Обложка
ищется

Обложка
ищется

XLVII Сем. №559

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

И

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 559.

Историческій обзоръ развитія понятія о функціи.

Прив.-доц. С. Бернштейна.

Докладъ, читанный на „Первомъ Всероссійскомъ Съѣздѣ Преподавателей Математики".

Милостивыя государыни и милостивые государи!

Въ настоящее время можно считать общепризнаннымъ, что понятіе о математической функціи относится къ числу основныхъ понятій человѣческаго мышленія. Уже давно многіе выдающіеся математики и педагоги настаиваютъ на необходимости введенія понятія о функціональной зависимости въ общеобразовательный курсъ средней школы, и, безъ сомнѣнія, однимъ изъ крупнѣйшихъ культурныхъ завоеваній нашихъ дней является осуществленіе этой идеи.

Въ виду того, что на долю многихъ изъ васъ выпадаетъ трудная и отвѣтственная, но въ высшей степени благодарная задача ознакомленія юношества съ идеями, составлявшими до сихъ поръ удѣлъ небольшого круга спеціалистовъ, мнѣ казалось умѣстнымъ въ краткомъ и, по возможности, элементарномъ очеркѣ изложить вамъ исторію развитія понятія о функціи отъ его возникновенія до нашихъ дней.

Понятіе о функціи впервые, повидимому, вводится Декартомъ одновременно съ открытіемъ аналитической геометріи. Для него, какъ и для другихъ математиковъ XVII-го столѣтія, всякая функція представляется въ видѣ нѣкоторой линіи: ордината точки на данной линіи есть функція ея абсциссы. То же интуитивное геометрическое воззрѣніе на функцію мы находимъ и у основателей дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія, Лейбница и Ньютона. Объ этомъ обстоятельствѣ, свидѣтельствующемъ о чрезвычайной плодотворности геометрическаго представленія о функціи, слѣдуетъ всегда помнить тѣмъ, кто преподаетъ основанія анализа. Безъ сомнѣнія, современная математика, какъ мы увидимъ, ушла и должна была далеко уйти отъ этого наивнаго воззрѣнія на функцію, замѣняющаго точное ея опредѣленіе; но, начинающаго, полезно лишь постепенно знакомить съ послѣдовательными усовершенствованіями этого понятія, прибѣгая вездѣ, гдѣ возможно, къ наглядной геометрической иллюстраціи отвлеченныхъ теоремъ.

Уже въ началѣ XVIII-го столѣтія мы встрѣчаемъ у Іоанна Бернулли первую попытку аналитическаго опредѣленія функціи, которому Эйлеръ придалъ затѣмъ болѣе точную форму: Functio quantitatis variabilis, est expressio analitica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili, et numeris seu quantitatibus constantibus. (Функціей нѣкоторой перемѣнной величины называется аналитическое выраженіе, составленное при помощи этой перемѣнной величины и постоянныхъ количествъ).

Однако, Эйлеръ, подобно большинству своихъ современниковъ, считалъ аналитическое опредѣленіе функціи далеко неравнозначнымъ, но гораздо болѣе узкимъ, чѣмъ первоначальное геометрическое опредѣленіе. Казалось недопустимымъ, что линія, начерченная совершенно произвольно, напримѣръ, ломанная линія, можетъ быть на всемъ своемъ протяженіи представлена однимъ и тѣмъ же аналитическимъ выраженіемъ.

Даніилъ Бернулли одинъ не раздѣлялъ общаго взгляда, и своимъ рѣшеніемъ физической задачи о колебаніяхъ струны, при помощи тригонометрическихъ рядовъ, онъ поставилъ на очередь этотъ основной для теоріи функцій вопросъ, утверждая, что всякая функція можетъ быть разложена въ тригонометрическій рядъ. Въ знаменитомъ спорѣ, возникшемъ по этому поводу, ближе къ истинѣ былъ Бернулли, но доводы его и его противниковъ были одинаково неудовлетворительны въ математическомъ отношеніи.

Съ теченіемъ времени, въ особенности послѣ вмѣшательства въ споръ Лагранжа, а также благодаря соотвѣтствію слѣдствій изъ теоріи звука Бернулли съ данными опыта, его воззрѣнія перестали казаться столь парадоксальнымн. Наконецъ, точка зрѣнія Бернулли получила болѣе или менѣе общее признаніе въ началѣ XIX-го столѣтія, послѣ появленія знаменитаго сочиненія Фурье по теоріи теплоты, въ которомъ онъ показалъ, что тригонометрическій рядъ въ различныхъ промежуткахъ можетъ представлять функціи ничего общаго между собой не имѣющія, т. е., выражаясь современнымъ языкомъ, можетъ представлять произвольныя функціи, имѣющія даже нѣсколько точекъ разрыва. Доказательства Фурье въ математическомъ отношеніи уже значительно болѣе удовлетворительны, чѣмъ разсужденія его предшественниковъ, но и они, въ большинствѣ случаевъ, не выдерживаютъ строгой современной критики, и мы знаемъ теперь, благодаря изслѣдованіямъ послѣднихъ десятилѣтій, въ особенности, послѣднихъ лѣтъ, что существуютъ непрерывныя функціи, которыя не могутъ быть представлены въ видѣ сходящагося тригонометрическаго ряда Фурье.

Какъ вы видите, въ разсужденіяхъ математиковъ XVIII-го столѣтія не было той обычной для насъ строгости, которая дѣлала бы ихъ выводы обязательными для всѣхъ и ограждала бы отъ роковыхъ ошибокъ. Увлеченные мощностью новыхъ методовъ анализа, при помощи которыхъ одна за другой разрѣшались важнѣйшія задачи физики и астрономіи, великіе геометры XVIII-го столѣтія мало обращали вниманія на непрочность основаній, на которыхъ они воздвигали свое грандіозное зданіе. А между тѣмъ противорѣчія и парадоксы накоплялись и грозили бы неминуемой катастрофой, если бы математики первой половины XIX-го столѣтія, главнымъ образомъ, Абель, Дирихле и Коши, не положили бы начало новому критическому періоду въ математикѣ, періоду пересмотра принциповъ и строгаго обоснованія анализа.

Прежде всего необходимо было соотвѣтствующимъ образомъ ограничить объектъ изслѣдованій анализа, а именно, замѣнить прежнія расплывчатыя опредѣленія математической функціи точнымъ опредѣленіемъ, изъ котораго вполнѣ строго можно было вывести обычно приписываемыя ей свойства (существованіе производныхъ, интеграла и т. д.). Такое опредѣленіе, въ высшей степени плодотворное, было дано еще Лагранжемъ. Онъ называлъ аналитическими функціи $f(x)$, которыя около всякаго значенія $x=a$ (за исключеніемъ, можетъ быть, отдѣльныхъ значеній a) разлагаются въ рядъ Тэйлора по возрастающимъ степенямъ $x-a$, и пытался доказать, что всѣ функціи вещественной перемѣнной аналитическія. Это утвержденіе безусловно ошибочно, и современный анализъ уже не можетъ быть заключенъ въ тѣ узкія рамки, которыя назначилъ ему Лагранжъ, но сто лѣтъ тому назадъ его воззрѣнія были приняты безъ существенныхъ возраженій, потому что всѣ функціи встрѣчавшіяся до тѣхъ поръ (алгебраическія, тригонометрическія, эллиптическія и т. д.) были всегда аналитическими; предположеніе же, что данная функція аналитическая чрезвычайно упрощало разсужденія и вычисленія. Такимъ образомъ главнымъ аргументомъ въ пользу идей Лагранжа являлась не ихъ теоретическая обоснованность, а, исключительно, практическая цѣлесообразность. Какъ бы то ни было, одной изъ величайшихъ заслугъ Лагранжа останется на всегда то, что онъ обратилъ вниманіе математиковъ на самый общій признакъ, объединяющій всѣ извѣстныя дотолѣ функціи, и предугадалъ чрезвычайную важность аналитическихъ функцій и для будущаго.

Другой признакъ, общій всѣмъ аналитическимъ функціямъ, былъ замѣченъ Коши, который является истиннымъ основателемъ теоріи аналитическихъ функцій. Вы знаете, конечно, что, если степенной рядъ

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

сходится для вещественнаго значенія $x = R$, то онъ будетъ также сходящимся и для всѣхъ комплексныхъ значеній $x = u + iv$, модуль которыхъ менѣе R. Такимъ образомъ аналитическія функціи Лагранжа, данныя лишь для вещественной перемѣнной, получаютъ вообще вполнѣ опредѣленныя значенія и для комплексныхъ значеній перемѣнной. Этимъ свойствомъ пользовались въ различныхъ частныхъ случаяхъ еще въ XVIII-мъ столѣтіи; достаточно вспомнить знаменитое тождество Эйлера, обнаруживающее періодичность показательной функціи e^x и ея тѣснѣйшую связь съ функціями $\cos x$ и $\sin x$.

Коши разсматриваетъ непосредственно функцію комплексной перемѣнной x, произвольно данную внутри нѣкоторой области, и доказываетъ со всей математической строгостью, что всякая функція комплексной перемѣнной, имѣющая опредѣленную производную въ каждой точкѣ данной области, является аналитической въ смыслѣ Лагранжа.

