиболѣе плотнымъ, по своей массивности чрезвычайно ничтоженъ въ сравненіи съ непретерпѣвшимъ никакого измѣненія эѳиромъ, заполняющимъ гораздо большую часть его объема.

Говоря о плотности матеріи, мы въ дѣйствительности, хотя и безсознательно, выражаемъ групповую плотность видоизмѣненнаго эѳира, составляющаго матерію, — плотность, отнесенную не къ единицѣ, а къ цѣлому аггрегату; совершенно такъ же мы могли бы опредѣлить групповую, или среднюю, плотность облака или тумана. По разсчету на единицу, облако имѣетъ плотность воды; по разсчету на цѣлое, оно оказывается неуловимо тонкимъ образованіемъ, едва обладающимъ какою-нибудь плотностью. То же самое справедливо и для паутины, можетъ быть и для кометныхъ хвостовъ, справедливо и для млечнаго пути, и для вселенной и, какъ теперь оказывается, даже для обыкновеннаго вещества.

Разсмотримъ, напримѣръ, среднюю плотность матеріальнаго міра. Она выйдетъ почти невѣроятно малой. Другими словами, количество матеріи въ пространствѣ, по сравненію съ объемомъ занятаго ею пространства, почти безконечно мало. Лордъ Кельвинъ доказываетъ („Philosophical Magazine“, Aug. 1901 и Jan. 1902), что, въ концѣ концовъ, оно должно быть буквально безконечно-малымъ, т. е. что объемъ пространства въ безконечное число разъ больше общаго объема вещества, находящагося въ немъ. Въ противномъ случаѣ суммарная сила тяготѣнія, или, по крайней мѣрѣ, суммарный потенціалъ тяготѣнія, — величина, отъ которой, въ концѣ концовъ, зависитъ скорость, пріобрѣтаемая матеріальными тѣлами,—была бы гораздо больше, чѣмъ та, какую даетъ наблюденіе.

Вся видимая вселенная, заключенная въ предѣлахъ параллакса, равнаго $^1/_{1000}$ долѣ секунды дуги, по оцѣнкѣ лорда Кельвина, эквивалентна тысячѣ милліоновъ нашихъ солнцъ; и это количество вещества, при томъ распредѣленіи, какое въ дѣйствительности имѣется, обладаетъ средней плотностью въ 1.6×10^{-23} *гр.* на 1 *кб. см.* Слѣдуетъ вдуматься въ то, какъ чрезвычайно мала эта средняя, или аггрегатная, плотность матеріи въ видимой части пространства. Плотность, оцѣненная въ 10^{-23} CGS, означаетъ, что видимый космосъ во столько же разъ рѣже достижимой на опытѣ „пустоты“, составляющей стомилліонную долю атмосферы, во сколько разъ эта самая „пустота“ менѣе плотна, чѣмъ свинецъ.

Если мы имѣемъ право утверждать, что всякая обыкновенная матеріальная масса состоитъ, подобно космосу, изъ разрозненныхъ частицъ, расположенныхъ на разстояніяхъ, большихъ по сравненію съ ихъ объемомъ, то съ такимъ же правомъ мы можемъ утверждать и то, что аггрегатная плотность обыкновенныхъ веществъ, въ родѣ воды или свинца, весьма мала по сравненію съ плотностью непрерывной среды, въ которой они существуютъ и изъ которой, по предположенію, въ дѣйствительности составлены всѣ частицы. Такимъ образомъ, свинецъ относится къ эѳиру, въ смыслѣ плотности, почти вполнѣ такъ, какъ „пустота", о которой говорилось выше, относится къ свинцу. Основная же среда должна быть повсюду одинаковой плотности, независимо отъ того, матеріализована она или нѣтъ.

VII.

Дальнѣйшія разъясненія по поводу плотности и энергіи эѳира.

Читатель, можетъ быть, предположитъ, что, говоря о громадной плотности, или массивности, эѳира и нелѣпо-малой, сравнительно, плотности, или удѣльномъ вѣсѣ, грубаго вещества, я имѣю въ виду выразить мысль, что матерія представляетъ собою эѳиръ въ *разрѣженномъ* состояніи. Я, однако, не стремлюсь ни къ чему подобному. Взглядъ, который я защищаю, состоитъ въ томъ, что эѳиръ совершенно *непрерывенъ* и обладаетъ свойствомъ абсолютно *заполнять* пространство, и потому никакое разрѣженіе для него невозможно. Эѳиръ внутри матеріи какъ разъ такъ же плотенъ, какъ и снаружи, и ни чуть не плотнѣе. Матеріальная единица — скажемъ, электронъ — представляетъ собою лишь нѣкоторую особенность, или своеобразное видоизмѣненіе, того же самаго эѳира, при чемъ плотность его повсемѣстно остается одна и та же. То, что мы „ощущаемъ", какъ матерію, есть аггрегатъ, или скопленіе громаднаго числа такихъ единицъ.

Какъ же послѣ этого можно говорить о томъ, что вещество въ милліоны разъ рѣже или менѣе плотно, чѣмъ эѳиръ, изъ котораго оно, въ сущности, состоитъ? Пусть тѣ, кто чувствуетъ въ этомъ нѣкоторую трудность, подумаютъ о томъ, что они разумѣютъ подъ средней, или аггрегатной, плотностью прерывныхъ системъ, въ родѣ порошка, газа, осадка, снѣжной метели, облака или млечнаго пути.

Если мнѣ возразятъ, что неудобно сравнивать такую очевидно прерывную систему, какъ совокупность звѣздъ, съ такимъ повидимому сплошнымъ веществомъ, какъ воздухъ или свинецъ, — то я отвѣчу, что это вполнѣ и совершенно удобно; вѣдь и воздухъ и всякая другая извѣстная форма вещества есть, въ сущности, скопленіе частицъ, а подъ плотностью вещества мы всегда понимаемъ его среднюю плотность. Мы даже не знаемъ по настоящему его истинной, атомной плотности.

Выраженіе „удѣльный вѣсъ, или плотность, порошка" имѣетъ двоякій смыслъ. Оно можетъ означать либо удѣльный вѣсъ сухого порошка, какъ онъ есть, соотвѣтственно удѣльному вѣсу снѣга; либо же удѣльный вѣсъ частицъ, изъ которыхъ порошокъ состоитъ, соотвѣтственно удѣльному вѣсу льда.

То же самое справедливо и относительно вещества: мы могли бы подразумѣвать подъ плотностью либо плотность основного матеріала, изъ котораго сдѣланы единицы, т. е. эѳира; либо же, какъ это и дѣлается на практикѣ, — плотность аггрегатнаго скопленія, которое мы можемъ видѣть и трогать, напримѣръ, воды, желѣза, свинца и т. п.

Говоря, что плотность матеріи мала, — я имѣю въ виду, конечно, плотность въ послѣднемъ, обыкновенномъ смыслѣ слова. Говоря, что плотность эѳира велика, я хочу выразить, что дѣйствительное вещество, изъ котораго составлены тѣла — эти въ высшей степени пористыя скопленія, имѣетъ громадную, почти невѣроятно большую плотность. Это только иной способъ выраженія того, что конечныя единицы немногочисленны и удалены на большія разстоянія, т. е. что они въ высшей степени малы сравнительно съ разстояніями между ними. Планеты солнечной системы или міры въ небесахъ столь же немногочисленны и столь же рѣдко распредѣлены въ пространствѣ, и по этой причинѣ промежутки колоссальны по сравненію съ частями пространства, дѣйствительно занятыми скопленіями вещества.

