Обложка
ищется

Обложка
ищется

XLIX Сем. № 1.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 577.

Содержаніе: Э. К. Шпачинскій (Некрологъ). – О связи между ариѳметическимъ и алгебраическимъ дѣленіемъ. *Прив.-доц. С. О. Шатуновскаго.* Международная конференція времени. *Проф. Б. Ванаха.* – Молекулярный воздушный насосъ. *М. Я.* — Научная хроника: Радіоактивность натрія. — Библіографія: I. Рецензіи. „Сборникъ задачъ по высшей математикѣ". *Проф. Д. Синцова.* II. Собственныя сообщенія авторовъ, переводчиковъ и редакторовъ о выпущенныхъ книгахъ. *К. Лебединцевъ.* „Концентрическое руководство алгебры для среднихъ учебныхъ заведеній". — Задачи №№ 74—77 (6 сер.). — Рѣшенія задачъ: №№ 3, 43 и 48 (6 сер.). — Объявленія.

Э. К. Шпачинскій

1848—1912.

6-го ноября истекшаго года, какъ уже было сообщено, скончался основатель журнала „Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики" Эразмъ Корнеліевичъ Шпачинскій. Это былъ во многихъ отношеніяхъ выдающійся человѣкъ, который по своимъ дарованіямъ могъ бы занять среди научныхъ работниковъ неизмѣримо болѣе высокое мѣсто, чѣмъ то, которое ему выпало въ удѣлъ. Но трудныя условія жизни, отсутствіе поддержки, въ значительной мѣрѣ національныя причины создали на его пути преграды, преодолѣть которыя было выше его силъ. И вся его жизнь представляла собою одну сплошную борьбу за то, чтобы не утонуть въ потокѣ сѣрой повседневной работы и не утерять живой связи съ наукой, которой искренно была предана его душа.

Мы приложили немало стараній къ тому, чтобы получить болѣе обстоятельныя свѣдѣнія объ его молодости, но намъ это мало удалось.

Э. К. Шпачинскій родился въ Каменецъ-Подольскѣ въ 1848 г.; тамъ же онъ окончилъ классическую гимназію и въ 1868 году поступилъ на физико-математическій факультетъ въ Кіевѣ. Въ 1873 году онъ окончилъ университетъ со степенью кандидата и первое время оставался въ Кіевѣ, чтобы подготовляться къ научной дѣятельности по физикѣ. Однако, получить профессорскую стипендію ему не удалось, и вслѣдствіе крайней нужды онъ вынужденъ былъ покинуть Кіевъ и занять мѣсто учителя гимназіи въ Лубнахъ. Однако, работа въ гимназіи налаживалась плохо. Въ чемъ заключались причины его неудачъ, намъ не удалось выяснить. Повидимому, ему было трудно примириться съ условіями глухой провинціальной жизни, его тянуло въ университетскій городъ. Вѣрно то, что въ слѣдующемъ уже году онъ былъ переведенъ въ реальное училище въ Кременчугъ, а въ 1880 году вышелъ въ отставку и возвратился въ Кіевъ. Послѣдовавшія за этимъ годы были, повидимому, наиболѣе трудными въ жизни Эразма Корнеліевича: отсутствіе постоянныхъ средствъ, при необходимости содержать уже семью, невозможность правильно и систематически научно работать и связанное съ этимъ сознаніе, что мечта о научной карьерѣ является при этихъ условіяхъ утопіей, непосильная борьба за эту утопію среди крайней нужды — таковъ общій колоритъ его жизни во время вторичнаго его пребыванія въ Кіевѣ. Во всякомъ случаѣ Эразмъ Корнеліевичъ въ эту пору много занимался и въ университетскихъ кругахъ сумѣлъ снискать симпатію и уваженіе.

Въ 1884 году профессоръ В. П. Ермаковъ началъ издавать въ Кіевѣ „Журналъ Элементарной Математики". Никакого подобнаго органа въ ту пору въ Россіи не было, и молодой журналъ, руководимый выдающимся ученымъ и талантливымъ профессоромъ, былъ встрѣченъ съ большимъ сочувствіемъ; но кругъ людей, которымъ близки интересы чистой математики, крайне ограниченъ. Матеріально дѣла журнала были, конечно, не блестящи, а отъ редактора они требовали интенсивной, а зачастую и черной работы. Естественно, что эта работа очень скоро утомила В. П. Ермакова, и черезъ два года онъ убѣдился, что выносить на своихъ плечахъ всю эту работу для него невозможно. Не отказываясь играть руководящую роль въ подборѣ математическаго матеріала, В. П. находилъ необходимымъ сдать всю остальную работу въ болѣе свободныя, но вмѣстѣ съ тѣмъ, конечно, компетентныя руки. При этомъ было рѣшено нѣсколько расширить программу журнала и, удвоивъ его объемъ, удѣлить значительное мѣсто физикѣ и смежнымъ отраслямъ. Казалось, что расширенное такимъ образомъ изданіе найдетъ болѣе широкій кругъ читателей и, быть можетъ, будетъ даже въ состояніи окупить трудъ редактора-издателя. Эразмъ Корнеліевичъ Шпачинскій, съ одной стороны, находившійся не у дѣлъ, а, съ другой стороны, достаточно образованный для руководства этимъ дѣломъ человѣкъ, достаточно преданный интересамъ науки, чтобы такому дѣлу служить, казался вполнѣ подходящимъ лицомъ для руководства новымъ изданіемъ. В. П. Ермаковъ вручилъ ему свое дѣтище. 21-го августа 1886 года вышелъ въ свѣтъ первый номеръ новаго журнала „Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики".

Этому новому дѣлу Эразмъ Корнеліевичъ отдался со свойственнымъ ему пыломъ и энтузіазмомъ. Подборъ матеріала, составленіе статей и рефератовъ, корректура, печатаніе, канцелярская работа, все лежало на одномъ человѣкѣ, и когда перелистываешь эти старые номера, то съ удивленіемъ и уваженіемъ видишь, какой огромный трудъ онъ несъ. Изданіе журнала создало Э. К. Шпачинскому имя; оно сблизило его съ научными кругами и, во всякомъ случаѣ, давало ему возможность, хотя бы до нѣкоторой степени, осуществить свою мечту не порывать съ наукой, постоянно слѣдить за ея развитіемъ, если и не участвовать самому въ прямой научной работѣ. Не безъ того, журналъ и матеріально давалъ нѣкоторыя крохи, но для Шпачинскаго выяснилось очень скоро, что оплатить трудъ они не могутъ, что существовать на эти крохи невозможно. Нужно было примириться съ тѣмъ, что „Вѣстникъ" не можетъ составить главной опоры въ жизни, и нужно было искать иныхъ средствъ къ существованію.

Въ 1891 году Э. К. Шпачинскій получилъ мѣсто столоначальника въ канцеляріи попечителя Одесскаго учебнаго округа и перенесъ въ Одессу изданіе своего журнала.