Такимъ образомъ предложеніе, которое Лагранжъ тщетно пытался доказать для функцій вещественной перемѣнной, оказалось правильнымъ для функцій комплексной перемѣнной: достаточно знать, что функція (комплексной перемѣнной) имѣетъ первую производную, чтобы утверждать, что она имѣетъ производныя всѣхъ порядковъ, и разлагается въ сходящуюся строку Тэйлора. Этотъ, по истинѣ, замѣчательный результатъ показывалъ, что комплексное число, обобщеніе вещественнаго числа логически необходимое въ алгебрѣ, являлось также элементомъ, который цѣлесообразно было положить въ основу анализа. Дѣйствительно, на этомъ новомъ основаніи анализъ окрѣпъ и обогатился величайшими открытіями, сравнявшись съ алгеброй по безупречной строгости своихъ выводовъ. На первыхъ порахъ теорія аналитическихъ функцій и оставалась по преимуществу, продолженіемъ алгебры, создавая и изощряя свои методы на изслѣдованіи алгебраическихъ функцій и интеграловъ, и въ особенности, на знаменитой задачѣ обращенія эллиптическаго интеграла. Эти изслѣдованія обнаружили значеніе такъ называемыхъ критическихъ или особенныхъ точекъ функціи, т. е. тѣхъ точекъ, въ которыхъ разсматриваемая функція не разлагается въ строку Тэйлора, или, какъ говорятъ, не голоморфна, (напримѣръ, единственной критической точкой функціи $\frac{1}{x-1}$ является $x = 1$); оказалось, что всякая аналитическая функція вполнѣ охарактеризована всѣми своими особенностями, такъ что разность между двумя функціями, имѣющими однѣ и тѣ же особенности, есть постоянная величина. Благодаря этому, зная всѣ особенности функціи можно написать ея аналитическое выраженіе, позволяющее вычислить функцію для любого значенія перемѣнной. Такимъ образомъ теорія аналитическихъ функцій открыла въ высшей степени простой въ принципѣ и удивительно красивый методъ для классификаціи и вычисленія функцій.

Съ другой стороны, Коши показалъ, что область аналитическихъ функцій чрезвычайно обширна; онъ доказалъ посредствомъ разсужденій, которыя останутся классическими, что главный источникъ новыхъ функцій въ анализѣ, дифференціальныя уравненія, во всѣхъ извѣстныхъ въ то время случаяхъ, всегда приводятъ къ аналитическимъ функціямъ, если только данныя функціи были аналитическими. Этимъ объясняется универсальное значеніе функціи комплексной перемѣнной, и ничего нѣтъ удивительнаго, что, при обиліи и важности задачъ, выдвигаемыхъ теоріей аналитическихъ функцій, она почти безраздѣльно царила надъ анализомъ въ теченіе прошлаго столѣтія.

Но въ началѣ XIX-го столѣтія почти одновременно съ аналитической функціей было введено также и самое общее понятіе о функціи, которое вы встрѣтите теперь во всѣхъ учебникахъ: $y=f(x)$ называется (однозначной) функціей вещественной перемѣнной x въ нѣкоторомъ промежуткѣ AB, если каждому значенію x, $(A \leqq x \leqq B)$, соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленное значеніе y. Это опредѣленіе, принадлежащее Дирихле, отличается чрезмѣрной общностью, и до настоящаго времени плодотворнымъ оказывалось только изученіе функцій, которымъ приписывались еще нѣкоторыя дополнительныя свойства. Одно изъ важнѣйшихъ ограниченій, которое всегда подразумѣвалось математиками XVII-го и XVIII-го столѣтія, и которое было точно формулировано Коши, есть непрерывность функціи, опредѣленіе которой всѣмъ вамъ достаточно хорошо извѣстно.

Лишь послѣ опредѣленія непрерывной функціи, даннаго Коши, (а также послѣ установленія понятія сходимости безконечныхъ рядовъ), принципіальный вопросъ, раздѣлявшій, какъ вы помните, геометровъ XVIII-го столѣтія, могъ получить вполнѣ точную математическую форму, а именно: можетъ ли произвольная непрерывная функція быть выражена посредствомъ сходящагося ряда данныхъ функцій (напримѣръ, многочленовъ или тригонометрическихъ функцій)? Первый и чрезвычайно важный шагъ для рѣшенія этого вопроса былъ сдѣланъ Дирихле; онъ доказалъ, что для того, чтобы произвольно данная функція могла быть въ нѣкоторомъ промежуткѣ разложена въ сходящійся тригонометрическій рядъ, достаточно, чтобы она не имѣла въ данномъ промежуткѣ ни безконечнаго числа точекъ разрыва, ни безконечнаго числа максимумовъ и минимумовъ. Это чрезвычайно общее условіе носитъ названіе „условія Дирихле". Хотя, благодаря обманчивости геометрической интуиціи, на первый взглядъ кажется, что всякая непрерывная функція удавлетворяетъ условію Дирихле, но нетрудно указать примѣръ непрерывной функціи $\left(y=x\sin\frac{1}{x}\right)$, которая имѣетъ безчисленное множество максимумовъ и минимумовъ около точки $x=0$. Такимъ образомъ, и глубокія изслѣдованія Дирикле не дали окончательнаго отвѣта на поставленный вопросъ. Этотъ отвѣтъ заставилъ себя ждать еще полъ столѣтія, вѣроятно, потому, что середина XIX-го вѣка была эпохой величайшаго расцвѣта и исключительнаго увлеченія теоріей аналитическихъ функцій, и всѣ интересы геометровъ того времени были сосредоточены вокругъ нея.

Какъ бы то ни было, въ 1885 г. отвѣтъ, который оказался утвердительнымъ, былъ найденъ Вейерштрассомъ: всякая непрерывная функція можетъ быть представлена въ видѣ сходящагося ряда многочленовъ. Такимъ образомъ непрерывная функція, взятая безъ всякихъ ограниченій, перестала быть чѣмъ то недоступнымъ и получила такое же математическое выраженіе въ видѣ безконечнаго ряда, какъ аналитическая функція; при этомъ нерѣдко ряды, представляющіе функціи, не разлагаемыя въ строку Тэйлора и даже не имѣющія производныхъ ни въ одной точкѣ, чрезвычайно просты и отличаются большимъ сходствомъ съ рядами, выражающими хорошо извѣстныя аналитическія функціи. Этого одного замѣчанія было бы достаточно, чтобы понять, что чистый анализъ не можетъ болѣе ограничиваться изученіемъ только функцій комплексной перемѣнной. Но есть на то еще и другое не менѣе существенное основаніе, лежащее въ самой теоріи аналитическихъ функцій. Вы помните, что всякая функція комплексной перемѣнной вполнѣ опредѣляется совокупностью всѣхъ своихъ особенностей; для функцій, которыя были изучены первыми, особенностями служили отдѣльныя особенныя точки, аналогичныя тѣмъ, которыя встрѣчались у алгебраическихъ функцій. Однако, постепенно особенности разсматриваемыхъ функцій усложнялись; и одна изъ основныхъ задачъ теоріи эллиптическихъ интеграловъ не замедлила дать примѣръ функціи комплексной перемѣнной, для которой вся вещественная ось оказывается особой линіей, такъ какъ, ни при какомъ вещественномъ значеніи x, эта функція не разлагается въ строку Тэйлора.

Дальнѣйшія изслѣдованія показали, что, вообще, функціи комплексной перемѣнной, имѣющія особыя линіи, не являются исключеніями, напротивъ, исключеніями слѣдуетъ считать функціи, не имѣющія ихъ. На особыхъ линіяхъ функція можетъ становиться безконечной или неопредѣленной, но можетъ также, въ частности, принимать и вполнѣ опредѣленныя значенія, выражаемыя произвольной, по существу, непрерывной функціей дуги на разсматриваемой линіи. Такимъ образомъ само логическое развитіе функціи комплексной перемѣнной неизбѣжно возвращаетъ анализъ на его первоначальную почву — къ функціи вещественной перемѣнной.

Послѣ открытія Вейерштрасса, непосредственное изученіе функцій вещественной перемѣнной сдѣлалось одной изъ важнѣйшихъ очередныхъ задачъ. При этомъ не замедлилъ обнаружиться очень интересный фактъ: въ весьма многихъ случаяхъ, допущеніе, что функція вещественной перемѣнной имѣетъ одну или нѣсколько производныхъ, влечетъ за собой существованіе всѣхъ производныхъ и сходимость ея разложенія въ строку Тэйлора (подобно тому, какъ Коши доказалъ это для комплексной перемѣнной); всѣ вещественныя функціи, представляющія собой не искусственный агрегатъ, а органическое цѣлое, т. е. обладающія свойствомъ, что онѣ вполнѣ опредѣлены во всей области своего существованія, если только онѣ даны на произвольно маломъ отрѣзкѣ, оказываются аналитическими, при нѣкоторыхъ чрезвычайно общихъ допущеніяхъ. Благодаря этому, видное мѣсто въ современномъ анализѣ, и, въ особенности, въ его приложеніяхъ, занимаютъ вещественныя аналитическія функціи, методы изученія которыхъ должны значительно отличаться отъ методовъ общей теоріи аналитическихъ функцій, такъ какъ комплексныя особенности ихъ отличаются чрезвычайной сложностью и не представляютъ практическаго интереса.

