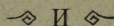


№ 540.

# ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ



## ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

ИЗДАВАЕМЫЙ

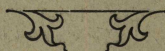
В. А. ГЕРНЕТОМЪ

ПОДЪ РЕДАКЦІЕЙ

Приватъ-Доцента В. Ф. КАГАНА.

---

XLV-го Семестра № 12-й.



ОДЕССА.

Типографія Акц. Южно-Русскаго О-ва Печ. Дѣла. Пушкинская, 18.

1911.

<http://vofem.ru>



Продолжается подписка на журналъ 1911 г. (XXII г.)

# „ВОПРОСЫ ФИЛОСОФІИ И ПСИХОЛОГІИ“.

Издание Московскаго Психологическаго О-ва, при содѣйствіи

**С.-ПЕТЕРБУРГСКАГО ФИЛОСОФСКАГО О-ВА.**

Вышла 2-я (мартъ—апрѣль) книга 1911 г. Ея содержаніе: Оправданіе права, **В. Шершеневича**. Жизнь и личность Григорія Саввича Сковороды, **В. Эрна**. Соціальная философія Роберта Оуэна, **С. Булгакова**. Понятія нормировки и детерминаціи въ биологіи, **А. Гурвича**. Философія Мэнъ де Бирана въ начальной стадіи ея развитія, **Н. Кудрявцева**. Телеологія Лейбница, **П. Блонскаго**. Критика и библіографія. I Обзоръ книгъ. II Библіографическій листокъ. Московское Психологическое Общество.

**ЮБИЛЕЙНЫЙ! № 103 ПРОДАЕТСЯ ОТДѢЛЬНО: ЦѢНА 1 р. 50 к.**

Журналъ выходитъ **пять** разъ въ годъ (приблизительно въ концѣ февраля, апрѣля, іюня, октября и декабря) книгами около 15 печатныхъ листовъ.

**Условія подписки:** на годъ (съ 1-го января 1911 г. по 1-е января 1912 г.) безъ доставки—**6 р.**, съ доставкой въ Москвѣ—**6 р. 50 к.**, съ пересылкой въ другіе города—**7 р.**, за границу—**8 р.**

Учащіеся въ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ, сельскіе учителя и сельскіе священники пользуются скидкой въ **2 р.** Подписка на льготныхъ условіяхъ принимается **только** въ конторѣ журнала: **Москва, б. Чернышевскій пер., домъ № 9, кв. 5** и въ книжныхъ магазинахъ: **Новаго Времени, Карбасникова, Вольфа, Оглоблина, Башмакова** и другихъ.

Редакторъ **Л. М. Лопатинъ.**

---

**Вышелъ № 6 (іюнь) журнала**

# „СОВРЕМЕННЫЙ МІРЪ“

**Содержаніе:** Стихотворенія: **П. Тулуба, А. Федорова** и **Саши Чернаго**; „Проклятый родъ“ (ром.), **И. Рукавишникова**; „Ингва“ (повѣсть), **В. Сѣрошевскаго**; „Буря“ (разск.), **Н. Матвѣева**; „Хирургъ“ (разск.), **Отто-Рункъ**; „Одержимый“, (ром.), **Камилла Лемонье**; „М. А. Балакиревъ въ Прагѣ“, **Г. Тимофеева**; „Въ Лузитанской республикѣ“, **Е. Адамова**; Новѣйшее социальное законодательство“, **Ф. Капелюша**; „Поэзія большого города“, **В. Фриче**; „У закавказскихъ духоворцевъ“, **В. Бончъ-Бруевича**; „Торгово-промышленная буржуазія о земскомъ обложеніи“, **І. Дроздова**; „Будни современной деревни“, **И. Коновалова**; „И. А. Коноваловъ“ (некрологъ), **В. Л-Р.**; „Национализмъ на всемъ готовомъ“, **І. Ларскаго**; „Внѣ жизни“, **Вл. Кранихфельда**; „Австрійскіе выборы“, **К. Вейдемюллера**. Критика и Библіографія. Новыя книги. Объявленія.

**Продолжается подписка на 1911 годъ.**

**Условія подписки** (съ дост. и пер.): годъ—**9 р.**; полгода—**4 р. 50 к.**; на 4 мѣс.—**3 р.** **Заграницу:** 12 р. годъ и 6 р. полгода. Безъ доставки въ Спб.: 8 р. годъ и 4 р. полгода.

**Проспекты высылаются по первому требованію.**

**Спб., Надеждинская, 33.**

Издательница **М. К. Іорданская.**

Редакторъ **Н. И. Іорданскій.**



# Вѣстникъ Опытной Физики

и

## ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 540.

**Содержаніе:** Волчокъ и его будущее въ технику. (Окончаніе). *Проф. Б. Доната.* — Между дѣломъ и шуткой въ области чиселъ. *А. Виттинга.* — А. Г. Голлосъ. Некрологъ. — Задачи №№ 432 — 435 (5 сер.) — Рѣшенія задачъ № 308 (5 сер.) — Объявленія.

### Волчокъ и его будущее въ технику.

*Проф. Б. Доната.*

(Окончаніе\*).

Гораздо острѣе еще стоитъ вопросъ объ устойчивости для летательныхъ аппаратовъ. Всѣ до сихъ поръ введенные въ конструкцію ихъ детали, какъ извѣстно, не привели къ автоматической устойчивости противъ опрокидывающихъ моментовъ. Естественно, что подумывали также и о волчокъ: но присоединить къ летательному аппарату тяжелый волчокъ — это значитъ идти на дальнѣйшее ухудшеніе несоотвѣтствія между требуемой силой и полезной нагрузкой, уже безъ того достаточно вреднаго; на это, конечно, трудно рѣшиться. Слѣдовательно, пока еще рѣчь идетъ о теоретической проблемѣ. Во всякомъ случаѣ, правильнѣе было бы прежде всего изучить вліяніе того вѣтяка, который несетъ съ собой всякій летательный аппаратъ въ своемъ пропеллерѣ и моторѣ, — тѣмъ болѣе, что послѣднимъ служить такъ называемый моторъ съ вращательнымъ движеніемъ, въ которомъ цилиндры звѣздчатой формы вращаются вокругъ оси. Вообще слѣдуетъ признать, что подобныя машины, при внезапныхъ измѣненіяхъ курса въ сторону или въ высоту, должны оказать вліяніе на положеніе летательнаго аппарата.

\*) См. № 539 „Вѣстника“.



Всѣ эти практическія примѣненія волчка имѣли до сихъ поръ интересъ скорѣе для специалиста, чѣмъ для профана. Дѣйствительно популярнымъ техническое примѣненіе волчка стало, несомнѣнно, только благодаря однорельсовому вагону.

Всѣмъ еще памятно то впечатлѣніе, которое произвелъ около года тому назадъ Бреннанъ-Шерловскій однорельсовый вагонъ, когда онъ въ первый разъ появился предъ публикой на выставкѣ въ Берлинскомъ зоологическомъ саду. Зрѣлище дѣйствительно было совершенно необычное и странное. Маленькая, открытая вагонетка на нѣсколько мѣстъ (рис. 4) катилась на двухъ колесахъ, помѣщенныхъ одно за другимъ, только по одному рельсу и съ прямо поразительной устойчивостью. Она измѣняла скорость движенія, легко скользила по самымъ крутымъ закругленіямъ и даже дѣлала остановки, чтобы впустить или выпустить пассажировъ. И при этомъ она не опрокидывалась.

Для того, чтобы понять принципъ устройства этого замѣчательнаго однорельсоваго вагона, обратимся прежде всего къ обыкновенному желѣзнодорожному вагону, который твердо стоитъ на своихъ двухъ рельсахъ. Если его нѣсколько наклонить на бокъ, то сила притяженія земли, имѣющая приложеніе въ его центрѣ тяжести, снова ставитъ его прямо. Слѣдовательно, его устойчивость на рельсахъ обезпечивается „внѣшними силами“. У однорельсоваго вагона условія, очевидно, совершенно иныя. Онъ находится въ неустойчивомъ равновѣсіи, и сила тяжести стремится не поставить его прямо, а опрокинуть его. Чтобы удержать его въ стоячемъ положеніи, необходимы, слѣдовательно, „внутреннія силы“, и волчокъ даетъ возможность получить такія силы, хотя вопросъ здѣсь по существу иной, чѣмъ въ судовомъ волчкѣ Шлика. Волчокъ Шлика, устроенный точно такимъ же образомъ, какъ на суднѣ, далъ бы слѣдующіе результаты. Когда вагонъ наклоняется, волчокъ, во всякомъ случаѣ, окажетъ этому извѣстное сопротивленіе; но въ то же время его ось, вслѣдствіе прецессіи, перейдетъ изъ вертикальнаго положенія также въ наклонное, только по направленію впередъ \*). И вотъ вагонъ уже стоитъ немного наклонно, такъ какъ онъ не можетъ, подобно судну, выпрямиться самъ по себѣ; а все сильнѣе дѣйствующая сила тяжести клонитъ его больше набокъ. Этому снова сопротивляется волчокъ, но въ то же время и его ось, вслѣдствіе прецессіи, все больше переходитъ въ горизонтальное положеніе. А какъ только это произойдетъ, вагонъ окончательно погибъ, потому что ось волчка вообще уже больше не опрокидывается, а только передвигается параллельно самой себѣ, и онъ больше не оказываетъ уже никакого сопротивленія; дѣло обстоитъ такъ, какъ будто волчка вовсе не существуетъ. Такимъ образомъ, волчокъ, устроенный по способу Шлика, могъ бы, правда, вначалѣ нѣсколько оттянуть паденіе волчка, но не могъ бы его вовсе предотвратить.

\*) Или назадъ, смотря по вращенію волчка.



