№ 541.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

Элементарной Математики,

издаваемый

В. А. Гернетомъ

подъ редакціей

Привать-Доцента В. Ф. Кагана.

XLVI-го Семестра № 1-й.

ОДЕССА.
Типографія Акц. Южно-Русскаго О-ва Печ. Дѣла. Пушкинская, 18.
1911.

XLVI Сем. № 1.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 541.

Содержаніе: Мѣсто солнца между звѣздами. *П. Пюизе.* — О преподаваніи геометріи. *Проф. Ф. Клейна.* (Окончаніе). — Ѳ. М. Суворовъ. Некрологъ. *Проф. Д. Синцова.* — Научная хроника: Безпроволочное телеграфированіе на дирижабляхъ и аэропланахъ. — Рецензіи: Максъ Планкъ. „Теоретическая физика“. *Н. Р.* В. Ивановъ (Дубравинъ). „Курсъ ариѳметики“. *К. Л.* — Задачи №№ 436 — 439 (5 сер.). Рѣшенія задачъ: №№ 301, 309, 310, 312 и 314 (5 сер.). — Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.— Объявленія.

Мѣсто солнца между звѣздами.

П. Пюизе.

Послѣ того какъ геологія установила незыблемымъ образомъ, что земной шаръ въ теченіе различныхъ эпохъ имѣлъ совершенно различный видъ, историческій методъ занялъ видную роль въ изученіи вселенной. Явленія, наблюдаемыя въ настоящее время, — даже тѣ, которыя, повидимому, подвержены правильной періодичности, — представляютъ для насъ интересъ лишь въ той мѣрѣ, поскольку они даютъ ключъ къ пониманію событій прошлаго и будущаго. Разсматривая сложное тѣло, малое или большое, мы уже не удовлетворяемся удобной, но голословной гипотезой, что оно извѣчно было такимъ, или что оно въ готовомъ видѣ возникло изъ небытія: мы желаемъ знать, какъ оно произошло, и что съ нимъ будетъ.

Если имѣть въ виду постоянство климатовъ и правильность явленій, обнаруживаемыхъ небомъ, то наше желаніе на первый взглядъ можетъ показаться тщетнымъ. Вѣка, оставившіе намъ въ наслѣдство наблюденія, заслуживающія довѣрія, въ общей сложности составляютъ, конечно, лишь ничтожную дробь того періода, который требуется для развитія небеснаго тѣла. Что можетъ прибавить человѣческая жизнь

— даже если бы она была вся посвящена изслѣдованію — къ этому сокровищу, столь долго накоплявшемуся, но, очевидно, недостаточному?

Правда, мы не можемъ ускорить слишкомъ медленнаго для насъ теченія явленій. Но мы въ состояніи присоединить нѣсколько новыхъ снимковъ къ той кинематографической лентѣ, какой является для насъ природа: для этого мы должны сгруппировать разрозненные элементы и связать ихъ по правиламъ логической индукціи. Наши выводы могутъ разсчитывать на всеобщее признаніе, если мы будемъ исходить лишь изъ вѣроятныхъ и соразмѣрныхъ гипотезъ о постоянствѣ физическихъ законовъ. Если при этомъ наши выводы опираются на разнообразные и точные опыты, то они могутъ получить для насъ доказательную силу, какъ единственно возможные. Классифицировать въ логическомъ порядкѣ не только всѣ объекты, доступные наблюденію или обнаруживающіе нѣкоторое родство, но и такіе, которые могутъ быть приведены въ связь при помощи прямой концепціи, заставить ихъ продефилировать предъ нами такимъ образомъ, чтобы у насъ не оставалось сомнѣнія въ ихъ непрерывности, и показать зависимость ихъ смѣны отъ познанныхъ законовъ, таковы направляющіе принципы въ большинствѣ астрофизическихъ изысканій. Изслѣдователь доволенъ, если ему удается связать два объекта, отдѣленные глубокими различіями, хотя бы продолженія ряда въ прошломъ и будущемъ оставались скрытыми отъ насъ.

Наше убѣжденіе въ существованіи такого рода рядовъ основано на аналогіяхъ, обнаруженныхъ, съ одной стороны, между различными планетами, съ другой стороны — между солнцемъ и звѣздами и, наконецъ, между различными туманностями. Труднѣе заполнить пропасть, отдѣляющую планеты отъ солнца и звѣзды отъ туманностей; она еще и въ наши дни даетъ поводъ къ ожесточеннымъ спорамъ. За неимѣніемъ достаточно большого числа близкихъ промежуточныхъ членовъ остается нерѣшеннымъ вопросъ о томъ, слѣдуетъ ли считать туманности первичной матеріей, изъ которой образовались звѣзды, или же конечнымъ моментомъ ихъ распаденія. Точно такъ же не рѣшенъ еще вопросъ, произошли ли планеты изъ образовавшагося уже солнца и лишь случайно присоединились къ нему, или же планеты и солнце произошли одновременно изъ одной и той же первичной среды двумя различными путями? Очевидно, было бы рисковано терять изъ виду эти пробѣлы въ нашихъ знаніяхъ и стараться во что бы то ни стало распредѣлить небесныя тѣла въ одинъ только линейный рядъ. Мы рискуемъ при этомъ впасть въ ту же ошибку, что и ботаникъ, который, разсматривая разнообразныя растенія одного и того же лѣса, полагалъ бы, что всякое изъ нихъ въ своемъ развитіи проходитъ послѣдовательно черезъ всѣ окружающія формы.

Размѣры настоящей статьи не позволяютъ намъ разсмотрѣть вопросъ объ эволюціи міровъ во всей его сложности или хотя бы изложить вкратцѣ всѣ провизорныя рѣшенія, предложенныя наиболѣе авторитетными изслѣдователями въ связи съ упомянутыми двумя спорными вопросами. Къ тому же результаты многочисленныхъ работъ, относящихся къ этой области, талантливо изложены въ двухъ новыхъ трудахъ, которые мы и рекомендуемъ читателю*). Наша статья преслѣдуетъ болѣе скромную задачу: мы намѣрены сгруппировать факты, которые позволяютъ соединить въ одну естественную семью солнце и большинство неподвижныхъ звѣздъ, и намѣтить съ достаточной правдоподобностью ея превращенія въ ближайшемъ прошломъ и будущемъ.

Родство солнца со звѣздами — по крайней мѣрѣ, съ нѣкоторыми изъ нихъ — астрономы предчувствовали еще задолго до того, какъ имъ удалось получить обладающіе доказательной силой факты. Лишь въ XVIII вѣкѣ изслѣдователи начали производить количественныя сравненія солнечнаго свѣта съ свѣтомъ другихъ небесныхъ объектовъ; при этомъ сравненіи промежуточными объектами служили различные земные источники. Такимъ путемъ Митчель (Mitchell) пришелъ къ убѣжденію, что при увеличеніи средняго разстоянія солнца отъ земли въ 500 000 разъ солнце имѣло бы почти такой блескъ, какъ Сатурнъ во время противостоянія.

Съ другой стороны, неизмѣнность констелляцій въ теченіе года позволяла думать, что разстоянія наиболѣе близкихъ звѣздъ представляютъ собой величины, по меньшей мѣрѣ, одного и того же порядка. Съ того времени вычисленія яркости и удаленности звѣздъ сдѣлали значительные успѣхи, хотя и не вполнѣ еще достигли желательной точности. Въ настоящее время всѣ согласно допускаютъ, что, если бы солнце было удалено на среднее разстояніе звѣздъ, видимыхъ невооруженнымъ глазомъ, оно въ лучшемъ случаѣ было бы для насъ видимо, но оставляло бы еще позади себя огромное большинство звѣздъ, видимыхъ лишь въ телескопъ. Уже съ этой точки зрѣнія солнце не изолировано во вселенной, но имѣетъ безчисленное множество родственниковъ.

Теперь уже нельзя также приписывать солнцу исключительнаго положенія въ качествѣ источника теплоты. Съ первыхъ шаговъ спектроскопіи удалось установить, что количественное отношеніе между тепловой энергіей и свѣтовой для солнца почти таково же, какъ и для наиболѣе яркихъ раскаленныхъ источниковъ, которые мы умѣемъ получать. Средній цвѣтъ звѣздъ поддается такимъ же сравненіямъ, при чемъ нѣкоторыя по своему цвѣту болѣе приближаются къ красному каленію, а другія — къ синему. Лишь небольшое число звѣздъ имѣетъ темнокрасный цвѣтъ, характеризующій начальную стадію каленія. Несмотря на эти успѣшные результаты, мы должны признать, что непосредственное измѣреніе теплоты, испускаемой звѣздою, было одной изъ самыхъ трудныхъ задачъ астрофизики. Попытки Гёггинса (Huggins), Стона (Stone) и Бойса (Boys) рѣшить эту задачу были безуспѣшны, хотя аппаратъ Бойса былъ настолько чувствителенъ, что давалъ возможность обнаружить 1/500 000 часть теплового излученія, испускаемаго луной во время полнолунія. Николь (Nichols) добился, повидимому, болѣе успѣшныхъ результатовъ: опыты, которые онъ прозводилъ въ Джеркской обсерваторіи съ 1898 до 1900 г., доказали, что теплота,

---

*) Ch. André. „Les planètes et leur origine“, Gauthier Villars, Paris, 1909 — G. E. Hale. „The Study of stellar Evolution“. Wm. Wesley & son, London, 1908

получаемая отъ звѣзды Арктура, эквивалентна теплотѣ отъ свѣчи, находящейся на разстояніи 10 *км.*, если въ обоихъ случаяхъ сдѣлать поправку на поглощеніе земной атмосферой. Вега не даетъ и половины того количества тепла, которое доставляетъ Арктуръ, хотя видимая яркость обѣихъ звѣздъ почти одна и та же. Мы можемъ отсюда заключить, что Арктуръ, который сравнительно богаче лучами съ волнами большой длины, имѣетъ менѣе высокую температуру, чѣмъ Вега: въ пользу Арктура вѣсы склоняются вслѣдствіе большихъ размѣровъ его видимаго діаметра. Тѣмъ не менѣе это заключеніе пришлось бы, можетъ быть, отбросить, если бы возможно было устранить дѣйствія поглощенія атмосферъ, которыми окружена каждая изъ этихъ звѣздъ. Какъ извѣстно, законы В и н а (Wien) и П л а н к а (Planck) даютъ въ функціи температуры длину волны, соотвѣтствующую максимуму энергіи въ спектрѣ; примѣненіе этихъ законовъ привело къ заключенію, что большинство яркихъ звѣздъ слѣдуетъ считать болѣе высоко нагрѣтыми, чѣмъ солнце; несомнѣнно, однако, что эти эмпирическіе законы, провѣренные въ опредѣленныхъ границахъ для однородныхъ источниковъ, не могутъ имѣть строгаго значенія для объектовъ, которые столь велики и сложны.

Между тѣми численными величинами, которыя характеризуютъ солнце и эквиваленты которыхъ желательно было бы получить для звѣздъ, наше вниманіе прежде всего привлекаютъ линейный діаметръ, масса и плотность. Опредѣленіе ихъ уже не является простой математической задачей, какъ въ случаѣ планетъ. Болѣе отдаленныя звѣзды не оказываютъ никакого возмущающаго вліянія на Кеплеровы движенія нашей системы. Ихъ видимые діаметры иллюзорны, и самые сильные инструменты пока еще далеки отъ того, чтобы дать звѣздамъ реальные диски. Къ задачѣ можно подойти лишь окольнымъ путемъ и лишь въ частныхъ случаяхъ.

Первое условіе успѣха заключается въ томъ, чтобы звѣзда разлагалась на двѣ другія, обладающія періодическимъ эллиптическимъ движеніемъ вокругъ общаго центра тяжести. Второе условіе состоитъ въ томъ, чтобы та же самая звѣзда, при сравненіи съ сосѣдними звѣздами или при наблюденіи въ меридіанѣ, обнаруживала замѣтный годичный параллаксъ.

Чтобы идти дальше, мы должны допустить, что двѣ соединенныя звѣзды взаимно притягиваются, слѣдуя закону Н ь ю т о н а. Но у насъ нѣтъ основаній оспаривать этотъ п о с т у л а т ъ, потому что во всѣхъ случаяхъ, когда возможно было сдѣлать точный анализъ орбиты, она оказывалась конической проекціей эллипса, описываемаго по закону площадей. Единственныя обнаруженныя неправильности сами имѣютъ періодическій характеръ и объясняются присутствіемъ третьей составляющей, которая остается невидимой. При такомъ допущеніи законы К е п л е р а позволяютъ вычислить линейные размѣры системы и нижній предѣлъ суммы массъ. Такимъ путемъ было найдено, что искомыя массы вообще превышаютъ массу солнца, но во всякомъ случаѣ онѣ представляютъ собой величины того же порядка. Мы впали бы въ крайность, если бы заключили отсюда, что наша система занимаетъ во вселенной одно изъ послѣднихъ мѣстъ. Число изслѣдованныхъ случаевъ еще мало въ сравненіи съ числомъ звѣздъ, и весьма возможно, что вниманіе наблюдателей привлекли къ себѣ прежде всего самыя мощныя системы.

Для того, чтобы приступить къ вычисленію массъ, нѣтъ необходимости видѣть обѣ составляющія отдѣленными другъ отъ друга на небесной сферѣ значительнымъ промежуткомъ. Мы получимъ равносильный результатъ, если намъ удастся отмѣтить періодическое раздвоеніе спектральныхъ линій или періодическое колебаніе этихъ линій относительно соотвѣтствующихъ линій земного источника. Въ томъ и въ другомъ случаѣ нужно допустить, что имѣетъ мѣсто измѣненіе проекціи скорости звѣзды на лучъ зрѣнія, и, зная рядъ отклоненій для опредѣленныхъ моментовъ, отдѣленныхъ надлежащими промежутками, мы можемъ графически построить орбиту.