Съ переѣздомъ въ Одессу начались новыя условія жизни и дѣятельности: утромъ канцелярія, вечеромъ журналъ — таково краткое, но, по существу, исчерпывающее содержаніе этой жизни и этой дѣятельности. Той матеріальной нужды, которая угнетала Эразма Корнеліевича и его семью въ Кіевѣ, теперь уже не было, но зато начались новыя тяжелыя переживанія, и трудно сказать, когда они были тяжелѣе. Прежде всего Эразма Корнеліевича подавляла канцелярская работа; мы не имѣемъ болѣе или менѣе яснаго представленія о томъ, при какихъ условіяхъ состоялось его вступленіе въ канцелярію попечителя. Но кто зналъ Э. К. Шпачинскаго, тотъ можетъ съ увѣренностью сказать, что большій контрастъ между душевнымъ обликомъ человѣка и его дѣятельностью, между стремленіемъ и необходимостью трудно себѣ представить. Всюду и вездѣ Э. К. Шпачинскій являлся точнымъ исполнителемъ своихъ обязанностей, и на службѣ, насколько намъ извѣстно, Эразмъ Корнеліевичъ недовольства не вызывалъ, онъ былъ аккуратнымъ и добросовѣстнымъ чиновникомъ—сначала столоначальникомъ, потомъ бухгалтеромъ; но только людямъ, близкимъ къ Эразму Корнеліевичу, было извѣстно, какой цѣной покупалась эта аккуратность, эта добросовѣстность. Мы скажемъ кратко — это было систематическое, непрерывное подавленіе души и личности, и на это уходило утро. Затѣмъ наступалъ вечеръ. Э. К. проводилъ его въ своемъ кабинетѣ, казалось бы, за любимой работой, въ которой можно было бы черпать удовлетвореніе и силы для тяжелой обязательной работы. Однако, это было далеко не такъ. Ученый, основная дѣятельность котораго посвящена наукѣ, можетъ пріобрѣтать свѣдѣнія, необходимыя для руководства журналомъ, между дѣломъ, или, вѣрнѣе, онъ ихъ пріобрѣтаетъ постоянно въ теченіе хода своей научной работы. У Эразма Корнеліевича большая часть дня была отдана дѣлу, нисколько съ наукой не связанному; такимъ образомъ, вечеромъ надо было пріобрѣтать всѣ необходимыя познанія, слѣдить за литературой и руководить журналомъ. Выполнить это, конечно, было бы не лишено возможности, въ особенности при дарованіяхъ и выдержанности Эразма Корнеліевича; но журналъ окупался плохо, сложить черную работу было не на кого, и редакція опять-таки превращалась въ канцелярію. Эта трагедія еще усложнялась тяжкой болѣзнью жены и связанной съ этимъ необходимостью усилить средства къ существованію и тѣмъ сократить досугъ. Неудивительно, что на „Вѣстникъ" въ семьѣ смотрѣли, какъ на злой рокъ, и что Эразму Корнеліевичу приходилось и тутъ бороться за свое дѣтище. Освободиться отъ двухъ канцелярій — такова была новая задача жизни. Въ 1895 г. Эразму Корнеліевичу удалось освободиться отъ утренней канцеляріи — онъ былъ назначенъ преподавателемъ математики въ Одесскомъ Реальномъ Училищѣ. За преподаваніе Эразмъ Корнеліевичъ взялся со всею свойственной ему горячностью — это было единственное дѣло, въ которомъ онъ не разочаровался до послѣднихъ дней жизни. Здѣсь въ Одессѣ намъ приходилось слышать отзывы учениковъ Эразма Корнеліевича въ пору, когда онъ только начиналъ свою преподавательскую дѣятельность. Сейчасъ по поводу его кончины въ редакцію поступили письма его учениковъ, и эти послѣдніе отзывы дышатъ такою же восторженностью, какъ и первые. Кто не знаетъ, что между школой и учащимися у насъ лежитъ достаточно глубокая пропасть, и преувеличивать заслуги учителя ученики не склонны; нужно много имъ дать, чтобы вызвать такіе восторженные отзывы и теплыя воспоминанія, какія мы получили. Приведемъ выдержку изъ одного изъ нихъ (М. Пистрака изъ Варшавы).

«Какъ преподаватель, Эразмъ Корнеліевичъ былъ очень требователенъ и строгъ, но, несмотря на это, мы всѣ его очень любили и уважали именно какъ преподавателя. Онъ сумѣлъ въ большинствѣ изъ насъ возбудить любознательностъ, наблюдательность и любовь къ точнымъ наукамъ. Его ясное простое и понятное изложеніе физики осталось у насъ всѣхъ въ памяти, и еще долго спустя, когда многіе изъ насъ попали въ университеты и посвятили себя изученію физики и математики, мы часто вспоминали его уроки физики, такъ какъ многое изъ того, что мы слышали въ университетѣ, намъ уже было знакомо изъ училища. Кинетическая теорія газовъ и примѣненіе ея къ объясненію законовъ Маріотта-Гэ-Люссака, волнообразная теорія свѣта, механическая теорія теплоты и т. д. — со всѣмъ этимъ покойный насъ знакомилъ на своихъ урокахъ и притомъ въ такой формѣ, что подъ его вліяніемъ многіе изъ насъ настолько заинтересовывались, что посвящали часы досуга физикѣ. Подъ руководствомъ покойнаго мы въ каникулярное — особенно рождественское — время производили измѣренія и приготовляли самодѣльные приборы по физикѣ. Покойный, помимо этого, съ другими преподавателями вводилъ для младшихъ классовъ „чтенія" по вопросамъ естествознанія съ множествомъ опытовъ и туманными картинами, и несмотря на то, что чтенія были необязательны, рѣдко кто не приходилъ послушать. Послѣ 1905 г. покойный преподавалъ на польскомъ уже языкѣ и математику, причемъ вводилъ начала аналитической геометріи, графики, понятіе о функціи, начала дифференціальнаго исчисленія и т. д. Многіе изъ учениковъ покойнаго подъ его вліяніемъ посвятили себя изученію физики и математики. Одинъ изъ нихъ состоитъ конструкторомъ въ „École de l'aviation" въ Парижѣ, другой оставленъ въ Сорбоннѣ при кафедрѣ математики, третій состоитъ приватъ-доцентомъ въ одномъ изъ германскихъ университетовъ и т. д.».

Возвратимся, однако, къ дѣятельности Эразма Корнеліевича въ Одессѣ.

Чтобы освободиться и отъ второй канцеляріи, Эразмъ Корнеліевичъ подыскалъ себѣ помощника, которому передалъ менѣе отвѣтственную работу. Многое зависѣло здѣсь, конечно, отъ выбора лица, и въ этомъ отношеніи Эразму Корнеліевичу повезло: въ лицѣ В. А. Гернета онъ пріобрѣлъ человѣка, который не только снялъ съ него черную канцелярскую работу, но который былъ въ состояніи оказывать ему дѣятельную поддержку въ самомъ руководствѣ изданіемъ. Изъ дѣлопроизводителя конторы редакціи, подъ руководствомъ Эразма Корнеліевича, В. А. Гернетъ черезъ нѣсколько лѣтъ сдѣлался настоящимъ помощникомъ редактора, которому Эразмъ Корнеліевичъ мало-по-малу передалъ все веденіе дѣла. Этотъ переходъ совершался медленно,—можно сказать, годами, и когда онъ совершился до конца, Эразмъ Корнеліевичъ не счелъ себя вправѣ сохранять свое имя на обложкѣ журнала. Въ 1898 году Э. К. Шпачинскій передалъ право на изданіе „Вѣстника Опытной Физики“ В. А. Гернету. Приводимъ его прощальныя слова, обращенныя къ читателямъ*):