Недавно былъ предложенъ общій принципъ для классификаціи всѣхъ непрерывныхъ функцій вещественной перемѣнной. Изъ теоремы Вейерштрасса, о которой я говорилъ выше, мы знаемъ, что всякая непрерывная функція можетъ быть, съ какой угодно точностью, представлена въ видѣ многочлена достаточно высокой степени. Различныя функціи предлагается характеризовать величиной погрѣшности, которая дѣлается, если замѣнять ихъ приближенными многочленами возрастающихъ степеней. Въ частности, оказалось, что изъ всѣхъ функцій вещественной перемѣнной, только аналитическія функціи характеризуются свойствомъ, что, при увеличеніи степени приближеннаго многочлена, ошибка убываетъ въ геометрической прогрессіи; для всѣхъ другихъ функцій, ошибка уменьшается медленнѣе, тѣмъ медленнѣе, чѣмъ сложнѣй дифференціальная природа функціи. Такимъ образомъ, независимо отъ приложеній анализа и отъ введенія въ него комплекснаго числа, теорія аналитическихъ функцій должна войти въ него, какъ первая глава общей теоріи функцій вещественной перемѣнной, глава, посвященная функціямъ, наименѣе отличающимся отъ многочленовъ. Разумѣется, опытъ также мало можетъ намъ отвѣтить на вопросъ, аналитическая ли данная функція или нѣтъ, какъ и на вопросъ, раціонально ли то или другое число; это вопросы чисто теоретическіе, и на нихъ можетъ отвѣтить только теорія. Тѣмъ не менѣе, если, при интерполированіи эмпирической функціи (т. е. при замѣнѣ ея возможно приближенными многочленами), мы быстро получаемъ большую точность, то, вслѣдствіе указаннаго результата, слѣдуетъ ожидать, что на. основаніи теоретическихъ изслѣдованій, эту функцію цѣлесообразно будетъ считать аналитической; напротивъ, если самое искусное интерполированіе будетъ давать плохое приближеніе, то мало шансовъ, чтобы теорія разсматриваемой функціи была аналитически проста.

Я не буду далѣе задерживать вашего вниманія; но, прежде чѣмъ кончить, долженъ замѣтить, что непрерывныя функціи далеко не исчерпываютъ область анализа. И если въ настоящее время еще сравнительно рѣдки приложенія прерывныхъ функцій, то, во всякомъ случаѣ, изслѣдованія послѣднихъ десятилѣтій подготовили для нихъ прекрасную почву. Благодаря глубокой классификаціи различныхъ видовъ прерывности, мы знаемъ теперь, что функціи, выражаемыя аналитически (въ смыслѣ Эйлера), безконечно разнообразнѣе функцій, которыя могутъ быть представлены геометрически въ видѣ линій; достаточно вспомнить функцію Дирихле, разлагаемую въ двойной рядъ многочленовъ, которая, при всѣхъ ирраціональныхъ значеніяхъ перемѣнной, равна нулю, а, при раціональныхъ, равна единицѣ.

Въ этомъ краткомъ очеркѣ я имѣлъ въ виду только указать важнѣйшія направленія, въ которыхъ развивалась и развивается понятіе о функціи; при этомъ, чтобы не расширить моего доклада, я пропустилъ не мало существенныхъ фактовъ и много крупныхъ именъ. Но въ мою задачу не могла входить оцѣнка роли, сыгранной отдѣльными лицами; имена служили для меня, главнымъ образомъ, сокращенными обозначеніями извѣстныхъ взглядовъ и направленій.

Нормальная мѣра радія и ея примѣненіе при радіоактивныхъ измѣреніяхъ.

Е. Ретгерфорда.

*(Окончаніе *).*

Опишемъ теперь простой приборъ для сравненія количества радія въ данномъ препаратѣ съ нормальнымъ препаратомъ. Для этой цѣли очень хорошо подходитъ электроскопъ. Изображенный на рис. 3 электроскопъ состоитъ изъ свинцовой камеры со стѣнками толщиною въ 23 *мм*. Находящаяся внутри система съ золотыми листочками изолирована посредствомъ маленькой сѣрной кнопки S и можетъ быть заряжена до соотвѣтствующаго потенціала съ помощью кондуктора C, причемъ листочекъ отклоняется отъ нормальнаго положенія. Движенія золотого листочка наблюдаются черезъ два боковыхъ окошечка, закрытыхъ толстымъ стекломъ, съ помощью микроскопа, снабженнаго на окулярѣ шкалой. Время, потребное на то, чтобы золотой листочекъ передвинулся на опредѣленное число дѣленій шкалы, устанавливается съ помощью хронометра. Даже, когда вблизи нѣтъ никакого активнаго матеріала, изолированная система всегда даетъ маленькую потерю заряда. Это происходитъ отъ того, что воздухъ въ замкнутомъ сосудѣ обладаетъ нѣкоторой проводимостью, хотя и незначительной, а отчасти также и потому, что потеря электричества происходитъ въ извѣстныхъ размѣрахъ и черезъ изолированную подставку. Число дѣленій, на которое опускается золотой листочекъ изъ за этой потери, даетъ намъ естественную потерю. Она точно опредѣляется до начала измѣреній. Затѣмъ нормальный препаратъ радія помѣщается на легкой рамѣ (см. рис. 3) съ одной стороны электроскопа на такомъ разстояніи отъ послѣдняго, чтобы вызвать соотвѣтствующее отклоненіе золотого листочка. α-лучи радія обыкновенно вполнѣ задерживаются уже стекляннымъ сосудомъ, содержащимъ въ себѣ радій; β-лучи, проходящіе свободно черезъ

*) См. „Вѣстникъ", № 557—558.

стекло, вполнѣ поглощаются свинцомъ. Слѣдовательно, эффектъ, наблюдаемый въ электроскопѣ, происходитъ отъ γ-лучей, проникнувшихъ сквозь свинецъ, и вызванная въ электроскопѣ іонизація служитъ мѣриломъ для интенсивности испускаемыхъ радіемъ γ-лучей. Если золотой листочекъ имѣетъ соотвѣтствующій потенціалъ, то всѣ іоны въ электроскопѣ уносятся электрическимъ полемъ, прежде чѣмъ произошло снова замѣтное соединеніе; поэтому, быстрота отклоненія золотого листочка служитъ мѣриломъ для вызванной іонизаціи и, слѣдовательно, для интенсивности γ-лучей. Послѣ этого нормальный препаратъ принимается и удаляется, а на то же самое мѣсто и въ точно такое же положеніе относительно электроскопа, какъ онъ, помѣщается изслѣдуемый препаратъ; затѣмъ снова наблюдается скорость отклоненія золотого листочка.

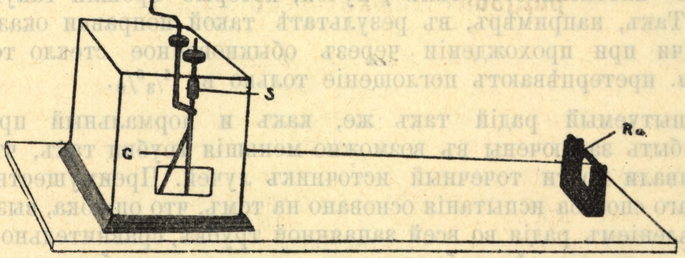

Рис. 3.

Пусть D — число пройденныхъ золотымъ листочкомъ дѣленій въ одну минуту вслѣдствіе естественной потери; D_1 — число дѣленій, соотвѣтствующее нормальному препарату радія, приведенному въ надлежащее положеніе и содержащему S миллиграммовъ радія; наконецъ, D_2 пусть означаетъ число дѣленій, соотвѣтствующее препарату, взятому для сравненія, и содержащему въ себѣ z *мг.* радія. Тогда интенсивность γ-лучей, исходящихъ изъ нормальнаго препарата выразится черезъ $D_1 - D$, а исходящихъ изъ испытуемаго препарата черезъ $D_2 - D$. А такъ какъ различныя интенсивности γ-лучей въ электроскопѣ пропорціональны количествамъ радія въ препаратахъ, то

$$\frac{z}{S} = \frac{D_2 - D}{D_1 - D},$$

откуда, если извѣстно S, можно получить значеніе z.

При повтореніи этихъ измѣреній съ хорошо налаженнымъ электроскопомъ можно дѣлать подобныя сравненія съ ошибкой, несомнѣнно меньшей $^1/_{100}$, а при особой тщательности даже иногда меньше $^1/_{300}$. Отсюда видно, что можно опредѣлить количество радія въ препаратѣ, даже не открывая запаянной стеклянной трубки, въ которую препаратъ заключенъ. Это единственное въ своемъ родѣ свойство происходитъ просто отъ того, что радій испускаетъ столь сильно проникающее излученіе, что только незначительная часть его поглощается самимъ радіемъ и окружающей средой.

Остается еще разсмотрѣть размѣры нѣкоторыхъ необходимыхъ иногда поправокъ. γ-лучи въ незначительной мѣрѣ поглощаются самимъ радіемъ и стѣнками сосуда, заключающаго послѣдній. Если стекло обѣихъ трубокъ не одинаковой толщины, то у обоихъ препаратовъ поглощенія будутъ различны. Поправка на различную толщину стекла можетъ быть очень уменьшена, если эти стеклянныя трубки сдѣлать возможно болѣе одинаковыми; но во всякомъ случаѣ, эта поправка, если нужно, можетъ быть сдѣлана съ большой точностью. Такъ какъ γ-лучи проходятъ слой свинца толщиною въ 3 *мм.* раньше чѣмъ попадаютъ въ электроскопъ, то менѣе проницательные изъ нихъ, которые исходятъ отъ радія, большею частью поглощаются свинцомъ. Поэтому, слѣдуетъ принимать во вниманіе только дѣйствія тонкой стеклянной трубки на интенсивность тѣхъ γ-лучей, которые прошли такую толщу свинца. Такъ, напримѣръ, въ результатѣ такой поправки оказывается, что γ-лучи при прохожденіи черезъ обыкновенное стекло толщиною въ 1 *мм.* претерпѣваютъ поглощеніе только въ $^1/_3\%$.