Нужно замѣтить, что плотность сплошного вещества по необходимости, по самой логикѣ вещей, больше плотности прерывнаго аггрегата; при этомъ, конечно, подразумѣвается, что частицы аггрегата составлены изъ того же самаго матеріала, что и сплошное вещество. И дѣйствительно, въ первомъ случаѣ пространство занято повсюду, безъ всякихъ промежутковъ или разрывовъ; во второмъ же случаѣ въ веществѣ есть пустоты, — вещество имѣется здѣсь и тамъ, но не повсемѣстно.

Нужно сказать, что это же самое разсужденіе примѣнялось уже давнымъ-давно геніальнымъ Робертомъ Гукомъ, и я приведу здѣсь отрывокъ, найденный въ его посмертномъ собраніи сочиненій профессоромъ Пойнтингомъ и любезно переписанный имъ для меня.

„Матерія, по моему мнѣнію, въ сущности неизмѣнна и имѣетъ лишь опредѣленное распространеніе; она не можетъ быть измѣнена количестенно ни сгущеніемъ ни разрѣженіемъ; иными словами, не можетъ быть ни больше ни меньше этой стихіи, или сущности, какова бы она ни была, если только распространеніе, или содержаніе ея, остается то же самое; но каждое равное распространеніе содержитъ или представляетъ собою одинаковое количество матеріи; и самое плотное, тяжелое или самое массивное тѣло въ мірѣ содержитъ матеріи не больше, чѣмъ то, которое мы считаемъ наиболѣе разрѣженнымъ, тонкимъ, легкимъ или наименѣе массивнымъ изъ всѣхъ; взять для примѣра золото и эѳиръ, т. е. вещество, наполняющее полость выкачаннаго сосуда или полость стеклянной трубки барометра надъ ртутью. И даже, какъ я докажу ниже, полость эта болѣе занята, или болѣе плотно составлена изъ эѳира, въ обычномъ смыслѣ или пониманіи этого выраженія, чѣмъ золото изъ золота, по разсчету объемъ на объемъ; происходитъ это потому, что первая, т. е. масса эѳира, вся есть эѳиръ; но та масса золота, которую мы признаемъ, не вся есть золото; ибо съ золотомъ смѣшанъ эѳиръ, и при томъ въ гораздо большемъ количествѣ, чѣмъ обыкновенно предполагаютъ; такъ что то, что обыкновенно считаютъ или ошибочно признаютъ пустотою, на самомъ дѣлѣ болѣе плотно, чѣмъ золото, какъ таковое. Если же мы сравнимъ общее содержаніе одного съ содержаніемъ другого, при томъ же самомъ или равномъ распространеніи, то тогда оба они окажутся одинаково содержащими матерію или тѣло". [Изъ „Посмертныхъ трудовъ Роберта Гука", 1705, стр. 171-172. (По мемуару Дальтона, въ изданіи Смита)].

Способностью ясно выражать свои мысли, столь свойственной Ньютону, его современники не блистали. Профессоръ Пойнтингъ толкуетъ эту своеобразную попытку высказать свои мысли слѣдующимъ образомъ:—„Все пространство заполнено матеріей одинаковой плотности. Золото заполняетъ лишь небольшую часть предоставленнаго ему пространства и все-таки имѣетъ значительную массу. Во сколько же разъ больше должна быть вся масса, заполняющая это пространство сплошь!"

Здѣсь дѣлается скрытое допущеніе, что частицы аггрегата всѣ составлены изъ одного и того же непрерывнаго вещества, — т. е. что матерія построена изъ эѳира; такое допущеніе, во времена Гука, должно было быть не болѣе, какъ простымъ умозрѣніемъ. Но это умозрѣніе принадлежитъ къ числу тѣхъ, которыя временемъ оправдываются; передъ нами одна изъ истинъ, находящихся теперь на пути къ признанію.

Однако, отъ этого способа доказательства мы не зависимъ; мы основываемся только на опытномъ измѣреніи массы и на математической оцѣнкѣ объема электрона. И дѣйствительно, вычисленіе показываетъ, что, какъ бы ни опредѣлять массу — электростатическимъ ли, магнитнымъ или гидродинамическимъ путемъ, найденная величина отношенія массы къ дѣйствующему объему можетъ различаться только численнымъ коэффиціентомъ и не можетъ отличаться въ отношеніи порядка величины. Къ уклоненію отъ нашего заключенія могло бы привести только открытіе, что отрицательный электронъ не есть настоящая или главная матеріальная единица, а лишь вспомогательная составная часть, между тѣмъ какъ главную массу образуетъ болѣе объемистый положительный зарядъ. Однако, эта послѣдняя гипотеза въ настоящее время настолько неопредѣленна, что не можетъ быть полезной. Кромѣ того, масса такого заряда въ этомъ случаѣ оставалась бы необъясненной, и для вывода ея требовались бы дальнѣйшія соображенія. Соображенія эти, вѣроятно, привели бы насъ къ тому же самому, въ сущности, пониманію плотности эѳира, какое я ввелъ при вычисленіи этой плотности изъ разсмотрѣнія болѣе привычнаго для насъ и болѣе доступнаго изслѣдованію отрицательнаго электрона.

Можно спросить, почему, вообще, слѣдуетъ признавать, что эѳиръ имѣетъ нѣкоторую конечную плотность. Почему не допустить, что подобно тому, какъ онъ обладаетъ безконечной непрерывностью, онъ обладаетъ также и безконечной плотностью — что бы это ни значило, и что всѣ его свойства безконечны? Все это могло бы быть такъ, если бы это не было несправедливо для скорости свѣта. Перенося волны съ конечной и измѣримой скоростью, эѳиръ тѣмъ самымъ открылъ намъ свободный путь ко всевозможнымъ вычисленіямъ и числовымъ оцѣнкамъ. Свойства его именно вслѣдствіе этого оказываются по существу конечными — сколь бы безгранично ни было его полное протяженіе. Въ скобкахъ мы можемъ замѣтить, что „тяготѣніе“ до сихъ поръ отнюдь не проявило своего конечнаго характера; причина этого коренится въ томъ, что мы такъ мало о немъ знаемъ.

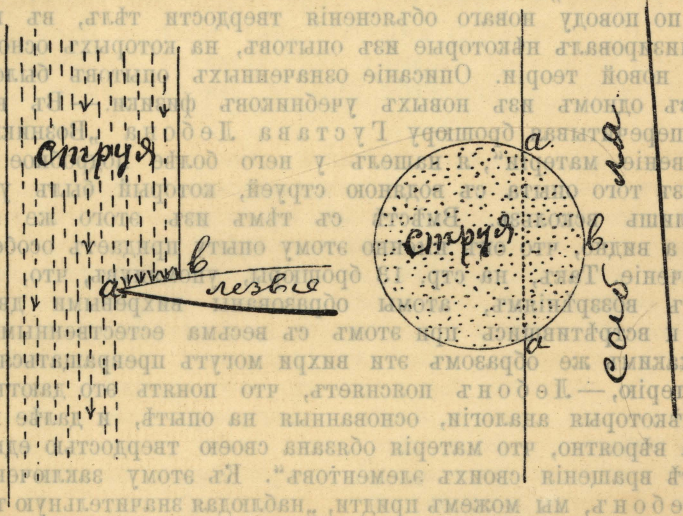
(Продолженіе слѣдуетъ).