«Прощаясь съ моими благосклонными сотрудниками и читателями, не могу отказать себѣ въ удовольствіи выразить здѣсь первымъ мою почтительную признательность за безвозмездное поддерживаніе „Вѣстника“ на уровнѣ серьезнаго учебнаго журнала присылкою своихъ статей и задачъ и мою сердечную благодарность вторымъ, большинство которыхъ умѣло войти въ положеніе редактора-издателя журнала, не окупающагося подпиской, и не требовало отъ меня болѣе того, что я могъ давать. И тѣхъ и другихъ я еще разъ прошу принять увѣреніе, что, печатая различныя рецензіи и статьи полемическаго характера, я никогда не поддавался вліянію личныхъ симпатій или антипатій или какихъ бы то ни было расчетовъ и стремился лишь къ установленію безпристрастной оцѣнки затронутыхъ вопросовъ, предоставляя спорящимъ сторонамъ одинаковое право высказываться. Прошу также какъ бывшихъ сотрудниковъ моихъ, такъ и читателей простить мнѣ невольную неаккуратность въ корреспонденціи и выпускѣ номеровъ журнала, которые неоднократно запаздывали, но пусть будетъ принято ими во вниманіе, что большую часть времени со дня открытія журнала я велъ всѣ его дѣла рѣшительно одинъ, что такъ называемая „редакція“ состояла только изъ меня лично и приглашаемаго на нѣсколько мѣсяцевъ въ году помощника—студента, которому поручалось разсматриваніе многочисленныхъ рѣшеній задачъ, присылаемыхъ учениками, что такъ называемая „контора редакціи“ состояла только изъ меня и моей жены, что мнѣ самому приходилось быть и составителемъ статей, и корректоромъ, и переписываться съ авторами, и разсылать конторскіе счета, и изготовлять чертежи, и бѣгать чуть не ежедневно то въ типографію, то на почту и пр. и, помимо всего этого, жить—пока я былъ въ Кіевѣ—частными уроками, а съ переѣздомъ въ Одессу—поступить на государственную службу.

---

*) „Вѣстникъ“, № 260.

Мнѣ кажется, что послѣ десяти съ лишнимъ лѣтъ такого труда позволительно опомниться, и, посчитавшись съ надорванными силами, сказать тѣмъ, кто дѣлалъ честь моему „Вѣстнику“, признавая его органомъ печати не безполезнымъ для Россiи: «Простите, господа, я усталъ».

Послѣ передачи „Вѣстника“ Э. К. Шпачинскiй недолго оставался въ Одессѣ. Въ 1900 году онъ перешелъ на службу въ Лодзинское Коммерческое училище, гдѣ и оставался до послѣднихъ своихъ дней. Съ редакцiей онъ сообщался рѣдко, но послѣ его кончины мы получили рядъ писемъ отъ его товарищей и учениковъ, свидѣтельствующихъ, что и на мѣстѣ новаго своего служенiя Эразмъ Корнелiевичъ снискалъ всеобщее уваженiе своею преданностью дѣлу, которому онъ служилъ.

Хотя въ послѣднiе годы Эразмъ Корнелiевичъ значительно ослабѣлъ, но скончался онъ совершенно неожиданно для своихъ близкихъ отъ воспаленiя легкихъ.

Миръ праху основателя и перваго руководителя „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики“!

О связи между ариѳметическимъ и алгебраическимъ дѣленіемъ.

Прив.-доц. С. О. Шатуновскаго.

Положимъ, что мы имѣемъ двѣ цѣлыя алгебраическія функціи съ цѣлыми коэффиціентами

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \cdots + a_{m-1} x + a_m, \\ g(x) &= b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \cdots + b_{n-1} x + b_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Мы будемъ предполагать, что во второй изъ этихъ функцій коэффиціенты не имѣютъ общаго множителя (т. е. нѣтъ цѣлаго числа, на который дѣлились бы всѣ коэффиціенты). Такія функціи нѣкоторые авторы, слѣдуя Гауссу, называютъ первообразными*). Можно, слѣдовательно, сказать, что намъ даны двѣ цѣлыя функціи съ цѣлыми коэффиціентами, изъ которыхъ вторая первообразная. По извѣстной теоремѣ Гаусса, если при этихъ условіяхъ функція $f(x)$ дѣлится нацѣло на функцію $g(x)$, то частное имѣетъ цѣлые коэффиціенты*), такъ что

$$f(x) = g(x) \cdot h(x), \tag{2}$$

гдѣ $h(x)$ есть цѣлая функція съ цѣлыми же коэффиціентами. Если мы дадимъ x цѣлое значеніе ξ, то

$$f(\xi) = g(\xi) \cdot h(\xi). \tag{3}$$

Такъ какъ $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ суть функціи съ цѣлыми коэффиціентами, то $f(\xi)$, $g(\xi)$ и $h(\xi)$ суть цѣлыя числа; вмѣстѣ съ тѣмъ при $g(\xi)$, отличномъ отъ нуля, $h(\xi)$ есть частное отъ ариѳметическаго дѣленія числа $f(\xi)$ на число $g(\xi)$. Мы получаемъ, такимъ образомъ, очень простую и ясную теорему:

Если цѣлая функція съ цѣлыми коэффиціентами дѣлится алгебраически нацѣло на первообразную цѣлую функцію, то при всякомъ цѣломъ значеніи аргумента x, не обращающемъ дѣлителя въ нуль, численное значеніе первой функціи дѣлится нацѣло на численное значеніе второй функціи.

Цѣль настоящей замѣтки — рѣшить вопросъ объ обращеніи настоящей теоремы. Вопросъ этотъ мы поставимъ слѣдующимъ образомъ.

Даны двѣ цѣлыя функціи $f(x)$ и $g(x)$ съ цѣлыми коэффиціентами. При нѣкоторыхъ численныхъ значеніяхъ ξ перемѣнной x число

*) См., напримѣръ, Веберъ и Вельштейнъ — „Энциклопедія элементарной математики“, т. I, § 68 (2-е изд.).

$f(\xi)$ дѣлится нацѣло на число $g(\xi)$. Спрашивается, можно ли отсюда сдѣлать заключенiе о томъ, что функцiя $f(x)$ алгебраически дѣлится на функцiю $g(x)$. Отвѣтъ получается весьма любопытный: при соблюденiи надлежащихъ условiй достаточно испытать лишь одно цѣлое число ξ; т. е., если при одномъ только надлежащимъ образомъ выбранномъ цѣломъ значенiи $x=\xi$ число $f(\xi)$ дѣлится нацѣло на $g(\xi)$, то этого уже достаточно, чтобы и алгебраическое дѣленiе функцiи $f(x)$ на функцiю $g(x)$ выполнялось нацѣло. Что касается упомянутыхъ условiй, то они заключаются не въ тѣхъ или иныхъ спецiальныхъ свойствахъ взятыхъ функцiй $f(x)$ и $g(x)$, а исключительно въ томъ, чтобы число ξ было достаточно велико; точнѣе этотъ результатъ выражается слѣдующей теоремой, доказательство которой и составитъ предметъ настоящей статьи.

Теорема. Если двѣ функцiи (1) имѣютъ цѣлые коэффицiенты, то всегда можно указать положительное число L, обладающее слѣдующимъ свойствомъ: коль скоро существуетъ хотя бы одно цѣлое число ξ, превышающее L, при которомъ $f(\xi)$ дѣлится нацѣло на $g(\xi)$, то функцiя $f(x)$ дѣлится алгебраически нацѣло на $g(x)$.