Испытуемый радій такъ же, какъ и нормальный препаратъ, должны быть заключены въ возможно меньшія трубки такъ, чтобы они образовывали почти точечный источникъ лучей. Преимущество вышеописаннаго способа испытанія основано на томъ, что ошибка, вызываемая распредѣленіемъ радія во всей запаянной трубкѣ, сравнительно несущественна, и, въ случаѣ необходимости, можетъ легко быть исправлена. На разстояніи около метра отъ электроскопа дѣйствіе γ-лучей такого препарата почти такое же, какъ если бы онъ былъ сконцентрированъ въ одной точкѣ. При такихъ условіяхъ нормальный препаратъ съ 5 *мг.* радія производитъ очень удобный разрядъ электроскопа. При 100 *мг.* радія препаратъ долженъ быть отнесенъ на 4 или 5 *м.* отъ электроскопа. Затрудненія возникаютъ тогда, если пытаться этимъ методомъ сдѣлать точныя сравненія очень сильно разнящихся между собой количествъ радія. Предположимъ, напримѣръ, что нормальный препаратъ содержалъ въ себѣ 2 *мг.* радія, а испытуемый — около 50 *мг.* радія; тогда послѣдній необходимо было бы отнести на большое разстояніе отъ электроскопа, для того, чтобы движеніе золотого листочка не произошло слишкомъ быстро. На такомъ разстояніи маленькій нормальный препаратъ производитъ очень медленное движеніе золотого листочка въ электроскопѣ, которое почти равно движенію отъ естественной потери. Въ такомъ случаѣ точность сравненія гораздо меньше, чѣмъ при приблизительно равныхъ количествахъ. Однако, никакихъ затрудненій не представитъ выработка метода для точнаго сравненія очень различныхъ количествъ радія, если пользоваться компенсаціей. При этомъ іонизаціонный токъ, производимый проникшими въ свинцовый сосудъ γ-лучами, компенсируется противоположнымъ іонизаціоннымъ токомъ, происходящимъ изъ какого нибудь постояннаго источника излученія, напримѣръ, окиси урана. Можно для этого воспользоваться электрометромъ или соотвѣтствующимъ электроскопомъ. Чтобы сравнить содержаніе радія въ двухъ препаратахъ, каждый изъ нихъ помѣщаютъ на такомъ разстоянiи отъ свинцоваго сосуда, чтобы получилась точная компенсацiя. А такъ какъ интенсивность γ-излученiя уменьшается пропорцiонально квадрату разстоянiи, то содержанiе радiя въ каждомъ препаратѣ приблизительно пропорцiонально квадрату его разстоянiя отъ центра свинцоваго сосуда; предполагается при этомъ, что размѣры послѣдняго ничтожны въ сравненiи съ разстоянiемъ препарата. Вслѣдствiе незначительнаго поглощенiя γ-лучей воздухомъ, интенсивность ихъ падаетъ нѣсколько быстрѣе, чѣмъ возростаетъ квадратъ разстоянiя; но нетрудно внести сюда соотвѣтствующую поправку.

По такому методу компенсацiи предприняты опыты въ моей лабораторiи, и возможно, что этимъ методомъ можно будетъ точно сравнить между собою самыя различныя количества радiя.

Г-жа Кюри примѣнила для этой цѣли методъ нѣсколько иного рода. Радiй запаивается въ маленькую тонкую стеклянную трубочку, и вызванная его β и γ-лучами iонизацiя между двумя концентрическими цилиндрами измѣряется послѣ того, какъ радiй помѣщенъ въ центрѣ внутренняго цилиндра, То же повторяется съ препаратомъ, подлежащимъ сравненiю, который помѣщенъ въ подобную же стеклянную трубку почти такой же толщины. Отношенiе обоихъ токовъ должно быть пропорцiонально находящимся въ препаратахъ количествамъ радiя. При достаточно тщательной работѣ несомнѣнно можно этимъ методомъ сравнить количества радiя съ точностью до $^1/_3\%$.

Въ предыдущихъ разсужденiяхъ мы принимали, что препаратъ радiя тщательно очищенъ кристаллизацiями и не содержитъ въ себѣ никакого другого радiоактивнаго элемента. Но недавно Ганъ (Hahn) показалъ, что изъ минераловъ, содержащихъ торiй, можно выдѣлить трезвычайно активное вещество (мезоторiй—mesothorium), главныя химическiя свойства котораго вполнѣ соотвѣтствуютъ свойствамъ радiя. Дѣйствительно, Марквальдъ (Markwald) и Содди нашли, что радiй и мезоторiй не отдѣлимы другъ отъ друга, если имѣется смѣсь этихъ обоихъ веществъ. Предположимъ, напримѣръ, что радiй выдѣленъ изъ такого минерала, который содержалъ уранъ и торiй. Въ этомъ случаѣ мезоторiй выдѣлится вмѣстѣ съ радiемъ, и въ качествѣ конечнаго продукта получается не чистый радiй, а смѣсь обоихъ веществъ.

Уже спустя день послѣ полученiя препарата мезоторiй испускаетъ β и γ-лучи, вслѣдствiе образованiя новаго продукта, и эти β и γ-лучи обладаютъ почти такою же способностью проницанiя, какъ и у радiя. Вслѣдствiе образованiя радiоторiя и дальнѣйшихъ продуктовъ въ послѣдовательномъ порядкѣ β и γ-излученiя, производимыя группой торiя, возрастаютъ нѣсколько лѣтъ по сложному закону, затѣмъ снова падаютъ и спустя приблизительно 50 лѣтъ доходитъ до ничтожныхъ размѣровъ. Впослѣдствiи активность постепенно совсѣмъ исчезаетъ. По этимъ основанiямъ очень важно при приготовленiи препаратовъ радiя выбирать исходнымъ матерiаломъ минералъ, который бы содержалъ какъ можно меньше торiя.

Соотвѣтственными опытами можно легко провѣрить, содержится ли въ препаратѣ радія мезоторій. Можно, напримѣръ, поступить слѣдующимъ образомъ. Препаратъ радія растворяется, и растворъ кипятится нѣсколько часовъ. Такимъ путемъ совершенно изгоняется эманація радія, и поэтому препаратъ долженъ теперь обладать совершенно ничтожной долей первоначальной активности γ-лучей. Если же послѣ этой обработки активность γ-лучей не вполнѣ еще исчезаетъ, то это указываетъ на присутствіе мезоторія.

Можно также провѣрить, содержится ли мезоторій въ препаратѣ радія, путемъ сравнительныхъ измѣреній по методу γ-лучей и эманаціи. Для этой цѣли опредѣляютъ сначала активность γ-лучей препарата и такимъ образомъ получаютъ мѣру излученія радія и мезоторія вмѣстѣ. Съ другой стороны, производятъ измѣренія по методу эманаціи, и такимъ образомъ можно опредѣлить количество одного радія, находящагося въ препаратѣ.

Измѣненія нормальнаго препарата радія съ теченіемъ времени.

Теперь слѣдуетъ разсмотрѣть, насколько нормальный препаратъ радія можно считать неизмѣннымъ. Радій необходимо разсматривать, какъ преходящій элементъ, который медленно, но постоянно преобразуется въ другіе виды матеріи. Такъ какъ это процессъ необратимый, то существующее количество радія должно съ теченіемъ времени уменьшиться. Уменьшеніе идетъ очень медленно, такъ какъ, по нашимъ теперешнимъ знаніямъ, требуется періодъ въ 2000 лѣтъ для превращенія половины радія. Этотъ періодъ трансформаціи, опредѣленный Болтвудомъ непосредственно, по всей вѣроятности, почти точенъ.

Такъ какъ дѣйствіе γ-лучей препарата радія въ состояніи равновѣсія пропорціонально количеству радія, то интенсивность проникающихъ γ-лучей будетъ съ теченіемъ времени падать въ той же мѣрѣ, какъ и количество самого радія. Если „періодъ полупревращенія“ считать въ 2000 лѣтъ, то значеніе постоянной превращенія $\lambda = 0{,}000\,346$ (лѣтъ)$^{-1}$. Слѣдовательно, любое количество радія спустя три года послѣ своего изготовленія лишится 0,001, а въ 100 лѣтъ — около 3,4%. Такимъ образомъ нормальный препаратъ радія не останется неизмѣннымъ, но измѣненіе идетъ такъ медленно, что открыть его на протяженіи промежутка въ десять лѣтъ было бы трудно. Но такъ какъ во всякое время можно было бы внести достаточную поправку, то всегда можно было бы получить истинное значеніе. Слѣдовательно, съ этой стороны нѣтъ никакихъ затрудненій для установленія опредѣленной нормальной мѣры.

Однако, не слѣдуетъ упускать изъ виду другого пункта. Съ теченіемъ времени собирается значительное количество одного изъ продуктовъ медленнаго распада радія, который называется радій D. Этотъ продуктъ, съ своей стороны производитъ радій E, испускающій γ-лучи. Если бы пришлось для дѣйствія этого γ-излученія радія E вводить поправку, то это было бы серьезнымъ доводомъ противъ полезности нормальной мѣры радія. Къ счастью, однако, γ-лучи радія E вызываютъ лишь слабую іонизацію въ сравненіи съ γ-лучами эквивалентнаго количества радія и, кромѣ того, ихъ способность проникновенія гораздо меньше. Если γ-излученіе радія вмѣстѣ со всѣми его продуктами до измѣренія проходитъ слой свинца въ 5 *мм.*, то γ-лучи радія D и радія E почти полностью поглощаются и поэтому для нихъ не требуется никакой поправки. Итакъ, если примѣнить соотвѣтствующіе методы измѣренія, то γ-излученіе радія является точной мѣрой для количества имѣющагося радія.

Измѣреніе эманаціи.