Еще по вопросу о твердости тѣлъ.

Въ № 498 „Вѣстника Опытной Физики“ была помѣщена моя замѣтка по поводу новаго объясненія твердости тѣлъ, въ которой я проанализировалъ нѣкоторые изъ опытовъ, на которыхъ основываются авторы новой теоріи. Описаніе означенныхъ опытовъ было найдено мною въ одномъ изъ новыхъ учебниковъ физики. — Въ настоящее время, перечитывая брошюру Густава Лебона „Возникновеніе и исчезновеніе матеріи“, я нашелъ у него болѣе подробное описаніе какъ-разъ того опыта съ водяною струей, который былъ упомянутъ мною лишь вскользь. Вмѣстѣ съ тѣмъ изъ этого же сочиненія Лебона видно, что онъ именно этому опыту придаетъ особенно важное значеніе. Такъ, на стр. 13 брошюры, упомянувъ, что, по современнымъ воззрѣніямъ, атомы образованы вихревыми движеніями эѳира, и встрѣтившись при этомъ съ весьма естественнымъ вопросомъ, какимъ же образомъ эти вихри могутъ превращаться въ твердую матерію, — Лебонъ поясняетъ, что понять это даютъ возможность нѣкоторыя аналогіи, основанныя на опытѣ, и далѣе говоритъ; „весьма вѣроятно, что матерія обязана своею твердостью единственно быстротѣ вращенія своихъ элементовъ“. Къ этому заключенію, говоритъ Лебонъ, мы можемъ придти, „наблюдая значительную твердость, пріобрѣтаемую жидкостью, находящеюся въ состояніи большой скорости“. — Вслѣдъ за этимъ Лебонъ даетъ описаніе самаго опыта, который заключается въ томъ, что черезъ вертикально стоящую трубу, высотою въ пятьсотъ метровъ, пускаютъ внизъ струю воды, діаметромъ въ 2 *см.*, и эту струю (очевидно, по выходѣ ея у нижняго конца трубы) невозможно перебить ударомъ сабли, пущенной со всею силою. Не давая никакого анализа этого явленія, Лебонъ лишь вновь настаиваетъ на томъ, что тутъ заключается вѣроятное объясненіе твердости матеріи.

Со своей стороны, я держусь по отношенію этого опыта того же мнѣнія, какое проведено мною и въ предыдущей замѣткѣ, а именно: дѣло не въ возникновеніи будто бы твердости, а просто въ совершеніи огромной работы на маломъ протяженіи и въ ничтожный моментъ времени, но далеко не ничтожнымъ количествомъ матеріи. Въ самомъ дѣлѣ, — попробуемъ разсмотрѣть тотъ же опытъ детально. Представимъ себѣ струю воды и проникающее въ нее лезвіе сабли въ увеличенномъ видѣ, какъ изображено на прилагаемомъ чертежѣ.

Очевидно, частицы воды, падающія съ огромной быстротою внизъ, будутъ ударяться о поверхность лезвія (между буквами a и b), а затѣмъ отскакивать отъ нихъ въ сторону (влѣво), гдѣ онѣ, впрочемъ, будутъ встрѣчать сопротивленіе сосѣднихъ, столь же быстро мчащихся частицъ. Въ результатѣ должно, какъ реакція, получиться движеніе лезвія внизъ и отчасти вправо, т. е. должно получиться уклоненіе лезвія отъ водяной струи. Но насколько энергично будутъ дѣйствовать частицы воды? Чтобы выяснить себѣ это, вычислимъ скорость водяной струи у нижняго конца трубы, пользуясь для простоты формулой свободнаго паденія тѣлъ: $h = \frac{1}{2} gt^2$.



Въ нашемъ опытѣ $h = 500$ *м.*; слѣдовательно, имѣемъ $t =$ около 10 секундъ, а скорость около 100 *м.* въ секунду. Предположимъ теперь, что лезвіе сабли продержится въ положеніи, указанномъ на чертежѣ, въ силу своей инерціи одну десятую долю секунды. Очевидно, за это время на его поверхность ab успѣетъ обрушиться столбикъ воды высотою въ 10 *м.*, который, при величинѣ поверхности ab хотя бы въ $^1/_2$ *кв. см.*, будетъ вѣсить болѣе одного фунта. Падая съ вышеуказанной быстротой, эта масса воды, по законамъ элементарной механики, произведетъ такое же давленіе на край сабли, какое получилось бы, если бы мы легонько опустили на саблю (напримѣръ, со скоростью полутора аршинъ въ секунду) 250 пудовъ! Разумѣется, при такомъ прикосновеніи вынуждена будетъ отступить рука любого Геркулеса.

Мнѣ могутъ возразить, что, можетъ быть, все-таки, твердость алмаза объясняется движеніемъ частицъ, именно — такой же самой быстротой движенія ихъ, какъ только-что разобранная, почему и отъ алмаза сабля также отскакиваетъ. Но въ томъ то и дѣло, что тутъ нѣтъ той огромной массы частицъ, какую мы нашли въ струѣ, и нѣтъ того простора движенія. Струя имѣетъ протяженіе въ нѣсколько сотъ саженей, частицы, давленіе коихъ мы приняли въ разсчетъ, проходятъ 1000 *см.*, и ихъ на этомъ протяженіи — милліарды; а что заключается въ небольшомъ кусочкѣ алмаза? Не забудемъ, что твердость алмаза проявляется даже въ крупинкѣ его, даже въ мельчайшей пылинкѣ! Правда, въ нашемъ распоряженіи остается скорость; наша фантазія можетъ увелить ее до сотенъ тысячъ верстъ въ секунду, но какъ вмѣстить такую скорость въ частицы пылинки и какъ быть съ огромной центробѣжной силой, если мы придадимъ атомамъ (или частицамъ) круговое движеніе (а для прямолинейнаго движенія ихъ, очевидно, мѣста не будетъ)? Словомъ, тутъ возникаетъ много вопросовъ, и врядъ ли явленіе твердости въ скоромъ времени перестанетъ быть загадкою

P. S. Пользуюсь случаемъ, чтобы сказать нѣсколько словъ по поводу замѣтки С. Гальперсона*). Содержаніе ея сводится къ двумъ пунктамъ. Во-первыхъ, г. Гальперсонъ дѣлаетъ изъ моей статьи**) выводъ, что, если ту же самую работу, которую производитъ быстро вращающійся кругъ — картонный въ одномъ случаѣ и желѣзный въ другомъ, заставить произвести болѣе медленно, то результатъ былъ бы такой же, какъ и при быстромъ вращеніи, — конечно, при условіи соотвѣтственнаго удлиненія времени. На самомъ же дѣлѣ такого вывода, строго говоря, изъ моей статьи сдѣлать нельзя, ибо я въ своемъ разсужденіи принимаю во вниманіе, кромѣ чисто-механическаго дѣйствія, также накопленіе теплоты (одностороннее — на разрѣзываемомъ объектѣ); а при медленномъ вращеніи круга о теплотѣ, конечно, не пришлось бы говорить. Но если бы даже допустить такой выводъ, то еще не извѣстно, не подтвердился ли бы онъ на дѣлѣ, если только произвести соотвѣтствующій опытъ, при строгомъ соблюденіи всѣхъ гарантій его точности. На повседневный же опытъ ссылаться рисковано. Впрочемъ, есть такой повседневный опытъ, который говоритъ довольно громко въ мою пользу, и я его уже привелъ въ своей статьѣ, а именно — опытъ, выражающійся въ поговоркѣ: „капля по каплѣ камень долбитъ“.