Въ чемъ же заключается тайна устройства однорельсового вагона, которому даетъ устойчивость именно волчокъ?—Если читатель взглянетъ въ одну изъ предыдущихъ страницъ, онъ найдетъ тамъ слѣдующее установленное нами положеніе: принудительное опрокидываніе оси волчка въ направленіи наступающей прецессіи вызываетъ дѣйствіе силы, которая противоположна силѣ, вызвавшей прецессію. Если мы, такимъ образомъ, къ прецессіи, претерпѣваемой волчкомъ при опрокидываніи вагона, присоединимъ въ томъ же направленіи настолько еще дальнѣйшую прецессію, то вагонъ снова вы-

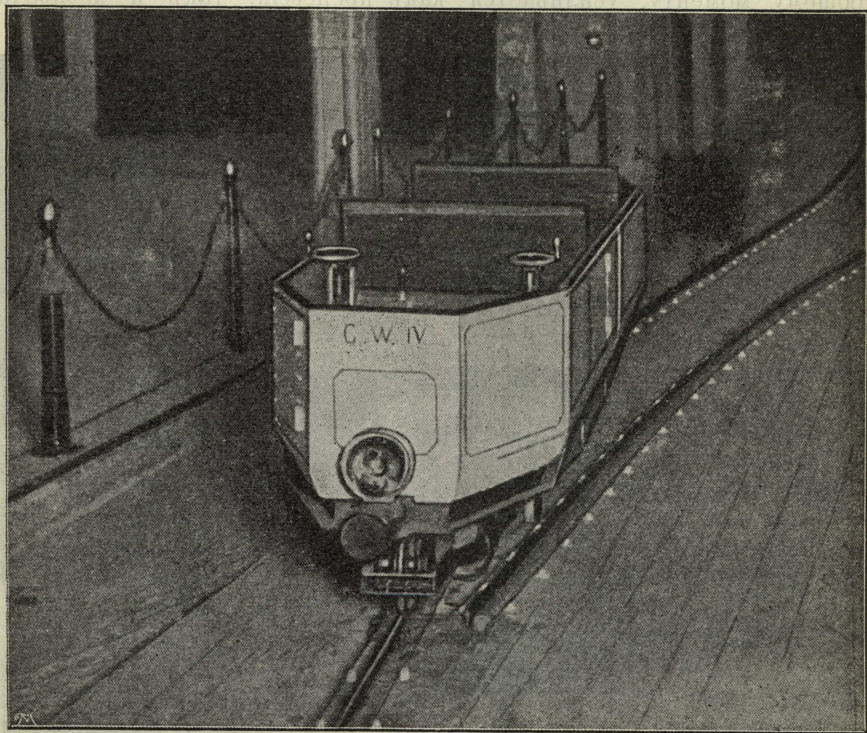


Рис. 4.

Однорельсовый вагонъ.

прямляется. Таково разрѣшеніе загадки. „Эта добавочная прецессія“ является, конечно, технически трудно разрѣшимой задачей; но затрудненія, повидимому, уже преодолены. Въ пробномъ вагонѣ Шерловскихъ инженеровъ установлены приблизительно на уровнѣ пола два волчка съ вертикальной осью, вращающіеся въ противоположныхъ направленіяхъ. Вагонъ приводится въ движеніе обычнымъ образомъ, подобно электрическому трамваю, электродвигателями, такъ же, какъ и волчки; число оборотовъ послѣднихъ доходитъ до 8000 въ минуту, а вѣсъ — до 57 кг. Когда вагонъ накренивается и волчки претерпѣ-



вають прецессию, то немедленно вступает въ дѣйствіе очень чувствительный механизмъ добавочной прецессіи, который усиливаетъ прецессию и выпрямляетъ вагонъ; послѣдній тогда по инерціи наклоняется немного въ другую сторону. Тамъ повторяется та же исторія, и такимъ образомъ однорельсовый вагонъ, строго говоря, постоянно колеблется по обѣ стороны своего вертикальнаго положенія, но, конечно, такъ слабо, что это едва замѣтно.

Если центръ тяжести вагона передвигается, напримѣръ, оттого, что пассажиры входятъ сбоку, то, благодаря этому новому опрокидывающему моменту, усиливается какъ прецессія, такъ и добавочная

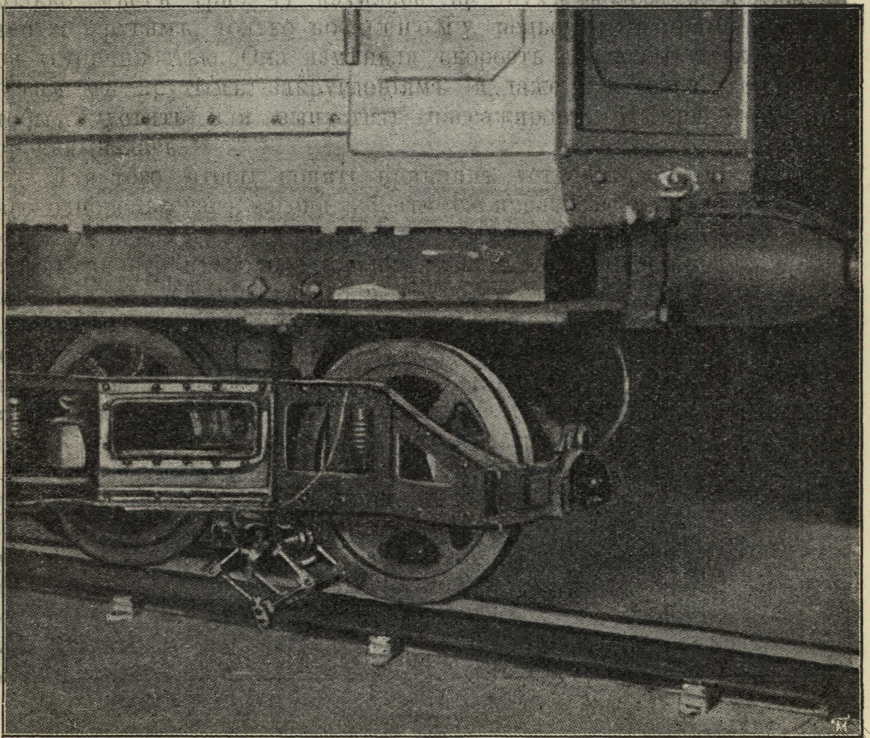


Рис. 5.

Передняя пара колесъ и пріемникъ тока въ однорельсовомъ вагонѣ. прецессія, и вагонъ наклоняется въ другую сторону, пока центръ тяжести снова не будетъ подпираться рельсомъ. Это во всякомъ случаѣ кажется довольно страннымъ. Надо представить себѣ катящійся только по одному рельсу вагонъ, который вслѣдствіе нагрузки на правой сторонѣ наклоняется на лѣвую сторону. Это зрѣлище совершенно необычно и настолько противорѣчитъ всякому опыту, что поразительный эффектъ его на наивнаго зрителя приходится назвать прямо колоссальнымъ.



На закругленіяхъ центробѣжная сила, дѣйствующая наружу, замѣняетъ собой одностороннюю нагрузку. Поэтому вагонъ наклоняется въ противоположную сторону, т. е. во внутрь, и, слѣдовательно, на закругленіяхъ автоматически становится такъ, что равнодѣйствующая изъ силы тяжести и центробѣжной силы всегда проходитъ черезъ центръ тяжести вагона и головку рельса. Такимъ образомъ, если предположить технически совершенное устройство, то пассажиръ не могъ бы даже замѣтить, что онъ вѣхалъ на закругленіе, и что вагонъ наклоняется; онъ могъ бы продолжать на этомъ закругленіи партію на биліардѣ, начатую имъ еще на прямомъ пути. Во всякомъ случаѣ, въ физическомъ смыслѣ однорельсовый вагонъ представляетъ собою самый безопасный экипажъ, — безразлично, стоитъ ли онъ на мѣстѣ или находится въ ходу, идетъ ли онъ по крутому закругленію или, какъ канатный плясунъ, скользитъ по крѣпкому проволочному канату надъ глубочайшей пропастью. И даже движущій механизмъ волчковъ можетъ пріостановиться, такъ какъ волчки и послѣ того — вращаются еще около часа. Только механизмъ для добавочной прецессіи не долженъ отказываться служить, потому что тогда, несмотря на всѣ подпорки, которыя можно опустить помощью ручного привода, вагонъ перевернулся бы.

Трудно представить себѣ картину будущаго, которое предстоитъ однорельсовому вагону. Тамъ, гдѣ земля для широкой полосы слишкомъ дорога, или гдѣ недостатокъ рабочихъ рукъ или неровная поверхность сами по себѣ препятствуютъ проложенію дороги стоящей двухрельсовой желѣзной дороги, какъ, напримѣръ, въ колоніальныхъ странахъ, — тамъ уже теперь однорельсовая дорога можетъ найти полезное примѣненіе. Но можетъ ли она когда-нибудь дать возможность осуществить мечту объ ускореніи сообщенія во всемъ мірѣ (при этомъ мечтаютъ о скорости, по крайней мѣрѣ, въ 200 км. въ часъ, — слѣдовательно, для разстоянія Берлинъ-Гамбургъ — о времени, немногимъ большемъ одного часа) — это вопросъ; съ этимъ еще придется немало подождать. Препятствія здѣсь прежде всего далеко не столько техническія, сколько экономическія.

Наконецъ, пришли къ мысли сдѣлать волчокъ компасомъ и этимъ выдвинули въ высшей степени интересную проблему. Здѣсь собственно идетъ дѣло о двойной проблемѣ: о движеніи одного волчка на другомъ, — въ томъ смыслѣ, что одинъ движется по другому, какъ карусель. На это не слѣдуетъ смотрѣть, какъ на хитроумную выдумку, годную просто лишь для математическаго упражненія. Нашъ земной шаръ вѣдь самъ представляетъ собою волчокъ, и, слѣдовательно, мы, строго говоря, не въ состояніи продѣлать опыта съ волчкомъ безъ того, чтобы этотъ опытъ фактически не происходилъ на другомъ волчкѣ.

Если бы при этомъ обнаружилась взаимная зависимость обоихъ движеній, то волчокъ проявилъ бы извѣстное отношеніе къ космическимъ величинамъ. Такъ оно и есть въ дѣйствительности, когда волчокъ подвѣшенъ въ кардановомъ подвѣсѣ и точка привѣса сов-



падаетъ съ центромъ тяжести всей системы. Подобнаго рода волчокъ съ тремя степенями свободы, сохраняя неизмѣннымъ направленіе своей оси, постоянно будетъ направленъ въ ту сторону мірового пространства, въ которую онъ былъ установленъ вначалѣ; такимъ образомъ, слѣдуя, напримѣръ, за восходящимъ свѣтиломъ, волчокъ въ теченіе 24 часовъ принималъ бы самыя различныя положенія относительно земной поверхности. Уже Фуко былъ такого мнѣнія, что съ помощью волчка мы должны быть въ состояніи продемонстрировать вращеніе земли въ короткое время,—такъ сказать, на лабораторномъ столѣ. Къ сожалѣнію, для выполнения такого опыта ему недоставало всѣхъ утонченныхъ техническихъ приспособленій.

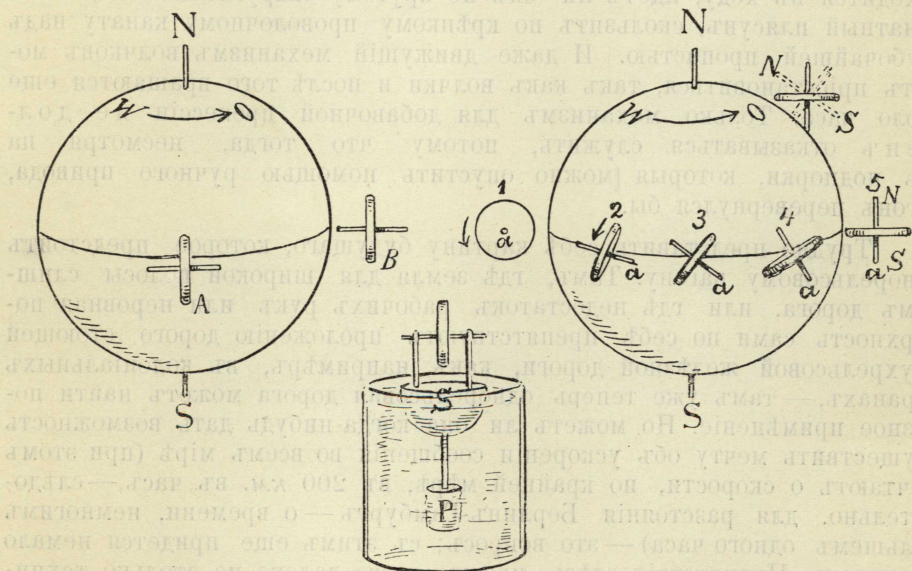


Рис. 6.