Этотъ методъ, который вначалѣ считался второстепеннымъ сравнительно съ предыдущимъ, въ настоящее время пріобрѣтаетъ преимущество, во-первыхъ, потому, что онъ не требуетъ знанія годичныхъ параллаксовъ, а во-вторыхъ — потому, что въ послѣднее время въ конструкціи спектрографовъ удалось достигнуть большихъ успѣховъ, чѣмъ въ конструкціи объективовъ и микрометровъ. Уже число спектроскопическихъ паръ, повидимому, должно значительно превышать число видимыхъ паръ. Согласно работамъ Ликской обсерваторіи въ среднемъ одна звѣзда на семь обнаруживаетъ періодическое колебаніе спектральныхъ линій, не разлагаясь на составляющія въ самыхъ сильныхъ телескопахъ. Такъ какъ въ другихъ отношеніяхъ ихъ спектры не обнаруживаютъ никакихъ спеціальныхъ особенностей, то можно, не колеблясь, примѣнить къ совокупности звѣздъ заключенія, доставляемыя спектроскопическими двойными звѣздами. Чаще всего выведенныя скорости малы и не превышаютъ 6 *км.* въ секунду. Но есть случаи, когда ихъ дѣйствіе явственно обнаруживается и легко можетъ быть измѣрено. Для массъ системъ β Возницы и ξ Большой Медвѣдицы найдены болѣе надежныя данныя, чѣмъ для всѣхъ другихъ; какъ показываетъ спектроскопъ, онѣ, по меньшей мѣрѣ, въ четыре раза превышаютъ массу солнца.

Дальнѣйшій успѣхъ оказывается возможнымъ въ тѣхъ случаяхъ, когда спектроскопическая двойная звѣзда является въ то же время перемѣнной, и, въ особенности, когда она черезъ равные промежутки времени претерпѣваетъ замѣтныя ослабленія блеска, остающагося постояннымъ въ теченіе самыхъ промежутковъ. Въ этомъ случаѣ есть основаніе полагать, что обѣ составляющія взаимно затмѣваютъ одна другую; эта гипотеза получаетъ высокую степень вѣроятности, если оказывается, что затменія правильно совпадаютъ съ тѣми моментами, когда скорость въ направленіи луча зрѣнія мѣняетъ знакъ. Кривая, изображающая яркость свѣта въ функціи отъ времени, даетъ намъ тогда возможность вычислить не только сумму массъ обѣихъ составляющихъ, но также массу и діаметръ каждой изъ нихъ въ отдѣльности. Такимъ путемъ найдено, что звѣзда β Персея содержитъ два шара, которые имѣютъ въ діаметрѣ 1 700 000 *км.* и 1 330 000 *км.*, и которые отдѣлены разстояніемъ, едва превышающимъ сумму ихъ діаметровъ. Сравнительно съ солнцемъ, взятымъ за единицу, массы составляющихъ въ звѣздѣ β Персея равны соотвѣтственно $\frac{4}{9}$ и $\frac{2}{9}$, ихъ плотность значительно меньше солнечной, а полное излученіе гораздо больше того, подъ благотворной силой котораго мы живемъ.

Аналогичныхъ примѣровъ въ настоящее время извѣстно довольно много. Но по сравненію съ совокупностью всѣхъ звѣздныхъ группъ они составляютъ лишь ограниченный классъ, и ясно, что они обязываютъ насъ представлять себѣ міры, построенные по совершенно другому плану, чѣмъ нашъ. Интересно, однако, отмѣтить, что въ этихъ случаяхъ, наиболѣе благопріятныхъ для вычисленія массъ, мы вездѣ получаемъ умѣренныя числа, подтверждающія аналогію, которую мы допустили между солнцемъ и звѣздами.

Еще большую цѣнность имѣло бы для насъ убѣдиться въ наличности другой родственной черты — въ присутствіи планетъ, малыхъ спутниковъ, которые не свѣтятъ вовсе или свѣтятъ отраженнымъ свѣтомъ. Въ этомъ отношеніи мы находимся пока въ области надеждъ, которыя начинаютъ, однако, принимать болѣе реальный характеръ; этимъ мы обязаны не столько разсматриванію свѣтилъ въ телескопѣ, сколько совмѣстному примѣненію спектрографа и вычисленія.

Дѣйствительно, самые большіе объективы не могутъ, повидимому, показать намъ такихъ шаровъ, какъ Юпитеръ и Сатурнъ, на разстояніи наиболѣе близкихъ звѣздъ; о землѣ и Венерѣ навѣрное не можетъ быть и рѣчи. Видимые спутники двойныхъ звѣздъ и невидимые спутники, обнаруживаемые по періодическому колебанію нѣкоторыхъ яркихъ звѣздъ при микрометрическомъ сравненіи ихъ съ сосѣдними звѣздами, имѣютъ размѣры гораздо болѣе высокаго порядка. Но нужно принять въ разсчетъ, что присутствіе планетъ вокругъ солнца измѣняетъ его поступательное движеніе. Звѣздная система, испытывающая со стороны своихъ сосѣдей лишь незначительныя притяженія, должна обладать равномѣрнымъ прямолинейнымъ движеніемъ. Вполнѣ строго это относится къ центру тяжести группы, а не къ точкѣ, которая выдается по своему наиболѣе яркому блеску. Подъ вліяніемъ обращеній планетъ видимый центръ солнечнаго шара то забѣгаетъ впередъ, то отстаетъ. Его скорость испытываетъ колебанія въ одну и въ другую сторону, составляющія до 30 *м.* въ секунду. Съ другой стороны, за послѣдніе двадцать лѣтъ конструкція спектографовъ достигла большого совершенства, и мы имѣемъ основаніе ожидать, что они откроютъ намъ отклоненія такого порядка. Съ этой точки зрѣнія намъ могутъ дать показанія не только наиболѣе близкія звѣзды, но и всѣ тѣ, которыя посылаютъ намъ достаточно свѣта для того, чтобы ихъ спектральныя линіи могли быть зарегистрированы на свѣточувствительной пластинкѣ.

(Продолженіе слѣдуетъ).

О преподаваніи геометріи.

Проф. Ф. Клейна.

(Окончаніе).*

IV. Преподаваніе геометріи въ Германіи.

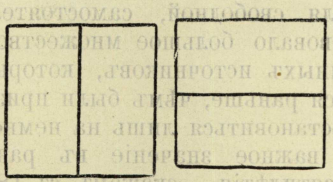
Мы одновременно будемъ имѣть въ виду всѣ вообще страны съ нѣмецкой рѣчью, какъ нѣмецкую Швейцарію и Австрію. Преподаваніе геометріи въ нѣмецкихъ странахъ по ходу своего развитія представляетъ новый типъ, совершенно отличный отъ разсмотрѣнныхъ раньше; прежде всего мы здѣсь не находимъ того единообразія, которое въ другихъ странахъ обусловливалось либо строгой государственной централизацiей, либо дѣйствіемъ сильной личности. Напротивъ, здѣсь, въ Германіи, школьное преподаваніе въ каждомъ отдѣльномъ государствѣ развивалось своимъ особымъ путемъ; больше того, въ каждой отдѣльной школѣ, каждому учителю было предоставлено достаточно простора для свободной, самостоятельной работы. Такимъ образомъ, здѣсь дѣйствовало большое множество разнородныхъ вліяній изъ самыхъ различныхъ источниковъ, которыя въ большинствѣ случаевъ могли развиваться раньше, чѣмъ были признаны въ учебныхъ планахъ. Здѣсь я могу остановиться лишь на немногихъ моментахъ, которые имѣли особенно важное значеніе въ развитіи преподаванія геометріи за послѣднія десятилѣтія,— скажемъ, съ 1870 г.; все остальное можно найти въ книгѣ Клейна-Шиммака**), подробно излагающей весь ходъ развитія.

Съ семидесятыхъ годовъ, благодаря общему національному подъему, въ широкихъ народныхъ массахъ повысилась потребность въ образованіи, и въ связи съ этимъ возникло весьма важное движеніе, которое ставитъ себѣ цѣлью реформу преподаванія въ народной школѣ; согласно господствующему взгляду элементарное преподаваніе должно быть прежде всего непосредственно нагляднымъ, и преподаватель долженъ здѣсь исходить всегда изъ видимыхъ предметовъ, хорошо знакомыхъ ученику. Какъ извѣстно, эти взгляды провозглашалъ еще знаменитый швейцарскій педагогъ Песталоцци, котораго вообще слѣдуетъ считать основателемъ начальнаго преподаванія въ современномъ смыслѣ слова; время его дѣятельности относится, круглымъ счетомъ, къ 1800 г. Каждому математику, несомнѣнно, будетъ интересно познакомиться съ оригинальными трудами Песталоцци, имѣющими отношеніе къ математикѣ: одна книга носитъ названіе „Das *ABC* der Anschauung oder die

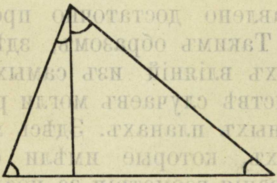
*) См. № 538 „Вѣстника“.

**) F. Klein. „Vorträge über den mathematischen Unterricht an höheren Schulen“. Bearbeitet von R. Schimmack. Leipzig 1907.

Anschauungslehre der Massverhältnisse*) („Азбука наглядности или ученіе о наглядности метрическихъ отношеній“), а другая: „Die Anschauungslehre der Zahlenverhältnisse“**) („Ученіе о наглядности численныхъ отношеній“). Цѣль этихъ книгъ — показать, какимъ путемъ можно достичь того, чтобы совершенно неподготовленный ученикъ вполнѣ усвоилъ себѣ простѣйшіе факты изъ области пространственныхъ и численныхъ представленій. Жестоко ошибается тотъ, кто ожидаетъ найти въ этихъ книгахъ что-либо увлекательное; напротивъ, это, пожалуй, самое скучное изъ всего, что мнѣ когда-либо приходилось имѣть въ рукахъ, такъ какъ онѣ съ ужасающей послѣдовательностью излагаютъ подробнѣйшимъ образомъ всевозможнѣйшія самыя обыкновенныя соотношенія. Напримѣръ, нужно научить ребенка, какъ раздѣлить квадратъ на равныя части горизонтальными и вертикальными прямыми (фиг. 4); съ этой цѣлью Песталоцци не только даетъ таблицу со всѣми 100 комбинаціями дѣленія посредствомъ 0, 1, ..., 9 вертикальныхъ и горизонтальныхъ линій, но описываетъ также въ текстѣ число, положеніе и т. д. квадратовъ и прямоугольниковъ, получаемыхъ при дѣленіи въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ, и при томъ всякій разъ по одной и той же схемѣ и самымъ подробнымъ образомъ. Это объясняется,



Фиг. 4



Фиг. 5.

вѣроятно, тѣмъ, что въ то время народные учителя получали весьма недостаточную подготовку, и Песталоцци желалъ дать всякому, даже самому неискусному учителю богатый запасъ примѣровъ съ тѣмъ, чтобы учитель могъ для своихъ уроковъ выбрать и буквально воспроизвести любые изъ нихъ.

Въ видѣ дополненія укажу еще на небольшую книжку гёттингенскаго философа Гербарта (I. F. Herbart), который особенно много сдѣлалъ для распространенія этихъ идей: „Pestalozzi's Idee eines *ABC* der Anschauung“***). Гербартъ развиваетъ здѣсь мысли, намѣченныя Песталоцци, но его изложеніе не столь схематично и потому читается съ бо́льшимъ интересомъ. Гербартъ предлагаетъ знакомить дѣтей съ треугольниками всевозможныхъ видовъ. Такъ, онъ даетъ въ одной таблицѣ углы треугольниковъ, начиная съ 5^0, черезъ каждые 5^0, а также углы съ обѣихъ сторонъ высоты (фиг. 5), а въ другой таблицѣ приводитъ соотвѣтственныя длины сторонъ съ той цѣлью,

*) Въ 2 выпускахъ. Zürich u. Tübingen, 1803.

**) Въ 3 выпускахъ. Zürich u. Tübingen, 1803/04.

***) Göttingen, 1802.

чтобы учащійся провѣрялъ эти данныя путемъ измѣренія. Гербартъ заходитъ настолько далеко, что предлагаетъ даже привѣшивать къ колыбели ребенка таблицы съ треугольниками всевозможныхъ видовъ, чтобы они постоянно находились передъ глазами ребенка и такимъ образомъ запечатлѣвались въ его умѣ.

Песталоцци и Гербартъ оказали очень сильное вліяніе на преподаваніе въ народной школѣ; оно продолжается еще до настоящаго времени,—явные слѣды идей Песталоцци вы найдете въ большинствѣ учебниковъ геометріи для народныхъ школъ; ученіе Песталоцци о наглядности сохранилось въ весьма характерной формѣ въ нашихъ дѣтскихъ садахъ, ведущихъ свое начало отъ Песталоцци же или отъ Фребеля; здѣсь маленькія дѣти знакомятся съ простѣйшими пространственными формами посредствомъ игръ съ предметами, надлежащимъ образомъ подобранными.

Эти педагогическія идеи скоро проникли также и въ среднія школы. Въ этомъ отношеніи особенно характеренъ учебный планъ, выработанный для Австріи въ 1850 г. Экснеромъ (Exner) и Боницемъ (Bonitz). Что движеніе началось именно въ этой странѣ и въ то время, объясняется политическими причинами; подобные примѣры мы, впрочемъ, встрѣчали уже не разъ. Въ Австріи, благодаря многочисленнымъ школамъ католическихъ орденовъ, въ особенности іезуитскимъ, въ преподаваніи математики удержался безъ существенныхъ перемѣнъ средневѣковый догматическій методъ; когда въ 1848 г. старыя учрежденія были снесены революціоннымъ потокомъ, пришлось все устраивать заново, и потому нововведенія были здѣсь чистѣйшаго типа. Такъ, въ учебныхъ планахъ Экснера-Боница для среднихъ школъ новые наглядные методы были проведены въ самыхъ широкихъ предѣлахъ. Согласно этимъ планамъ, пространственныя представленія развиваются въ младшихъ классахъ не только для подготовки къ дальнѣйшему курсу, но и въ качествѣ самоцѣли; задача состоитъ здѣсь не въ томъ, чтобы на наглядныхъ предметахъ пріучать ребенка къ логическому мышленію: цѣлью является самое упражненіе интуитивной способности. Въ младшихъ классахъ (4 года) логическій моментъ почти совершенно отсутствуетъ, и ученикъ путемъ систематическаго черченія пріобрѣтаетъ наглядное знакомство съ различными фигурами; въ старшихъ классахъ, гдѣ усвоенный раньше матеріалъ подвергается логической обработкѣ, черченію все еще удѣляется много вниманія. Всякому изъ васъ пришлось, вѣроятно, замѣтить, что австрійскіе математики очень хорошо умѣютъ чертить; этимъ они обязаны изложенному выше учебному плану.