Вѣдь это неоспоримый фактъ; между тѣмъ тутъ на лицо и медленное дѣйствіе и громадная разница въ твердости (между камнемъ и водою), далеко большая той, какая имѣется между картономъ и карандашомъ.

---

*) См „Вѣстникъ“, № 519.

**) См. „Вѣстникъ“, № 498.

Второе возраженіе г. Гальперсона относится къ моему разсчету, надо замѣтить, чисто предположительному, — о разницѣ температуры въ трущихся тѣлахъ. Я готовъ положить въ основу разсчета приведенную имъ температуру искры (500°); но что же изъ этого слѣдуетъ? Цифры въ общемъ повысятся, но огромная разница между ними останется, а въ ней вся суть. Замѣчанія же г. Гальперсона, что Лебонъ не могъ бы не замѣтить повышенія температуры круга на 2°, я не особенно склоненъ раздѣлить уже по одному тому, что у Лебона я именно не встрѣтилъ почти никакихъ указаній на детали опыта, да онѣ его, повидимому и не интересовали, такъ какъ, повторяю, Лебонъ вовсе не пытается анализировать тѣ опыты, которыми онъ подкрѣпляетъ свои предположенія.

По крайней мѣрѣ, мнѣ, а также, очевидно, и г. Гальперсону, не пришлось встрѣтить такого анализа въ тѣхъ сочиненіяхъ Лебона, съ которыми мы ознакомились.

Въ заключеніе остается пожелать, чтобы для выясненія даннаго вопроса были произведены надлежащіе опыты.

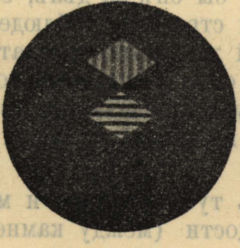
Л. Видеманъ.

Опыты и приборы.

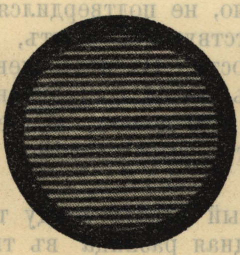
Простая модель призмы съ двойнымъ лучепреломленіемъ.

Проф. Чермакъ (Czermak) указываетъ чрезвычайно простую и очень наглядную модель двойного лучепреломленія.

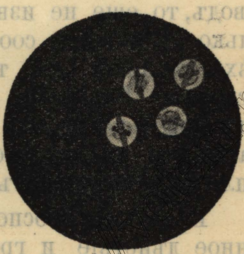
Фиг. 1 представляетъ двойное изображеніе ромбической діафрагмы, какъ его даетъ съ проекціонной линзой ахроматическая призма изъ известковаго шпата.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

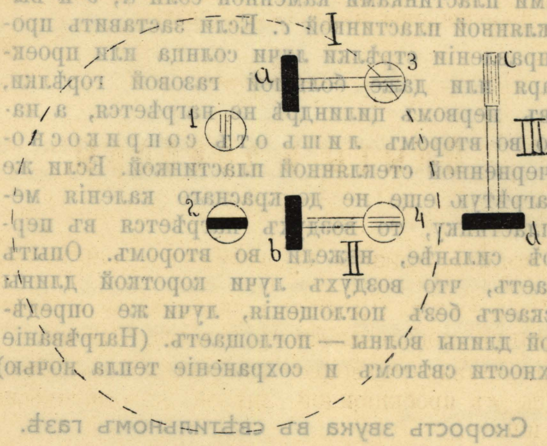


Фиг. 3.

При вращеніи призмы „обыкновенное“ изображеніе остается посерединѣ, „необыкновенное“ описываетъ кругъ. Это можно представить вращеніемъ картоннаго кружка (фиг. 1). Направленія колебаній въ обоихъ изображеніяхъ отмѣчены красными штрихами для обыкновеннаго изображенія и синими для необыкновеннаго. Если передъ этою моделью поставить „поляризаторъ“ (фиг. 2) въ формѣ рѣшетки, то одно направленіе колебаній будетъ проходить, другое же перекрещиваться— изображенія при вращеніи „шпата“ будутъ то исчезать, то появляться.

Эта модель — предшествующая другой болѣе сложной. Послѣдняя состоитъ опять изъ темнаго картоннаго круга, на которомъ 2 бѣлыхъ кружочка — изображенія отъ шпата, одинъ съ краснымъ горизонтальнымъ штрихомъ (однимъ), другой съ синимъ вертикальнымъ. Они соотвѣтствуютъ обыкновенному и необыкновенному изображенію первой шпатовой призмы. Они неподвижны — шпатъ не вращается.

Вторая шпатовая призма должна давать отъ каждаго изображенія опять по два — соотвѣтственно своимъ обыкновенному и необыкновенному лучамъ. Эти изображенія представлены сочлененіями сторонъ равносторонняго параллелограмма. Поперечныя плечи его несутъ



Фиг. 4.

(фиг. 3) такіе же кружочки [(3) и (4)] съ соотвѣтствующими красными (горизонтальный штрихъ въ начальномъ положеніи) и синими штрихами, которые при вращеніи даютъ всегда положеніе главнаго сѣченія второго шпата и становятся то параллельно, то на крестъ съ колебаніями, которыя получаются въ первомъ шпатѣ. Кружки связаны вертикальнымъ равнымъ плечомъ параллелограмма, которое показываетъ направленіе колебаній въ обоихъ первоначальныхъ изображеніяхъ, даваемыхъ первымъ шпатомъ.

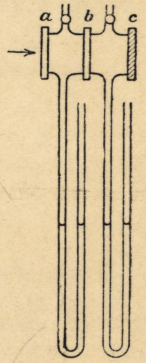
Такимъ образомъ, изображенія то постепенно какъ бы угасаютъ, то загораются — при вращеніи параллелограмма.

Фиг. 4 даетъ отдѣльно части модели въ той формѣ, въ которой ее удобно устроить: 1 и 2 — неподвижные бѣлые кружки; на 1 синій штрихъ, на 2 — красный (сплошная черточка).

I и II — поперечныя плечи параллелограмма. Полоски *a* и *b* центрами скрѣпляются шарнирами съ центрами кружковъ 1 и 2 и при вращенiи проектируются на нихъ; *a* и *b* представляютъ собой штрихи, соотвѣтствующiя колебанiямъ въ „обыкновенныхъ“ изображенiяхъ отъ второго шпата. Затѣмъ на центры кружковъ 3 и 4 со штрихами, соотвѣтствующими „необыкновеннымъ“ изображенiямъ, накладываются опять такъ же полоски *c* и *d*, которые, проектируясь на нихъ, даютъ неизмѣнно направленiе колебанiй въ обыкновенномъ и необыкновенномъ изображенiи отъ перваго шпата.