Схематическій набросокъ для объясненія компаса-волчка.

Напрягается мысль воспользоваться волчкомъ, уравновѣшеннымъ подобнымъ образомъ, для ориентированія на землѣ. Въ самомъ дѣлѣ, будь такой постоянно вращающійся волчокъ направленъ на Полярную звѣзду, онъ стоялъ бы вертикально на земномъ полюсѣ и лежалъ бы горизонтально на экваторѣ, или, другими словами, на каждомъ мѣстѣ земной поверхности онъ указывалъ бы не только направленіе меридіана, но и широту мѣста, благодаря наклоненію своей оси къ горизонту, — само собой разумѣется, независимо отъ всѣхъ магнитныхъ вліяній.

Магнитнымъ компасомъ уже давно недовольны. Онъ показываетъ неточно, и неточность его мѣняется съ каждымъ мѣстомъ, съ каждымъ



годомъ: онъ отклоняется мѣстными магнитными массами часто совершенно безконтрольнымъ образомъ, будь то на днѣ моря, на берегу или даже на самомъ суднѣ; его показанія на подводной лодкѣ, заключенной со всѣхъ сторонъ въ желѣзную броню, становятся уже совершенно ненадежными. Къ сожалѣнію, только-что описанный волчокъ мало можетъ помочь дѣлу, такъ какъ до сихъ поръ не удавалось его такъ подвѣсить, чтобы точка привѣса совпадала съ центромъ тяжести. А всякое самое незначительное несовпаденіе было бы губительно для слабыхъ направляющихъ силъ. Только съ того момента, когда — именно благодаря трудамъ д-ра Аншютца (Anschütz) — устроена была подвѣска съ двумя степенями свободы, мы имѣемъ дѣйствительно практическій компасъ-волчокъ.

Въ этомъ случаѣ волчокъ такъ установленъ, что его ось, вслѣдствіе притяженія земли, удерживается постоянно въ горизонтальномъ положеніи; въ то же время онъ можетъ при этомъ вращаться вокругъ своей собственной оси и, помимо того, благодаря способу подвѣски, еще вокругъ вертикальной оси. Это устройство слѣдуетъ себѣ представить приблизительно такъ. Приводимый въ постоянное движеніе электрическими силами волчокъ (рис. 6, середина) укрѣпленъ горизонтальными осевыми подшипниками на полѣ тѣлѣ *S*, которое плаваетъ въ сосудѣ, наполненномъ водой. Тяжелый привѣсъ *P* переноситъ центръ тяжести всей системы достаточно глубоко внизъ, чтобы обезпечить этому маленькому судну вертикальное положеніе. Если представить себѣ, что весь этотъ приборъ помѣщенъ на экваторѣ и вмѣстѣ съ вращающейся земной поверхностью движется съ запада на востокъ, то ось волчка, если она также лежитъ въ направленіи съ запада на востокъ, будетъ, повидимому, стремиться подыматься и черезъ 6 часовъ должна перейти изъ положенія *A* въ положеніе *B* (рис. 6, лѣвая сторона). Но плавательный аппаратъ и подвѣшенная къ нему тяжесть *P* препятствуютъ этому и заставляютъ ось волчка оставаться постоянно въ горизонтальномъ, т. е. параллельномъ земной поверхности, положеніи; другими словами, ось волчка, вслѣдствіе вращенія земли, будетъ постоянно опрокидываться по направленію опять-таки съ запада на востокъ. Въ результатъ этого опрокидыванія должна, какъ намъ извѣстно, произойти прецессія перпендикулярно къ направленію опрокидыванія. (Рис. 6, правая сторона), т. е. ось волчка (вмѣстѣ со всѣмъ приборомъ, на которомъ она плаваетъ) должна будетъ постоянно поворачиваться въ направленіи сѣверъ-югъ (ср. положенія 2, 3, 4, 5). Какъ только это послѣднее направленіе достигнуто, дальнѣйшее колебаніе оси прекращается, такъ какъ теперь ось волчка уже больше не опрокидывается, а только передвигается параллельно самой себѣ. Изъ всякаго другого положенія плавающий волчокъ тотчасъ вернулся бы въ направленіе съ сѣвера на югъ; онъ приобретаетъ два полюса, точно такъ же, какъ ихъ имѣетъ магнитная стрѣлка, но преимущество его передъ послѣдней заключается въ томъ, что онъ показываетъ правильное астрономическое направленіе.



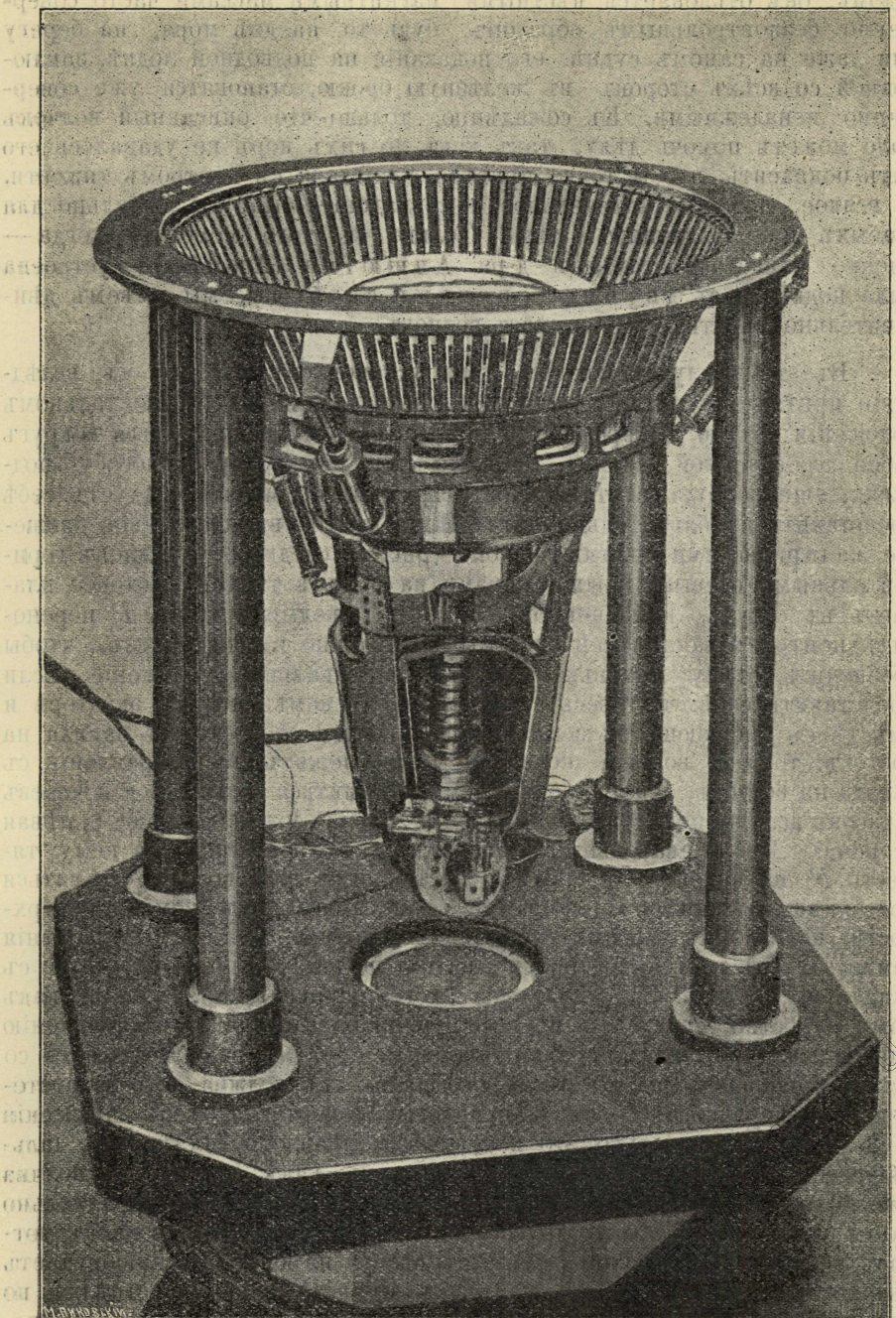


Рис. 7.

Компас-волчокъ съ электрической передачей.



Безшумно, безъ сотрясенія несетъ нашъ земной шаръ уже билліоны лѣтъ по своей орбитѣ вокругъ солнца и вращается вокругъ своей оси. Спокойствіе и однообразіе этого величественнаго движенія такъ велико, что еще ни одинъ человѣкъ самъ не ощутилъ этого движенія на землѣ. Но искусно подвѣшенный волчокъ чувствуетъ, что земля вращается; скованный съ нею цѣпами силы тяготѣнія, онъ поворачивается до тѣхъ поръ, пока его ось не приметъ одного и того же направленія съ земной осью или же, по крайней мѣрѣ, пока не попадетъ въ одну и ту же плоскость ориентированія въ міровомъ пространствѣ.

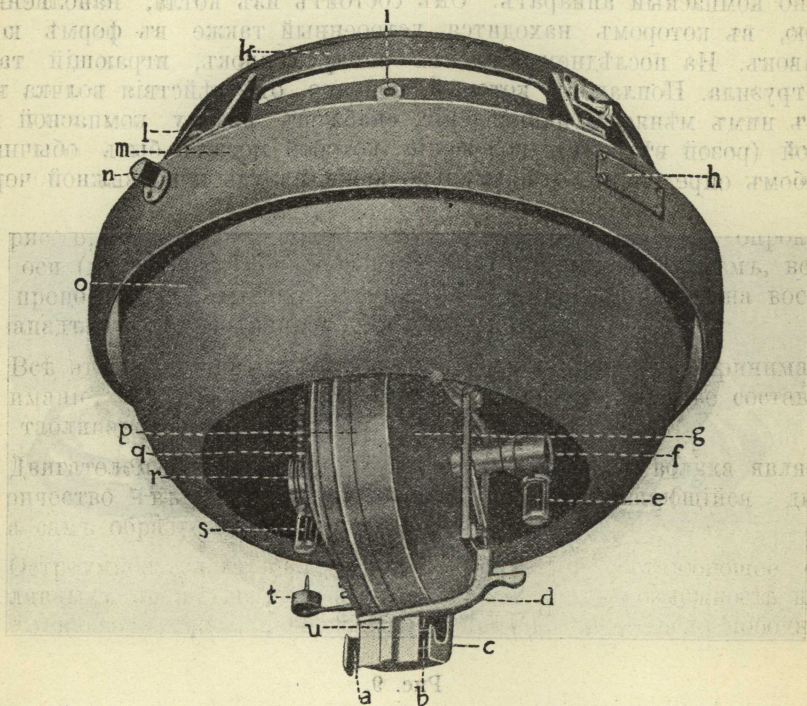


Рис. 8.