Для доказательства этой теоремы намъ необходимы нѣкоторыя простыя вспомогательныя предложенiя. Первое изъ этихъ предложенiй есть общеизвѣстная теорема высшей алгебры, доказательство которой мы, однако, здѣсь воспроизведемъ, чтобы сохранить полную элементарность изложенiя.

Лемма I. Если

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

есть цѣлая функцiя съ вещественными коэффицiентами, изъ которыхъ a_0 имѣетъ положительное значенiе, а остальные по абсолютной величинѣ не превышаютъ положительнаго числа a, то при всякомъ значенiи аргумента x, превышающемъ $1+\dfrac{a}{a_0}$, функцiя имѣетъ положительное значенiе.

Доказательство. Пусть ξ будетъ число, превышающее $1+\dfrac{a}{a_0}$; тогда

$$\xi>1+\frac{a}{a_0},\quad \xi-1>\frac{a}{a_0},\quad \frac{a}{\xi-1}<a_0. \tag{4}$$

Переходъ отъ второго неравенства къ третьему совершается путемъ умноженiя на $\dfrac{a_0}{\xi-1}$, а это можно сдѣлать благодаря тому, что a_0 и $\xi-1$ суть положительныя числа. Съ другой стороны, такъ какъ абсолютныя величины всѣхъ коэффицiентовъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не превышаютъ a, то

$$\left|a_1\xi^{n-1}+a_2\xi^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\xi+a_n\right|\leqslant a\left(\xi^{n-1}+\xi^{n-2}+\cdots+\xi\right)$$

$$\leqslant\frac{a(\xi^n-\xi)}{\xi-1}<\frac{a\xi^n}{\xi-1}.$$

Принимая же во вниманіе неравенство (4), мы отсюда получаемъ:

$$\left| a_1 \xi^{n-1} + a_2 \xi^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \xi + a_n \right| < a_0 \xi^n .$$

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что число $f(\xi)$ можетъ быть представлено въ видѣ суммы двухъ слагаемыхъ:

$$f(\xi) = a_0 \xi^n + \left(a_1 \xi^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \xi + a_n \right),$$

изъ которыхъ первое имѣетъ положительное значеніе, а второе имѣетъ меньшую абсолютную величину, нежели первое. Слѣдовательно, сумма имѣетъ положительное значеніе.

Лемма II. Пусть $g(x)$ и $r(x)$ будутъ цѣлыя функціи съ вещественными коэффиціентами:

$$g(x) = b_0 x^k + b_1 x^{k-1} + \cdots + b_{k-1} x + b_k ,$$

$$r(x) = c_0 x^l + c_1 x^{l-1} + \cdots + c_{l-1} x + c_l ,$$

въ которыхъ: 1) старшіе коэффиціенты суть цѣлыя положительныя числа, 2) всѣ коэффиціенты b_i по абсолютной величинѣ не превышаютъ положительнаго числа b, а всѣ коэффиціенты c_i не превышаютъ положительнаго числа c, 3) степень второй функціи ниже степени первой, т. е. $l < k$.

Въ такомъ случаѣ при всякомъ значеніи аргумента x, превышающемъ $1 + b + c$, алгебраическая дробь $\dfrac{r(x)}{g(x)}$ обращается въ положительную правильную ариѳметическую дробь.

Доказательство. Пусть будетъ

$$\xi > 1 + b + c. \tag{5}$$

Такъ какъ $1 + b + c > 1 + b$, а $1 + b \geqslant 1 + \dfrac{b}{b_0}$ (ибо b_0 есть цѣлое положительное число), то $\xi > 1 + \dfrac{b}{b_0}$; въ силу предыдущей леммы отсюда слѣдуетъ, что $g(\xi) > 0$. Такимъ же образомъ докажемъ, что при наличности соотношенія (5) и $r(\xi) > 0$.

Разсмотримъ теперь полиномъ $g(x) - r(x)$. Такъ какъ степени второго полинома ниже степени перваго, то старшимъ членомъ разности $g(x) - r(x)$ служитъ $b_0 x^k$, остальные же коэффиціенты этой разности по абсолютной величинѣ, очевидно, не превышаютъ $b + c$, ибо коэффиціенты разности $g(x) - r(x)$ имѣютъ видъ $b_i - c_j$. Съ другой стороны, такъ какъ

$$1 + b + c \geqslant 1 + \frac{b + c}{b_0}, \text{ то } \xi > 1 + \frac{b + c}{b_0},$$

а потому, въ силу предыдущей леммы, $g(\xi)-r(\xi)>0$. Такъ какъ при этомъ $g(\xi)>0$ и $r(\xi)>0$, то отсюда слѣдуетъ, что

$$1>\frac{r(\xi)}{g(\xi)}>0.$$

Лемма III. Если цѣлыя функціи

$$f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m$$

и

$$g(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n,$$

гдѣ $m\geqslant n$, имѣютъ вещественные коэффиціенты, которые по абсолютной величинѣ не превышаютъ въ первомъ полиномѣ положительнаго числа a, а во второмъ полиномѣ положительнаго числа b, и если b_0 имѣетъ положительное значеніе, то коэффиціенты остатка, который получается при дѣленіи перваго полинома на второй, по абсолютной величинѣ не превышаютъ числа

$$a\left(1+\frac{b}{b_0}\right)^{m-n+1}.$$

Доказательство. Приступимъ къ дѣленію полинома $f(x)$ на $g(x)$. Старшій членъ частнаго будетъ $\frac{a_0}{b_0}x^{m-n}$. Когда мы произведемъ умноженіе дѣлителя на этотъ членъ частнаго и вычтемъ это произведеніе изъ дѣлимаго, то въ первомъ остаткѣ коэффиціентъ при x^{m-i} будетъ равенъ:

$$a_i-\frac{b_i a_0}{b_0},$$

гдѣ i получаетъ значенія $0, 1, 2, \ldots, n$; но при $i>n$ слѣдуетъ полагать $b_i=0$, ибо коэффиціенты при $x^{m-(n+1)}, x^{m-(n+2)}, \ldots, x^1, x^0$ равны $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_m$.

Такъ какъ

$$|a_i|\leqslant a,\quad |b_i|\leqslant b,\quad |b_0|=b_0,$$

то

$$\left|a_i-\frac{b_i a_0}{b_0}\right|\leqslant a+\frac{ba}{b_0},\quad \text{т. е.}\quad \left|a_i-\frac{b_i a_0}{b_0}\right|\leqslant a\left(1+\frac{b}{b_0}\right).$$

Иными словами, каждый коэффиціентъ перваго остатка по абсолютной величинѣ не превышаетъ предѣльнаго значенія a абсолютныхъ величинъ коэффиціентовъ дѣлимаго, умноженнаго на $1+\frac{b}{b_0}$. Но теперь мы можемъ разсматривать первый остатокъ, какъ новое дѣлимое, которое мы вновь должны дѣлить на того же дѣлителя. Слѣдовательно, каждый коэффиціентъ второго остатка по абсолютной величинѣ не превышаетъ $a\left(1+\frac{b}{b_0}\right)^2$, коэффиціентъ третьяго остатка по абсолютной величинѣ не превышаетъ $a\left(1+\frac{b}{b_0}\right)^3$ и т. д. Такъ какъ число дѣленій до полученія послѣдняго остатка не можетъ превысить $m-n+1$, то коэффиціентъ послѣдняго остатка не превыситъ по абсолютной величинѣ числа

$$a\left(1+\frac{b}{b_0}\right)^{m-n+1}.$$

Теперь обратимся къ доказательству формулированной выше основной теоремы.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ будутъ цѣлыя функціи (1) съ цѣлыми коэффиціентами, при чемъ степень второй не превышаетъ степени первой. Старшій коэффиціентъ b_0 второго полинома мы будемъ считать положительнымъ; относительно перваго полинома мы этого ограниченія не дѣлаемъ. Наибольшую изъ абсолютныхъ величинъ коэффиціентовъ перваго полинома обозначимъ черезъ a, наибольшую изъ абсолютныхъ величинъ коэффиціентовъ второго полинома обозначимъ черезъ b.