Аппаратъ для показанiя, какъ нагрѣвается воздухъ тепловыми лучами.

Аппаратъ состоитъ изъ двухъ стеклянныхъ цилиндровъ, которые внизу соединены съ манометрами съ подкрашенною жидкостью, а вверху снабжены крышами. Концы цилиндровъ закрыты плоско отшлифованными пластинками каменной соли *a*, *b* и вычерненной стеклянной пластинкой *c*. Если заставить проходить въ направленiи стрѣлки лучи солнца или проекцiоннаго фонаря или даже большой газовой горѣлки, то воздухъ въ первомъ цилиндрѣ не нагрѣется, а нагрѣется только во второмъ лишь отъ соприкосновенiя съ зачерненной стеклянной пластинкой. Если же приблизить нагрѣтую еще не до краснаго каленiя металлическую пластинку, то воздухъ нагрѣется въ первомъ цилиндрѣ сильнѣе, нежели во второмъ. Опытъ этотъ показываетъ, что воздухъ лучи короткой длины волны пропускаетъ безъ поглощенiя, лучи же опредѣленной большой длины волны — поглощаетъ. (Нагрѣванiе земной поверхности свѣтомъ и сохраненiе тепла ночью).



Скорость звука въ свѣтильномъ газѣ.

P. Meutzner указываетъ на болѣе удобный способъ демонстрированiя скорости звука въ свѣтильномъ газѣ, чѣмъ обыкновенно употребляемый способъ съ трубой Кундта. Въ органную трубу вдуваютъ свѣтильный газъ. Meutzner бралъ открытую оловянную органную трубу тона a_2 (la_4), сверху прикрывая ее цилиндромъ (высотой 35 *см.*), чтобы труба вся была въ атмосферѣ газа. Труба звучала какъ e_3 (mi_5). Числа колебанiй, относятся, какъ $\frac{5}{3} : 2 \cdot \frac{5}{4}$ или 2 : 3; слѣдовательно, скорость звука въ газѣ у него была въ $1\frac{1}{2}$ раза болѣе, чѣмъ въ воздухѣ. Для демонстрацiи повышенiя звука достаточно просто вдувать свѣтильный газъ въ открытую или закрытую трубу, въ которую предварительно вдувался, какъ обыкновенно, воздухъ.

Е. Б.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей приватъ-доцента Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 342 (5 сер.). Вычислить сумму

$$C_n^r C_m^0 + C_n^{r-1} C_m^1 + \cdots + C_n^{r-k} C_m^k + \cdots + C_n^0 C_m^r,$$

гдѣ n, m, r суть данныя цѣлыя числа, при чемъ $r < n$, $r < m$ и C_p^q обозначаетъ вообще число сочетаній изъ p элементовъ по q.

Л. Богдановичъ (Ярославль).

№ 343 (5 сер.). Найти общій видъ n-го члена u_n ряда, въ которомъ каждый членъ, начиная съ третьяго, равенъ $\frac{1}{k}$ суммы двухъ предшествующихъ ему членовъ. Преобразовать формулу n-аго члена, полагая $k = a(a+1)$.

Б. Двойринъ (Одесса).

№ 344 (5 сер.). Дана сумма S площадей трехъ треугольниковъ, имѣющихъ данныя основанія a, b, c. Опредѣлить minimum суммы площадей квадратовъ, построенныхъ на высотахъ этихъ треугольниковъ.

П. Безчеревныхъ (Козловъ).

№ 345 (5 сер.). Разложить на множителей выраженія

$$x^{2n+1} + 3x^{2n}y + 5x^{2n-1}y^2 + \cdots + (2n+1)x^{n+1}y^n + (2n+1)x^n y^{n+1} + \cdots$$
$$\cdots + 3xy^{2n} + y^{2n+1},$$

$$x^{2n+1} + x^{2n}y + \cdots + x^{n+1}y^n - x^n y^{n+1} - x^{n-1}y^{n+2} - \cdots - xy^{2n} - y^{2n+1}.$$

В. Богомоловъ (Ст. Усть-Медвѣдицкая).

№ 346 (5 сер.). Найти кубическое уравненіе, корни котораго x, y, z связаны соотношеніями:

$$\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}=m,$$

$$\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}=n,$$

$$\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}=p,$$

гдѣ m, n, p суть данныя числа.

А. Фрумкинъ (Одесса).

№ 347 (5 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\sec x \sec (x-45^0)+\sqrt{8(1+\sin 4x)}=(\sqrt{2})^5.$$

Сколько рѣшеній имѣетъ это уравненіе, если дано, что x есть уголъ треугольника?

А. Баграмовъ (Тифлисъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 213 (5 сер.) *Рѣшить систему уравненій*

$$\frac{\mathrm{b}(\mathrm{x}+\mathrm{y})}{\mathrm{x}+\mathrm{y}+\mathrm{cxy}}+\frac{\mathrm{c}(\mathrm{z}+\mathrm{x})}{\mathrm{z}+\mathrm{x}+\mathrm{bzx}}=\mathrm{a},$$

$$\frac{\mathrm{c}(\mathrm{y}+\mathrm{z})}{\mathrm{y}+\mathrm{z}+\mathrm{ayz}}+\frac{\mathrm{a}(\mathrm{x}+\mathrm{y})}{\mathrm{x}+\mathrm{y}+\mathrm{cxy}}=\mathrm{b},$$

$$\frac{\mathrm{a}(\mathrm{z}+\mathrm{x})}{\mathrm{z}+\mathrm{x}+\mathrm{bzx}}+\frac{\mathrm{b}(\mathrm{y}+\mathrm{z})}{\mathrm{y}+\mathrm{z}+\mathrm{ayz}}=\mathrm{c}.$$

Предположимъ сперва, что

$$x\neq 0,\quad y\neq 0,\quad z\neq 0;\quad x+y\neq 0,\quad y+z\neq 0,\quad z+x\neq 0;\quad x+y+cxy\neq 0,$$
$$y+z+ayz\neq 0,\quad z+x+bzx\neq 0.$$

Введемъ обозначенія

$$\frac{x+y}{x+y+cxy}=\zeta,\quad \frac{y+z}{y+z+ayz}=\xi,\quad \frac{z+x}{z+x+bzx}=\eta. \qquad (1)$$

При наличности сдѣланныхъ нами допущеній ξ, η, ζ имѣютъ опредѣленныя численныя значенія, отличныя отъ нуля, и данная система можетъ быть записана въ видѣ:

$$b\zeta+c\eta=a,\quad c\xi+a\zeta=b,\quad a\eta+b\xi=c. \qquad (2)$$

Исключая ξ и η обычнымъ путемъ [это исключеніе можно выполнить также, сложивъ уравненія (2), помноженныя предварительно соотвѣтственно на числа a, b, $(-c)$], получимъ: $2ab\zeta = a^2 + b^2 - c^2$, откуда, предполагая, что $a \neq 0$: $b \neq 0$, $c \neq 0$, находимъ значеніе ζ и, по аналогіи, значенія ξ и η, а именно,

$$\zeta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \quad \xi = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \eta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}. \tag{3}$$