Видъ компаса-волчка сбоку и снизу съ кожухомъ волчка.

Таковъ въ общемъ принципъ компаса-волчка. Да простятъ мнѣ всѣ тѣ, кто, отдавшись на долгіе годы тяжелой теоретической и практической работѣ, трудился надъ одной изъ самыхъ сложныхъ проблемъ, если я исключительно съ цѣлью заинтересовать этимъ вопросомъ широкую публику, взялся за такое сравнительно поверхностное изложеніе. Профанъ, дѣйствительно, едва-ли можетъ представить себѣ, какое огромное количество чисто математической работы положено на компасъ-волчокъ, не говоря уже о представившихся техническихъ затрудненіяхъ. Нужны были многіе годы самоотверженнаго труда, пока удалось довести механическій компасъ до практическаго примѣненія.



Прежде всего компасъ-волчокъ имѣтъ, конечно, другой видъ, чѣмъ мы его до сихъ поръ представляли. Его внѣшній видъ неподготовленнаго зрителя приводитъ прямо въ смущеніе. Рисунокъ 7-ой, — которымъ, какъ и слѣдующими, мы обязаны фирмѣ „Д-ръ Аншютцъ и К<sup>о</sup>“ въ Неймиленъ-Дитрихсдорфѣ возлѣ Кіля (D-r Anschütz & Co in Neumühler - Dietrichsdorf bei Kiel), преимущественно занимающаяся изготовленіемъ этихъ приборовъ, — представляетъ компасъ-волчокъ, именно такъ называемый Mutterkompass — главный компасъ. Въ кольцѣ, поддерживаемомъ столбами, на вѣнкѣ изъ спиральныхъ пружинъ, которыя должны воспринимать толчки судового корпуса, виситъ собственно компасный аппаратъ. Онъ состоитъ изъ котла, наполненнаго ртутью, въ которомъ находится устроенный также въ формѣ котла поплавокъ. На послѣднемъ виситъ снизу волчокъ, играющій также роль груза. Поплавокъ, который, конечно, отъ дѣйствія волчка вмѣстѣ съ нимъ мѣняетъ направление, снабженъ сверху компасной картушкой (розой вѣтровъ), положеніе которой можетъ быть обычнымъ способомъ опредѣлено относительно какой-нибудь неподвижной черты.

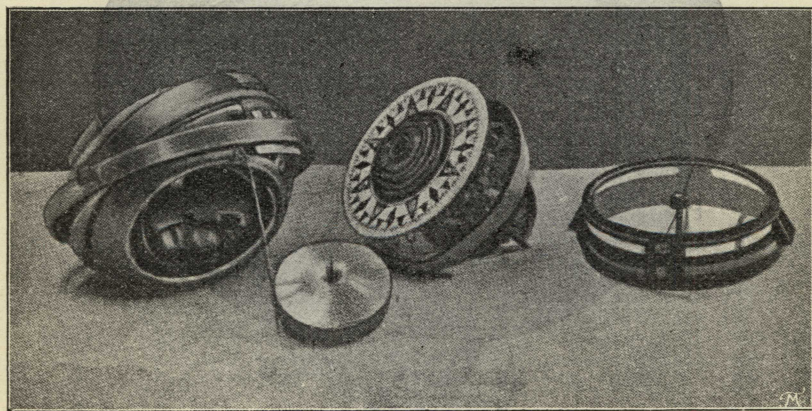


Рис. 9.

Подвѣсь, волчокъ и циферблатъ съ розой вѣтровъ компаса-волчка.

Рисунокъ 8-ой представляетъ еще разъ отдѣльно компасный котель съ подвѣшеннымъ къ нему кожухомъ волчка. Самъ волчокъ представляетъ собой чудо технического искусства. Такъ какъ онъ при сравнительно небольшой массѣ долженъ дѣлать около 300 или даже еще больше оборотовъ въ секунду для того, чтобы доставить необходимую направляющую силу, то можно себѣ представить, какая здѣсь требуется абсолютная симметрия массы и прочность конструкціи. Былъ уже случай, что, несмотря на всѣ предосторожности, развивающіяся здѣсь чрезмѣрныя центробѣжныя силы разорвали волчокъ прямо на куски. А что должны выдержать подшипники! Будемъ считать только 20 000 оборотовъ въ минуту. Это составитъ въ часъ уже 1 200 000, а въ 24 часа — 28 800 000 оборотовъ или за время пути отъ Бремена



до Нью-Йорка — около 172 800 000 оборотовъ. Мы должны проникнуться прямо благоговѣніемъ передъ техническимъ искусствомъ, узнавши, что оси и подшипники даже послѣ дѣйствія въ теченіе мѣсяцевъ не обнаруживаютъ замѣтнаго изнашиванія.

Въ большинствѣ случаевъ можно будетъ попрежнему пользоваться магнитнымъ компасомъ, а механической компасъ пускать въ ходъ для контроля во всѣхъ такихъ случаяхъ, въ которыхъ показанія магнитной стрѣлки сомнительны. Впрочемъ, волчокъ не моментально даетъ правильное показаніе; онъ долженъ еще только быть направленъ вращеніемъ земли, для чего вначалѣ требуется около 2—3-часоваго дѣйствія волчка. Этотъ промежутокъ можно сократить, если прямо привести компасъ приблизительно въ надлежащее положеніе. Географическая широта также будетъ имѣть свое вліяніе, такъ какъ направляющая сила, естественно, совершенно отсутствуетъ на полюсѣ и наибольшую величину имѣетъ на экваторѣ. Даже скорость движенія самого судна, хотя она, въ сравненіи со скоростью движенія какой-нибудь точки земной поверхности въ низшихъ широтахъ, всегда очень незначительна, все же при извѣстныхъ обстоятельствахъ можетъ оказывать замѣтное вліяніе. Если судно движется по меридіану на сѣверъ (ср. рис. 6, справа), то происходитъ также непрерывное опрокидываніе оси (мѣсто, отмѣченное черточками), а вмѣстѣ съ тѣмъ, вслѣдствіе прецессіи, постоянное отталкиваніе компасной розы на востокъ или западъ, смотря по направленію движенія.

Всѣ эти вліянія въ совокупности должны, конечно, приниматься во вниманіе, что легко осуществимо, благодаря уже заранѣе составленнымъ таблицамъ.

Двигателемъ вращающагося въ своемъ кожухѣ волчка является электричество въ видѣ трехфазнаго тока. Вращающійся дискъ волчка самъ образуетъ якорь трехфазнаго поля.

Остроумное электрическое приспособленіе, составляющее одно изъ главныхъ преимуществъ компаса-волчка, даетъ возможность показанія главнаго компаса переносить на произвольное число побочныхъ циферблатовъ съ нанесенной на каждомъ розой вѣтровъ. Какъ выполняется эта передача и какія техническія затрудненія удалось при этомъ счастливо преодолѣть, мы здѣсь, къ сожалѣнію, изложить не можемъ. И вотъ, главный компасъ будетъ установленъ тамъ, гдѣ его вліяніе всего можно будетъ обезопасить отъ колебаній въ температурѣ, вліяній погоды, толчковъ и качаній судна, — напримѣръ, посредникъ судна подъ палубой; побочные циферблаты помѣщаются въ соотвѣтственныхъ мѣстахъ, — напримѣръ, въ рулевой будкѣ, у румпеля на кормѣ и въ капитанской каютѣ. Они, впрочемъ, не требуютъ горизонтальнаго положенія, а допускаютъ всякое, въ которомъ легко наблюдать ихъ показанія.

Много компасовъ-волчковъ уже изготовлено и, какъ слышно, успѣшно. Дешевымъ такой аппаратъ, конечно, не можетъ быть, но этого и не нужно. Что, въ самомъ дѣлѣ, составляетъ какая-нибудь пара тысячъ марокъ тамъ, гдѣ довѣряются безопасному плаванію сотни тысячъ людей и цѣнности на безчисленные милліоны?



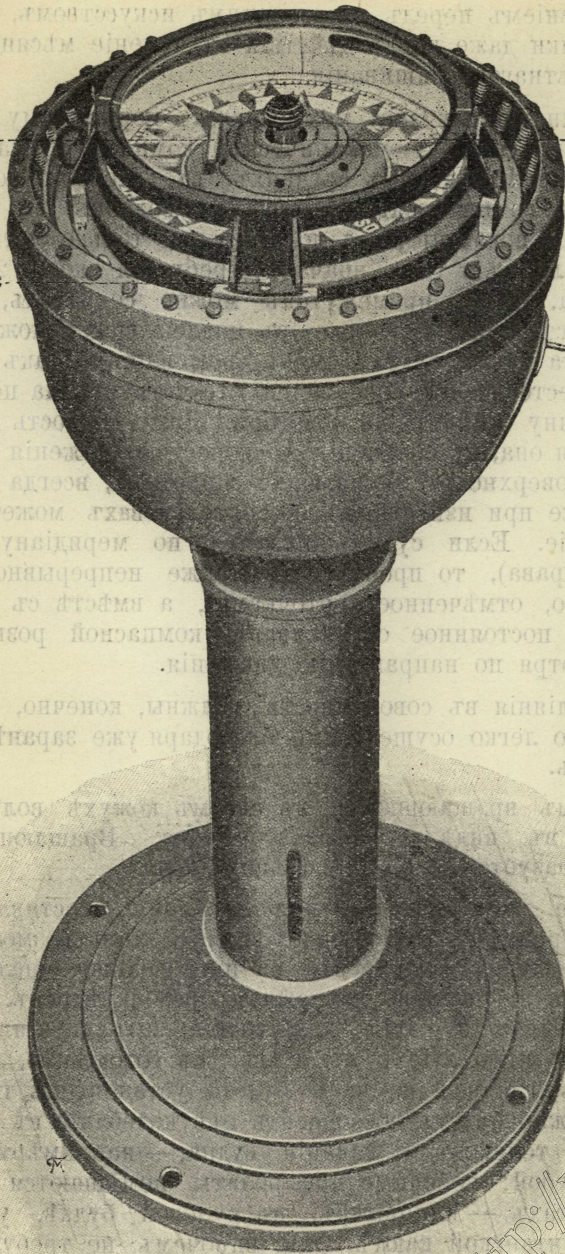


Рис. 10.

Колонна съ рулевымъ компасомъ (компасомъ-волчкомъ).



Изъ этихъ немногихъ примѣровъ читатель увидить, до какихъ техническихъ размѣровъ развился принципъ, такъ мало обѣщавшій вначалѣ. И, можетъ быть, найдется еще цѣлый рядъ такихъ извѣстныхъ, но неоцѣненныхъ принциповъ, ожидающихъ своей очереди быть извлеченными изъ тьмы на свѣтъ дневной. Кто можетъ сегодня сказать, съ какими поразительными сюрпризами намъ еще придется имѣть дѣло?