Эти тенденціи въ началѣ семидесятыхъ годовъ начинаютъ обнаруживаться также въ Пруссіи и вообще въ Сѣверной Германіи. Извѣстную роль играло при этомъ и то обстоятельство, что въ то время Боницъ занялъ весьма вліятельную роль въ прусскомъ министерствѣ просвѣщенія. Основныя положенія прусской реформы формулированы въ учебныхъ планахъ 1882 г. Внѣшнимъ образомъ они характеризуются тѣмъ, что вводятъ вступительный курсъ геометріи, такъ называемую геометрическую пропедевтику, во второмъ классѣ; здѣсь ученикъ долженъ нагляднымъ образомъ освоиться съ тѣмъ матеріаломъ, который составитъ содержаніе курса геометріи въ слѣдующихъ классахъ. Подробнѣе объ этихъ учебныхъ планахъ вы найдете въ книгѣ Клейна-Шиммака и въ моей статьѣ „100 лѣтъ преподаванія математики въ среднихъ школахъ Пруссіи“ *), въ которой я старался представить общій ходъ развитія преподаванія математики въ Германіи за послѣднее столѣтіе.

Свое наиболѣе полное выраженіе реформа 1882 г. нашла въ учебникѣ Гольцмюллера (Holzmüller): „Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik“ (въ 3 частяхъ, изданіе Teubner'a, Leipzig, 1894-95 и многочисленныя послѣдующія изданія). Характерно даже самое заглавіе книги: „методическій“ принципъ здѣсь противопоставленъ „систематическому“; авторъ желаетъ дать не неподвижную учебную систему наподобіе Евклидовой, но учебный курсъ, который былъ бы приноровленъ къ естественнымъ требованіямъ и приводилъ бы сообразно съ указаніями опыта къ наибольшей успѣшности учащихся. Кромѣ того, мы здѣсь имѣемъ не учебникъ геометріи или ариѳметики самой по себѣ, но всей элементарной математики; различные отдѣлы ея чередуются въ той же послѣдовательности, въ какой ихъ дѣйствительно можно проходить при преподаваніи, при чемъ яснѣе выступаетъ также ихъ взаимная связь. При изложеніи геометрическаго матеріала авторъ каждый разъ исходитъ изъ практическаго черченія и построеній; особенное вниманіе обращено на развитіе пространственныхъ представленій, на стереометрическое черченіе; каждое построеніе изучается не только теоретически въ смыслѣ его возможности, но требуется также чисто выполнить его на дѣлѣ. При этомъ чисто геометрическія теоремы получаются, такъ сказать, попутно; такъ, напримѣръ, теоремы конгруэнтности вытекаютъ изъ замѣчанія, что построеніе треугольника по 3 даннымъ элементамъ является вполнѣ опредѣленнымъ. Замѣтимъ еще, что въ связи съ указанной тенденціей въ курсъ вошли также частью и основы проективной геометріи. Нельзя, однако, не признать, что у Гольцмюллера отчасти пострадала логическая сторона; да и то сказать, всѣмъ вѣдь намъ извѣстно, что нельзя достигнуть успѣха одновременно въ различныхъ направленіяхъ: если напирать особенно на логику, то пострадаетъ наглядность, и наоборотъ.

Положительные результаты изложенныхъ здѣсь теченій теперь вездѣ вошли въ школьное преподаваніе, но, конечно, тѣмъ временемъ жизнь выдвинула и новыя требованія. Сюда относится прежде всего движеніе, распространившееся во всѣхъ странахъ и въ Германіи достигшее

*) См. Lexis, die Reform des höheren Unterrichts im Preussen (Halle, 1902) Перепечатано въ Jahresber. d. deutsch. Math.-Verein. 13 (1904), стр. 377 и въ книгѣ Klein-Riecke, „Neue Beiträge zur Frage des math. u. phys. Unterr an höheren Schulen“, (Leipzig, 1904), стр. 63.

особой силы около 1890 г.; сторонники его желаютъ, чтобы преподаванiе удѣляло больше вниманiя *приложенiямъ математики ко всѣмъ отраслямъ естествознанiя* и, въ частности, къ *техникѣ*, — чтобы оно выясняло, вообще, *значенiе математики во всѣхъ областяхъ человѣческой жизни*. Въ сравненiи съ прежней тенденцiей къ наглядности мы здѣсь уже видимъ нѣчто существенно новое; дѣйствительно, наглядность можетъ еще совмѣщаться съ чисто формальными цѣлями, тогда какъ теперь выдвигается требованiе, чтобы математическое мышленiе находило себѣ плодотворное примѣненiе въ самыхъ разнообразныхъ областяхъ. Съ этимъ теченiемъ близко связаны и тѣ реформаторскiя тенденцiи, о которыхъ мнѣ столь часто приходилось говорить прошлой зимой, такъ что теперь я могу лишь упомянуть о нихъ: стремленiе *ввести* въ школу *понятiе о функцiи, графическiе методы* и *начала счисленiя безконечно-малыхъ* — все это открываетъ преподаванiю геометрiи новые пути.

Зато я нѣсколько подробнѣе остановлюсь на нѣкоторыхъ *новѣйшихъ теченiяхъ, которыя идутъ еще дальше* и съ которыми математики должны считаться болѣе серьезно, чѣмъ до сихъ поръ.

а) Прежде всего я имѣю здѣсь въ виду *извѣстныя данныя современнаго психологическаго изслѣдованiя*, — въ частности, экспериментальной психологiи, а также *современной гигiены*. Еще *Гербартъ* пытался построить педагогику на психологическихъ основахъ; осуществленiе этой задачи получило совершенно другой фундаментъ съ тѣхъ поръ, какъ психологiя выработала точные экспериментальные методы. Напримѣръ, подумайте только о томъ, какъ важно для педагогики знать природу *памяти*; сколь важно для нея, знать, напримѣръ, какъ факты запечатлѣваются въ памяти и удерживаются ею, въ какой степени это зависитъ отъ окружающаго или отъ личныхъ особенностей учащагося; психологи, дѣйствительно, много работаютъ надъ этими вопросами, въ частности — какъ разъ здѣсь, въ Гёттингенѣ. Столь же важно для педагогики изслѣдовать явленiе *усталости*, — напримѣръ, установить, находятся ли физическая усталость и душевная въ взаимной связи или нѣтъ; раньше думали, что послѣ физическаго напряженiя осебенно повышается способность къ умственной работѣ, теперь же всѣ, основываясь на опытныхъ данныхъ, придерживаются противоположнаго мнѣнiя.

Въ этой области особенно важное значенiе, какъ разъ также и для математики, имѣетъ вопросъ о *различiи въ индивидуальныхъ способностяхъ*. Въ прежнее время господствовало убѣжденiе, что лишь очень немногiе ученики надѣлены отъ природы „математическими способностями“, и что только они въ состоянiи понять кое-что изъ математики, всѣ же прочiе даже при величайшихъ усилiяхъ ничему не могутъ научиться. Что подобный взглядъ могъ найти всеобщее распространенiе, объясняется, вѣроятно, недостатками метода, который господствовалъ тогда въ преподаванiи математики.

Позже, благодаря учебнымъ планамъ *Экснера-Боница*, начали больше понимать значеніе педагогическаго искусства, и тогда скоро утвердилось противоположное мнѣніе, — что и въ математикѣ любой ученикъ, при добромъ желаніи и при нѣкоторомъ напряженіи со стороны преподавателя, можетъ добиться сносныхъ результатовъ. Я надѣюсь, что экспериментальное психологическое изслѣдованіе раскроетъ намъ дѣйствительное положеніе дѣла. Несомнѣнно, что между людьми, вообще способными, попадаются также и совершенные „*аматематики*“, которымъ математическое мышленіе абсолютно недоступно. Такіе аматематики встрѣчаются также и между высоко-художественными натурами; въ этомъ я могъ убѣдиться изъ разговора съ знаменитымъ берлинскимъ архитекторомъ *Месселемъ* (Messel), котораго вы всѣ знаете, между прочимъ, по его столь же художественному, какъ и цѣлесообразному зданію универсальнаго магазина Вертгейма. Когда онъ услышалъ, что я математикъ, онъ высказался въ самыхъ рѣзкихъ выраженіяхъ о всѣхъ этихъ ни на что ненужныхъ выдумкахъ, которыми такъ мучаютъ въ школѣ, и которыя ему, по крайней мѣрѣ, рѣшительно ничего не дали. Быть можетъ, было бы гораздо благоразумнѣе оставлять такія натуры вовсе безъ математики и не тратить напрасныхъ усилій на то, чтобы вдолбить въ нихъ коекакія жалкія математическія познанія: вѣдь въ большинствѣ случаевъ всѣ усилія приводятъ лишь къ тому, что порождаютъ въ ученикѣ отвращеніе ко всѣмъ этимъ вещамъ, которыхъ онъ никакъ не можетъ постигнуть, а математикѣ создаютъ вліятельныхъ враговъ. Само собой разумѣется, что сказанное относится лишь къ тѣмъ немногимъ весьма одареннымъ натурамъ, которыя совершенно лишены исключительно математическихъ способностей, и я отнюдь не имѣю въ виду потворствовать, что-ли, баловству и лѣни или оправдывать мнѣніе о „всеобщей неспособности къ математикѣ“.

Въ области математики психологіи придется еще разрѣшить и другія важныя задачи — о несомнѣнно существующихъ *болѣе тонкихъ различіяхъ математическихъ способностей*; эти различія отражаются также въ творческой научной работѣ и несомнѣнно играютъ важную роль въ педагогическихъ вопросахъ. Мы ежедневно можемъ замѣтить, что одинъ математикъ имѣетъ наклонность къ абстрактно логическому мышленію, тогда какъ другой предпочитаетъ оперировать наглядными геометрическими образами. Психологическое изслѣдованіе людей, отличающихся выдающимися способностями въ нѣкоторой строго обособленной области, — напримѣръ, *замѣчательныхъ вычислителей* или *шахматныхъ игроковъ*, — показало, что въ этомъ отношеніи наблюдаются весьма большія различія; напримѣръ, одни вычислители видятъ передъ собой большія числа, которыми они оперируютъ, какъ будто бы они были написаны цифрами (*зрительное воображеніе*); другіе же работаютъ при помощи *слуховыхъ* образовъ, т. е. ассоціируютъ свои мысли съ звуками словъ, выражающихъ числа. Подробности объ этомъ вы найдете въ интересной книгѣ *Бине* (Binet): „Psychologie des grands calculateurs et joueurs d'échecs“ *).

*) Paris, 1894.

b) Упомянемъ еще и о другомъ сильномъ теченіи, возникшемъ въ новѣйшее время и имѣющемъ связь съ упомянутыми индивидуальными различіями въ математическихъ способностяхъ художественно одаренныхъ лицъ; я имѣю въ виду *художественное воспитаніе* и новѣйшія реформы въ *преподаваніи черченія и рисованія*. Здѣсь теперь стремятся къ тому, чтобы ученикъ возможно скорѣе научился охватить въ живомъ созерцаніи вещь въ ея цѣломъ, въ ея главныхъ чертахъ, а потому не начинаютъ съ изученія подробностей; родственное стремленіе замѣчается и у нѣкоторыхъ выдающихся инженеровъ. Особенно интереснымъ образомъ эта тенденція проявилась въ исторіи развитія преподаванія рисованія. Раньше добивались, главнымъ образомъ, того, чтобы каждый ученикъ научился точно срисовывать опредѣленные контуры по даннымъ образцамъ; однако, такой способъ очень часто притуплялъ интересъ и не достигалъ цѣли. Я помню, что меня въ школѣ заставляли каждый разъ копировать одну и ту же арабеску, потому что она мнѣ никакъ не удавалась; конечно, такой способъ отнюдь не содѣйствовалъ развитію моихъ способностей къ рисованію. Теперь же, наоборотъ, ребенку уже въ самомъ началѣ даютъ кисть и краски и предоставляютъ ему срисовывать обыденные предметы по его собственному впечатлѣнію, непосредствено съ натуры или на память. Точной передачи подробностей при этомъ вовсе не требуется; отдѣльныя черты могутъ быть переданы весьма неточно, лишь бы вѣрно было общее впечатлѣніе. Оказывается, что этотъ методъ даетъ *поразительно хорошіе результаты* даже у дѣтей безъ всякихъ художественныхъ дарованій: въ этомъ можно убѣдиться на любой школьной выставкѣ. Конечно, это направленіе по своей цѣли *совершенно противоположно математическому черченію*, поскольку послѣднее на первомъ планѣ ставитъ точное и *количественно вѣрное изображеніе всѣхъ частностей*. Понятно, что между этими двумя тенденціями, при одностороннемъ преобладаніи той или другой изъ нихъ, можетъ возникнуть очень жестокая борьба. Такъ, напримѣръ, въ начертательной геометріи иногда затрачивается много труда, чтобы строить большое множество отдѣльныхъ точекъ кривой; но такъ какъ вслѣдствіе недостаточно умѣлаго черченія эти точки лежатъ, можетъ быть, весьма неточно и чертящій не имѣетъ правильнаго представленія о формѣ кривой, то вмѣсто настоящей кривой получается невозможная каракуля, которая, во всякомъ случаѣ, не даетъ ни малѣйшаго представленія о тѣхъ пространственныхъ соотношеніяхъ, которыя чертившій желалъ изобразить. Съ другой стороны, и художественное рисованіе тоже можетъ выродиться въ каррикатуру; отдѣльныя черты рисунка иногда становятся столь расплывчатыми, что на нѣкоторомъ разстояніи иной, можетъ быть, и въ состояніи что-нибудь увидѣть, вблизи же рисунокъ представляетъ собою неопредѣленное пятно. Однако, я того мнѣнія, что эти два теченія *вполнѣ могутъ уживаться* и дополнять другъ друга; со стороны математиковъ было бы, во всякомъ случаѣ, весьма нецѣлесообразно занять принципіально враждебную позицію противъ движенія, которое проявляетъ столь быстрый и мощный ростъ. Много интереснаго матеріала по вопросу о возможномъ соглашеніи содержитъ работа Фр. Шиллинга (Fr. Schilling) „О приложеніяхъ начертательной геометріи“ *), въ которой, между прочимъ, рѣчь идетъ и объ отношеніи къ искусству.