Первое изъ равенствъ (3) даетъ намъ [см. (1)]: $\dfrac{x+y}{x+y+cxy} = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$,

при чемъ, такъ какъ въ силу сдѣланныхъ выше допущеній $\xi \neq 0$, мы должны имѣть $a^2 + b^2 - c^2 \neq 0$; поэтому послѣднее равенство можно записать въ видѣ: $\dfrac{x+y+cxy}{x+y} = \dfrac{2ab}{a^2+b^2-c^2}$, или $1 + \dfrac{cxy}{x+y} = \dfrac{2ab}{a^2+b^2-c^2}$, откуда $\dfrac{cxy}{x+y} = \dfrac{c^2-(a-b)^2}{a^2+b^2-c^2} = \dfrac{(b+c-a)(a+c-b)}{a^2+b^2-c^2}$. Такимъ образомъ, послѣднее равенство даетъ намъ:

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{c(a^2+b^2-c^2)}{(b+c--a)(a+c-b)}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{c(a^2+b^2-c^2)}{(b+c-a)(a+c-b)}.$$

Итакъ, мы приходимъ къ уравненіямъ.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{c(a^2+b^2-c^2)}{(b+c-a)(a+c-b)}, \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{a(b^2+c^2-a^2)}{(a+c-b)(a+b-c)},$$
$$\frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{b(a^2+c^2-b^2)}{(a+b-c)(b+c-a)}, \tag{4}$$

послѣднія два изъ которыхъ написаны по аналогіи съ первымъ, при чемъ, въ силу сдѣланныхъ выше предположеній относительно неизвѣстныхъ и допущенія $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, мы должны имѣть:

$$a^2 + b^2 - c^2 \neq 0, \quad a^2 + c^2 - b^2 \neq 0, \quad b^2 + c^2 - a^2 \neq 0; \quad a + b - c \neq 0,$$
$$a + c - b \neq 0, \quad b + c - a \neq 0.$$

Приводя, при этихъ предположеніяхъ, вторыя части уравненій системы (4) къ одному знаменателю, мы можемъ записать ее въ видѣ:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{C}{M}, \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{A}{M}, \quad \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{B}{M}, \tag{5}$$

гдѣ

$$M = (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a), \quad A = a(b+c-a)(b^2+c^2-a^2),$$
$$B = b(a+c-b)(a^2+c^2-b^2), \quad C = c(a+b-c)(a^2+b^2-c^2).$$

Рѣшая систему (5) обычнымъ пріемомъ, получимъ:

$$\frac{1}{x} = \frac{B+C-A}{2M}, \quad \frac{1}{y} = \frac{A+C-B}{2M}, \quad \frac{1}{z} = \frac{A+B-C}{2M},$$

откуда, если каждое изъ выраженій $B+C-A$, $A+C-B$, $A+B-C$ отлично отъ нуля, находимъ:

$$x=\frac{2M}{B+C-A},\quad y=\frac{2M}{A+C-B},\quad z=\frac{2M}{A+B-C}. \tag{6}$$

Рѣшенія (6) удовлетворяютъ предположеніямъ $x\neq 0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$, $x+y\neq 0$ $y+z\neq 0$, $z+x\neq 0$, $x+y+cxy\neq 0$, $y+z+ayz\neq 0$, $z+x+bzx\neq 0$, если только коэффиціенты a, b, c удовлетворяютъ всѣмъ указаннымъ выше условіямъ. Дѣйствительно, $x\neq 0$, такъ какъ M не обращается въ нуль въ силу условій $a+b-c\neq 0$, $a+c-b\neq 0$, $b+c-a\neq 0$; по этой же причинѣ $y\neq 0$ и $z\neq 0$. Такъ какъ [см. (6)]

$$x+y=\frac{2M(A+C-B+B+C-A)}{(B+C-A)(A+C-B)}=\frac{4MC}{(B+C-A)(A+C-B)}$$

и такъ какъ $M\neq 0$ и $C\neq 0$ (въ силу условій $c\neq 0$, $a+b-c\neq 0$, $a^2+b^2-c^2\neq 0$), то и $x+y\neq 0$, и точно такъ же убѣждаемся, что $y+z\neq 0$ и $z+x\neq 0$. Наконецъ, если бы было $x+y+cxy=0$, то отсюда вытекало бы равенство $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=-c$, откуда, такъ какъ рѣшенія (6) удовлетворяютъ системѣ (4), мы имѣли бы, въ силу перваго изъ уравненій (4)

$$\frac{c(a^2+b^2-c^2)}{(b+c-a)(a+c-b)}=-c,\quad a^2+b^2-c^2=-[c^2-(a-b)^2]=-c^2+a^2+b^2-2ab,$$

т. е. $2ab=0$, а между тѣмъ, по условію, $a\neq 0$ и $b\neq 0$. Подобнымъ же образомъ убѣждаемся, что для рѣшеній (6) $y+z+ayz\neq 0$ и $z+x+bzx\neq 0$. Изъ всего сказаннаго видно, что рѣшенія (6) удовлетворяютъ предложенной системѣ уравненій, если имѣютъ мѣсто неравенства

$$\begin{gathered} a\neq 0,\ \ b\neq 0,\ \ c\neq 0;\ \ b+c-a\neq 0,\ \ a+c-b\neq 0,\ \ a+b-c\neq 0; \\ b^2+c^2-a^2\neq 0,\ \ a^2+c^2-b^2\neq a,\ \ a^2+b^2-c^2\neq 0 \end{gathered} \tag{7}$$

и если ни одно изъ выраженій $B+C-A$, $A+C-B$, $A+B-C$ не равно нулю. Замѣтимъ, что при наличности предположеній (7) лишь одно изъ послѣднихъ трехъ количествъ можетъ обратиться въ нуль. Въ самомъ дѣлѣ, изъ $B+C-A=0$ и $A+C-B=0$ мы имѣли бы, складывая, $2C=0$, что противно условіямъ (7). Если одно изъ количествъ $B+C-A$, $A+C-B$, $A+B-C$ обращается въ нуль, — напримѣръ, первое, — то первоначальная система удовлетворяется при $x=\infty$, $y=\frac{2M}{A+C-B}=\frac{M}{C}$, $z=\frac{2M}{A+B-C}=\frac{M}{B}$, если условиться принять равенства

$$\left[\frac{x+y}{x+y+cxy}\right]_{x=\infty}=\lim_{x=\infty}\left[\frac{x+y}{x+y+cxy}\right]=\lim_{x=\infty}\left(\frac{1+\frac{y}{x}}{1+cy+\frac{y}{x}}\right)=\frac{1}{1+cy},$$

$$\left[\frac{z+x}{z+x+bzx}\right]_{x=\infty}=\frac{1}{1+bz}.$$

Случаи, когда одно изъ выраженій (7) обращается въ нуль, требуютъ особаго изслѣдованія. Такъ, при $a=0$ данная система принимаетъ видъ (принимая $y + z \neq 0$, иначе второе и третье уравненіе теряютъ смыслъ):