Въ настоящее время во многихъ изслѣдованіяхъ въ широкихъ размѣрахъ употребляется, въ качествѣ источника излученія, эманація радія вмѣсто самого радія. Растворъ радія помѣщается въ замкнутомъ сосудѣ и время отъ времени изъ послѣдняго выкачиваютъ насосомъ эманацію вмѣстѣ съ водородомъ и кислородомъ, образовавшимся изъ воды. Соотвѣтствующими методами можно очистить эманацію и перевести ее въ какой нибудь подходящій для этого измѣрительный аппаратъ. Въ моментъ своего выдѣленія эманація испускаетъ только α-лучи, но немедленно послѣ этого начинается ея превращеніе въ послѣдовательный рядъ продуктовъ: радій A, радій B и радій C. Радій C испускаетъ проникающіе β и γ-лучи, и интенсивность γ-лучей пропорціональна имѣющемуся количеству радія C. Это то количество, а слѣдовательно, и интенсивность γ-излученія, достигаетъ своего максимума въ теченіе четырехъ часовъ послѣ введенія эманаціи въ измѣрительный аппаратъ. Интенсивность γ-лучей уменьшается, наконецъ, такимъ же образомъ, какъ и эманація, т. е. такъ, что логариѳмъ ея обратно пропорціоналенъ времени, и „періодъ полупревращенія“ равенъ 3,85 дней. Такимъ образомъ интенсивность γ-лучей служитъ очень близкой мѣрой для количества имѣющейся эманаціи. Если, напримѣръ, дѣйствіе γ-лучей маленькой трубочки, содержащей въ себѣ эманацію, равно дѣйствію γ-лучей 10-ти *мг.* радія въ состояніи равновѣсія, то мы знаемъ, что въ этотъ моментъ имѣющееся количество эманаціи приблизительно равно количеству эманаціи, находящемуся въ равновѣсіи съ 10 *мг.* радія. Маленькая поправка въ размѣрѣ 1 процента необходима, потому что эманація находится въ процессѣ постояннаго превращенія; но такую поправку сдѣлать легко, и нѣтъ надобности на этомъ останавливаться подробнѣе. Подобнымъ же образомъ радій C, осаждающійся на стѣнкахъ сосуда и на поверхности всякой матеріи, содержащейся въ этомъ сосудѣ, часто употребляется также, въ качествѣ источника гомогенныхъ α-лучей. При измѣреніи эффекта γ-лучей радія C можно немедленно выразить количество послѣдняго черезъ опредѣленное количество радія въ состояніи равновѣсія. Поэтому, принятіе нормальной мѣры радія будетъ имѣть важное значеніе не только для опредѣленія количествъ самого радія, но и для опредѣленія количествъ его различныхъ продуктовъ.

На брюссельскомъ радіологическомъ конгрессѣ въ сентябрѣ 1910 года предложено было дать опредѣленное названіе тому количеству эманаціи, которое находится въ равновѣсіи съ 1 *гр.* чистаго радія. Предложенное названіе было: Кюри въ честь умершаго профессора Пьера Кюри. Принятіе этого термина сдѣлаетъ лишнимъ многіе длинные обороты. Такъ, напримѣръ, количество эманаціи, эквивалентное 1 *мг.* радія, находящемуся въ равновѣсіи, будетъ называться $^1/_{1000}$ кюри или милликюри.

Мелкія единицы радія.

Въ предыдущемъ изложеніи мы неоднократно указывали на необходимость нормальной мѣры радія для сравненія его количествъ отъ 0,1 *мг.* до 1 *гр.* Но во многихъ случаяхъ требуется еще гораздо меньшая мѣра. За послѣдніе годы сдѣлано много опытовъ, употреблено много труда для опредѣленія ничтожныхъ количествъ радія или его эманаціи, содержащихся въ атмосферѣ, въ водѣ источниковъ, рѣкъ и морей, въ горныхъ породахъ, въ различнаго рода почвахъ. Сюда присоединяется то обстоятельство, что предположили связь между присутствіемъ радія или его эмананаціи въ источникахъ и цѣлебными свойствами послѣднихъ; а это побудило приняться за точное изслѣдованіе различныхъ цѣлебныхъ источниковъ относительно содержанія радія и эманаціи. Въ атмосферномъ воздухѣ радій не содержится, а есть только его эманація, которая диффундируетъ изъ почвы; то же самое наблюдается также въ нѣкоторыхъ горячихъ источникахъ. Но въ горныхъ породахъ и въ почвѣ содержится радій вмѣстѣ со своей эманаціей. Количество радія въ большинствѣ случаевъ чрезвычайно ничтожно, но оно можетъ быть измѣрено. Электрическій методъ для опредѣленія ничтожныхъ количествъ радія — необыкновенно чувствителенъ. Такъ, напримѣръ, совсѣмъ нетрудно открыть присутствіе 10^{-10} *гр.* радія и точно опредѣлить его; а при особой тщательности можно еще доказать присутствіе $^1/_{10}$ до $^1/_{100}$ этого количества. Стрëттъ, Жоли (Strutt, Joly) и другіе въ многочисленныхъ изысканіяхъ опредѣлили содержаніе радія въ различныхъ горныхъ породахъ. Оно оказывается различнымъ въ отдѣльныхъ образцахъ и составляетъ въ среднемъ около 10^{-12} *гр.* радія въ 1 *гр.* горной породы. Въ этихъ опредѣленіяхъ радій не выдѣляется химически, какъ таковой. Напротивъ, методъ опредѣленій покоится на томъ, что радій производитъ радіоактивный газъ, эманацію, который легко отдѣляется при быстромъ кипяченіи раствора радія. Если, напримѣръ, нужно опредѣлить содержаніе радія въ данной массѣ горной породы, то она надлежащимъ методомъ растворяется, причемъ эманація изгоняется совершенно. Затѣмъ растворъ запаивается въ стеклянной сосудъ, гдѣ приблизительно спустя мѣсяцъ вновь образовавшаяся эманація снова достигаетъ равновѣсія съ радіемъ. Тогда она кипяченіемъ также изгоняется, но уже собирается и переводится въ соотвѣтствующій электроскопъ, гдѣ измѣряется ея дѣйствіе. Масштабомъ для измѣренія служитъ растворъ, скажемъ, 10^{-10} *гр.* радія, который подвергается такой же обработкѣ и изъ котораго такимъ же образомъ извлечена и измѣрена эманація, какъ эманація изъ изслѣдуемой горной породы. Изъ сравненія обоихъ результатовъ получается точное количество радія, заключающееся въ этой горной породѣ. Для этой области изслѣдованія, очевидно, необходимо, чтобы стали доступными нормальные растворы съ незначительными, но точно опредѣленнымъ содержаніемъ радія. Подобные растворы составлены уже нѣсколько лѣтъ назадъ Рётгерфордомъ и Болтвудомъ. Они заключаютъ въ себѣ опредѣленное количество радія на единицу объема, которое выражено въ единицахъ принятаго ими нормальнаго препарата.

При изготовленіи этихъ нормальныхъ растворовъ были приложены старанія помѣшать происходящему всегда выдѣленію радія изъ раствора. Всѣ растворы радія обнаруживаютъ склонность къ этому; ее можно однако уменьшить въ значительной степени, если прибавить въ достаточномъ количествѣ соляной кислоты. Составленные Рётгерфордомъ и Болтвудомъ растворы недавно были снова провѣрены и оказались — это спустя пять лѣтъ — совершенно неизмѣнившимися. Такіе нормальные растворы можно было бы изготовлять изъ раствора точно опредѣленнаго на основаніи международной единицы количества радія. Послѣдовательными разжиженіями этого раствора можно было бы затѣмъ легко получить нормальные растворы, въ которыхъ содержаніе радія на единицу объема было бы выражено въ доляхъ единицы радія. Введеніе такихъ мелкихъ нормальныхъ мѣръ имѣло бы огромнѣйшее значеніе для всѣхъ изслѣдователей, работающихъ въ этой важной области.

Занимаясь изслѣдованіемъ содержанія эманаціи въ источникахъ и другихъ естественныхъ водахъ, нѣкоторые ученые выражали свои результаты при помощи насыщающаго тока который вызывала эманація въ сосудѣ съ опредѣленнымъ объемомъ. Этотъ способъ выраженія результатовъ примѣненъ впервые г. Махе (Mache), и отсюда единица для этихъ измѣреній названа „единицей Махе“. Такой пріемъ можетъ самъ по себѣ быть очень хорошимъ; но въ концѣ концовъ все же желательно, чтобы всѣ результаты измѣренія эманаціи были выражены въ единицахъ радія. Если имѣются въ распоряженіи нормальные растворы со слабымъ содержаніемъ, то можно выразить значеніе единицы Махе въ новой единицѣ.

Примѣненіе нормальной мѣры радія къ измѣренію продуктовъ торія.