Часто цитируютъ весьма рѣзкую критику математики, исходящую отъ знаменитаго философа Шопенгауера; я остановлюсь здѣсь на его критикѣ, такъ какъ она ярко характеризуетъ враждебное отношеніе къ нашей наукѣ со стороны художественныхъ натуръ вообще. По мнѣнію Шопенгауера, рядъ отдѣльныхъ логическихъ заключеній, изъ которыхъ должно состоять строгое математическое доказательство, является недостаточнымъ и невыносимымъ; онъ желаетъ, чтобы мы сейчасъ же, съ одного взгляда интуитивно убѣждались въ справедливости доказываемаго предложенія; такимъ образомъ, онъ развиваетъ теорію, что наряду съ логическими заключеніями, исходящими изъ опредѣленныхъ предпосылокъ, существуетъ еще и другой методъ доказательства, при которомъ математическую истину даетъ непосредственно интуиція. Съ этой точки зрѣнія Шопенгауеръ въ своемъ главномъ трудѣ „Міръ, какъ воля и представленіе“ **) и другихъ самымъ рѣзкимъ образомъ принципіально отвергаетъ всю систему Евклида; предметомъ своихъ нападокъ онъ выбралъ почему-то Евклидово доказательство теоремы Пиѳагора, которое онъ называетъ „доказательствомъ-мышеловкой“ (Mausefallenbeweis); принять доказываемое предложеніе оно вынуждаетъ насъ будто бы тѣмъ, что коварно заграждаетъ намъ одинъ за другимъ всѣ другіе выходы, но оно не ведетъ насъ къ внутреннему познанію истины. Ни одинъ математикъ не согласится съ этими соображеніями Шопенгауера; въ самомъ дѣлѣ, какъ бы высоко мы ни цѣнили роль интуиціи въ математикѣ, въ качествѣ плодотворнаго эвристическаго принципа, однако, послѣдней, рѣшающей инстанціей всегда будетъ все-таки логическое доказательство. Тѣмъ, кто интересуется этимъ вопросомъ, я могу указать интересную и увлекательную академическую рѣчь Прингсгейма (A. Pringsheim) „Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik“ *) („О цѣнности и мнимой ненужности математики“), въ которой онъ разбираетъ нападки Шопенгауера.

Конечно, если бы Шопенгауеръ нападалъ лишь на разорванную и разсѣченную форму изложенія у Евклида и требовалъ бы, чтобы идея, заключенная въ каждомъ доказательствѣ, была обработана и представлена въ наглядномъ видѣ, и, вообще, чтобы рядомъ съ логикой было отведено также подобающее мѣсто и интуиціи, — то это можно было бы лишь привѣтствовать. Но и въ этомъ случаѣ нужно

---

*) „Über die Anwendungen der darstellenden Geometrie“. Leipzig u. Berlin, 1904. — 3 изд. книги: F. Klein und E. Riecke, Neue Beiträge zur Frage des mathem. und physik. Unterrichts an höheren Schulen. Leipzig u. Berlin, 1904.

**) См. Werke (изд. Frauenstädt'a, Leipzig, 1859), II, стр. 82 и сл. и III, стр. 142; также I, стр. 135.

***) München, 1904 и „Jahresbericht der deutschen Mathem. Verein“, 13 (1904), стр. 357.

было бы признать, что Шопенгауэръ совершенно напрасно избралъ объектомъ своихъ нападокъ именно Евклидово доказательство Пиѳагоровой теоремы. По моему, если не говорить о внѣшней сторонѣ изложенія, то именно это доказательство отличается особенной наглядностью; я поэтому изложу его вкратцѣ, въ главныхъ чертахъ, въ возможно болѣе наглядномъ видѣ.

Начертимъ извѣстную фигуру прямоугольнаго треугольника съ квадратами I и II, построенными на катетахъ, и квадратомъ III, построеннымъ на гипотенузѣ (фиг. 6). Проведемъ высоту треугольника, соотвѣтствующую гипотенузѣ; продолженіе этой высоты дѣлитъ квадратъ III на два прямоугольника I′ и II′, такъ что

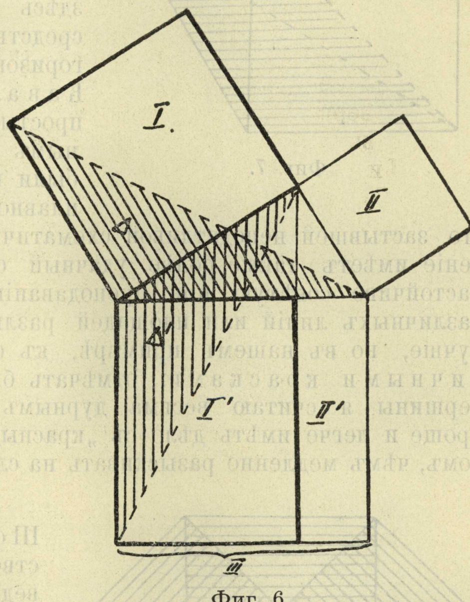
$$\mathrm{III} = \mathrm{I}' + \mathrm{II}'. \qquad (1)$$

Покажемъ теперь, что прямоугольникъ I′ равновеликъ квадрату I. Для этого мы проведемъ двоякаго рода штриховку, и разсмотримъ косо заштрихованный треугольникъ $\triangle$ и треугольникъ $\triangle'$ съ вертикальной штриховкой. Первый треугольникъ $\triangle$ и квадратъ I имѣютъ, очевидно, общее основаніе и одинаковую высоту, и поэтому, какъ извѣстно, треугольникъ $\triangle$ равновеликъ половинѣ квадрата:

$$\triangle = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{I};$$

точно такъ же треугольникъ $\triangle'$ съ вертикальной штриховкой равновеликъ половинѣ прямоугольника I′:

$$\triangle' = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{I}'.$$



Фиг. 6.

Легко, однако, видѣть, что эти два треугольника конгруэнтны, и, слѣдовательно, также равновелики:

$$\triangle = \triangle',$$

откуда слѣдуетъ, что

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}'.$$

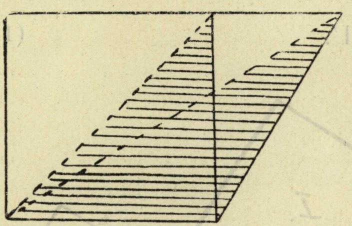
Точно такъ же можно доказать, что

$$\mathrm{II} = \mathrm{II}';$$

принимая во вниманіе равенство (1), мы приходимъ, дѣйствительно, къ теоремѣ Пиѳагора:

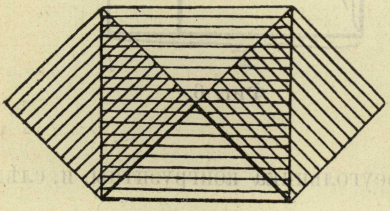
$$\mathrm{III} = \mathrm{I} + \mathrm{II}.$$

Вы видите, что это доказательство совсѣмъ не длинное и, казалось бы, легко понятное для каждаго; при томъ логика и наглядность здѣсь соединены такимъ образомъ, что каждый логическій шагъ сейчасъ же получаетъ также наглядную очевидность. Вспомогательную теорему $\triangle = \frac{1}{2}\mathrm{I}$, которой мы здѣсь пользовались, также можно доказать совершенно нагляднымъ образомъ, что легко видѣть изъ приложенной фигуры (фиг. 7): треугольникъ $\triangle$ получается здѣсь изъ половины квадрата I посредствомъ параллельнаго перенесенія горизонтальныхъ полосокъ (принципъ Кавальери!). Для того чтобы эти простыя идеи выступили правильнымъ и яснымъ образомъ, мы должны были прибѣгнуть къ нѣсколько болѣе плавному методу изложенія, вмѣсто застывшей неподатливой схематичности Евклида; важное значеніе имѣетъ также болѣе удачный способъ обозначенія. Я, вообще, настойчиво совѣтую при преподаваніи пользоваться для обозначенія различныхъ линій или площадей различной штриховкой или, что еще лучше, но въ нашемъ примѣрѣ, къ сожалѣнію, непримѣнимо, различными красками: отмѣчать буквами, по Евклиду, однѣ лишь вершины я считаю весьма дурнымъ обыкновеніемъ; вѣдь гораздо проще и легче имѣть дѣло съ „краснымъ“ или „желтымъ“ треугольникомъ, чѣмъ медленно разыскивать на сложномъ чертежѣ вершины EKL.



Фиг. 7.

Я думаю поэтому, что нападки Шопенгауера на доказательство Евклида совершенно несправедливы; это сдѣлается для насъ еще яснѣе, если разсмотримъ то доказательство, которое онъ предлагаетъ вмѣсто Евклидова. Онъ приводитъ извѣстное доказательство Платона для частнаго случая равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника; это доказательство можно, конечно, понять сразу, съ одного взгляда на приложенную фигуру (фиг. 8); далѣе Шопенгауеръ ограничивается лишь тѣмъ, что требуетъ подобнаго же доказательства и для общаго случая. Но вѣдь какъ разъ это и даетъ намъ доказательство Евклида, если его изложить, какъ слѣдуетъ; и дѣйствительно, если вдумаемся глубже, то убѣдимся, что въ обоихъ доказательствахъ въ совершенно одинаковой мѣрѣ соединены элементы логики и интуиціи,



Фиг. 8.

— съ той лишь разницей, что случай Шопенгауера, какъ болѣе частный, естественнымъ образомъ допускаетъ также и болѣе простое доказательство, и потому даже непривычный человѣкъ легко можетъ обозрѣть однимъ взглядомъ всю цѣпь логическихъ заключенiй, содержащуюся въ этомъ доказательствѣ.

Но довольно уже говорить о Шопенгауерѣ; закончимъ теперь наши замѣчанiя о ходѣ развитiя, которымъ шло преподаванiе геометрiи въ Германiи. До сихъ поръ мы, собственно говоря, все еще слѣдили за тѣмъ теченiемъ, начало которому положили Песталоцци и Гербартъ своими идеями о преподаванiи въ народной школѣ. Теперь мы разсмотримъ, каково было у насъ, въ Германiи, влiянiе высшей школы, какъ она дѣйствовала у насъ на школьное преподаванiе математики. Здѣсь предъ нами открывается картина, гораздо менѣе утѣшительная, чѣмъ въ другихъ странахъ. Именно въ геометрiи наблюдается то весьма нежелательное явленiе, что высшая и средняя школа идутъ совершенно обособленными путями безъ всякаго живого взаимодѣйствiя. Исключенiе составляютъ въ первую половину XIX-го столѣтiя представители новой геометрiи Мёбiусъ (Möbius) и Штейнеръ (Steiner), работы которыхъ мы часто цитировали въ настоящемъ курсѣ. Однако, позже вмѣстѣ съ мощнымъ подъемомъ математической науки все больше усиливалась отчужденность между высшей школой и средней; лишь въ послѣднее десятилѣтiе, къ счастью, дѣлаются энергичныя попытки взаимнаго сближенiя. Объ этомъ свидѣтельствуетъ весьма выдающiйся трудъ, о которомъ я уже говорилъ вамъ: Энциклопедiя элементарной математики Г. Вебера и I. Вельштейна*); въ данный моментъ насъ интересуетъ въ особенности томъ II (Элементы геометрiи) и томъ III (Приложенiя элементарной математики); во II томѣ вы найдете основанiя геометрiи (Вельштейнъ), тригонометрiю (Веберъ и Якобсталь) и аналитическую геометрiю (Веберъ), въ III томѣ — теорiю векторовъ и графику (Вельштейнъ). Правда, какъ я уже указалъ раньше, въ этой энциклопедiи осуществлено еще не все, что я желалъ бы для школы; въ частности, въ частяхъ, посвященныхъ геометрiи, авторы вмѣсто того, чтобы разработать всю область геометрiи въ рамкахъ школьнаго преподаванiя, часто ограничиваются тѣмъ, что въ крайне интересной, но и очень отвлеченной формѣ развиваютъ извѣстные вопросы, которыми они особенно много занимались. Вамъ уже извѣстно, что̀ я, въ противоположность этому, считаю конечной цѣлью моего настоящаго курса. Я желалъ построить для геометрiи цѣлую раму, въ которую могли бы равномѣрно вмѣститься всѣ ея части и которая давала бы возможность обозрѣть ихъ всѣ и ихъ взаимоотношенiя. Что изъ этого годится для школы и насколько вообще полученные результаты могутъ быть примѣнены въ школьной практикѣ, — на это можетъ отвѣтить лишь испытанiе, произведенное

*) Русскiй переводъ вышелъ въ изд. „Mathesis“.