Если мы раздѣлимъ первый полиномъ на второй, то мы получимъ нѣкоторое частное и нѣкоторый остатокъ. Какъ коэффиціенты частнаго, такъ и коэффиціенты остатка могутъ оказаться дробными; но эти дроби будутъ получаться при повторномъ дѣленіи старшихъ коэффиціентовъ послѣдовательныхъ остатковъ на b_0; поэтому знаменателями этихъ дробей (если ихъ не сокращать) будутъ служить степени числа b_0. Такъ какъ дѣленій придется дѣлать не больше $m-n+1$, то знаменателями дробныхъ коэффиціентовъ будутъ служить дѣлители числа b_0^{m-n+1}. Если поэтому мы до дѣленія помножимъ дѣлимое на b_0^{m-n+1}, то коэффиціенты частнаго и остатка будутъ цѣлыми числами. Пусть $h(x)$ будетъ частное, $r(x)$ — остатокъ. Тогда

$$b_0^{m-n+1} f(x) = g(x)\,h(x) + r(x). \tag{6}$$

Допустимъ, что остатокъ $r(x)$ не сводится тождественно нулю. Въ такомъ случаѣ старшій коэффиціентъ остатка имѣетъ либо положительное либо отрицательное значеніе. Въ послѣднемъ случаѣ мы измѣнимъ всѣ знаки коэффиціентовъ перваго полинома на обратные, т. е. вмѣсто функціи $f(x)$ возьмемъ функцію $-f(x)$; вмѣстѣ съ тѣмъ измѣнятся на обратные знаки частнаго и остатка, и въ послѣднемъ старшій коэффиціентъ будетъ имѣть уже положительное значеніе.

Теперь въ дѣлимомъ абсолютная величина коэффиціента не превышаетъ числа ab_0^{m-n+1}. Слѣдовательно, по леммѣ III, въ остаткѣ абсолютная величина коэффиціентовъ не превышаетъ числа:

$$c = ab_0^{m-n+1}\left(1+\frac{b}{b_0}\right)^{m-n+1} = a\,(b_0+b)^{m-n+1}.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ функціи $g(x)$ и $r(x)$ удовлетворяютъ всѣмъ требованіямъ леммы II. Если поэтому абсолютныя значенія коэффиціентовъ полинома $r(x)$ не превышаютъ числа c, то при

$$\xi > 1 + b + c \tag{7}$$

$\frac{r(\xi)}{g(\xi)}$ есть правильная положительная дробь. Съ другой стороны, соотношеніе (6) даетъ:

$$b_0^{m-n+1} \frac{f(\xi)}{g(\xi)} = h(\xi) + \frac{r(\xi)}{g(\xi)}. \tag{8}$$

Если ξ есть цѣлое число, то и $h(\xi)$ есть цѣлое число; такимъ образомъ, правая часть равенства (8) состоитъ изъ цѣлаго числа и правильной положительной дроби; слѣдовательно, и лѣвая часть равенства также не представляетъ собою цѣлаго числа, и потому $f(\xi):g(\xi)$ не есть цѣлое число. Съ другой стороны, если подставить значеніе $a(b+b_0)^{m-n+1}$ числа c въ неравенство (7), то предыдущее разсужденіе приведетъ къ слѣдующему результату: если функція $f(x)$ алгебраически не дѣлится нацѣло на $g(x)$, то при всякомъ цѣломъ ξ, превышающемъ число $1+b+a(b+b_0)^{m-n+1}$, цѣлое число $f(\xi)$ не дѣлится на цѣлое число $g(\xi)$. Слѣдовательно, обратно, если хотя бы при одномъ цѣломъ ξ, превышающемъ число

$$L = 1 + b + a(b+b_0)^{m-n+1}, \tag{9}$$

$f(\xi)$ дѣлится нацѣло на $g(\xi)$, то функція $f(x)$ алгебраически дѣлится нацѣло на $g(x)$. Это и есть высказанная выше теорема, при чемъ за L можетъ быть принято число (9).

Доказательство теоремы предполагаетъ только, что коэффиціенты обоихъ полиномовъ (1) суть цѣлыя числа. Если мы теперь примемъ, что вторая функція представляетъ собою первообразный полиномъ, то получимъ теорему:

Для того, чтобы полиномъ $f(x)$ съ цѣлыми коэффиціентами дѣлился нацѣло на первообразный полиномъ $g(x)$, необходимо и достаточно, чтобы при одномъ, но совершенно наудачу выбранномъ значеніи ξ, превышающемъ число (9), число $f(\xi)$ дѣлилось нацѣло на число $g(\xi)$.

Доказательство. Это необходимо: если $f(x)$ дѣлится нацѣло на первообразную функцію $g(x)$, то $f(\xi)$ дѣлится нацѣло на $g(\xi)$ при всякомъ цѣломъ ξ. Это достаточно въ силу доказанной нами теоремы.

Международная конференція времени.

Проф. Б. Ванаха.

Изъ трехъ основныхъ единицъ для измѣренія массы, длины и времени первыя двѣ уже давно получили повсемѣстное распространеніе, а въ 1875 году были окончательно установлены. Вслѣдствіе важныхъ практическихъ соображеній всѣ отказались отъ прежнихъ стремленій создать такъ называемыя естественныя мѣры и объединились на принятіи прототиповъ (эталоновъ) метра и киллограмма, которые сохраняются въ Бюро мѣръ и вѣсовъ въ Breteuil близъ Парижа.

Въ качествѣ основной мѣры времени уже много вѣковъ служила естественная единица — сутки —, которая опредѣляется, какъ время одного оборота земли вокругъ своей оси, и нѣтъ никакой необходимости замѣнить эту единицу искусственною. Отказъ отъ опредѣленія метра, какъ одной десятимилліонной части четверти меридіана, имѣлъ очень важныя основанія: во-первыхъ, различные меридіаны имѣютъ различную длину, такъ какъ земля не есть точный эллипсоидъ вращенія, и, во-вторыхъ, сравненіе масштаба съ этою естественною мѣрою требуетъ необыкновенно продолжительныхъ и дорого стоящихъ градусныхъ измѣреній. Сравненіе же нашего практическаго прибора для измѣренія времени — часовъ — съ естественною единицею времени можно легко выполнить со всею необходимою точностью въ каждой обсерваторіи въ ясный звѣздный вечеръ. Но въ послѣднее время были замѣчены нѣкоторыя отклоненія, которыя, въ концѣ концовъ, сдѣлали желательнымъ международное соглашеніе.