Г-лучи, испускаемые нормальнымъ препаратомъ радія, вѣроятно, окажутся простой и надежной мѣрой для опредѣленія высоко активныхъ продуктовъ торія. Отто Ганъ (Otto Hahn) въ Берлинѣ открылъ два продукта со сравнительно медленнымъ превращеніемъ, которые называются: мезоторій и радіоторій. Первый имѣетъ періодъ полупревращенія приблизительно въ 5,5, послѣдній таковой же — въ 2 года. Мезоторій по своимъ химическимъ свойствамъ очень сходенъ съ радіемъ и можетъ быть отдѣленъ отъ торія химическимъ путемъ. Спустя день послѣ своего отдѣленія мезоторій испускаетъ β и γ-лучи съ почти такою же способностью проницанія, какъ и испускаемые радіемъ. Мезоторій медленно превращается въ радіоторій, который испускаетъ α-лучи и, съ своей стороны, подвергается ряду дальнѣйшихъ быстрыхъ превращеній. Далѣе, такъ какъ одинъ изъ продуктовъ радіоторія испускаетъ γ-лучи, то можно показать, что первоначально чистый препаратъ мезоторія въ теченіе нѣсколькихъ лѣтъ имѣетъ возрастающую активность γ-лучей; эта активность переходитъ черезъ максимумъ и наконецъ убываетъ, имѣя періодъ полупревращенія въ 5,5 лѣтъ. Мезоторій легко поддается концентраціи, такъ что это вещество даетъ тотъ же эффектъ своими γ-лучами, какъ одинакокое съ нимъ по вѣсу количество радія. Поэтому активность γ-лучей мезоторія, которую онъ обнаруживаетъ спустя нѣсколько дней послѣ своего изготовленія, можно хорошо выразить черезъ активность извѣстнаго количества радія въ состояніи равновѣсія. Ганъ уже принялъ этотъ методъ опредѣленія продуктовъ торія. Выработку мезоторія изъ отбросовъ фабрикаціи торія стали уже производить фабричнымъ путемъ у Кнёфлеръ и К° (Knöfler & C°) въ Берлинѣ. Въ виду того, что ежегодно поступаетъ на рынокъ огромное количество торія, скоро, вѣроятно поступитъ въ продажу значительное количество мезоторія. Препараты мезоторія оказываются для многихъ цѣлей столь же цѣнными, какъ и радія, и безъ сомнѣнія они найдутъ примѣненіе въ будущемъ, какъ въ терапіи, такъ и въ наукѣ. Если при этомъ активность препаратовъ будетъ выражена въ единицахъ радія, то этимъ будетъ достигнута гарантія ихъ содержанія активнаго вещества.

Нѣкоторыя предложенія относительно единицы радія.

На послѣднемъ радіологическомъ конгрессѣ въ Брюсселѣ въ сентябрѣ 1910 года въ различныхъ докладахъ высказывались пожеланія относительно установленія международной единицы. Конгрессъ уполномочилъ г-жу Кюри и проф. Рётгерфорда образовать международный комитетъ для обсужденія, насколько такой проектъ выполнимъ. Было признано желательнымъ, чтобы членами комитета были люди, практически работающіе въ области радіоактивности идетально знакомые съ соотвѣтствующими методами измѣренія. Были выбраны нижепоименованные члены и утверждены конгрессомъ: г-жа Кюри, проф. Рётгерфордъ, д-ръ Дебьернъ, проф. Б. Б. Болтвудъ, проф. А. С. Ивъ (A. S. Eve), проф. Гизель (Giesel), проф. Стефанъ Мейеръ (Stefan Meyer), проф. Э. фонъ Швейдлеръ (E. w. Schweidler) и Ф. Содди. Комитету дано право, адоптировать новыхъ членовъ, что безъ сомнѣнія и будетъ имѣть мѣсто. Этотъ комитетъ имѣлъ нѣсколько засѣданій и представилъ конгрессу предварительный докладъ о своихъ совѣщаніяхъ; докладъ этотъ былъ принятъ конгрессомъ. Онъ сводится къ слѣдующему.

1. Г-жа Кюри согласилась изготовить нормальную мѣру радія, содержащую около 20 *мг.* элемента радія.

2. Какъ только г-жѣ Кюри будутъ возмѣщены комитетомъ издержки по изготовленію нормальной мѣры, послѣдняя передается

комитету и употребляется только для того, чтобы свѣрять съ нею вторичныя нормальныя мѣры. Основная нормальная мѣра хранится надлежащимъ образомъ въ Парижѣ.

3. Комитету поручается по его усмотрѣнію снабжать государственныя и частныя научныя лабораторіи, которыя согласны покрыть расходы, вторичными нормальными мѣрами, свѣренными съ международной нормальной мѣрой.

4. Съ теченіемъ времени слѣдуетъ приготовить меньшія нормальныя мѣры, когда комитету удастся на основаніи болѣе подробныхъ изслѣдованій удешевить методы изготовленія этихъ мѣръ.

5. Такъ какъ эманація радія такъ часто употребляется теперь въ научныхъ изслѣдованіяхъ, то комитетъ считаетъ желательнымъ установить единицу для количества эманаціи. Соотвѣтственно желанію конференціи комитетъ предлагаетъ названіе „кюри" (curie) для количества эманаціи, находящагося въ равновѣсіи съ граммомъ радія (элемента). Такимъ образомъ, напримѣръ, эманація въ равновѣсіи съ 0,001 *гр.* радія обозначалась бы: 1 „милликюри".

6. Комитетъ еще разсматриваетъ вопросъ, слѣдуетъ ли опредѣленному весьма малому количеству радія и эманаціи, находящейся съ нимъ въ равновѣсіи, дать особое названіе.

7. Въ виду того, что нѣсколько членовъ комитета не присутствуютъ на конгрессѣ (въ Брюсселѣ), то сдѣланныя предложенія по необходимости носятъ предварительный характеръ. Комитетъ сохраняетъ за собой право измѣнить ихъ. послѣ дальнѣйшаго обсужденія.

Комитетъ былъ единогласно того мнѣнія, что никто другой не призванъ къ этой важной работѣ приготовленія нормальной мѣры радія такъ, какъ г-жа Кюри, сама открывшая радій. По просьбѣ комитета г-жа Кюри выразила полную готовность заняться этой работой. Приготовленіе нормальной мѣры изъ опредѣленнаго по вѣсу количества радіевой соли, отличающейся возможно большей химической чистотой, требуетъ чрезвычайно большого искусства и терпѣнія. всѣ работающіе надъ изслѣдованіемъ радіоактивности чрезвычайно признательны г-жѣ Кюри за то, что она взяла на себя столь отвѣтственную задачу.

Разъ будетъ установлена нормальная мѣра, то нетрудно будетъ приготовить дубликаты ея методомъ γ-лучей. Слѣдуетъ ожидать, что различныя государственныя лабораторіи пріобрѣтутъ копіи интернаціональной нормальной мѣры, для того чтобы точно установить содержаніе радія въ употребляющихся у нихъ въ странѣ препаратахъ. Вслѣдствіе высокой цѣны радія такія нормальныя мѣры будутъ, конечно, дороги; но эта затрата будетъ ничтожна въ сравненіи съ огромной важностью, которую имѣетъ для опредѣленія радія въ наукѣ и торговлѣ введеніе твердо установленной нормальной мѣры. Всѣ, работающіе въ области радіоактивности, сумѣютъ оцѣнить значеніе интернаціональной единицы, потому что отъ ея введенія существеннымъ образомъ зависитъ прогрессъ въ дѣлѣ точнаго измѣренія.

Отчетъ о рѣшеніяхъ задачи на премію № 5.

Задача на премію № 5, помѣщенная въ № 548 „Вѣстника", оказывается въ той формѣ, въ которой она тамъ задана, неправильно формулированной. Уравненіе $z^2 = x^4 + ax^2y^2 + by^4$, гдѣ числа a и b связаны условіемъ $4b + c = a^2$ и b, c числа простыя, имѣетъ цѣлыя рѣшенія, кромѣ $y = 0$, $x = \pm z^2$ не только въ томъ случаѣ, когда $a = b = 5$. Это показалъ первымъ преподаватель Сердобскаго Реальнаго училища г. Добровольскій, а потомъ г. Щиголь (Полтава).

Тѣмъ не менѣе Редакція получила 7 рѣшеній задачи. Изъ нихъ 4 пытаются доказать неправильное предложеніе, составляющее задачу, и достигаютъ этого, конечно, цѣною болѣе или менѣе грубыхъ ошибокъ.

Авторы остальныхъ трехъ рѣшеній г. г. С. Тютрюмовъ, Л. Вайнбергъ, Э. Жукъ усмотрѣли, что разсматриваемое предложеніе невѣрно, предлагаютъ себѣ изслѣдовать разрѣшимость въ цѣлыхъ числахъ уравненія:

$$z^2 = x^4 + ax^2y^2 + by^4$$

при условіи $a^2 = 4b + c$, гдѣ b и c числа простыя.

При этомъ два изъ этихъ авторовъ г. г. С. Тютрюмовъ (Винница) и Л. Вайнбергъ (Изяславль Вол. губ.), очень удачно вводятъ дополнительное условіе именно, что b есть число вида $4m + 3$, и доказываютъ, что при наличности этого условія уравненія

$$z^2 = x^4 + ax^2y^2 + by^4$$

дѣйствительно не рѣшается въ цѣлыхъ числахъ.

Редакція считаетъ справедливымъ выдать преміи этимъ двумъ лицамъ. Работа г. Тютрюмова будетъ напечатана въ одномъ изъ ближайшихъ номеровъ „Вѣстника".

БИБЛІОГРАФІЯ.

I. Рецензіи.

Математическое Образованіе. Журналъ Московскаго Математическаго Кружка. №№ 1, 2, 3. 1912.