$$\frac{b(x+y)}{x+y+cxy} + \frac{c(z+x)}{z+x+bzx} = 0, \tag{8}$$

$$c = b, \quad b = c. \tag{9}$$

Итакъ, если $a = 0$, то рѣшеніе возможно лишь при соблюденіи условія (9). Если и $b = 0$, то [см. (9)] и $c = 0$, и значенія всѣхъ неизвѣстныхъ неопредѣленны. Если $b \neq 0$ и $b = c$, то система сводится [см. (8)] къ одному уравненію

$$\frac{x+y}{x+y+bxy} + \frac{z+x}{z+x+bzx} = 0,$$

изъ котораго, выбирая x и y произвольно, можно вообще опредѣлить z, какъ изъ уравненія первой степени. Если $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, но $a^2 + b^2 - c^2 = 0$, то [см. (3)] $\zeta = 0$, что можетъ быть лишь при $x + y = 0$, при чемъ ни одно изъ остальныхъ количествъ (7) навѣрно не равно нулю (напримѣръ, при $b^2 + c^2 - a^2 = 0$, сложивъ это равенство съ $a^2 + b^2 - c^2 = 0$, мы имѣли бы $2b^2 = 0$, т. е. $b = 0$; изъ $b + c - a = 0$ вытекало бы $a^2 + b^2 - (a - b)^2 = 2ab = 0$, т. е. $a = 0$ или $b = 0$). Въ этомъ случаѣ данная система рѣшается съ помощью послѣднихъ двухъ равенствъ (5), которыя, при $x + y = 0$, т. е. при $y = -x$, даютъ: $\frac{1}{z} - \frac{1}{x} = \frac{A}{M}$, $\frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{B}{M}$. Наконецъ, при $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ и $b + c - a = 0$ получимъ, какъ и въ общемъ случаѣ:

$$\frac{x+y}{x+y+cxy} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{a^2+b^2-(a-b)^2}{2ab} = 1,$$

откуда (конечно, предполагая $x+y+cxy \neq 0$) $x+y = x+y+cxy$, т. е. $cxy = 0$. Слѣдовательно, $x = 0$ или $y = 0$ (но не одновременно $x = 0$ и $y = 0$, такъ какъ тогда членъ $\frac{b(x+y)}{x+y+cxy}$ теряетъ смыслъ). При $x = 0$ данная система принимаетъ видъ:

$$b + c = a, \quad \frac{c(y+z)}{y+z+ayz} + a = b, \quad a + \frac{b(y+z)}{y+z+ayz} = c,$$

или

$$\frac{c(y+z)}{y+z+ayz} = b - a, \quad \frac{b(y+z)}{y+z+ayz} = c - a, \quad b + c = a.$$

Третье изъ этихъ равенствъ, по условію, соблюдается, а первыя два, въ силу условія $b + c = a$, обращаются лишь въ одно уравненіе $\frac{y+z}{y+z+ayz} = -1$, изъ котораго, давая y произвольное (но не равное нулю, какъ показано ниже) значеніе, можно вообще опредѣлить z; неизвѣстное же x имѣетъ опредѣленное значеніе, а именно: $x = 0$. Предположеніе $y = 0$ невозможно при $b + c = a$, такъ какъ, при $y = 0$, второе уравненіе данной системы обращается въ $c + a = b$, откуда, вмѣстѣ съ $b + c = a$, вытекаетъ $c = 0$, что противно условію.

П. Безчеревныхъ (Козловъ); *Б. Двойринъ* (Одесса).

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника", подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

Г. Григорьевъ. *Курсъ физики.* Для средней общеобразовательной школы и для самообразованія. Часть I. 243 рис. и 8 портретовъ. Изданіе Т-ва „Знаніе". С.-Петербургъ, 1910. Стр. 320. Ц. 1 р. 60 к.

Б. А. Марковичъ. *Геометрія пространства.* Часть I. Курсъ старшихъ классовъ средней школы. „Книга для учащихся". Изданіе Т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1910. Стр. 176. Ц. 80 к.

Б. А. Марковичъ. *Геометрія пространства.* Часть I. Курсъ старшихъ классовъ средней школы. „Книга для преподавателя". Изданіе Т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1910. Стр. 255. Ц. 1 р. 25 к.

Д. Левитусъ, преподаватель С.-Петербургской гимназіи и реальнаго училища Л. Д. Лентовской. *Курсъ элементарной алгебры* для среднихъ учебныхъ заведеній. Часть I. Изданіе Т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1910. Стр. 183. Ц. 50 к.

В. И. Поповъ. *Основные законы химіи и химическія формулы.* Химія для самообразованія. Часть II. Изд. Т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1910. Стр. 88. Ц. 35 к.

В. И. Поповъ. *Самодѣльные приборы и значеніе ихъ для преподаванія физики.* Съ приложеніемъ списка упрощенныхъ приборовъ. Изданіе Т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1910. Стр. 44. Ц. 15 к.

В. В. Рюминъ, инж.-техн. *Простѣйшіе опыты по химіи.* 525 систематизированныхъ опытовъ для средней школы и любительской лабораторіи. 2-ое изданіе, исправленное и дополненное, съ рисунками въ текстѣ. Изданіе Т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1910. Стр. 248. Ц. 75 к.

В. В. Рюминъ, инж.-техн. *Опыты по электричеству на самодѣльныхъ приборахъ и въ физическомъ кабинетѣ средней школы.* Часть I. 245 опытовъ по магнетизму, электростатикѣ и гальванизму. Со 112-ю рисунками въ текстѣ. Изданіе книгоиздательства „Электричество и Жизнь". Николаевъ, 1910. Стр. 87. Ц. 85 к.

В. Н. Купріяновъ. *Сборникъ ариѳметическихъ упражненій съ пріемами устнаго рѣшенія задачъ на 4 ариѳметическія дѣйствія.* Для начальныхъ училищъ. Выпускъ I. Упражненія и задачи въ предѣлѣ первой сотни. Изданіе Т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1910. Стр. 79. Ц. 25 к.

Э. Борель, адъюнктъ-профессоръ Сорбонны и Высшей Нормальной Школы. *Ариѳметика.* Первый циклъ. Переводъ съ французскаго А. Долгова подъ редакціей Д. Л. Волковскаго. Изданіе Т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1910. Стр. 218 + IV. Ц. 60 к.

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

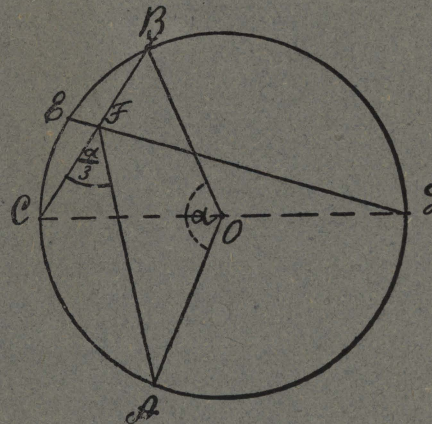
А. П. ОХИТОВИЧЪ. Геометрія круга (Циклометрія).

Рѣшеніе проблемы о геометрическомъ раздѣленіи дуги и угла на части пропорціональныя и равныя. Казань, 1908 г. Стр. XI+114+6=131. Цѣна 1 руб.