Для читателей, не имѣющихъ спеціальнаго астрономическаго образованія, необходимо сдѣлать предварительныя замѣчанія относительно принциповъ опредѣленія времени на мѣстѣ.

Мы употребляемъ часы въ качествѣ, такъ сказать, обычнаго масштаба для времени и должны полагаться на нихъ при опредѣленіи продолжительности какого-нибудь явленія, какъ на миллиметровый масштабъ при измѣреніяхъ длины; только для немногихъ научныхъ цѣлей оказывается необходимымъ устанавливать точную поправку, т. е. опредѣлять въ одномъ случаѣ (при измѣреніяхъ длины) ошибки дѣленія масштаба и точное значеніе его длины сравненіемъ съ нормальнымъ масштабомъ, а въ другомъ случаѣ (при измѣреніяхъ времени) — ошибки въ показаніяхъ времени обычными часами сравненіемъ ихъ съ нормальными часами. Очень существеннымъ отличіемъ нормальнаго масштаба отъ нормальныхъ часовъ является то обстоятельство, что первый, вообще, только однажды провѣряется и впослѣдствіи не зависитъ отъ температурныхъ вліяній, а потому долженъ считаться неизмѣннымъ, между тѣмъ какъ нормальные часы необходимо постоянно провѣрять въ измѣряемомъ промежуткѣ времени, т. е. ихъ нужно сравнивать путемъ астрономическихъ наблюденій съ временемъ, опредѣляемымъ астрономически, такъ какъ періодъ качаянія маятника часовъ подъ вліяніемъ различныхъ внѣшнихъ причинъ претерпѣваетъ непрерывныя измѣненія, которыя только отчасти могутъ быть заранѣе вычислены, какъ, напримѣръ, вліяніе температуры, давленія воздуха и т. д. Въ то время какъ для масштаба нужно только одинъ разъ составить таблицу исправленій, для часовъ такія таблицы нужно составлять постоянно, какъ какъ каждое исправленіе имѣетъ значеніе только для одного момента времени. Кромѣ того, въ практической жизни часы гораздо рѣже употребляются для измѣренія интерваловъ времени, чѣмъ для опредѣленія абсолютнаго момента времени, и въ этомъ заключается существенная разница между пользованіемъ масштабами и часами; для насъ безразлично, въ какой точкѣ пространства лежитъ нулевая точка масштаба во время измѣренія, въ часахъ же насъ интересуетъ, въ большинствѣ случаевъ, именно положеніе нулевой точки (начальнаго момента) въ абсолютной скалѣ времени.

Подобно тому, какъ стремятся по возможности уменьшить ошибку въ положеніи нулевой точки термометра, чтобы при умѣренныхъ требованіяхъ точности можно было ее совсѣмъ не принимать во вниманіе, отъ часовъ, служащихъ для гражданскихъ цѣлей, требуется, чтобы отклоненіе ихъ показаній времени отъ истиннаго времени — поправка часовъ — всегда было возможно меньшимъ, и потому при обиходныхъ „нормальныхъ часахъ“ постояннымъ наблюденіемъ и регулировкой ихъ хода стремятся къ тому, чтобы поправка этихъ часовъ всегда оставалась въ предѣлахъ одной секунды или небольшой дробной части минуты, если часы не имѣютъ секундной стрѣлки.

Подобно тому, какъ при наиболѣе точныхъ измѣреніяхъ длины нужно считаться съ ошибками въ дѣленіи масштаба, при очень точныхъ измѣреніяхъ времени необходимо принять во вниманіе поправку часовъ, при чемъ въ принципѣ безразлично, какъ велика эта поправка, лишь бы она была дана съ требуемою точностью. Значительно болѣе важной, чѣмъ величина поправки (эта величина не имѣетъ большого значенія), является постоянное измѣненіе хода часовъ, т. е. ежедневное измѣненіе поправки часовъ.

Даже самые лучшіе часы, предоставленные самимъ себѣ послѣ того, какъ они однажды были правильно поставлены (когда поправка часовъ была равна 0), даютъ возрастающую съ временемъ поправку. Даже если тщательнѣйшей регулировкой удается на нѣкоторое время сдѣлать поправку равной нулю, то затѣмъ ходъ часовъ измѣняется вслѣдствіе измѣненій температуры и давленія, сотрясеній и т. п.; для точнѣйшихъ измѣреній и не стараются точно прорегулировать ходъ, а больше заботятся о томъ, чтобы измѣненіе хода оставалось по возможности постояннымъ, и на этомъ основаніи вычисляютъ затѣмъ поправку для времени, въ которое часы употребляются. Эта поправка вычисляется помощью астрономическаго опредѣленія времени и выведеннаго отсюда отклоненія. Для объясненія дадимъ примѣръ: предположимъ, что даны опредѣленія времени: поправка часовъ въ 9 часовъ вечера 5-го мая составляетъ $+19^s,38$; въ 11 часовъ вечера 9-го мая она равна $+18^s,75$;

промежутокъ равенъ 4 суткамъ 2 часамъ, т. е. 4,08 сутокъ; слѣдовательно, полагая, что суточное измѣненіе остается постояннымъ, получаютъ для послѣдняго значеніе $(18^s,75 - 19^s,38):4,08 = -0^s,154$. Затѣмъ вычисляютъ поправку часовъ, напримѣръ, для 9 часовъ утра 7-го мая, т. е. спустя 1 сутки 12 часовъ, или 1,5 сутокъ, послѣ перваго опредѣленія времени: $+19^s,38 - 0^s,154 . 1,5 = +19^s, 15$. Можно вычислить поправку и послѣ послѣдняго опредѣленія времени, — напримѣръ, для полудня 12-го мая: $+18^s,75 - 0^s,154. 2,54 = +18^s,36$.

Если часы не абсолютно уравниваются при измѣненіяхъ температуры и не герметически закрыты или не снабжены компенсаторомъ на измѣненіе давленія, то необходимо принять во вниманіе измѣненія, вызываемыя колебаніями температуры или давленія. Колебанія давленія имѣютъ особенно замѣтное вліяніе; измѣненіе хода часовъ въ теченіе сутокъ возрастаетъ на $0^s,013$ при повышеніи давленія на 1 *мм.*; это очень большая величина, если принять во вниманіе, что въ новыхъ лучшихъ часахъ съ секунднымъ маятникомъ „случайное“ измѣненіе хода за сутки, которое не можетъ быть заранѣе вычислено, остается, въ среднемъ, ниже $0^s,01$; итакъ, если среднее давленіе дня мѣняется отъ одного дня къ другому на 10 *мм.*, то измѣненіе хода часовъ будетъ въ 13 разъ больше предѣла неизбѣжной ошибки.