Замѣчательнымъ и многообобщающимъ является прежде всего отношеніе между движеніемъ волчка и вращеніемъ земли, которое проявляется въ стремленіи къ параллельности осей. Во всякой вещи, вращающейся на землѣ, во всякой катящейся оси, и даже — если намъ будетъ позволено употребить этотъ гиперболическій оборотъ — во всякой танцующей парѣ кроется эта тоска по полярной звѣздѣ. Хорошо только то, что направляющія силы такъ незамѣтно малы, и что, очевидно, здѣсь идетъ дѣло лишь о „скрытой“ тоскѣ.

## Между дѣломъ и шуткой въ области чисель.

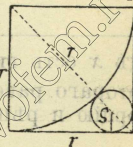
*A. Виттинга.*

Въ различныхъ журналахъ и книгахъ уже неоднократно появлялись изящныя числовыя шутки и игры, весьма удивительныя вычисленія, которыя, по большей части, легко доступны пониманію. Ниже мы даемъ, наряду съ нѣкоторыми, пожалуй, уже извѣстными числовыми соотношеніями такого рода, также другія, вѣроятно, еще незнакомыя читателю, число которыхъ мы могли бы неограниченно увеличить.

Мы начнемъ съ задачи, предназначенной, главнымъ образомъ, для того, чтобы указать, съ какой осторожностью нужно относиться къ сокращеннымъ вычисленіямъ. Извѣстно, что въ исчисленіи безконечно-малыхъ опусканіе безконечно-малыхъ членовъ постоянно требуетъ особенной осмотрительности, которая у авторовъ начала XVIII-го вѣка довольно часто отсутствовала, но теперь должна быть съ помощью яркихъ примѣровъ привита всякому начинающему. Ниже слѣдуетъ элементарный примѣръ, указывающій, что то же предостереженіе относится и къ области конечныхъ величинъ.

**Задача.** Вокругъ даннаго шара радіуса  $r$  описанъ прямой круговой цилиндръ. Найти радіусъ  $q$  и объемъ шара, касающагося даннаго шара, боковой поверхности цилиндра и его основанія.

Для искомаго радіуса  $q$  находимъ послѣдовательно вы-



Фиг. 1.

$$q = r \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = r(\sqrt{2}-1)^2 = r(3-2\sqrt{2})^{\frac{1}{2}};$$

<sup>1)</sup> Изъ фиг. 1 легко выводится пропорція:

$$\frac{q}{r} = \frac{x}{r+q+x},$$



въ виду этого при вычисленіи объема шара намъ придется имѣть дѣло съ множителемъ

$$\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^3 = (\sqrt{2}-1)^6 = (3-2\sqrt{2})^3 = 99 - 70\sqrt{2}.$$

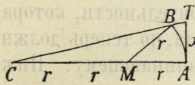
Если мы примемъ  $\sqrt{2} = 1,4142$ , то найдемъ, что  $3-2\sqrt{2} = 0,1716$ ; если же мы положимъ  $\sqrt{2} = 1,4142135624$ , то получимъ, что  $99 - 70\sqrt{2} = 0,005050632$ . Воспользуемся теперь въ качествѣ приближеній числа  $\sqrt{2}$  дробями  $\frac{7}{5}$  и  $\frac{17}{12}$ , дающими въ нѣкоторыхъ случаяхъ достаточную степень точности; нижеслѣдующая таблица указываетъ, въ какой мѣрѣ разнорѣчивы и прямо неожиданны бываютъ подчасъ результаты, получаемые при вычисленіи отдѣльныхъ выраженій съ помощью этихъ приближеній:

$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$	$(\sqrt{2}-1)^2$	$3-2\sqrt{2}$	$\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^3$	$(\sqrt{2}-1)^6$	$(3-2\sqrt{2})^3$	$99-70\sqrt{2}$
$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{6}=0,16667$	$\frac{4}{25}=0,16000$	$\frac{1}{5}=0,20000$	$\frac{1}{216}=0,0046296$	$\frac{64}{15625}=0,0040960$	$\frac{1}{125}=0,0080000$	1
$\frac{17}{12}$	$\frac{5}{29}=0,17241$	$\frac{25}{144}=0,17361$	$\frac{1}{6}=0,16667$	$\frac{125}{24389}=0,0051253$	$\frac{15625}{144^3}=0,0052328$	$\frac{1}{216}=0,0046296$	$-\frac{1}{6}$

Особенно поучителенъ послѣдній столбецъ!

Впрочемъ, взятое нами только-что приближеніе  $\frac{17}{12}$  для  $\sqrt{2}$  можетъ быть болѣе просто приведено въ связь съ приближеніемъ  $\frac{22}{7}$  для числа  $\pi$ .

Какъ извѣстно, Гюйгенсъ (Huygens) доказалъ, что длину дуги  $AB$  можно найти приближенно такъ: на продолженіи радіуса  $AM$  за точку  $M$  откладываемъ два раза радіусъ  $AM=r$  до точки  $C$  и затѣмъ проводимъ прямую  $CB$  до встрѣчи въ точкѣ  $T$  съ касательной  $AT$  къ дугѣ  $AB$  въ точкѣ ея  $A$ ; если уголъ  $AMB < 60^\circ$ , то съ ошибкою, не достигающей  $1^\circ$ , можно положить дугу  $AB$  равной отрезку  $AT=x$ . Если принять уголъ  $AMB = 45^\circ$ , то приближенное значеніе  $\pi$  найдется изъ равенства:



Фиг. 2.

$$\pi = \frac{4x}{r} = \frac{12}{7} \left( 2\sqrt{2} - 2 \right) \sim \frac{22}{7}, \text{ гдѣ } \sqrt{2} \sim \frac{17}{12} {}^2).$$

гдѣ  $x$  есть гипотенуза прямоугольнаго треугольника, каждый изъ катетовъ котораго равенъ  $\varrho$ , т. е.  $x = \varrho\sqrt{2}$ . Подставляя это значеніе вмѣсто  $x$  въ пропорцію и рѣшая полученное уравненіе относительно  $\varrho$ , найдемъ:

$$\varrho = r \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}.$$

<sup>2)</sup> Знакъ  $\sim$  имѣетъ смыслъ: „приближенно =“.

Длина дуги  $AB$  (фиг. 2), соответствующей центральному углу  $AMB = 45^\circ$ , выражается, какъ извѣстно, такъ:

$$\text{дуга } AB = \frac{\pi r \cdot 45^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi r}{4}.$$



Если брать болѣе точныя значенія для  $\sqrt{2}$ , то будутъ получаться значительно худшія приближенія числа  $\pi$ .

Большая часть шутокъ въ области чиселъ основана на свойствахъ десятичной системы счисленія, т. е. на особенностяхъ, обнаруживаемыхъ числами по отношенію къ числу 10. Въ виду этого, если принять за основаніе какое-либо другое число, т. е. оперировать въ области чиселъ, написанныхъ, вообще говоря, по  $p$ -ичной системѣ, то возможно распространить тѣ же задачи и на эти болѣе общія числа.

**Задача.** Квадратъ всякаго двузначнаго числа, не превосходящаго 31, трехзначенъ; найдемъ двузначныя числа, обладающія тѣмъ свойствомъ, что квадратъ любого изъ нихъ и квадратъ числа, полученнаго изъ даннаго съ помощью обращенія послѣдовательности его цифръ, представляютъ собою, въ свою очередь, два числа, изъ которыхъ второе получается съ помощью обращенія порядка цифръ перваго.

Положимъ

$$z_1 = 10x + y,$$

$$z_2 = 10y + x,$$

гдѣ  $x$  и  $y$  суть цифры; нетрудно видѣть, что и  $x^2$ ,  $2xy$ ,  $y^2$  также должны

Согласно приведенной въ текстѣ теоремѣ Гюйгенса,  $\sphericalangle AB = x$ , а потому  $x = \frac{\pi r}{4}$ , откуда

$$\pi = \frac{4x}{r}. \quad (1)$$

Далѣе, изъ прямоугольнаго треугольника  $ACT$  находимъ:

$$x = 3r \operatorname{tg} C. \quad (2)$$

А изъ треугольника  $BCM$  получаемъ:

$$\frac{\sin C}{\sin (45 - C)} = \frac{1}{2},$$

откуда находимъ послѣдовательно:

$$2 \sin C = \sin (45 - C) = \sin 45 (\cos C - \sin C),$$

или

$$2 \operatorname{tg} C = \sin 45 (1 - \operatorname{tg} C),$$

такъ что

$$\operatorname{tg} C = \frac{\sin 45}{2 + \sin 45} = \frac{2\sqrt{2} - 1}{7}. \quad (3)$$

Итакъ, съ помощью равенствъ (1), (2) и (3) находимъ окончательно:

$$\pi = \frac{4x}{r} = 12 \operatorname{tg} C = \frac{12}{7} (2\sqrt{2} - 1).$$



быть цифрами. Кромѣ чиселъ 11 и 22, очевидно, служащихъ рѣшеніями задачи, мы получаемъ только числа 12 и 13<sup>3)</sup>. Въ самомъ дѣлѣ,  $12^2 = 144$ ,  $21^2 = 441$ ;  $13^2 = 169$ ,  $31^2 = 961$ .

Квадраты чиселъ 33 и 99 также получаются одинъ изъ другого съ помощью обращенія порядка цифръ:  $33^2 = 1089$  и  $99^2 = 9801$ .

Среди трехзначныхъ чиселъ также можно указать любопытныя пары:

$$\begin{array}{|l|l|l|l|l|} \hline 102^2 = 10204 & 103^2 = 10609 & 112^2 = 12544 & 113^2 = 12769 & 122^2 = 14884 \\ \hline 201^2 = 40201 & 301^2 = 90601 & 211^2 = 44521 & 311^2 = 96721 & 221^2 = 48841. \\ \hline \end{array}$$

Существуетъ только одно число, равное квадрату суммы своихъ цифръ:  $81 = (8 + 1)^2$ ; но имѣются 4 числа, изъ которыхъ каждое равно удвоенному квадрату суммы своихъ цифръ:

$$50 = 2.5^2, \quad 162 = 2.9^2, \quad 392 = 2.14^2, \quad 648 = 2.18^2.$$

Далѣе,

$$\begin{array}{lll} 243 = 3.9^2, & 324 = 4.9^2, & 405 = 5.9^2, \\ 972 = 3.18^2, & 1296 = 4.18^2, & 1944 = 6.18^2. \end{array}$$

Другого рода особенности чиселъ можно подмѣтить при извлеченіи квадратныхъ корней. Такъ, напримѣръ,

$$\begin{array}{lll} \sqrt{5776} = 76, & \sqrt{9025} = 95 & \sqrt{2500} = 50, \\ \sqrt{9216} = 96, & \sqrt{3600} = 60. \end{array}$$

Особенно много интересныхъ числовыхъ соотношеній раскрывается при умноженіи; мы дадимъ только нѣсколько примѣровъ.