Молодое, полное жизни и энергіи общество, „Московскій Математическій Кружокъ", рѣшило издавать съ текущаго года собственный печатный органъ. Новый журналъ по проекту Кружка долженъ служить, главнымъ образомъ для освѣщенія педагогическихъ вопросовъ; но на ряду съ этимъ журналъ будетъ давать также статьи чисто научнаго содержанія по элементарной математикѣ; въ журналѣ будутъ помѣщаться отчеты о дѣятельности Кружка и доклады, прочитанные на его засѣданіяхъ. Въ настоящее время появилось уже въ свѣтъ 3 номера журнала, и мы имѣемъ возможность видѣть, какъ эта программа выполняется. Нужно сказать, что въ выпущенныхъ номерахъ теоретическія темы преобладаютъ надъ дидактическими; къ числу методическихъ статей принадлежатъ только воспроизведенные на страницахъ журнала доклады гг. К. Лебединцева, Ѳ. Эрна, К. А. Поссе и В Б. Струве*), прочитанные на „I-мъ Всероссійскомъ Съѣздѣ Преподавателей Математики“. Зато теоретическихъ статей много, на различныя темы. Отмѣтимъ вводную статью въ № 1 проф. Б. К. Млодзѣевскаго—„О степени точности логариѳмическихъ вычисленій“, статью А. Власова—„Квадратура круга и циркулятура квадрата“, С. Виноградова—„Объ одномъ алгебраическомъ неравенствѣ“, I. Чистякова—„Свойства ряда нечетныхъ чиселъ и ихъ примѣненіе“. Задача, которую себѣ ставитъ проф. Млодзѣевскій разрѣшается, конечно, безъ труда, если воспользоваться остаточнымъ членомъ формулы Тайлора**); но небольшое допущеніе относительно характера интерполаціонной ошибки освобождаетъ автора отъ сложныхъ вычисленій. Какъ всегда, такое допущеніе, конечно, лишаетъ насъ полной гарантіи безусловной точности результата; но оно даетъ все же достаточно простые и точные результаты. — Въ безконечно старомъ вопросѣ о квадратурѣ круга, трудно сказать, конечно, совершенно новое слово; но г. Влассовъ все же подходитъ къ темѣ съ довольно оригинальной точки зрѣнія. — Неравенство, которымъ занимается г. Виноградовъ играетъ въ анализѣ капитальную роль; Шлемильхъ дѣлаетъ его точкой отправленія при суммированіи различныхъ рядовъ и нахожденіи ихъ остатковъ.

Пріятное впечатлѣніе производитъ то обстоятельство, что всѣ почти статьи оригинальныя, принадлежатъ членамъ Кружка, составляютъ продуктъ его работы. Это производитъ бодрящее дѣйствіе на Общество и несомнѣнно будетъ будить энергію и мысль внѣ его. Въ № 3 помѣщена и переводная статья А. Коммерель—„Чисто геометрическое обоснованіе ученія о пропорціяхъ и площадяхъ“. Врядъ ли можно было выбрать для начала болѣе важную и болѣе свѣжую статью. Мы полагаемъ, однако, что статью слѣдовало помѣстить не въ переводѣ, а въ коренной переработкѣ Читателю, недостаточно освѣдомленному въ работахъ объ исчисленіи отрѣзковъ и вообще въ тѣхъ идеяхъ, которымъ статья посвящена, врядъ ли будутъ достаточно ясны и задача, которую ставитъ себѣ авторъ, и пути, предлагаемые для ея рѣшенія; врядъ ли онъ пойметъ даже небольшое введеніе. Приложенное проф. Б. К. Млодзѣевскимъ дополненіе, конечно, нѣсколько выясняетъ основную теорему; но мы считаемъ, что этого недостаточно, что читателю, для котораго предназначается журналъ, нужна полная переработка статьи. Однако, легче преподносить совѣты, чѣмъ ихъ выполнять; мы это хорошо знаемъ.

„Математическое Образованіе“ даетъ своимъ читателямъ много новаго, много математической мысли, много матеріала для размышленія. Привѣтствуемъ еще разъ новый родственный нашему журналу органъ и отъ души желаемъ ему процвѣтанія.

В. Каганъ.

К. Н. Рашевскій, преподаватель Московскаго реальнаго училища Воскресенскаго. *Основанія аналитической геометріи.* Учебникъ для дополнительнаго класса реальныхъ училищъ, составленный примѣнительно къ программѣ Мин. Нар. Пр. Изданіе 3-е, исправленное. Книгоиздательства „Заря“. Москва, 1911. Стр. II + 138. Ц. 50 к.

Второе изданіе, какъ значится на заглавномъ листѣ, допущено Ученымъ Комитетомъ Мин. Нар. Пр. въ качествѣ руководства для реальныхъ училищъ. Въ предисловіи авторъ замѣчаетъ, что „въ 3-мъ изданіи измѣненъ выводъ общаго свойства коническихъ сѣченій (поэтому выпущены затруднявшіе учащихся §§ 44, 50, измѣненъ выводъ нормальнаго уравненія прямой

*) Послѣдніе 2 доклада помѣщены также на страницахъ нашего журнала.

**) См., напримѣръ, статью А. Кисилева—„Предѣлъ погрѣшности, совершаемой при вычисленіяхъ помощью пятизначныхъ логариѳмовъ“. „Вѣстникъ“ № 341.

(§ 18); измѣнено расположеніе матеріала въ §§ 56, 57 и сдѣланы нѣкоторыя другія незначительныя поправки; кромѣ того, исправлены чертежи". Въ послѣднемъ отношеніи для послѣдующихъ изданій еще остался матеріалъ для исправленія: чертежъ 5 производитъ впечатлѣніе сдѣланнаго типографскимъ способомъ; его нужно бы замѣнить такимъ, гдѣ оси и параллельныя имъ прямыя своимъ пересѣченіемъ опредѣляющія четыре точки ($\pm a_1 \pm a$) были бы сплошными и пересѣкались бы въ этихъ точкахъ; таковъ же и черт. 10, отчасти черт. 22-й; на черт. 38 разстоянія фокусовъ эллипса отъ центра не равны, но относятся, какъ 10 къ 11, и эта неправильность очень замѣтна на глазъ; очень рѣзокъ черт. 47 и 40, не ясенъ пунктиръ на черт. 48а, неудаченъ и черт. 49. Относительно обозначеній нежелательны сокращенныя обозначенія *cs*, *sn* и *tg* (въ задачѣ 243 даже *tq* это, конечно, опечатка) вмѣсто правильныхъ *cos*, *sin* и *tang*. Опечатокъ, къ сожалѣнію, вообще немало, и исправлены лишь немногія. Переходя отъ этихъ внѣшнихъ недостатковъ къ внутреннимъ прежде всего приходится отмѣтить, что такое важное понятіе, какъ понятіе о проекціи вводится въ примѣчаніи (на стр. 97), въ примѣчаніе (стр. 95) отнесено и построеніе эллипса по точкамъ, когда извѣстны его оси (по величинѣ и положенію). Въ примѣчаніе отнесено и такое основное свойство центра эллипса, что въ немъ всѣ хорды дѣлятся пополамъ. На стр. 68 въ примѣчаніи же сообщается, что „открытіе коническихъ сѣченій древніе геометры приписываютъ ученику Платона Менайхму (т. е. Менэхму), первое систематическое сочиненіе о нихъ принадлежитъ Аполлонію Пергскому (т е. Пергійскому) и что „съ возникновеніемъ аналитической геометріи изученіе этихъ кривыхъ сдѣлалось болѣе легкимъ, и теорія ихъ пріобрѣла необыкновенную общность" (sic). Изъ погрѣшностей можно указать, что, давши на стр. 7 въ § 5 правило Декарта, авторъ забываетъ о немъ, когда пишетъ на стр. 46 формулу (XIV) для длины перпендукуляра.

И все же несмотря на эти недочеты учебникъ г. Рашевскаго надо признать очень недурнымъ, и понятно, что онъ выходитъ уже 3-мъ изданіемъ. Изложеніе главы IV — о коническихъ сѣченіяхъ удаляется отъ шаблона, но въ общемъ недурно. Задачъ въ книжкѣ 261, — т. е совершенно достаточное количество. Недурна и внѣшность (за указанными недочетами), но сброшюрована книжка (по крайней мѣрѣ тотъ экземпляръ, который попалъ въ мои руки) очень плохо. Цѣна очень невысока.

Проф. Д. Синцовъ.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей приватъ-доцента **Е. Л. Буницкаго.**

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

ОТДѢЛЪ I.

№ 21 (6 сер.). Опредѣлить острые углы прямоугольнаго треугольника *BAC*, въ которомъ отношеніе радіуса r_a круга, внѣвписаннаго относительно гипотенузы a, къ радіусу R описаннаго круга достигаетъ maximum'а.

Л. Богдановичъ (Ярославль).

№ 22 (6 сер.). Упростить выраженія:

$$(\sin a+\csc a)^2+(\cos a+\sec a)^2-(\operatorname{tg}^2 a+\cot^2 a),$$

$$\cos^6 a+\sin^6 a+\frac{3}{4}\sin^2 2a.$$

Г. Варкентинъ (С.-Петербургъ).

№ 23 (6 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$\sqrt{x^2+5x+2y-3}+\sqrt{x^2+x+y+2}=\sqrt{x^2+4x+3y-2}+\sqrt{x^2+2y+3},$$

$$x^{x-y}=2y-1.$$

В. Яницкій (Острогъ, Волынск. губ.).

№ 24 (6 сер.). Показать, что соотношеніе

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}x\cot y\cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{y}{2}\right)=1$$

между углами x и y равносильно соотношенію

$$\cos x+\sin y=1.$$

R.

ОТДѢЛЪ II.

Задачи на изслѣдованіе хода и свойствъ функцій.

№ 10) Опредѣлить высоту AD равнобедреннаго треугольника BAC, вписаннаго въ кругъ даннаго радіуса R, основаніе котораго BC и высота AD связаны равенствомъ

$$3AD+2BC=l,$$

гдѣ l — данная длина. Изслѣдовать задачу при постоянномъ R и перемѣнномъ l. Пусть вершина A равнобедреннаго треугольника BAC сохраняетъ постоянное положеніе на данной окружности, и пусть средина D лежитъ на діаметрѣ, проходящемъ черезъ точку A; принявъ этотъ діаметръ за ось y, а касательную въ точкѣ A къ данной окружности за ось x, истолковать геометрически условіе $3AD+2BC=l$ (независимо отъ того, лежитъ ли точка B на данной окружности или нѣтъ). Вывести изъ этого геометрическаго истолкованія геометрическое рѣшеніе задачи и изслѣдовать задачу.