сообразно съ различными общими точками зрѣнія, установленными здѣсь; чтобы такой опытъ былъ дѣйствительно сдѣланъ, — это я могъ, конечно, выразить лишь въ видѣ пожеланія.

Хотя эта задача еще никогда не была рѣшена, но попытки рѣшить ее дѣлались уже не разъ. Я не могу не упомянуть здѣсь, по крайней мѣрѣ, еще о двухъ интересныхъ книгахъ, въ которыхъ значительная часть вопросовъ, интересующихъ насъ, разработана съ единообразной точки зрѣнія. Одна изъ этихъ книгъ — новый австрійскій учебный планъ 1900 г.*), удержавшій основанія реформы Экснера-Боница 1850 г. Попрежнему гимназія подраздѣляется на 4 младшихъ и 4 старшихъ класса; въ первыхъ преподаваніе геометріи ведется исключительно наглядным методомъ, и очень много времени отводится черченію; послѣднее преподается также и въ старшихъ классахъ наряду съ начинающимся здѣсь прохожденіемъ геометріи по логическому методу. Самая интересная часть въ этомъ учебномъ планѣ — подробныя объясненія относительно преподаванія математики, написанныя, очевидно, чрезвычайно выдающимся знатокомъ; имя его мнѣ неизвѣстно. Эта записка очень выгодно отличается отъ обычныхъ оффиціальныхъ учебныхъ плановъ, въ которыхъ математическая часть бываетъ настолько скомкана, что изъ нея почти невозможно вывести какія-нибудь опредѣленныя заключенія.

Вторая книга, о которой я желалъ упомянуть, есть „Lehrbuch der Elementargeometrie" („Учебникъ элементарной геометріи") Генрици (Henrici) и Трейтлейна (Treutlein**). Авторы съ большимъ успѣхомъ постарались ввести въ свою книгу и результаты новыхъ изслѣдованій того времени, а именно проективной геометріи, а также приложенія; кромѣ того, они излагаютъ еще и аналитическую геометрію въ органической связи съ остальными отдѣлами, въ особенности съ тригонометріей. Упомяну еще въ частности, что матеріалъ подраздѣляется по классамъ геометрическихъ преобразованій: конгруентность, подобіе и перспективность; выше мы тоже держались того же самаго расположенія; впервые оно было проведено Мёбіусомъ въ его „барицентрическомъ счисленіи". Относительно приложеній замѣчу, что въ концѣ 2-ой части находится геодезическая карта Великаго Герцогства Баденскаго (Генрици живетъ въ Гейдельбергѣ, а Трейтлейнъ въ Карльсруэ), такъ что ученикъ знакомится на живомъ примѣрѣ съ цѣлью тригонометріи; я полагаю, вобще, что преподаваніе чрезвычайно много выиграло бы, если бы оно находилось въ живой связи съ подобнымъ изученіемъ родныхъ мѣстъ путемъ практическихъ измѣреній на открытомъ воздухѣ. Напримѣръ, въ нашихъ школахъ слѣдовало бы аналогичнымъ образомъ продѣлать Гауссово измѣреніе Ганноверскаго Королевства, и тогда каждый ученикъ зналъ бы, что

---

*) „Lehrplan und Instruktionen für den Unterricht an Gymnasien in Österreich". 2 Aufl. Wien, 1900.

**) Въ 3 частяхъ. Leipzig, 1882/83. 2-е и 3-е изд. 1897, 1901 и 1907.

такое представляетъ собой знаменитый треугольникъ „Hoher Hagen — Brocken — Inselberg". Мы видимъ, что книга Генрици-Трейтлейна обладаетъ замѣчательными достоинствами; съ современной точки зрѣнія приходится, конечно, выразить сожалѣніе, что въ книгѣ не представлены общія средства, которыя выходятъ изъ области линейныхъ преобразованій проективной геометріи и были уже разобраны нами, и что въ связи съ этимъ не приняты также во вниманіе современныя требованія функціональнаго мышленія и т. д.; недостаетъ также философскаго заключенія (о вопросахъ аксіоматики и т. п.), которое является теперь вполнѣ умѣстнымъ въ старшихъ классахъ школы.

М. г.! мы сейчасъ заканчиваемъ наши бесѣды; въ послѣднемъ отдѣлѣ я могъ уже и теперь многое разсказать вамъ о томъ, какъ повсемѣстно въ школѣ нарождается новая жизнь; однако, я думаю, что задача о реформѣ преподаванія математики вообще и геометріи въ частности въ ближайшіе годы привлечетъ къ себѣ всеобщее вниманіе въ несравненно болѣе высокой степени, чѣмъ теперь. Въ рѣшеніи этой задачи вы всѣ призваны принять посильное участіе на основаніи вашихъ собственныхъ размышленій о всѣхъ относящихся сюда вопросахъ, свободные отъ гнета всесильной окаменѣвшей традиціи. Вы будете въ состояніи выполнить эту задачу, если всестороннимъ образомъ познакомитесь какъ со всѣми соотвѣтственными отраслями науки, такъ и съ историческимъ ходомъ развитія; я надѣюсь, что моимъ курсомъ я далъ вамъ для этого фундаментъ.

Ѳ. М. Суворовъ.

Некрологъ.

Телеграфъ принесъ извѣстіе о смерти одного изъ старѣйшихъ представителей каѳедры математики, профессора Казанскаго Университета Ѳеодора Матвѣевича Суворова, скончавшагося на 66-мъ году жизни. Уроженецъ Пермской губерніи, покойный среднее образованіе получилъ въ пермской гимназіи, высшее — въ Казанскомъ университетѣ, физико-математическій факультетъ котораго онъ окончилъ въ 1867 году со степенью кандидата математическихъ наукъ. Ученикъ І. А. Больцани, М. А. Ковальскаго, В. Г. Имшенецкаго и П. И. Котельникова, онъ всю свою дальнѣйшую жизнь провелъ въ Казани на служеніи родному университету. Пріобрѣтя въ 1871 г. степень магистра чистой математики по защитѣ диссертаціи „О характеристикахъ системъ трехъ измѣреній", онъ дѣлается доцентомъ по этой каѳедрѣ; ему выпало какъ разъ взять на себя чтеніе лекцій проф. В. Г. Имшенецкаго, въ томъ же 1871 году вышедшаго въ отставку въ связи съ извѣстнымъ въ свое время дѣломъ П. Ф. Лесгафта. Въ 1884 г. Ѳ. М. былъ утвержденъ экстраординарнымъ профессоромъ. Въ томъ же году онъ защитилъ докторскую диссертацію: „Объ изображеніи воображаемыхъ точекъ и воображаемыхъ прямыхъ на плоскости и о построеніи кривыхъ линій второй степени, опредѣляемыхъ помощью вооображаемыхъ точекъ и касательныхъ“, и въ слѣдующемъ году былъ утвержденъ ординарнымъ профессоромъ по каѳедрѣ чистой математики. Читалъ Ѳ. М., главнымъ образомъ, курсы аналитической геометріи и интегральнаго исчисленія (неопредѣленные и опредѣленные интегралы), а также варіаціонное исчисленіе и начертательную геометрію. Лекціи его отличались крупными педагогическими достоинствами — ясностью, отчетливостью и рельефностью изложенія, даваемаго при томъ въ весьма доступной и, съ внѣшней стороны, весьма отдѣланной формѣ. Въ изложеніи аналитической геометріи Ѳ. М. слѣдовалъ манерѣ A. Comte и Briot et Bouquet (и отчасти Сальмона), предпосылая изложенію собственно-аналитической геометріи обширное введеніе, посвященное приложенію алгебры къ рѣшенію геометрическихъ задачъ и составленію уравненій кривыхъ по данному геометрическому закону. Въ курсѣ неопредѣленныхъ интеграловъ особенно разработанъ былъ отдѣлъ объ интегрированіи раціональныхъ дробей. Лекціи Ѳ. М. по анализу, геометріи и неопредѣленнымъ интеграламъ вышли лѣтъ 10 тому назадъ въ студенческомъ изданіи. — Какъ ученый, Ѳ. М. представлялъ собою рѣдкій у насъ типъ геометра: всѣ его печатныя работы относятся къ области геометріи, преимущественно неевклидовой. Его магистерская диссертація была первою изъ русскихъ работъ, посвященныхъ этой области, послѣ того какъ опубликованіе переписки Гаусса съ Шумахеромъ обратило вниманіе европейскихъ ученыхъ на заслуги Н. И. Лобачевскаго. Примыкая къ изслѣдованіямъ Риманна и Бельтрами, Ѳ. М. далъ въ своей работѣ первое изложеніе на русскомъ языкѣ идей Риманна. Посвященная, главнымъ образомъ, аналитическимъ развитіямъ, она близка къ появившимся почти одновременно мемуарамъ Липшица и Кристоффеля, на что указываетъ авторъ во французскомъ авторефератѣ („Bull. des Sciences math.“, t. 5, 1873, p. 180 — 192). Отмѣтимъ, что такъ называемая теорема Brill'я есть не что иное, какъ геометрическое истолкованіе одного аналитическаго результата Ѳ. М. Суворова („Math. Ann.“, B. 26, S. 300. 1886).

Геометріи же Лобачевскаго посвящена замѣтка Ѳ. М. „О нѣкоторыхъ приложеніяхъ геометріи Лобачевскаго“ (Протоколы секціи физ.-мат. наукъ Общ. Ест. при Имп. Каз. Ун., т. I, n⁰ 5, стр. 4 — 8. 1880 г.) и рѣчь „Объ основаніяхъ геометріи Лобачевскаго“, произнесенная на торжественномъ собраніи Казанскаго Университета 22 октября 1893 г. въ день празднованія столѣтней годовщины дня рожденія Н. И. Лобачевскаго (напечатана въ изданномъ Университетомъ „Праздновапіи“ etc.), а также „Отзывъ о сочиненіи Жирара «Sur la géometrie non-euclidienne»“ въ отчетѣ о первомъ присужденіи преміи Лобачевскаго.

Вопросу о проективномъ мѣроопредѣленіи, связанному трудами Кели (Cayley) и Ф. Клейна (F. Klein) съ вопросомъ объ основаніяхъ геометріи, посвящена другая замѣтка Θ. М. — „Объ общей формулѣ разстоянія двухъ элементовъ въ проективной системѣ одного измѣренія“ (Протоколы засѣданій секціи физ.-мат. наукъ, n⁰ 1, стр. 9 — 11). — Въ своей докторской диссертаціи, заглавіе которой приведено выше, Θ. М. излагаетъ теоріи M. Marie, Laguerre'a и Штаудта, отдавая предпочтеніе послѣдней, какъ наиболѣе отвѣчающей духу проективной геометріи.

Вотъ списокъ печатныхъ трудовъ Θ. М. Онъ не великъ. Главная работа Θ. М. шла въ области преподаванія, и не одной только высшей математики въ университетѣ: состоя членомъ попечительскаго совѣта и читая работы по математикѣ оканчивающихъ гимназіи и реальныя училища Казанскаго учебнаго округа, Θ. М. своими отзывами оказывалъ вліяніе на преподаваніе математики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ округа, гдѣ большинство преподавателей было и его учениками по университету. Въ 1894 г. было устроено чествованіе 25-лѣтія его профессорской дѣятельности, и на немъ сказалась его популярность въ средѣ ихъ. Членъ-учредитель физико-математической секціи Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ, Θ. М. былъ первымъ ея секретаремъ, впослѣдствіи вице-предсѣдателемъ. Послѣ преобразованія секціи въ Физико-Математическое Общество, Θ. М. долгое время состоялъ его товарищемъ-предсѣдателя. Въ 1894 г. ко дню 25-тилѣтія его службы и дѣятельности, Общество избрало Θ. М. въ свои почетные члены.

Одно время (съ 1899 по 1905 г.) Θ. М. состоялъ деканомъ физико-математическаго факультета.

Проф. Д. Синцовъ.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Безпроволочное телеграфированіе на дирижабляхъ и аэропланахъ. Заимствуемъ изъ статьи, появившейся въ журналѣ „Электрическое освѣщеніе“ за подписью штабсъ-капитана Феррiе (Ferrier), слѣдующія свѣдѣнія о безпроволочномъ телеграфированіи на дирижабляхъ и о результатахъ, полученныхъ во время большихъ маневровъ въ Пикардіи.

Извѣстно, что всякій постъ безпроволочнаго телеграфа заключаетъ въ себѣ аппараты для воспроизведенія волнъ (передатчики), аппараты для пріема ихъ (пріемники) и воздушный проводъ (антенну), который поперемѣнно служитъ или для распространенія волнъ въ пространствѣ или для собиранія волнъ, испускаемыхъ другими постами, смотря по тому, соединяютъ ли его съ передатчиками или пріемниками.

Расположеніе воздушнаго провода имѣетъ первостепенное значеніе когда идетъ дѣло о телеграфированіи съ дирижаблей. Обыкновенно, въ безпроволочно-телеграфныхъ станціяхъ воздушный проводъ, — антенна, — изолированный въ своемъ верхнемъ концѣ, связанъ другимъ концомъ съ землей посредствомъ заземленія, представляющаго наименьшее изъ всѣхъ возможныхъ электрическихъ сопротивленій. Въ этихъ условіяхъ воздушный проводъ, получивъ возбужденіе отъ волнопроизводящихъ аппаратовъ (передатчика), колеблется такимъ образомъ, что его изолированный конецъ является узломъ для силы тока высокой частоты и, напротивъ, пучностью для разности потенціала. Наоборотъ, въ мѣстѣ заземленія онъ представляетъ пучность для силы тока и узелъ для разности потенціала.

Если примѣнить сюда соображенія, касающіяся Герцовскихъ волнъ, то здѣсь происходитъ дѣло такъ, какъ будто подъ землей находится воздушный проводъ, симметричный относительно перваго, имѣющій на своемъ нижнемъ концѣ узелъ силы тока. Когда нѣтъ возможности устроить хорошее заземленіе, его замѣняютъ иногда тѣмъ, что соединяютъ воздушный проводъ съ системой изолированныхъ проволокъ, расположенныхъ надъ поверхностью земли и эквивалентныхъ воздушному проводу съ электрической точки зрѣнія; это есть своего рода противовѣсъ.