Имѣютъ мѣсто равенства:

$$\left. \begin{array}{l} 6.21 = 126, \\ 3.51 = 153, \\ 8.86 = 688, \end{array} \right\} \text{ (справа тѣ же цифры, что и слѣва)}$$

при чемъ это суть единственно возможные случаи такого рода соотношеній.

<sup>3)</sup> Такъ какъ  $z_1^2$  представляетъ собою обращеніе трехзначнаго числа  $z_1^2$ , то  $z_1^2$  также есть трехзначное число, а потому  $z_1$  такъ же, какъ и  $z_2$ , не превышаетъ 31. Далѣе, представляя трехзначныя числа  $z_1^2$  и  $z_2^2$  въ видѣ

$$100x^2 + 2.10xy + y^2 \quad \text{и} \quad 100y^2 + 2.10xy + x^2,$$

видимъ, что  $x^2 \leq 9$  и  $y^2 \leq 9$ , т. е.  $x \leq 3$  и  $y \leq 3$ . Итакъ, чтобы получить всѣ рѣшенія задачи, нужно составить таблицу

$$\begin{array}{ccc} 11, & 12, & 13 \\ 21, & 22, & 23, \\ 31, & 32, & 33 \end{array}$$

и выбросить изъ нея числа 32 и 33, какъ превышающія число 31, а также число 23, обращеніе котораго 32 превышаетъ число 31.



Другое сочетаніе цифръ дается равенствомъ

$$(10^n x + y)(10^n z + t) = (10^n y + x)(10^n t + z),$$

которое имѣетъ мѣсто при условіи

$$xz = yt.$$

Такъ, на основаніи тождества  $1.4 = 2.2$  можно написать слѣдующій рядъ тождествъ:

$$12.42 = 21.24,$$

$$102.402 = 201.204,$$

$$1002.4002 = 2001.2004,$$

$$\dots \dots \dots$$

Изъ тождества:

вытекаютъ тождества:

$$1.6 = 2.3$$

$$12.63 = 21.36 \quad \text{и} \quad 13.62 = 31.26,$$

$$3.8 = 4.6$$

$$34.86 = 43.68 \quad \text{и} \quad 36.84 = 63.48.$$

Вообще, существуютъ 13 случаевъ, въ которыхъ  $x, y, z, t$  суть однозначныя числа.

Вотъ примѣры того же рода, но съ многозначными числами:

$$35.7 = 5.49, \text{ откуда } 3505.749 = 535.4907 \text{ и } 3549.705 = 4935.507;$$

$$32.26 = 16.52, \text{ » } 3216.2652 = 1632.5226 \text{ и } 3252.2616 = 5232.1626.$$

Выше установленныя тождества могутъ быть, въ свою очередь, положены въ основаніе подобныхъ преобразованій: такъ, изъ тождества  $12.63 = 21.36$  вытекаютъ произведенія:

$$1221.6336 = 2112.3663 \text{ и } 1236.6321 = 3612.2163.$$

Если мы желаемъ получить подобныя произведенія для трехзначныхъ чиселъ, то нужно исходить изъ равенства

$$(100a + 10b + c)(100x + 10y + z) = (100c + 10b + a)(100z + 10y + x),$$

которое имѣетъ мѣсто при двухъ условіяхъ:

$$ax = cz \quad \text{и} \quad y = b \frac{x - z}{c - a}.$$

Такъ, напримѣръ, тождество  $2.9 = 3.6$  влечетъ за собой слѣдующій рядъ тождествъ:



$$213.936 = 312.639,$$

$$223.966 = 322.669,$$

$$233.996 = 332.699,$$

$$933.226 = 339.622,$$

$$963.246 = 369.642,$$

$$993.266 = 399.662;$$

а тождество  $2.6 = 3.4$  дасть такіа тождества:

$$213.624 = 312.426,$$

$$223.644 = 322.446,$$

$$233.664 = 332.466,$$

$$243.684 = 342.486,$$

$$633.224 = 336.422,$$

$$663.244 = 366.442,$$

$$693.264 = 396.462 \text{ и т. д.}$$

Пусть  $p$  будетъ цѣлое число и пусть  $p^2 = 10q + r$ ; найдемъ такіа значенія числа  $p$ , для которыхъ удовлетворяется равенство:  $2p = q + r + 1$ <sup>4)</sup>.

Имѣются только 4 числа такого рода, а именно: 4, 7, 13, 19.

На этомъ именно свойствѣ основаны слѣдующіе ряды тождествъ:

$$4^2 = 16,$$

$$7^2 = 49,$$

$$34^2 = 1156,$$

$$67^2 = 4489,$$

$$334^2 = 111556,$$

$$667^2 = 444889,$$

$$3334^2 = 11115556,$$

$$6667^2 = 44448889,$$

$$13^2 = 169,$$

$$19^2 = 361,$$

$$133^2 = 17689,$$

$$199^2 = 39601,$$

$$1333^2 = 1776889,$$

$$1999^2 = 3996001,$$

$$13333^2 = 177768889,$$

$$19999^2 = 399960001,$$

<sup>4)</sup> Задача состоитъ въ нахожденіи цѣлыхъ и положительныхъ значеній неизвѣстнаго  $p$ , удовлетворяющихъ уравненіямъ

$$p^2 = 10q + r \text{ и } 2p = q + r + 1,$$

гдѣ  $q$  и  $r$  суть цѣлыя числа, подчиняющіяся неравенствамъ  $q \geq 0, 0 \leq r \leq 9$ .



Нѣкоторые произведенія непосредственно получаютъ съ помощью особыхъ формулъ.

Такъ, напримѣръ, имѣетъ мѣсто формула

$$(10a + \overline{10 - a})(10b + b) = 100(a + 1)b + (10 - a)b,$$

на основаніи которой получаемъ:

$$82.77 = 6314, \quad 37.44 = 1628, \quad 46.55 = 2530 \text{ и т. д.}$$

Далѣе,

$$(10a + b)(10 \cdot \overline{10 - a} + b) = 100[a \cdot \overline{10 - a} + b] + b^2,$$

такъ что, напримѣръ,

$$74.34 = 2516, \quad 65.45 = 2925, \quad 53.53 = 2809, \quad 87.27 = 2349 \text{ и т. п.}$$

Наконецъ, на тождествѣ

$$(10a + b)(10a + \overline{10 - b}) = 100(a + 1)a + b(10 - b)$$

основаны такіе примѣры:

$$83.87 = 7221, \quad 74.76 = 5624, \quad 49.41 = 2009 \text{ и т. п.}$$

Къ другой области числовыхъ соотношеній приводитъ насъ тождество

$$xy = 2a(x - \overline{a} + \overline{y - a}) + (2a - x)(2a - y);$$

полагая въ немъ, напримѣръ,  $a = 5$  и приписывая переменнымъ  $x$  и  $y$  значенія, лежащія между 5 и 10, мы получимъ извѣстное «правило счета на пальцахъ»; такъ,  $7.9 = 10(2 + 4) + 3.1 = 63$ .

Полагая  $a = 10$  и приписывая переменнымъ  $x$  и  $y$  значенія, лежащія между 10 и 20, мы сведемъ съ помощью послѣдней формулы каждое произведеніе двухъ чиселъ, взятыхъ между указанными предѣлами, къ произведенію однозначныхъ множителей и къ умноженію на 20; такъ,  $18.13 = 20.11 + 2.7$ ; впрочемъ, этотъ приѣмъ при вычисленіяхъ на практикѣ не можетъ считаться болѣе удобнымъ, чѣмъ непосредственное вычисленіе. Но полагая въ этой фор-

Кромѣ приведенныхъ авторомъ рѣшеній 4, 7, 13 и 19, этимъ уравненіямъ удовлетворяютъ также числа 1 и 16. Число 16 допускаетъ рядъ равенствъ, аналогичный тѣмъ, которые авторъ приводитъ въ текстѣ для чиселъ 4, 7, 13 и 19. Предлагаемъ читателю самому найти способъ составленія этихъ рядовъ равенствъ и его объясненіе на основаніи указаннаго въ текстѣ свойства чиселъ  $p$ .

Ср. также по этому поводу книгу проф. Г. Шуберта „Математическія развлеченія и игры“ („Mathesis“, Одесса, 1911), стр. 29, гдѣ дано другое рѣшеніе этого вопроса.



муль  $a = 500$ , можно было бы съ помощью нея свести таблицу умноженія трехзначныхъ чиселъ къ одной только половинѣ послѣдней.

Извѣстная формула  $xy = \frac{1}{4}[(x+y)^2 - (x-y)^2]$  позволяетъ находить произведенія съ помощью таблицы квадратовъ.

Иногда удобно примѣнять формулу

$$(10a + 5)^2 = 100a(a + 1) + 25; \text{ напимѣрь, } 75^2 = 5625.$$

Слѣдующее тождество имѣетъ также и геометрическій смыслъ:

$$\frac{\frac{a}{b} - \frac{a-b}{a+b}}{1 + \frac{a}{b} \frac{a-b}{a+b}} = 1; \text{ напимѣрь, } \frac{\frac{2}{5} + \frac{3}{7}}{1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}} = 1.$$

Весьма любопытна простая формула

$$\frac{a-1}{a} \cdot b = b - 1 + \frac{a-b}{a}; \text{ напимѣрь, } \frac{3764}{3765} \cdot 539 = 538 \frac{3226}{3765},$$

а также формула

$$\frac{n-a}{n} (n-b) = n-a-b + \frac{ab}{n}; \text{ напимѣрь, } \frac{247}{251} \cdot 243 = 239 \frac{32}{251}.$$

Весьма интересное преобразованіе даетъ формула:

$$\sqrt{n + \frac{n}{n^2 - 1}} = n \sqrt{\frac{n}{n^2 - 1}};$$

напимѣрь,

$$\sqrt{3 \frac{3}{8}} = 3 \sqrt{\frac{3}{8}}, \quad \sqrt{17 \frac{17}{288}} = 17 \sqrt{\frac{17}{288}},$$

т. е. въ этихъ случаяхъ цѣлое число прямо выводится изъ-подъ знака корня.

Далѣе, имѣетъ мѣсто формула

$$\frac{a}{b} = \frac{a + \frac{1}{b}}{b + \frac{1}{a}}; \text{ напимѣрь, } \frac{7 \frac{1}{11}}{11 \frac{1}{7}} = \frac{7}{11}.$$

По формулѣ

$$\frac{a + \frac{p}{q}}{a \cdot \frac{q}{p} + 1} = \frac{p}{q}$$



можно произвести слѣдующія курьезныя дѣленія:

$$8 \frac{2}{5} : 21 = \frac{2}{5}, \quad 65 \frac{5}{7} : 92 = \frac{5}{7}.$$

Еще забавнѣе тотъ фактъ, что сокращеніе трехъ дробей

$$\frac{26}{65} = \frac{2}{5}, \quad \frac{16}{64} = \frac{1}{4}, \quad \frac{19}{95} = \frac{1}{5}$$

можно произвести съ помощью одного только зачеркиванія одинаковыхъ цифръ въ числитель и знаменатель.