Конечно, такая высокая точность можетъ быть достигнута съ лучшими часами только тогда, когда они совершенно защищены отъ сотрясеній и отъ быстрой перемѣны температуры; даже лучшій уравнительный маятникъ становится негоднымъ при такихъ быстрыхъ колебаніяхъ температуры, что отдѣльныя части маятника, которыя могутъ только постепенно принимать температуру окружающаго пространства, временно замѣтно различно выравниваютъ ходъ маятника. Только наиболѣе богато оборудованныя обсерваторіи располагаютъ отдѣльными помѣщеніями для часовъ, но и то, даже если они снабжены нѣсколькими точными часами, контролирующими другъ друга, при продолжительной пасмурной погодѣ можетъ случиться, что, при опредѣленіи поправки въ ближайшій ясный вечеръ, послѣдняя отличается на полную секунду отъ вычисленной. Между показаніями времени различныхъ обсерваторій въ дѣйствительности бываетъ разница до нѣсколькихъ секундъ. Такая неточность можетъ быть уменьшена только тѣмъ, что какое-нибудь центральное учрежденіе собираетъ опредѣленія времени различныхъ, достаточно удаленныхъ другъ отъ друга обсерваторій и распредѣляетъ среднее время между заинтересованными лицами и учрежденіями. Въ случаѣ же, когда какая-нибудь обсерваторія находится продолжительное время подъ пасмурнымъ небомъ, такъ что ея показанія времени становятся неточными, можно разсчитывать на полученіе изъ другого мѣста съ благопріятной погодой точнаго опредѣленія времени.

Подобную организацію очень удобно осуществить при помощи безпроволочнаго телеграфа. Бывшій директоръ Берлинской обсерваторіи В. Фёрстеръ (W. Foerster) создалъ уже нѣсколько лѣтъ назадъ планъ, по которому Геодезическій Институтъ въ Потсдамѣ, одновременно являющійся и центральнымъ международнымъ бюро по геодезическимъ измѣреніямъ земли, долженъ былъ служить такимъ центральнымъ учрежденіемъ. Его, однако, опередила Палата мѣръ и вѣсовъ (Bureau des longitudes) въ Парижѣ, лѣтомъ 1912 г. склонившая французское правительство разослать приглашенія на международную конференцію, которая должна была выработать планъ международнаго опредѣленія времени. Эта конференція засѣдала въ Парижѣ съ 15-го по 23-ье октября. Въ ней приняли участіе Германія, Австрія, Бельгія, Испанія, Соединенные Штаты, Франція, Россія, Англія, Греція, Италія, Монако, Нидерланды, Португалія, Швеція и Швейцарія.

Съ 21-го марта 1910 г. главная станція искрового телеграфа въ Норддейхѣ, а съ 23-го мая того же года два раза въ день и Эйфелева башня даютъ помощью безпроволочнаго телеграфа сигналы для установленія времени,—главнымъ образомъ, въ интересахъ мореплаванія. Но этими сигналами пользуются и для другихъ цѣлей; такъ, напримѣръ, сейсмологическія обсерваторіи въ Германіи согласились относить свои наблюденія ко времени, получаемому изъ Норддейха помощью сигналовъ, такъ что теперь въ основаніи наблюденій лежатъ однообразныя показанія времени, между тѣмъ какъ раньше наблюденія основывались на показаніяхъ времени различныхъ обсерваторій; эти показанія въ неблагопріятныхъ случаяхъ разнились между собой на цѣлую секунду.

Постановленія Парижской конференціи имѣли форму предложеній, представленныхъ правительствамъ участвовавшихъ государствъ для окончательнаго рѣшенія. Послѣ этого предполагалось избрать комиссію, задачей которой было бы заботиться о томъ, чтобы показанія всѣхъ гражданскихъ часовъ всего свѣта опредѣлялись по общему основанію, и чтобы то общее время согласовалось въ предѣлахъ четверти секунды съ Гриничскимъ временемъ (или съ солнечнымъ временемъ, отличнымъ отъ Гриничскаго на цѣлое число часовъ).

Центральную техническую службу подъ руководствомъ этой комиссіи должно исполнять Международное Бюро времени въ Парижѣ, при чемъ каждому государству предоставляется поручить службу у себя центральному національному учрежденію.

Международныя сношенія относительно времени будутъ происходить приблизительно такъ.

По всей поверхности земли необходимо распредѣлить сѣть станцій отправленій большой области дѣйствія такъ, чтобы въ будущемъ не было точекъ на поверхности земли и, особенно, океана, въ которыхъ нельзя было бы получать помощью безпроволочнаго телеграфа сигналы для опредѣленія времени хотя бы отъ одной только станціи. Съ другой стороны, нужно избѣгать слишкомъ большого сгущенія станцій отправленія, такъ чтобы область дѣйствія каждой станціи по возможности не захватывала областей дѣйствія болѣе, чѣмъ двухъ другихъ станцій. Принимая это во вниманіе, Англія и Италія отказались отъ станцій сигнализаціи времени на родинѣ въ пользу Эйфелевой башни и Норддейха.

На Парижской конференціи уже выработаны сигналы для слѣдующихъ станцій:

Эйфелева башня (Парижъ)—въ Гриничѣ полночь: 0 часовъ
Санъ-Фернандо де Норона (Бразилія). . . . . 2 „

Арлингтонъ (Вашингтонъ)	3	часа
Могадисціо (Сомали)	4	„
Манила (Филиппинскіе острова)	4	„
Тимбукту (Суданъ)	6	„
Эйфелева башня	10	„
Норддейхъ (Вильгельмсгафенъ) — въ Гриничѣ пд.	12	„
Санъ Фернандо де Норона	16	„
Арлингтонъ	17	„
Массова (Massauah) (Эритрея)	18	„
Санъ Франциско (Калифорнія)	20	„
Норддейхъ	22	„

Еще, вѣроятно, будутъ присоединены Гонолулу, Самоа, Гуамъ и другія подходящія большія станціи. Одновременная подача сигнала допустима только для станцій, области дѣйствія которыхъ отстоятъ другъ отъ друга на большое разстояніе, какъ, напримѣръ, Могадисціо и Манила.

Международная комиссія должна рѣшить, какимъ способомъ будетъ достигаться однообразіе сигналовъ всѣхъ станцій. Былъ предложенъ такой планъ согласованія сигналовъ европейскихъ, сѣверо-африканскихъ и восточно-американскихъ станцій, которыя могутъ входить въ непосредственныя сношенія съ Эйфелевой башней, дѣйствующей въ качествѣ центральной станціи. Такъ какъ точность обыкновенныхъ сигналовъ (если пользоваться единственно возможнымъ способомъ — воспринятіемъ сигналовъ телефономъ) очень незначительна (около $1/4$ сек.) вслѣдствіе различія въ воспріятіи разными лицами, то Эйфелева башня будетъ давать передъ полуночью рядъ особыхъ сигналовъ, которые даютъ при сравненіи часовъ точность до 0,01 секунды. Методъ основанъ на принципѣ ноніуса. На Эйфелевой башнѣ имѣются часы съ маятникомъ, періодъ колебанія котораго равенъ 0,49 сек. и который каждыя 0,98 сек. замыкаетъ контактъ на такое короткое время, что передаточный аппаратъ высылаетъ сигналъ, состоящій изъ одной только искры, въ то время какъ „точка“ азбуки Морзе состоитъ изъ 3—4 искръ, которыя слѣдуютъ другъ за другомъ съ промежутками въ $1/20$ сек. Затѣмъ на станціи полученія особымъ устройствомъ секундныхъ часовъ каждую секунду производятся такъ же рѣзко ограниченные сигналы, которые воспринимаются телефономъ одновременно съ сигналами Эйфелевой башни; тогда каждыя 50 секундъ совпадаютъ (съ точностью до 0,01 сек.) сигналы обоихъ часовъ. Вслѣдствіе большой рѣзкости сигналовъ можно легко сравнивать часы съ точностью до 0,01 сек. Въ Парижской обсерваторіи, которая соединена съ Международнымъ Бюро времени, также будутъ правильно выполняться подобныя наблюденія надъ совпаденіемъ сигналовъ, и эти наблюденія будутъ тотчасъ возвращаться назадъ, такъ что Эйфелева башня въ дополненіе къ обыкновенному полуночному сигналу шрифтомъ Морзе сможетъ сообщать, какое точное время Парижской обсерваторіи соотвѣтствуетъ первому и послѣднему совпадающимъ сигналамъ; такъ какъ въ то же время остальныя станціи полученія относятъ наблюденія совпаденій къ своимъ главнымъ часамъ, то они смогутъ, на основаніи сообщенія изъ Парижа, донести съ точностью до одной сотой секунды, насколько отклоняется время Парижской обсерваторіи отъ ихъ собственнаго, самостоятельно выведеннаго изъ астрономическихъ наблюденій. Обсерваторіи возможно скорѣе сообщаютъ эту поправку помощью обыкновеннаго телеграфа или прямо въ Парижъ или же на національную центральную станцію, которая, принявъ во вниманіе ихъ относительную достовѣрность, составляетъ изъ различныхъ полученныхъ показаній среднее значеніе, сообщаемое въ Парижъ, гдѣ изъ всѣхъ имѣющихся донесеній выводится поправка обсерваторнаго времени. Эта поправка, которая должна быть точною до 0,01 сек., принимается въ расчетъ при подачѣ ближайшихъ сигналовъ.