На дирижаблѣ необходимо, конечно, устроить такой противовѣсъ, такъ какъ о заземленіи не можетъ быть рѣчи. Воздушный проводъ вообще представляетъ собой проволоку въ 100 — 200 *м.* длины, которую свободно подвѣшиваютъ съ небольшимъ грузомъ для того, чтобы она сохраняла вертикальное положеніе во время полета аэростата. Выборъ противовѣса представляетъ затрудненія. Конецъ воздушнаго провода, такъ же, какъ и противовѣса, служитъ пучностью для разностей потенціаловъ во время вибраціи воздушнаго провода; здѣсь постоянно происходятъ разряды. Если подобное явленіе не имѣетъ большого значенія въ обыкновенныхъ безпроволочно - телеграфныхъ станціяхъ, то понятно, что оно представляетъ серьезную опасность для шара. Если пользоваться въ качествѣ противовѣса металлической массой гондолы и такелажа, то необходимо, чтобы оболочка была достаточно удалена отъ металлическихъ концовъ для того, чтобы происходящіе оттуда разряды не воспламенили водорода, который можетъ вырваться изъ аэростата; по наблюденіямъ штабсъ-капитана Ф е р р і е, достаточно разстояніе въ 2 *м.*

Въ аэростатахъ типа „Цеппелинъ“ съ металлическимъ остовомъ или типа „République“ съ металлической платформой нельзя и думать использовать эту проводящую металлическую массу для противовѣса. Предпочтительнѣе создать противовѣсъ посредствомъ изолированныхъ проволокъ, расположенныхъ такимъ бразомъ, чтобы не представлять никакой опасности. Но все же придется всегда остерегаться токовъ, индуктированныхъ воздушнымъ проводомъ и его противовѣсомъ въ металлическихъ массахъ. Чтобы уменьшить могущіе происходить разряды, необходимо разбить проволочные проводы на части посредствомъ изолирующихъ промежутковъ; дѣйствительно, индуктированныя электродвижущія силы тѣмъ слабѣе, чѣмъ короче длина провода, подверженнаго индукціи.

Предлагали также устроить противовѣсъ изъ проволоки, поддерживаемой змѣемъ, укрѣпленнымъ на дирижаблѣ, или же изъ второй проволоки, свѣшивающейся изъ гондолы. Первое рѣшеніе вопроса можетъ мѣшать дирижаблю въ его полетѣ; второе затрудняетъ выпускъ волнъ, потому что воздушный проводъ и противовѣсъ производятъ интерференцію.

Какъ бы то ни было, всегда будетъ выгодно уменьшить, насколько возможно, разности потенціала въ воздушномъ проводѣ. Такъ какъ передаваемая при каждомъ колебательномъ разрядѣ энергія должна быть тѣмъ менѣе значительной, чѣмъ больше число разрядовъ, то будетъ выгодно примѣнять частыя искры, что уменьшитъ разряды на концахъ воздушнаго провода. Предпочтеніе придется отдать такъ называемымъ звучащимъ искрамъ, т. е. такимъ, которыя слѣдуютъ одна за другой съ интервалами, достаточно близкими для того, чтобы произвести звукъ; часто стараются достигнуть частоты 600, какъ наиболѣе приспособленной къ воспринятію телефономъ.

Вѣсъ оборудованнаго безпроволочно-телеграфнаго аппарата варіируетъ отъ 100 до 400 *кг.*, въ зависимости отъ принятой системы и разстоянія, на которое желательно добиться его дѣйствія. Полагали, что для разстоянія приблизительно въ 50 *км.* необходимо отъ 1 до 2 киловаттовъ. Въ дѣйствительности же дирижабль Байяръ - Клеманъ (Bayard-Clément), на которомъ производились опыты радіотелеграфіи, сообщался очень отчетливо на разстояніи около сотни *км.*, затрачивая при этомъ энергіи меньше, чѣмъ 50 уаттовъ.

Естественно, что успѣхъ вышеописанныхъ опытовъ привелъ къ подобнымъ же попыткамъ на аэропланахъ; французская военно-инженерная школа, а затѣмъ и американцы изучили этотъ вопросъ и произвели опыты. Французская военно-инженерная школа допускаетъ въ качествѣ воздушнаго провода проволоку діаметромъ около 2 *мм.*, которую авіаторъ разматываетъ и опускаетъ въ большемъ или меньшемъ размѣрѣ. Эта проволока можетъ быть перерѣзана либо автоматически либо авіаторомъ въ томъ случаѣ, если она волочится по землѣ или если произойдетъ быстрый спускъ аэроплана.

Аппараты, изученные капитаномъ Брено (Brenot) и Бетено (Bethenod), замѣчательны своимъ незначительнымъ вѣсомъ; передаточный аппаратъ не вѣситъ и 12 *кг.* Тѣмъ не менѣе сила дѣйствія его можетъ идти въ сравненіе съ аппаратами на дирижабляхъ. Трудно получить подробныя свѣдѣнія объ этихъ опытахъ, такъ какъ они сохраняются въ тайнѣ.

РЕЦЕНЗІИ.

Максъ Планкъ. *Теоретическая физика.* Восемь лекцій, читанныхъ въ „Columbia Univercity in the city of New-York“ весною 1909 г. Переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей доктора прикладной математики И. М. Занчевскаго. Книгоиздательство „Образованіе.“ СПБ., 1911. 158 стр. Ц. 70 к.

Восемь лекцій, прочитанныхъ однимъ изъ немногихъ научныхъ авторитетовъ по теоретической физикѣ, представляютъ, конечно, выдающійся интересъ,—въ особенности въ наши дни, когда теоретическая физика переживаетъ глубочайшій переворотъ. Эти лекціи не представляютъ собой, конечно, курса теоретической физики; такого курса нельзя вмѣстить въ такой объемъ. Это очеркъ, охватывающій важнѣйшіе и наиболѣе животрепещущіе вопросы теоретической физики и написанный для лицъ, уже владѣющихъ предметомъ, знающихъ его слабыя мѣста и спорные пункты; для такого читателя книга чрезвычайно интересна.

Отправнымъ пунктомъ для автора служитъ принципъ энтропіи — второе основное начало не только термодинамики, но и всей физики. Оно и не удивительно: врядъ ли можно указать въ физикѣ положеніе, которое, принадлежа къ краеугольнымъ камнямъ всей науки, вызывало бы столько споровъ и сомнѣній, вызывало бы такое различіе во взглядахъ, доходящихъ до полнаго отрицанія принципа. Причина этого разномыслія несомнѣнно имѣетъ корни въ недостаточной выясненности самаго понятія объ энтропіи, въ отсутствіи общепризнанной формулировки принципа. И вотъ, чтобы пролить нѣкоторый свѣтъ на эту темную область, авторъ обозрѣваетъ важнѣйшія, такъ сказать, классическія точки зрѣнія на энтропію. Максъ Планкъ признаетъ одно коренное раздѣленіе явленій — на обратимое и необратимое. Впрочемъ, обратимыми нужно считать только процессы идеальные, процессы чистой механики; дѣйствительные физическіе процессы всѣ необратимы, т. е. всѣ содержатъ необратимые элементы. Въ отсутствіи обратимыхъ процессовъ коренится причина невозможности perpetuum mobile второго рода — Оствальдово выраженіе второго закона термодинамики. Но это есть выраженіе, такъ сказать, качественное; ему нужно еще дать количественную формулировку, нужно претворить энтропію въ математическую величину. Общій путь къ этому указалъ еще творецъ самаго понятія объ энтропіи — Клаузіусъ, опредѣлившій энтропію интеграломъ $\int \frac{dQ}{T}$, гдѣ dQ есть элементъ выдѣляемаго количества теплоты, а T абсолютная температура. Но тутъ мы наталкиваемся на двоякаго рода затрудненія: во-первыхъ, трудно выразить этотъ интегралъ въ координатахъ, опредѣляющихъ физическое состояніе тѣла; во-вторыхъ, трудно найти строгое и достаточно общее доказательство того, что эта величина никогда не убываетъ.

Во второй главѣ авторъ излагаетъ сущность работъ Гиббса (Gibbs), направленныхъ къ преодолѣнію перваго затрудненія. Опираясь на идеи Гиббса, Планкъ даетъ выраженіе для энтропіи слабыхъ растворовъ, понимая таковые въ очень широкомъ смыслѣ слова. А такъ какъ состояніе равновѣсія раствора соотвѣтствуетъ максимуму энтропіи, то авторъ имѣетъ возможность установить условія равновѣсія въ крайне разнообразныхъ случаяхъ. Существенно то, что всякій разъ авторъ приходитъ къ результатамъ, количественно совпадающимъ съ опытными изслѣдованіями.

Что касается второй трудности—доказательства нарастанія энтропіи, то здѣсь авторъ находитъ путь къ рѣшенію вопроса только въ идеяхъ Больцмана. Атомистическая теорія вещества, дополненная ученіемъ „объ элементарномъ безпорядкѣ" (Больцмана), по мнѣнію Планка, есть единственный ключъ къ разгадкѣ закона энтропіи. Подъ „элементарнымъ безпорядкомъ" разумѣютъ всевозможныя состоянія атомовъ въ ихъ неисчислимомъ многообразіи, дающія все же почву для установленія среднихъ состояній. Пока мы разсматриваемъ только отдѣльные атомы, мы стоимъ на почвѣ микроскопіи; здѣсь нѣтъ необратимыхъ процессовъ: всѣ элементарные процессы — суть процессы механическіе, т. е. обратимые. Когда мы разсматриваемъ среднія величины, результаты взаимодѣйствія элементарныхъ процессовъ, — мы стоимъ на точкѣ зрѣнія макроскопіи. Здѣсь нѣтъ обратимыхъ процессовъ; ибо при обратимости каждаго элементарнаго процесса нѣтъ возможности возстановить всю начальную комбинацію ихъ. Такимъ образомъ, мы приходимъ къ оригинальному парадоксу: съ одной стороны, нѣтъ процессовъ необратимыхъ, съ другой стороны—всѣ они необратимы. Все зависитъ отъ того, стоимъ ли мы на точкѣ зрѣнія элементарныхъ процессовъ (микроскопіи) или среднихъ результатовъ (макроскопіи).

Но при чемъ же здѣсь энтропія? При указанной точкѣ зрѣнія каждое состояніе физической системы имѣетъ свою вѣроятность; процессы протекаютъ въ направленіи наибольшей вѣроятности — въ этомъ корень идеи энтропіи. Но вѣроятность W сложнаго явленія, состоящаго изъ независимыхъ явленій, равна произведенію $W_1 . W_2$ вѣроятностей отдѣльныхъ явленій. Между тѣмъ энтропія сложной системы равна суммѣ энтропій отдѣльныхъ системъ. Отсюда выводъ, что энтропія (s) пропорціональна логариѳму вѣроятности даннаго состоянія;

$$s = k \lg W,$$

гдѣ k есть міровая постоянная. Такова смѣлая идея Больцмана. Чтобы и здѣсь не остаться на почвѣ общихъ разсужденій, Планкъ излагаетъ примѣненіе этихъ общихъ разсужденій къ выводу уравненія состоянія одноатомныхъ газовъ.

До сихъ поръ авторъ оставался на почвѣ физики матеріи. Но ему нужно доказать, что тѣ же идеи проникаютъ гораздо глубже, что они охватываютъ и физику эѳира. Матеріаломъ для этого служитъ лучистая теплота — явленіе, наиболѣе тѣсно связывающее термодинамику съ электродинамикой. Рѣчь идетъ о такъ называемой механической теоріи излученія; и здѣсь авторъ остается при той же точкѣ зрѣнія: зная вѣроятность того, что энергія резонатора за извѣстный промежутокъ времени имѣетъ нѣкоторое среднее значеніе u, можно высчитать и его энтропію.

То обстоятельство, что элементарные процессы всѣ обратимы, даетъ автору поводъ заняться и общей динамикой. Здѣсь основнымъ принципомъ Планкъ считаетъ начало наименьшаго дѣйствія. Выводя изъ него извѣстныя уравненія движенія Гамильтона, авторъ обращается къ тому случаю, когда состояніе системы опредѣляется не конечнымъ числомъ координатъ, а непрерывнымъ многообразіемъ ихъ. Такимъ примѣромъ можетъ служить выводъ законовъ безконечно-малыхъ движеній абсолютно упругаго тѣла. Здѣсь процессъ опредѣляется, если заданы скорости въ каждой точкѣ тѣла.

Планкъ выводитъ законы этихъ движеній изъ закона наименьшаго дѣйствія; изъ него онъ выводитъ извѣстное выраженіе Пойнтинга для потока энергіи въ электродинамическомъ полѣ.

Итакъ, есть начала, равно проникающія физику вѣсомой матеріи и физику эѳира. Но есть ли почва для полнаго объединенія этихъ глубоко различныхъ отраслей физики? На это еще нельзя дать опредѣленнаго отвѣта; но новыя идеи механики, принципъ относительности, разрушающій старую точку зрѣнія на массу, какъ будто ведетъ къ тому, чтобы сгладить пропасть, отдѣляющую физику матеріи отъ физики эѳира. Изложеніемъ основныхъ идей новой механики авторъ и заканчиваетъ свою небольшую книгу.

Редакція поручила намъ написать рецензію о книгѣ Планка, а мы дали вмѣсто этого краткій рефератъ ея содержанія. Но врядъ ли здѣсь мѣсто, и врядъ ли автору этихъ строкъ умѣстно критиковать Планка по существу. Мы хотѣли обратить вниманіе на эти глубокія идеи; но должны сказать, что книга написана нелегко, и прослѣдить за разсужденіями автора могутъ только лица, имѣющія основательную подготовку по теоретической физикѣ.