А. П. ОХИТОВИЧЪ. Новый (неопредѣленный) методъ рѣшенія алгебраическихъ уравненій. Ч. I-я. Общее рѣшеніе уравненій первой степени: неопредѣленныхъ и опредѣленныхъ. Казань, 1900 г. 333 стр. Цѣна 2 р. 50 к.

Обращаться въ книжные магазины:

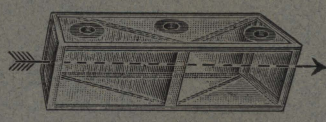
„Новаго Времени" (СПБ., Москва, Харьковъ, Саратовъ, Одесса), Н. Н. Карбасникова (СПБ., Москва, Варшава, Вильна), А. А. Дубровина (Казань), „Общественная Польза" (СПБ.), Оглоблина (Кіевъ), Т-ва Сытина (Москва), „Трудъ" (Москва). „Сотрудникъ Школъ" (Москва), Бельке (Кіевъ), „Товарищества" (Самара), „Волжанинъ" (Самара) и др.



$\smile AC=\smile CB$: $\smile AD=\smile DB$; $\smile CE=\smile EB$.

F. Helliye & C^o. | Ф. Геллиге и К^o.

FREIBURG im BREISGAU. | **ФРЕЙБУРГЪ въ БРЕЙЗГАУ.**



Призмы прямого зрѣнія по системѣ профессора Кёнигсбергера для проектированія спектровъ; большая свѣтосила; большія отверстія за 1/5 стоимости призмъ Вернике.

Сосуды изъ зеркальнаго стекла съ кислотоупорной замазкой для опытовъ по абсорбціи и спектроскопіи. Свѣтовые фильтры и Неслеровы трубки всѣхъ формъ и величинъ.

Зеркала для гальванометровъ, даже особенно тонкія въ 0,05 миллиметра.

Термометры для высокихъ температуръ, наполненные азотомъ при давленіи въ 25 атмосферъ. Нормальные термометры; по желанію съ удостовѣреніемъ о провѣркѣ отъ *TRA*.

Вентили для водоструйныхъ насосовъ; новая и хорошо дѣйствующая модель.

Пробные проспекты высылаются безплатно по первому требованію.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

Выходитъ 24 раза въ годъ отдѣльными выпусками, не менѣе 24 стр. каждый,

подъ редакціей приватъ-доцента В. Ф. Кагана.

ПРОГРАММА ЖУРНАЛА: Оригинальныя и переводныя статьи изъ области физики и элементарной математики. Статьи, посвященныя вопросамъ преподаванія математики и физики. Опыты и приборы. Научная хроника. Разныя извѣстія. Математическія мелочи. Темы для сотрудниковъ. Задачи для рѣшенія. Рѣшенія предложенныхъ задачъ съ фамиліями рѣшившихъ. Упражненія для учениковъ. Задачи на премію. Библіографическій отдѣлъ: обзоръ спеціальныхъ журналовъ; замѣтки и рецензіи о новыхъ книгахъ.

Статьи составляются настолько популярно, насколько это возможно безъ ущерба для научной стороны дѣла.

Предыдущіе семестры были **рекомендованы**: Учен. Ком. Мин. Нар. Пр. для гимн. муж. и жен., реальн. уч., прогимн., город. уч., учит. инст. и семинарій; Главн. Упр. Воен.-Учебн. Зав.—для воен.-уч. заведеній; Учен. Ком. при Св. Синодѣ — для дух. семинарій и училищъ.

Пробный номеръ высылается за одну 7-коп. марку.

Важнѣйшія статьи, помѣщенныя въ 190⁹/₁₀ г.

42-ой семестръ.

М. Зиминъ. Приближенное вычисленіе корней квадратнаго уравненія. — *П. В. Шепелевъ.* Объ изложеніи основныхъ понятій и законовъ механики.—*Э. Пикаръ.* Успѣхи динамическаго воздухоплаванія.—Проф. *Ф. Содди.* Отецъ радія.—*К. Граффъ.* Комета Галлея и ея предстоящее возвращеніе.—*А. Долговъ.* О построеніи нитяныхъ моделей многогранниковъ Пуансо.—Проф. *Ф. Содди.* Къ вопросу о происхожденіи радія.— Прив.-доц. *В. Каганъ.* Что такое алгебра?— Проф. *К. Делтеръ.* Искусственные драгоцѣнные камни.—*Л. Видеманъ.* По поводу новаго объясненія твердости тѣлъ.—Проф. *Г. Кайзеръ.* Современное развитіе спектроскопіи.— Новое сообщеніе проф. Рамзая о превращеніи химическихъ элементовъ.—*Д. Ефремовъ.* О четырехугольникахъ.— *А. Пугаченко.* Приближенное дѣленіе угла на n равныхъ частей при помощи циркуля и линейки.— Опыты проф. I. I. Косоногова по изслѣдованію электролиза при помощи ультра-микроскопа.— Проф. *А. Беккеръ.* Сжиженіе газовъ.

43-ій семестръ.

Г. Пуанкаре. Новая механика. — *П. Флоровъ.* Способъ вычисленія отношенія окружности къ діаметру съ пятью десятичными знаками, пригодный для преподаванія въ среднихъ школахъ.— *И. Мессершмидтъ.* Марсъ и Сатурнъ. — *П. Лоуэль.* Марсъ. — *С. Виноградовъ.* Развитіе понятія о числѣ въ его исторіи и въ школѣ.— *Е. Григорьевъ.* О разложеніи въ ряды функцій $\sin x$ и $\cos x$.— Проф. *Д. Синцовъ.* Къ вопросу о преподаваніи математики. Я. Штейнеръ, какъ преподаватель— *Г. Урбэнъ.* Являются ли основные законы химіи точными или же лишь приближенными. — *Е. Смирновъ.* Объ ирраціональныхъ числахъ. — *П. Ренаръ.* Авіація, какъ спортъ и наука. — Проф. *О. Лоджъ.* Міровой эѳиръ — *К. Лебединцевъ.* Понятіе объ ирраціональномъ числѣ въ курсѣ средней школы. — *Э. Кроммелинъ.* Происхожденіе и природа кометъ. — *А. Филипповъ.* Дѣйствія съ періодическими дробями. — Прив.-доц. *В. Бобынинъ.* Естественные и искусственные пути возстановленія историками математики древнихъ доказательствъ и выводовъ

Условія подписки:

Подписная цѣна съ пересылкой: за годъ **6 руб.**, за полгода **3 руб.** Учителя и учительницы низшихъ училищъ и всѣ учащіеся, выписывающіе журналъ **непосредственно изъ конторы редакціи**, платятъ за годъ **4 руб.**, за полугодіе **2 руб.** Допускается разсрочка подписной платы по соглашенію съ конторой редакціи. Книгопродавцамъ 5% уступки.

Журналъ за прошлые годы по 2 р. 50 к., а учащимся и книгопродавцамъ по 2 р. за семестръ. **Отдѣльные номера** текущаго семестра по 30 к., прошлыхъ семестровъ по 25 коп.

Адресъ для корреспонденціи: **Одесса. Въ редакцію „Вѣстника Опытной Физики“.**