Приведемъ въ заключеніе небольшую задачу, которая, несмотря на свое древнее происхожденіе, повидимому, мало извѣстна.

Двѣ крестьянки *A* и *B* ежедневно продавали на базарѣ по 30 яблокъ каждая. *A* брала по 5 коп. за каждое яблоко, а *B* — по 10 коп. за каждыя 3 яблока. Однажды *A* не имѣла возможности отправиться на базаръ и поручила своей сосѣдкѣ взять съ собою ея 30 яблокъ. *B* смѣшала яблоки сосѣдки со своими и произвела такой расчетъ: «Каждыя 2 яблока перваго сорта стоятъ 10 коп., каждыя 3 яблока втораго сорта также стоятъ 10 коп.; слѣдовательно, каждыя 5 яблокъ смѣси слѣдуетъ продавать по 20 коп.». Поэтому она продавала каждое яблоко по 4 коп. Но послѣ продажи оказалось, что она потеряла 10 коп.

## А. Г. ІОЛЛОСЪ.

### НЕКРОЛОГЪ.

Газеты принесли вѣсть о безвременной кончинѣ талантливаго молодого физика, постоянного сотрудника нашего журнала Александра Григорьевича Іоллоса. Образование А. Г. Іоллосъ получилъ въ Германіи, такъ какъ и родители его долгое время сами жили въ Берлинѣ. А. Г. получилъ степень доктора философіи при Страсбургскомъ университетѣ по отдѣлу физики и послѣ этого еще работалъ нѣкоторое время въ лабораторіи профессора Брауна. Послѣ трагической кончины отца А. Г. вынужденъ былъ возвратиться въ Россію и найти себѣ постоянныя средства къ существованію.

Редакція «Русскихъ Вѣдомостей», въ которой отецъ Александра Григорьевича въ теченіе продолжительнаго времени занималъ отвѣтственный постъ, пристроила молодого человѣка. Владѣя значительнымъ общимъ образованіемъ, А. Г. легко приспособился къ этой работѣ, которая, при его скромныхъ требованіяхъ, оставляла ему достаточно времени для серьезной научной работы. А. Г. успѣлъ закончить экзаменъ на степень магистра чистой физики и готовилъ собственную работу.

Три года тому назадъ, по указанію одного изъ его руководителей въ Страсбургѣ, редакторъ «Вѣстника Опытной Физики» обратился къ А. Г. съ



просьбой взять на себя веденіе «Научной хроники» по физикѣ. А. Г. охотно согласился и съ рѣдкимъ вниманіемъ относился къ нашему журналу. Врядъ-ли какое-либо крупное изслѣдованіе, подходящее подь программу «Вѣстника», не было имъ отмѣчено на страницахъ журнала. Съ мѣсяцъ тому назадъ, уѣзжая за границу, А. Г. прислалъ намъ довольно большую статью «Наблюденіе іоновъ въ микроскопъ и опредѣленіе элементарнаго электрическаго заряда», которая была напечатана въ № 538-омъ «Вѣстника».

Жизнерадостностью передь предстоящимъ отдыхомъ дышало его послѣднее письмо, но избытокъ живости и неосторожности привели къ неожиданной гибели въ горахъ Швейцаріи.

Миръ праху твоему, несчастный юноша!

## ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей приватъ-доцента **Е. Л. Буницкаго.**

**№ 432** (5 сер.). Даны двѣ параллели и внѣ ихъ двѣ точки *A* и *B*. Построить между параллелями отрезокъ *ху* даннаго направленія такъ, чтобы разность *Ax — By* была данной длины *k*.

*И. Александровъ* (Москва, гимназія Поливанова).

**№ 433** (5 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^3 + px + \sqrt{p-1} = 0.$$

*Р. Витвинскій* (Одесса).

**№ 434** (5 сер.). Вычислить предѣлъ выраженія

$$\frac{\sqrt[n]{x-a} - \sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x+a} - \sqrt[n]{x}} \cdot x^{\frac{m-n}{m+n}},$$

въ которомъ *m*, *n*, *a* суть данныя вещественныя числа, при безконечномъ возрастаніи положительнаго числа *x*.

*С. Розенблютъ* (Армавиръ).

**№ 435** (5 сер.). Доказать, что выраженіе

$$7^{2n+1} + 9^{2n+1} - 9 \cdot 2^{2n+9} + 4704n + 4592$$

при *n* цѣломъ и неотрицательномъ дѣлится на 8064.

*А. Фрумкинъ* (Одесса).



## РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

**№ 308** (5 сер.). На основаніи  $ABC$  данной пирамиды  $SABC$  найти (внутри еѳ) точку  $M$  такъ, чтобы произведеніе перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ  $M$  на три остальныхъ грани пирамиды, достигало maximum'a.

Обозначимъ площади граней  $SBC$ ,  $SAC$ ,  $SAB$  соответственно черезъ  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , объемъ пирамиды  $SABC$  черезъ  $V$ , а длины перпендикуляровъ, опущенныхъ соответственно на грани  $SBC$ ,  $SAC$ ,  $SAB$ , назовемъ черезъ  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Сумма объемовъ пирамидъ  $MSBC$ ,  $MSAC$ ,  $MSAB$  равна объему данной пирамиды. Слѣдовательно,

$$\frac{\alpha x}{3} + \frac{\beta y}{3} + \frac{\gamma z}{3} = V,$$

или

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 3V. \quad (1)$$

Произведеніе  $x y z$  достигаетъ maximum'a вмѣстѣ съ произведеніемъ  $\alpha \beta \gamma x y z$ , которое можно записать въ видѣ  $\alpha x \cdot \beta y \cdot \gamma z$ . Такъ какъ сумма величинъ  $\alpha x$ ,  $\beta y$  и  $\gamma z$  остается [см. (1)] постоянной, то по извѣстной теоремѣ произведеніе ихъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ и произведеніе  $x y z$  достигаетъ maximum'a въ случаѣ ихъ равенства. Итакъ, искомыя значенія  $x$ ,  $y$ ,  $z$  опредѣляются равенствами  $\alpha x = \beta y = \gamma z$  и уравненіемъ (1), откуда находимъ:

$$\alpha x = \beta y = \gamma z = V. \quad (2)$$

Итакъ, произведеніе  $x y z$  достигаетъ maximum'a при  $x = \frac{V}{\alpha}$ ,  $y = \frac{V}{\beta}$ ,  $z = \frac{V}{\gamma}$  (или  $x = \frac{h_1}{3}$ ,  $y = \frac{h_2}{3}$ ,  $z = \frac{h_3}{3}$ , гдѣ  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  суть соответственно высоты пирамиды, опущенныя изъ вершинъ  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ). Чтобы опредѣлить положеніе искомой точки  $M$ , замѣтимъ, что изъ уравненій (2) вытекаютъ слѣдующія равенства:  $\frac{\alpha x}{3} = \frac{\beta y}{3} = \frac{\gamma z}{3}$ , т. е. для искомой точки  $M$  пирамиды  $MSBC$ ,  $MSAC$ ,  $MSAB$  должны быть равновелики; но эти пирамиды имѣютъ общую высоту, исходящую изъ вершины  $S$ , а потому должны быть равновелики основанію  $MBC$ ,  $MAC$ ,  $MAB$  пирамидъ, откуда вытекаетъ, что искомая точка  $M$  есть точка встрѣчи медіанъ треугольника  $ABC$ . Дѣйствительно, пусть прямая  $AM$  встрѣчаетъ основаніе  $BC$  въ точкѣ  $M'$ . Обозначимъ перпендикуляры, опущенныя на прямую  $AM$  изъ точекъ  $B$  и  $C$ , соответственно черезъ  $BP$  и  $CQ$ . Принимая во вниманіе, что треугольники  $MAB$  и  $MAC$ , имѣющіе общее основаніе  $AM$ , равновелики, приходимъ къ равенству  $BP = CQ$ . Но изъ подобныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ  $BM'P$  и  $CM'Q$  имѣемъ:

$$\frac{BM'}{CM'} = \frac{BP}{CQ} = 1,$$

откуда  $BM' = CM'$ , т. е. точка  $M$  лежитъ на медіанѣ  $AM'$ . Точно такъ же убѣждаемся, что точка  $M$  лежитъ на каждой изъ двухъ остальныхъ медіанъ. Итакъ, искомая точка  $M$  есть точка встрѣчи медіанъ или же центръ тяжести треугольника  $ABC$ .

Л. Богдановичъ (Ярославль); А. Фельдманъ (Одесса).



## ПОПРАВКИ.

Въ задачѣ № 392 (№ 532 „Вѣстника“) вмѣсто  $-6\rho^2x$  слѣдуетъ читать:  $-6\rho x^3$ .

Въ концѣ условія задачи № 412 (№ 535 „Вѣстника“) вмѣсто „... при возрастаніи  $u_n$  до безконечности“ слѣдуетъ читать: „... при возрастаніи  $n$  до безконечности“.

Въ задачѣ № 423 (№ 537 „Вѣстника“) вмѣсто  $(-1)^k C_n^{2m-k}$  слѣдуетъ читать:  $(-1)^k C_n^k C_n^{2m-k}$ , а вмѣсто  $n < 2m$  слѣдуетъ читать:  $n \geq 2m$ .

На стран.: въ строкѣ: вмѣсто: надо читать:

135	1-й снизу	$Q_{2nm}$	$Q_{2^n m}$
135	10-й снизу	$\frac{1}{3} R^2 \sin \frac{2\pi}{m}$	$\frac{1}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{m}$
165	7-й снизу	$\frac{1 \pm 3i}{2}$	$\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$
167	6-й сверху	$\frac{1}{r}$	$\frac{1}{r^2}$
188	7-й и 10-й снизу	$1 + \frac{1}{3^k}$	$1 + \frac{1}{3^4}$
189	10-й сверху	$\frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}$	$\arctg \frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}$
214	4, 7 и 9-й снизу	$\sqrt{\rho^2 - m}$	$\sqrt{\rho^4 - m}$
216	1-й сверху	$\frac{k_1 + 1}{k_1 - 1} \left(1 - \frac{1}{k_n^2}\right)$	$\frac{k_1 + 1}{k_1 - 1} \left(1 - \frac{1}{k_n^2}\right) y_n$
246	2, 4, 5, 6-й снизу вездѣ	$N$	$P$
247	6-й снизу	$-75$	$+75$
248	4-й снизу	$y = 3$	$y = 10$
194	9-й сверху	радіусъ	діаметръ
197	2-й снизу	равносторонняго	равнобедреннаго

Фамиліи лицъ, приславшихъ вѣрныя рѣшенія задачъ 5-й серіи, слѣдуетъ дополнить слѣдующимъ образомъ:

Задача № 253 И. Чижевскій (Александрія); Б. Крымерманъ (Могилевъ); № 259, 260 Н. Лопато (Николаевскій городокъ); № 262 И. Чижевскій (Александрія); № 267 Ивановъ и Рыбкинъ (Барнаулъ); № 268 Ивановъ и Рыбкинъ (Барнаулъ); С. Слугиновъ (Казань); № 269 И. Чижевскій (Александрія); № 296 М. Рыбкинъ (Барнаулъ); № 307 А. Маркманъ (Одесса); Н. Шемяновъ (Владимиръ); Г. Варкентинъ (Бердянскъ); Б. Шигольевъ (Варшава); Н. Howsephcanъ (Владикавказъ); Р. Витвинскій (Одесса).