Переводъ выполненъ вполнѣ хорошо. Въ одномъ только мѣстѣ текстъ значительно искаженъ страннымъ пропускомъ на стр. 88 (строки 6 и 7 снизу).

Н. Р.

В. Ивановъ. (Дубравинъ). *Курсъ ариѳметики.* Выпускъ I. Цѣлыя и десятичныя числа. Псковъ, 1911. Ц. 30 к.

Учебникъ г. Иванова предназначается, повидимому, для реформированной средней школы, такъ какъ содержитъ, наряду съ изложеніемъ курса цѣлыхъ чиселъ, также и изложеніе дѣйствій надъ десятичными дробями, а вмѣстѣ съ тѣмъ и краткую теорію дѣйствій надъ буквенными выраженіями и отрицательными числами (всѣ эти отдѣлы излагаются параллельно).

Конечно, стремленіе къ реформѣ традиціонной системы преподаванія заслуживаетъ симпатіи, но отъ реформаторскихъ попытокъ мы желаемъ большаго совершенства, чѣмъ отъ учебниковъ традиціоннаго типа, и во всякомъ случаѣ требуемъ, чтобы въ нихъ не было грубыхъ промаховъ, какъ въ научномъ, такъ и въ педагогическомъ отношеніи.

Книга г. Иванова этимъ требованіямъ удовлетворить не можетъ, какъ будетъ видно изъ дальнѣйшаго.

Въ традиціонномъ курсѣ десятичныя дроби изучаются послѣ простыхъ, и вообще имъ удѣляется слишкомъ мало вниманія; часто бываетъ, что учащіеся плохо съ ними освоиваются и стараются избѣгать употребленія ихъ въ задачахъ. Положеніе совершенно ненормальное, но отсюда вовсе не слѣдуетъ, чтобы нужно было отводить второстепенное мѣсто простымъ дробямъ и „главное вниманіе“ обращать, какъ думаетъ вмѣстѣ съ иными авторами и г. Ивановъ, на „десятичныя числа“. Дѣло въ томъ, что на практикѣ простыя дроби не такъ уже „мало употребительны“, какъ кажется г. Иванову, и можно считать безспорнымъ, что для сокращенныхъ практическихъ вычисленій, особенно устныхъ, очень полезно умѣть быстро производить всѣ дѣйствія надъ простыми дробями съ небольшими числителями и знаменателями.

Далѣе, при изученіи десятичныхъ дробей нельзя упускать изъ виду, что онѣ представляютъ изъ себя все-таки дроби, а не цѣлыя числа, и если дѣйствія надъ ними по формѣ и сходны съ соотвѣтствующими дѣйствіями надъ цѣлыми числами, то по смыслу между ними есть существенное различіе (особенно рѣзко проявляется это обстоятельство въ вопросѣ объ умноженіи). Поэтому было бы цѣлесообразно либо проходить десятичныя дроби параллельно съ простыми, либо предпосылать курсъ десятичныхъ дробей простымъ, но съ тѣмъ, чтобы десятичныя дроби разсматривались все же, какъ дроби, и чтобы дѣйствія надъ ними объяснялись и опредѣлялись правильно (напримѣръ, чтобы умноженіе на 0,3 трактовалось не иначе, какъ нахожденіе трехъ десятыхъ отъ даннаго множимаго).

Въ разбираемомъ сочиненіи принятъ иной порядокъ, именно ученіе о десятичныхъ дробяхъ излагается параллельно съ ученіемъ о цѣлыхъ числахъ, при чемъ смыслъ дѣйствій надъ десятичными дробями совсѣмъ не выясняется, а объясненіе умноженія на десятичную дробь основано на измѣненіи произведенія при отбрасываніи запятой у одного или обоихъ сомножителей; но справедливость законовъ этихъ измѣненій для даннаго случая остается, конечно, недоказанной.

Кромѣ правилъ точныхъ вычисленій надъ десятичными дробями, указываются еще и пріемы приближенныхъ вычисленій надъ ними, но почему-то лишь въ примѣненіи къ періодическимъ дробямъ; при томъ указываемые способы не отличаются удобствомъ.

Наряду со свѣдѣніями по счисленію излагаются, какъ было выше упомянуто, простѣйшія свѣдѣнія объ употребленіи буквъ и о дѣйствіяхъ надъ буквенными выраженіями, а также теорія отрицательныхъ чиселъ. Помѣщеніе этихъ отдѣловъ въ курсъ ариѳметики цѣлыхъ чиселъ нельзя не признать преждевременнымъ; при томъ изложены они крайне сухо, ни чуть не лучше, чѣмъ въ учебникахъ алгебры стараго типа. Вообще изложеніе разбираемой книги страдаетъ отвлеченностью и догматизмомъ.

К. Л.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей приватъ-доцента **Е. Л. Буницкаго.**

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 436 (5 сер.). Въ какомъ треугольникѣ средины высотъ лежатъ на одной прямой?

И. Поляковъ (Тифлисъ).

№ 437 (5 сер.). Опредѣлить сумму n членовъ ряда

$$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)+4\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)+6\left(\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^6}\right)+\cdots$$

и вычислить предѣлъ этой суммы въ томъ случаѣ, когда $|x|>1$.

Д. Чижевскій (Александрія).

№ 438 (5 сер.). Чебышевъ доказалъ, что, при a, большемъ 1, между числами a и $2a$ всегда заключается хоть одно простое число. Пользуясь этимъ предложеніемъ, найти цѣлое число, равное суммѣ всѣхъ простыхъ чиселъ, меньшихъ его (единица, по опредѣленію, не есть простое число).

А. Турчаниновъ (Одесса).

№ 439 (5 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^4-(a^4-2a^2-4)x^2+(2a^3+a^2-2a-1)x-(a^2+a-6)=0.$$

С. Адамовичъ (Суворовскій корпусъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 301 (5 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$x^4-2px^3+2p^2x^2-p^3x+m=0.$$

Представивъ данное уравненіе въ видѣ

$$\left(x^2-px+\frac{p^2}{2}\right)^2-\left(\frac{p^4}{4}-m\right)=0,$$

или же

$$\left(x^2-px+\frac{p^2}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{p^4-4m}}{2}\right)^2=0,$$

разлагаемъ лѣвую часть на множителей и, такимъ образомъ, получимъ:

$$\left(x^2-px+\frac{p^2+\sqrt{p^4-4m}}{2}\right)\left(x^2-px+\frac{p^2-\sqrt{p^4-4m}}{2}\right)=0.$$

Итакъ, данное уравненіе распадается на два квадратныхъ

$$x^2-px+\frac{p^2+\sqrt{p^4-4m}}{2}=0,\quad x^2-px+\frac{p^2-\sqrt{p^4-4m}}{2}=0.$$

Рѣшая эти квадратныя уравненія, находимъ четыре корня даннаго уравненія, а именно:

$$x_{1,2}=\frac{p\pm\sqrt{-p^2-2\sqrt{p^4-4m}}}{2},\quad x_{3,4}=\frac{p\pm\sqrt{-p^2+2\sqrt{p^4-4m}}}{2}.$$

Н. Доброгаевъ (Тульчинъ); *В. Богомоловъ* (Шацкъ); *Е. Бабицкій* (Минскъ); *Л. Богдановичъ* (Ярославль); *А. Фельдманъ* (Одесса); *В. Гурьяновъ* (Горы-Горки); *А. Масловъ* (Москва); *М. Превратухинъ* (Козловъ); *М. Рыбкинъ* (Барнаулъ); *Р. Витвинскій* (Тирасполь).

№ 309 (5 сер.). *Найти необходимое и достаточное условіе, которому должны удовлетворять коэффиціенты уравненія*

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$$

для того, чтобы лѣвая его часть могла быть представлена въ видѣ

$$(x^2+m)(x^2+nx+p).$$

Допустимъ, что многочленъ $x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ можетъ быть представленъ тождественно въ видѣ $(x^2+m)(x^2+nx+p)$. Тогда, раскрывая въ выраженіи $(x^2+m)(x^2+nx+p)$ скобки, получимъ тождество:

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d = x^4+nx^3+(m+p)\,x^2+mnx+mp. \qquad (1)$$

Для того, чтобы тождество (1) имѣло мѣсто при любомъ значеніи x, необходимо и достаточно, чтобы существовали три числа m, n, p, удовлетворяющія системѣ уравненій

$$a=n;\quad b=m+p;\quad c=mn;\quad d=mp. \qquad (2)$$

Исключимъ изъ системы (2) m, n и p. Съ этой цѣлью подставимъ a вмѣсто n изъ перваго уравненія системы (2) въ третье; тогда получимъ:

$$c=am. \qquad (3)$$

Помноживъ второе изъ уравненій (2) на a, имѣемъ:

$$ab=am+ap,$$

или [см. (3)]

$$ab=c+ap. \qquad (4)$$

Затѣмъ, помноживъ четвертое изъ уравненій (2) на a, получимъ [см. (3)]:

$$ad=cp. \qquad (5)$$

Наконецъ, помножая уравненія (4) и (5) соотвѣтственно на c и на a и вычитая изъ перваго результата второй, находимъ:

$$abc-a^2d=c^2. \qquad (6)$$

Итакъ, если данный многочленъ четвертой степени разлагается на множителей указаннаго типа, т. е. если выполняется тождество (1), то коэффиціенты a, b, c, d удовлетворяютъ условію (6). Наоборотъ, если коэффиціенты a, b, c, d удовлетворяютъ условію (6), то многочленъ $x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ можетъ быть представленъ тождественно въ видѣ $(x^2+m)(x^2+nx+p)$. Въ самомъ дѣлѣ, пусть сперва $a\neq 0$. Тогда, согласно съ условіемъ (6), или $c\neq 0$, или $c=0$ и $d=0$. Пусть $a\neq 0$ и $c\neq 0$. Полагая $n=a$, опредѣлимъ m изъ равенства $c=mn=ma$; тогда $m=\dfrac{c}{a}$. Теперь, полагая $m=\dfrac{c}{a}$, опредѣляемъ p изъ каждаго изъ равенствъ: $b=m+p=\dfrac{c}{a}+p$, $d=mp=\dfrac{c}{a}\,p$. Тогда получимъ соотвѣтственно: $p=b-\dfrac{c}{a}=\dfrac{ab-c}{a}$, $p=\dfrac{ad}{c}$, при чемъ имѣемъ тождество $\dfrac{ab-c}{a}=\dfrac{ad}{c}$ вслѣдствіе условія (6), какъ это легко провѣрить, приводя дроби $\dfrac{ab-c}{a}$ и $\dfrac{ad}{c}$ къ одному знаменателю. Пусть теперь $a\neq 0$, $c=0$, $d=0$. Въ этомъ случаѣ система уравненій (2) удовлетворяется, если положить $m=0$, $n=a$, $p=b$. Итакъ, если выполняется условіе (6) и $a\neq 0$, то существуютъ числа n, m, p, удовлетворяющія системѣ уравненій (2), а потому выполняется тождество (1), т. е. данный многочленъ можно представить въ видѣ $(x^2+m)(x^2+nx+p)$. Пусть теперь тождество (6) выполняется при $a=0$

Тогда, согласно съ условіемъ (6), и $c = 0$, а потому, полагая $n = 0$, мы удовлетворяемъ первому и третьему уравненію системы (2); числа же m и p всегда могутъ быть опредѣлены изъ уравненій $b = m + p$ и $d = mp$ (напримѣръ, какъ корни квадратнаго уравненія $y^2 - by + d = 0$). Итакъ, если соблюдено условіе (6) и $a = 0$, то опять существуютъ числа m, n и p, удовлетворяющія системѣ (2), а потому снова выполняется тождество (1). Изъ всего сказаннаго видно, что для возможности разложенія многочлена $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ на множителей вида $x^2 + m$ и $x^2 + nx + p$, необходимо и достаточно, чтобы коэффиціенты a, b, c, d удовлетворяли условію (6).

Л. Богдановичъ (Ярославль); *А. Фельдманъ* (Одесса); *Г. Пистракъ* (Лодзь).

№ 310 (5 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$y^3 + 2py^2 + (p^2 + 2)y + 2p = 0.$$

Представивъ данное уравненіе послѣдовательно въ видѣ:

$$y^3 + 2py^2 + p^2y + 2(y + p) = y(y + p)^2 + 2(y + p) =$$

$$= (y + p)[y(y + p) + 2] = (y + p)(y^2 + py + 2) = 0,$$

мы видимъ, что оно распадается на два уравненія:

$$y + p = 0, \quad y^2 + py + 2 = 0.$$

Рѣшая каждое изъ этихъ уравненій, находимъ три корня даннаго уравненія:

$$y_1 = -p, \quad y_{2,3} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 8}}{2}.$$

Л. Богдановичъ (Ярославль); *А. Фельдманъ* (Одесса); *Г. Пистракъ* (Лодзь); *В. Гурьяновъ* (Горки); *И. Лурье* (Смоленскъ); *В. Моргулевъ* (Одесса).