(Заимств.).

№ 11) Пусть a — данное число (отрицательное, нуль или положительное). Изучить измѣненія функціи

$$y=\sqrt{x^3+ax},$$

когда x принимаетъ всевозможныя значенія, и построить соотвѣтствующую кривую.

(Заимств).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 325 (5 сер.). *Пусть* O — *центръ круга, описаннаго около треугольника* ABC. *Доказать, что середина* I *радіуса* OB, *середина* H *медіаны* BM, *и центръ* E *окружности Эйлера треугольника* ABC *лежатъ на одной прямой.*

Опустимъ изъ центра O круга описаннаго перпендикуляры на стороны треугольника ABC; они проходятъ соотвѣтственно черезъ средины M, α и γ сторонъ AC, AB и BC. Прямая IH, соединяющая средины сторонъ BO и BM треугольника BOM, параллельна прямой OM; поэтому прямая IH перпендикулярна къ прямой AC, а также перпендикулярна и къ прямой $\alpha\gamma$, параллельной AC. Углы $B\alpha O$ и $B\gamma O$ четырехугольника $B\alpha O\gamma$ прямые, а потому около него можно описать кругъ, центръ котораго лежитъ въ срединѣ I діаметра BO этого круга. Поэтому прямая IH, будучи перпендикулярна, какъ это доказано выше, къ хордѣ $\alpha\gamma$ описаннаго около четырехугольника $B\alpha O\gamma$ круга, проходитъ черезъ средину этой хорды. Итакъ, прямая IH перпендикулярна къ сторонѣ $\alpha\gamma$ треугольника $\alpha\gamma M$ въ ея срединѣ; слѣдовательно, центръ E круга, описаннаго около этого треугольника, лежитъ на прямой IH, т. е. точки I, H и E лежатъ на одной прямой.

Л. Богдановичъ (Ярославль); *И. Лурье* (Смоленскъ); *В. Моргулевъ* (Одесса).

№ 414 (5 сер.). *Найти положительныя значенія* x *и* y, *удовлетворяющія уравненію*

$$x^3 + y^3 + 1 = 3xy.$$

Преобразуемъ данное уравненіе слѣдующимъ образомъ:

$$x^3+y^3+1-3xy=(x+y)(x^2-xy+y^2)-3xy+1=(x+y+1)(x^2-xy+y^2)-$$

$$-(x^2-xy+y^2)-3xy+1=(x+y+1)(x^2-xy+y^2)-(x^2+2xy+y^2)+1=$$

$$=(x+y+1)(x^2-xy+y^2)-[(x+y)^2-1]=(x+y+1)[x^2-xy+y^2-(x+y-1)]-$$

$$=(x+y+1)[y^2-(x+1)y+x^2-x+1]=$$

$$=(x+y+1)\left[\left(y-\frac{x+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(x-1\right)^2\right]=0.$$

Такимъ образомъ данное уравненіе распадается на два

$$x+y+1=0. \tag{1}$$

$$\left(y-\frac{x+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(x-1)^2=0. \tag{2}$$

Первое изъ этихъ уравненій не удовлетворяется ни при какихъ положительныхъ значеніяхъ x и y, а второе можетъ удовлетворяться лишь тогда дѣйствительными значеніями x и y, если

$$y-\frac{x+1}{2}=0, \quad x-1=0,$$

т. е. при $x=1$, $y=1$. Итакъ, $x=y=1$ суть единственныя положительныя значенія x и y, удовлетворяющія данному уравненію. Съ точки зрѣнія аналитической геометріи уравненіе (1) представляетъ прямую, отсѣкающую на каждой изъ осей отъ начала координатъ отрѣзки, равные (—1). Уравненіе же (2), будучи разрѣшено относительно y, распадается на уравненія мнимыхъ прямыхъ

$$y-\frac{x+1}{2}-i\frac{(x-1)\sqrt{3}}{2}=0,\quad y-\frac{x+1}{2}+i\frac{(x-1)\sqrt{3}}{2}\qquad (i=\sqrt{-1}),$$

проходящихъ черезъ единственную общую дѣйствительную точку

$$x=1,\quad y=1.$$

А. Фрумкинъ (Одесса).

№ 439 (5 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$x^4-(a^4-2a^2-4)x^2+(2a^3+a^2-2a-1)x-(a^2+a-6)=0.$$

Представивъ уравненіе послѣдовательно въ видѣ:

$$x^4-[(a^2-1)^2-(a+3)+(a-2)]x^2+(a^2-1)x^3-(a^2-2)x^3+$$
$$+x[(a^2-1)(a+3)+(a^2-1)(a-2)]-(a-2)(a+3)=$$
$$=[x^4+(a^2-1)x^3-(a-2)x^2]-[(a^2-1)x^3+(a^2-1)^2x^2-(a^2-1)(a-2)x]+$$
$$+[(a+3)x^2+(a+3)(a^2-1)x-(a+3)(a-2)]=$$
$$=[x^2+(a^2-1)x-(a-2)]x^2-[x^2+(a^2-1)x-(a-2)](a^2-1)x+$$
$$+[x^2+(a^2-1)x-(a-2)](a+3)=$$
$$=[x^2+(a^2-1)x-(a-2)][x^2-(a^2-1)x+(a+3)]=0,$$

мы видимъ, что оно разлагается на два квадратныхъ уравненія

$$x^2+(a^2-1)x-(a-2)=0,\quad x^2-(a^2-1)x+(a+3)=0.$$

Рѣшая эти уравненія, находимъ четыре корня даннаго уравненія

$$x_{1,2}=\frac{1-a^2\pm\sqrt{a^4-2a^2+4a-7}}{2},\quad x_{3,4}=\frac{a^2-1\pm\sqrt{a^4-2a^2-4a+11}}{2}.$$

М. Рыбкинъ (Ейскъ).

№ 444 (5 сер.) *Доказать справедливость тожества*

$$\frac{a^2}{r_b+r_c}+\frac{b^2}{r_c+r_a}+\frac{c^2}{r_a+r_b}=2(2R-r),$$

гдѣ a, b, c, R, r, r_a, r_b, r_c *суть соотвѣтственно стороны и радіусы описаннаго, вписаннаго и внѣвписанныхъ круговъ нѣкотораго треугольника.*

Называя черезъ s площадь треугольника, имѣемъ:

$$r_b+r_c=\frac{s}{p-b}+\frac{s}{p-c}=\frac{s(2p-b-c)}{(p-b)(p-c)}=\frac{sa}{(p-b)(p-c)},$$

откуда

$$\frac{a^2}{r_b+r_c}=\frac{a(p-b)(p-c)}{s}. \tag{1}$$

Подобнымъ же образомъ получимъ:

$$\frac{b^2}{r_c + r_a} = \frac{b(p-c)(p-a)}{s}, \tag{2}$$

$$\frac{c^2}{r_a + r_b} = \frac{c(p-a)(p-b)}{s}, \tag{3}$$

Съ другой стороны

$$2r = \frac{2s}{p} = \frac{2s^2}{ps} = \frac{2p(p-a)(p-a)(p-c)}{ps} = \frac{(b+c-a)(p-b)(p-c)}{s},$$

$$\therefore r = \frac{b(p-b)(p-c) + c(p-b)(p-c)}{s} - \frac{a(p-b)(p-c)}{s}. \tag{4}$$

Сложивъ равенства (1), (2), (3), (4), находимъ:

$$\frac{a^2}{r_b + r_c} + \frac{b^2}{r_c + r_a} + \frac{c^2}{r_a + r_b} + 2r = \frac{b(p-c)(2p-a-b) + c(p-b)(2p-a-c)}{s} =$$

$$= \frac{b(p-c)c + c(p-b)b}{s} = \frac{bc(2p-b-c)}{s} = \frac{abc}{s} = 4 \cdot \frac{abc}{4s} = 4R,$$

откуда

$$\frac{a^2}{r_b + r_c} + \frac{b^2}{r_c + r_a} + \frac{c^2}{r_a + r_b} = 4R - 2r = 2(2R - r).$$

Л. Маргулисъ (Петербургъ); *И. Лурье* (Смоленскъ); *М. Добровольскій* (Сердобскъ); *П. Тикуновъ* (Козловъ).

№ 451 (5 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2 = 0.$$

Представивъ данное уравненіе послѣдовательно въ видѣ:

$$(x^4 + 2x^2) + (x^3 + 2x) + (x^2 + 2) = x^2(x^2 + 2) + x(x^2 + 2) + (x^2 + 2) =$$

$$= (x^2 + 2)(x^2 + x + 1) = 0,$$

разлагаемъ его на два уравненія:

$$x^2 + 2 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + x + 1 = 0.$$

Рѣшая ихъ, находимъ четыре корня даннаго уравненія:

$$x_{1,2} = \pm i\sqrt{2}, \quad x_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Л. Маргулисъ (Петербургъ); *А. Кисловъ* (Москва); *М. Черняевъ* (Москва); *Н. Уварова* (Верхотурскъ); *С. Слугиновъ* (Казань); *М. Добровольскій* (Сердобскъ); *А. Лукошинъ* (Астрахань); *И. Рутковскій* (Одесса); *С. Розенблатъ* (Армавиръ); *П. Тикуновъ* (Козловъ); *Е. Доманицкій* (Каменецъ-Подольскъ); *Р. Витвинскій* (Варшава); *В. Моргулевъ* (Одесса); *Г. Варкентинъ* (Одесса).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Обложка
пщется

Обложка
ищется