Новый въ Россіи типъ по образцу „Je Sais Tout“

## II-й годъ изданія

ПРОДОЛЖАЕТСЯ ПОДПИСКА на 1911 годъ

на ежемѣсячный, внѣпартійный, иллюстрированный

# „Всеобщій журналъ“

литературы, искусства, науки и общественной жизни.

Изданіе совершенно новаго въ Россіи типа—по образцу популярнѣйшихъ иностр. иллюстр. ежемѣсячниковъ (Je sais tout и др.), предназначенныхъ для самаго широкаго круга читателей. Программа „ВСЕОБЩАГО ЖУРНАЛА“ исчерпываетъ отдѣлы **всѣхъ обычныхъ толстыхъ журналовъ**. Живой откликъ на всѣ выдающіяся событія современности. **Исключительное вниманіе обращено на художественность и искусство изданія.** „ВСЕОБЩІЙ ЖУРНАЛЪ“ богато иллюстрируется оригинальными рисунками, портретами и репродукціями съ картинъ извѣстныхъ художниковъ. Въ каждой книжкѣ до 100 художественно исполненныхъ иллюстрацій; многіе на отдѣльныхъ листахъ въ нѣсколько красокъ.

О существованіи потребности въ ежемѣсячникахъ зап.-европ. типа свидѣлствуетъ небывалый тиражъ „ВСЕОБЩАГО ЖУРНАЛА“: нѣкоторыя книжки пришлось печатать вторымъ и третьимъ изданіемъ.

Въ вышедшихъ номерахъ текущаго подписанію года, между прочимъ, напечатаны:

СТАТЬИ: Проф. В. Сперанскій.—У великой могилы. Проф. В. Святловскій.—Геній Тихаго океана. Проф. Ѳ. Батюшковъ.—О Моск. худ. театрѣ. К. Арабакинъ.—1) Т. Шевченко. 2) Стилизация въ театрѣ. Л. Василевскій.—1) Дѣти-преступники. 2) Принципы театра для народа. В. Бруснинъ.—Финскіе писатели. Проф. И. Мечниковъ.—О долготѣи. Б. Лазаревскій—Шевченко и женщины. В. Базилевичъ.—Л. Андреевъ—его жизнь и творчество. К. Викторовъ.—Нашъ воздушный флотъ. Е. Колтоновская.—Пути и настроенія молодой литературы. Вагнеръ и Листъ.—Ихъ переписка. Огюсть Родэнъ.—Принципы искусства. П. Рыссъ.—Женщина—раба. Маркони.—Безпроводный телеграфъ. Д-ръ Невилль.—Искусство пролонгія жизни. Осипъ Дымовъ.—В. Ѳ. Коммиссаржевская. А. Измайловъ.—Ѳ. Достоевскій. А. Южанинъ.—Эстетика въ обыденной жизни. Ж. Данницъ.—Радій, какъ источникъ энергіи. Д-ръ Андрусонъ.—Проказа въ Россіи. Б. Шлецеръ.—Кризисъ опернаго театра и др. БЕЛЛЕТРИСТИКА: С. Сергѣевъ-Ценскій.—1) Вѣра, Надежда, Любовь 2) Снѣгъ. О. Дымовъ.—Признаніе. С. Гусевъ-Оренбургскій.—Перпетуевъ. Гр. А. Н. Толстой.—Пастухъ и Маринка. А. Ремизовъ.—Къ морю-океану. Вл. Ленскій.—Душа волосъ. Борисъ Лазаревскій.—Бредъ. А. Вережниковъ.—Калифъ на часъ. Д. Айзманъ.—Она и она. А. Рославлевъ. 1) Дворовикъ. 2) Раки. Як. Окуневъ.—Фарисей. Д. Агленъ.—Небесн. глазъ. М. Прево.—Провинціалка. Альфр. Капюсъ.—Робинзонъ. Морисъ Лебланъ.—Человѣкъ, который помнитъ. А. Мориссонъ.—Долгъ. Сельма Лагерлёфъ.—Среди гробницъ и др. Въ ближайшихъ книжкахъ пойдутъ новые рассказы Леонида Андреева и А. Куприна. СТИХИ: С. Городецкаго, Л. Андрусона, Дм. Цензора, А. Рославлева, Саши Чернаго, Л. Василевскаго, Г. Галинина, Вл. Ленскаго, А. Липецкаго, И. Рукавишникова, Н. Карпова, Вл. Нарбута. И. Эренбурга и др. По изяществу и полнотѣ программы „ВСЕОБЩІЙ ЖУРНАЛЪ“ является единственнымъ въ Россіи изданіемъ.

За годъ въ „ВСЕОБЩЕМЪ ЖУРНАЛѢ“ будетъ напечатано въ общемъ около 1500 иллюстрацій. Каждый № представляетъ собой объемистую книгу въ 300—350 столбцовъ.

Подписная цѣна: на годъ—6 р., полг.—3 р. 50 к. За границу—8 р. Отдѣльная книжка: 65 к. безъ пересылки, 80 к. съ пересылкой. Библіотекамъ и книжнымъ магазинамъ 5% скидки. При коллективной подпискѣ на 5 экзempl., шестой высыл. бесплатно. Подписка принимается въ главной конторѣ и во всѣхъ книжныхъ магазинахъ.

Адресъ конторы и редакціи: С.-Петербургъ, Невскій, 114.



# Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

Выходитъ 24 раза въ годъ отдѣльными выпусками, не  
менѣе 24 стр. каждый,  
подъ редакціей приватъ-доцента В. Ф. Кагана.



**ПРОГРАММА ЖУРНАЛА:** Оригинальныя и переводныя статьи изъ области физики и элементарной математики. Статьи, посвященныя вопросамъ преподаванія математики и физики. Опыты и приборы. Научная хроника. Разныя извѣстія. Математическія мелочи. Темы для соудружниковъ. Задачи для рѣшенія. Рѣшенія предложенныхъ задачъ съ фамиліями рѣшившихъ. Упражненія для учениковъ. Задачи на премию. Библиографическій отдѣлъ: обзоръ специальныхъ журналовъ; замѣтки и рецензіи о новыхъ книгахъ.

Статьи составляются настолько популярно, насколько это возможно безъ ущерба для научной стороны дѣла.

Предыдущіе семестры были **рекомендованы:** Учен. Ком. Мин. Нар. Пр. для гимн. муж. и жен., реальн. уч., прогимн. город. уч., учит. инст. и семинарій; Главн. Упр. Воен.-Учебн. Зав.—для воен.-уч. заведеній; Учен. Ком. при Св. Синодѣ — для дух. семинарій и училищъ.

Пробный номеръ высылается за одну 7-коп. марку.

## Важнѣйшія статьи, помѣщенныя въ 1910 г.

### 43-й семестръ.

*Г. Пуанкаре* Новая механика. — *П. Флоровъ*. Способъ вычисленія отношенія окружности къ диаметру съ пятью десятичными знаками, пригодный для преподаванія въ среднихъ школахъ. — *И. Мессершмидтъ*. Марсъ и Сатурнъ. — *П. Лоуэлъ*. Марсъ — *С. Виноградовъ*. Развѣтленіе понятія о числѣ въ его исторіи и въ школь. — *Е. Григорьевъ*. О разложеніи въ ряды функций  $\sin x$  и  $\cos x$ . — Проф. *Д. Синцовъ*. Къ вопросу о преподаваніи математики. Я. Штейнеръ, какъ преподаватель. — *Г. Урбанъ*. Являются ли основныя законы химіи точными или же лишь приближенными. — *Е. Смирновъ*. Объ ирраціональныхъ числахъ — *П. Ренаръ*. Авіація, какъ спортъ и наука — Проф. *О. Лоджъ*. Міровой эфиръ — *К. Лебединцевъ*. Понятіе объ ирраціональномъ числѣ въ курсѣ средней школы — *Э. Кроммелингъ*. Происхожденіе и природа кометъ. — *А. Филипповъ*. Дѣйствія съ періодическими дробями. — Прив.-доц. *В. Бобынинъ*. Естественныя и искусственныя пути возстановленія историками математики древнихъ доказательствъ и выводовъ

### 44-й семестръ.

О построеніяхъ, производимыхъ циркулемъ и линейкой. Прив.-доц. *С. О. Ша-туновскаго*. О биссектрисахъ треугольника. *Н. Извольскаго*. О четырехугольникахъ, имѣющихъ при данныхъ сторонахъ наибольшую площадь. Проф. *Б. К. Млодзевскаго*. Практическія занятія по физикѣ въ германской средней школѣ. *К. Иванова*. Замѣтка по вопросу о трисекціи угла. Проф. *Д. Синцова*. Нѣкоторыя свойства вращающагося твердаго тѣла. *Н. Васильева*. Броуновское движеніе. *А. Толлоса*. Дѣленіе на 9. *А. Филиппова*. Объ ирраціональныхъ числахъ. *Е. Смирнова*. Основы беспроволочной телеграфіи. *Л. Мандельштама* и *Н. Паналекси*. О биссектрисахъ треугольника. *Е. Томашевича*. О геометрическихъ построеніяхъ съ помощью линейки при условіи, что дана неизмѣнная дуга круга съ центромъ. Проф. *Д. Мордухай-Болтовскаго*. Отношеніе новѣйшей физики къ механистическому міровоззрѣнію. *М. Планка*. Генезисъ минераловъ. *Г. Е. Бёкке*. Еще къ вопросу объ ирраціональныхъ числахъ. *К. Лебединцева*. Приближенное рѣшеніе задачи объ удвоеніи куба. Прив.-доц. *А. А. Дмитровскаго*. Причина землетрясеній, горообразованія и родственныхъ явленій. *Т. Арльта*.

## Условія подписки:

Подписная цѣна съ пересылкой: за годъ 6 руб., за полгода 3 руб. Учителя и учительницы низшихъ училищъ и всѣ учащіеся, высылающіе журналъ **непосредственно изъ конторы редакціи**, платятъ за годъ 4 руб., за полугодіе 2 руб. Допускается разсрочка подписной платы по соглашенію съ конторой редакціи. Книгопродавцамъ 5% уступки.

Журналъ за прошлые годы по 2 р. 50 к., а учащимся и книгопродавцамъ по 2 р. за семестръ. Отдѣльные номера текущаго семестра по 30 к., прошлыхъ семестровъ по 25 коп.

Адресъ для корреспонденціи: Одесса. Въ редакцію „Вѣстника Опытной Физики“.