№ 312 (5 сер.) *Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ относительно* x, y, z *уравненіе*

$$\frac{x^{4z}y^{4z} + x^{2z}y^{2z} + 1}{(x^{2z}y^{2z} + x^zy^z + 1)^2} = \frac{3}{7}.$$

Полагая

$$(xy)^z = u, \tag{1}$$

мы можемъ записать данное уравненіе въ видѣ:

$$\frac{u^4 + u^2 + 1}{(u^2 + u + 1)^2} = \frac{3}{7}. \tag{2}$$

Такъ какъ

$$u^4 + u^2 + 1 = u^4 + 2u^2 + 1 - u^2 = (u^2 + 1)^2 - u^2 = (u^2 + u + 1)(u^2 - u + 1),$$

то уравненіе (2), по сокращеніи, можно представить въ видѣ:

$$\frac{u^2 - u + 1}{u^2 + u + 1} = \frac{3}{7}, \tag{3}$$

откуда, послѣ обычныхъ преобразованій, находимъ:

$$2u^2 - 5u + 2 = 0. \tag{4}$$

Изъ уравненія (4) получимъ два значенія для u: $u_1 = 2$, $u_2 = {}^1/_2$, т. е. [см. (1)]

$$(xy)^z = 2, \tag{5}$$

или

$$(xy)^z = \tfrac{1}{2}. \tag{6}$$

Изъ равенствъ (5) и (6) видно, что числа 2 и $\frac{1}{2}$ суть соотвѣтственно вещественныя степени съ цѣлымъ показателемъ z цѣлаго числа xy. Но числа 2 и $\frac{1}{2}$ могутъ быть цѣлыми степенями лишь одного цѣлаго числа 2 соотвѣтственно съ показателями 1 и — 1. Итакъ, $z = 1$ или $z = -1$, при чемъ въ обоихъ случаяхъ $xy = 2$. Разлагая число 2 всевозможными способами на множителей, приходимъ къ рѣшеніямъ

$$x = \pm 1, \quad y = \pm 2, \quad z = \pm 1$$

или

$$x = \pm 2, \quad y = \pm 1, \quad z = \pm 1,$$

въ которыхъ значенія для x и y должны быть взяты съ однимъ и тѣмъ же знакомъ, знакъ же при z можетъ быть выбранъ произвольно.

Замѣчаніе. Мы могли сократить лѣвую часть уравненія (2) на $u^2 + u + 1$ и затѣмъ, освобождая уравненіе (3) отъ знаменателя, прямо отбросить послѣдній, такъ какъ число u [см. (1)] вещественное, а потому выраженіе $u^2 + u + 1$ можетъ принимать лишь положительныя значенія; это вытекаетъ, согласно съ теоріей неравенствъ второй степени, изъ того обстоятельства, что корни уравненія $u^2 + u + 1 = 0$ мнимые.

Л. Богдановичъ (Ярославль); *Г. Пистракъ* (Лодзь); *Р. Витвинскій* (Одесса); *А. Фрумкинъ* (Одесса); *Г. Варкентинъ* (Бердянскъ); *Б. Щиголевъ* (Варшава); *В. Моргулевъ* (Одесса); *H. Howsepheanz* (Владикавказъ).

№ 314 (5 сер.). *Въ плоскости даны точки* O, A *и* B, *лежащія на одной прямой, при чемъ* A *и* B *расположены по одну сторону отъ точки* O. *Найти въ данной плоскости геометрическое мѣсто точекъ* x, *для которыхъ*

$$\angle \mathrm{AxO} = \angle \mathrm{BxM},$$

гдѣ M — *нѣкоторая точка прямой* Ox, *взятая такъ, что* x *лежитъ между* O *и* M.

Если точка A лежитъ ближе къ O, чѣмъ точка B, то, согласно съ условіемъ, xO есть внѣшняя биссектриса треугольника BxA. Если же изъ двухъ точекъ A и B точка B ближе къ O, то, отнимая отъ равныхъ по условію угловъ AxO и BxM по углу AxB, имѣемъ, что $\angle BxO = \angle AxM$, т. е. xO и въ этомъ случаѣ есть внѣшняя биссектриса треугольника AxB. Итакъ, искомое геометрическое мѣсто есть совокупность точекъ x плоскости, для которыхъ прямая xO есть внѣшняя биссектриса треугольника AxB. Въ дальнѣйшемъ мы предположимъ, для большей опредѣленности, что обозначенія точекъ

A и B выбраны такъ, что точка A лежитъ между точками B и O. Такъ какъ прямая xO есть внѣшняя биссектриса треугольника AxB, то

$$BO : AO = Bx : Ax. \tag{1}$$

Проведемъ теперь внутреннюю биссектрису xO' треугольника BxA; тогда [см (1)]

$$BO' : O'A = Bx : Ax = BO : OA,$$

откуда видно, что основаніе xO' внутренней биссектрисы есть точка O', дѣлящая отрѣзокъ BA внутреннимъ образомъ въ отношеніи $BO : AO$. Такимъ образомъ, основаніе O' внутренней биссектрисы не измѣняется при измѣненіи положенія точки x искомаго геометрическаго мѣста. Такъ какъ внѣшняя и внутренняя биссектрисы xO и xO' взаимно перпендикулярны, то уголъ $O'xO$ прямой; слѣдовательно, всѣ точки x искомаго геометрическаго мѣста лежатъ на окружности, описанной на отрѣзкѣ $O'O$, какъ на діаметрѣ, гдѣ O' — точка, дѣлящая отрѣзокъ AB въ отношеніи $BO : OA$; наоборотъ, всякая точка x этой окружности обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что xO есть внѣшняя биссектриса треугольника BxA. Дѣйствительно, проведя черезъ A прямую, параллельную Bx до встрѣчи съ xO' и xO соотвѣтственно въ C и D, имѣемъ:

$$Bx : CA = BO' : AO',$$

$$Bx : AD = BO : AO, \tag{2}$$

откуда, такъ какъ по построенію

$$BO' : AO' = BO : AO,$$

находимъ

$$Bx : CA = Bx : AD, \quad \text{т. е.} \quad CA = AD,$$

а потому Ax, какъ медіана прямоугольнаго треугольника CxD, равна половинѣ гипотенузы AD. Замѣняя въ равенствѣ (2) AD черезъ Ax, получимъ:

$$Bx : Ax = BO : AO,$$

откуда видно, что xO есть внѣшняя биссектриса треугольника BxA. Итакъ, искомое геометрическое мѣсто есть окружность, описанная на отрѣзкѣ OO', какъ на діаметрѣ, гдѣ O' есть точка, дѣлящая внутреннимъ образомъ отрѣзокъ BA въ отношеніи $BO : AO$.

Л. Богдановичъ (Ярославль); *В. Моргулевъ* (Одесса); *Н. С.* (Одесса).

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника", подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

Сэръ Оливеръ Лоджъ, ректоръ университета въ Бирмингамѣ. *Міровой эѳиръ.* Переводъ съ англійскаго подъ редакціей Д. Д. Хмырова, приватъ-доцента Императорскаго Новороссійскаго Университета. Изд. „Mathesis". Одесса, 1911. Стр. VI+216. Ц. 80 к.

Библіотека классиковъ точнаго знанія. III. Архимедъ, Гюйгенсъ, Лежандръ, Ламбертъ. *О квадратурѣ круга.* Съ приложеніемъ исторіи вопроса, составленной Ф. Рудіо, проф. Цюрихскаго политехникума. Переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей С. Бернштейна, прив.-доц. Харьковскаго университета. Съ 21 чертеж. Изданіе „Mathesis". Одесса, 1911. Стр. VIII+155 Ц. 1 руб. 20 к.

Библіотека классиковъ точнаго знанія. IV. **Б. Больцано.** *Парадоксы безконечнаго,* изданные по посмертной рукописи автора др. Фр. Пржигонскимъ. Переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей проф. И. В. Слешинскаго. Изданіе „Mathesis". Одесса, 1911. Стр. 119. Ц. 80 к.

Я. И. Грдина, ординарный профессоръ Екатеринославскаго Высшаго Горнаго Училища. *Динамика живыхъ организмовъ.* Изданіе Екатеринославскаго Высшаго Горнаго Училища. 1911. Стр. 108. Ц. 1 руб.

В. І. Орловскій, преподаватель Кіевской 3-ей гимназіи. *Механическій отдѣлъ курса физики* для среднихъ учебныхъ заведеній. Изданіе книжнаго магазина В. А. Просяниченко. Кіевъ, 1911. Стр. 70. Ц. 50 к.

П. Пановъ и Т. Сотеренко. *Введеніе въ алгебру.* (Ариѳметическая подготовка). Со сборникомъ упражненій для среднихъ и низшихъ учебныхъ заведеній. Одесса, 1910. Стр. 128. Ц. 60 к.

Н. П. Кильдюшевскій. „*Юнымъ математикамъ*". Математическій сборникъ. Выпускъ первый. Казань, 1911. Стр. 22. Ц. 45 к.

А. П. Шереметьевъ, физико-механикъ Императорскаго Университета св. Владиміра. *О способѣ центрированія оптическихъ стеколъ примѣнительно къ очковой техникѣ.* Стр. 24.

П. Бучинскій. *Краткій отчетъ возникновенія и научной дѣятельности Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей за первое 25-лѣтіе его существованія.* 1870-1895. Одесса, 1911. Стр. 47.

Д. Галанинъ. *Методика ариѳметики.* Второй годъ обученія. Изд. фирмы „Сотрудникъ школъ" А. К. Залѣсской. Москва, 1911. Стр. 104. Ц. 50 к.

К. Н. Виноградовъ, преподаватель Московской 1-й гимназіи. *Ариѳметическія упражненія и задачи.* Для приготовительныхъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній и для начальныхъ училищъ. Изд. фирмы „Сотрудникъ школъ" А. К. Залѣсской. Москва, 1911. Стр. 100. Ц. 35 к.

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

Выходитъ 24 раза въ годъ отдѣльными выпусками, не менѣе 24 стр. каждый,

под редакціей приватъ-доцента В. Ф. Кагана.

ПРОГРАММА ЖУРНАЛА: Оригинальныя и переводныя статьи изъ области физики и элементарной математики. Статьи, посвященныя вопросамъ преподаванія математики и физики. Опыты и приборы. Научная хроника. Разныя извѣстія. Математическія мелочи. Темы для сотрудниковъ. Задачи для рѣшенія. Рѣшенія предложенныхъ задачъ съ фамиліями рѣшившихъ. Упражненія для учениковъ. Задачи на премію. Библіографическій отдѣлъ: обзоръ спеціальныхъ журналовъ; замѣтки и рецензіи о новыхъ книгахъ.

Статьи составляются настолько популярно, насколько это возможно безъ ущерба для научной стороны дѣла.

Предыдущіе семестры были **рекомендованы**: Учен. Ком. Мин. Нар Пр. для гимн. муж. и жен., реальн. уч., прогимн. город. уч., учит. инст. и семинарій; Главн. Упр. Воен.-Учебн. Зав.—для воен.-уч. заведеній; Учен. Ком. при Св. Синодѣ — для дух. семинарій и училищъ.

Пробный номеръ высылается за одну 7-коп. марку.

Важнѣйшія статьи, помѣщенныя въ 1910 г.

43-ій семестръ.

Г. Пуанкаре Новая механика. — *П. Флоровъ.* Способъ вычисленія отношенія окружности къ діаметру съ пятью десятичными знаками, пригодный для преподаванія въ среднихъ школахъ.— *И. Мессершмидтъ.* Марсъ и Сатурнъ. — *П. Лоуэль.* Марсъ. — *С. Виноградовъ.* Развитіе понятія о числѣ въ его исторіи и въ школѣ.— *Е. Григорьевъ.* О разложеніи въ ряды функцій $\sin x$ и $\cos x$.— Проф. *Д. Синцовъ.* Къ вопросу о преподаваніи математики. Я. Штейнеръ, какъ преподаватель— *Г. Урбэнъ.* Являются ли основные законы химіи точными или же лишь приближенными. — *Е. Смирновъ.* Объ ирраціональныхъ числахъ — *П. Ренаръ.* Авіація, какъ спортъ и наука — Проф. *О. Лоджъ.* Міровой эѳиръ — *К. Лебединцевъ.* Понятіе объ ирраціональномъ числѣ въ курсѣ средней школы — *Э. Кроммелинъ.* Происхожденіе и природа кометъ. — *А. Филипповъ.* Дѣйствія съ періодическими дробями. — Прив.-доц *В. Бобынинъ.* Естественные и искусственные пути возстановленія историками математики древнихъ доказательствъ и выводовъ

44-ый семестръ.

О построеніяхъ, производимыхъ циркулемъ и линейкой. *Прив-доц. С. О. Шатуновскаго.* О биссектрисахъ треугольника. *Н. Извольскаго.* О четырехугольникѣ, имѣющемъ при данныхъ сторонахъ наибольшую площадь. *Проф. Б. К. Млодзѣевскаго.* Практическія занятія по физикѣ въ германской средней школѣ. *К. Иванова.* Замѣтка по вопросу о трисекціи угла. *Проф. Д. Синцова.* Нѣкоторыя свойства вращающагося твердаго тѣла. *Н. Васильева.* Броуновское движеніе. *А. Іоллоса.* Дѣленіе на 9. *А. Филиппова.* Объ ирраціональныхъ числахъ. *Е. Смирнова.* Основы безпроволочной телеграфіи. *Л. Мандельштама и Н. Папаллекси.* О биссектрисахъ треугольника. *Е. Томашевича.* О геометрическихъ построеніяхъ съ помощью линейки при условіи, что дана неизмѣнная дуга круга съ центромъ. *Проф. Д. Мордухай-Болтовского.* Отношеніе новѣйшей физики къ механистическому міровоззрѣнію. *М. Планка.* Генезисъ минераловъ. *Г. Е. Бѣкке.* Еще къ вопросу объ ирраціональныхъ числахъ. *К. Лебединцева.* Приближенное рѣшеніе задачи объ удвоеніи куба. *Прив.-доц. А. А. Дмитровскаго.* Причина землетрясеній, горообразованія и родственныхъ явленій. *Т. Арльта.*

Условія подписки:

Подписная цѣна съ пересылкой: за годъ **6 руб.**, за полгода **3 руб.** Учителя и учительницы низшихъ училищъ и всѣ учащіеся, выписывающіе журналъ **непосредственно изъ конторы редакціи**, платятъ за годъ **4 руб.**, за полугодіе **2 руб.** Допускается разсрочка подписной платы по соглашенію съ конторой редакціи. Книгопродавцамъ 5% уступки.

Журналъ за прошлые годы по 2 р. 50 к., а учащимся и книгопродавцамъ по 2 р. за семестръ. **Отдѣльные номера** текущаго семестра по 30 к., прошлыхъ семестровъ по 25 коп.

Адресъ для корреспонденціи: **Одесса. Въ редакцію „Вѣстника Опытной Физики“.**