Нужно надѣяться, что, по осуществленіи этой системы, можно будетъ изъ Парижскихъ совпадающихъ сигналовъ получать Гриничское время съ точностью до одной сотой секунды, которое остальныя станціи отправленія смогутъ положить въ основаніе своихъ сигналовъ, если каждая такая станція не соединена съ достаточнымъ числомъ обсерваторій, контролирующихъ ея показанія времени.

Въ виду того, что обзаведеніе пріемною станціею для такихъ сигналовъ стóитъ очень мало, можно надѣяться на участіе въ контрольной службѣ многихъ обсерваторій, которыя, при продолжительной ненастной погодѣ, препятствующей собственнымъ опредѣленіямъ времени, смогутъ получать среднее международное время съ точностью до небольшой доли секунды. Легкое полученіе точнаго времени, какъ показалъ выше упомянутый опытъ сейсмологическхъ обсерваторій, будетъ имѣть большое практическое значеніе для метеорологическихъ и физическихъ институтовъ, для городскихъ публичныхъ часовъ, для часовыхъ мастеровъ и т. д., которые до сихъ поръ были вынуждены опредѣлять время въ ближайшей обсерваторіи или переносомъ хронометровъ и карманныхъ часовъ, что отнимало много времени и не давало точности, или помощью телеграфовъ и телефоновъ, что требовало постоянныхъ издержекъ и, вмѣстѣ съ тѣмъ, не такъ предохраняло отъ случайныхъ ошибокъ, какъ при контролируемыхъ со всѣхъ сторонъ сигналахъ безпроволочнаго телеграфа. Парижская конференція высказала пожеланіе, чтобы завѣдываніе телеграфомъ вездѣ имѣло устройство подобное тому, какое имѣется теперь въ Гамбургѣ, гдѣ во всякое время можно присоединить любой телефонъ къ находящимся въ Бергедорфской обсерваторіи часамъ и получить точное средне-европейское время. Эти часы даютъ въ началѣ каждой минуты сигналъ, за которымъ слѣдуетъ знакъ единицъ числа минутъ съ начала часа, изображенный рядомъ черточекъ и точекъ, такъ что нужно узнавать другимъ путемъ только десятки числа минутъ и полные часы. Остальныя государства должны только скопировать эту систему, такъ какъ этотъ телефонъ (Гамбургъ 4, Nr. 10.000) находится въ распоряженіи каждаго пользующагося въ Германіи телефономъ и внесшаго плату за междугородніе переговоры.

Въ то время какъ точность обыкновенныхъ сигналовъ удовлетворяетъ большинству цѣлей, совпадающіе сигналы Эйфелевой башни могутъ служить, кромѣ контроля надъ международнымъ среднимъ временемъ, еще и для другихъ научныхъ цѣлей. Французы съ хорошими результатами выполнили по этому методу астрономическія опредѣленія разницы долготъ обсерваторій. Проблема колебанія земной оси, изслѣдованіе которой составляетъ одну изъ главныхъ задачъ международнаго измѣренія земли, дѣлаетъ весьма желательными многолѣтнія, точно выполненныя опредѣленія долготъ далеко отстоящихъ другъ отъ друга обсерваторій. Вслѣдствіе этого Парижское Бюро времени должно предоставлять въ распоряженіе Геодезическаго Института въ Потсдамѣ весь собранный матеріалъ наблюденій для подобныхъ изслѣдованій.

Срокомъ начала дѣйствія международной системы опредѣленія времени, вѣроятно, будетъ 1-е іюля 1913 г.

Молекулярный воздушный насосъ.

Извѣстно, что при движеніи газа по трубкѣ на стѣнкахъ ея остается тонкій неподвижный слой газа, такъ что происходитъ не скольженіе газа вдоль стѣнокъ, а треніе газа о газъ. Но уже давно Кундтъ и Варбургъ показали, что въ очень разрѣженныхъ газахъ замѣчается нѣкоторое скольженіе вдоль стѣнокъ. Нѣсколько лѣтъ тому назадъ Кнудсенъ (Cnudsen) количественно изучилъ это скольженіе и пришелъ къ заключенію, что при низкихъ давленіяхъ газовыя молекулы отскакиваютъ отъ стѣнокъ по закону Максвелла, т. е. совершенно независимо отъ угла паденія,— другими словами, что при этихъ давленіяхъ нѣтъ неподвижной газовой оболочки на внутреннихъ стѣнкахъ. Недавно нѣмецкій физикъ Гэде (Gaede), извѣстный изобрѣтатель весьма совершенныхъ разрѣжающихъ насосовъ, названныхъ его именемъ, повторилъ опыты Кнудсена и нашелъ, что газовая оболочка на стѣнкахъ трубки совершенно исчезаетъ при давленіяхъ ниже 0,001 *мм.* ртутнаго столба. Это обстоятельство Гэде весьма остроумно использовалъ для конструкціи новаго воздушнаго насоса, далеко превосходящаго всѣ до сихъ поръ существующіе.

Представимъ себѣ, что въ поломъ цилиндрическомъ корпусѣ B (рис. 1) сдѣлана выемка глубиной h, идущая отъ отверстія n до т. A представляетъ собою барабанъ, могущій вращаться вокругъ оси a. Если A вращается по часовой стрѣлкѣ, то воздухъ, находящійся въ выемкѣ и своимъ послѣднимъ слоемъ прикрѣпленный къ поверхности A вслѣдствіе вязкости, увлекается въ направленіи отъ n къ m. Если отверстія n и m соединить съ манометромъ, то обнаруживается разность давленій, пропорціональная числу оборотовъ барабана A и величинѣ внутренняго тренія (вязкости) даннаго газа. Если газъ, находящійся въ корпусѣ B, предварительно разрѣженъ, то разность давленiй у отверстiй m и n все же остается прежнею, такъ какъ внутреннее, тренiе газа не зависитъ отъ его упругости: такъ, напримѣръ, если при атмосферномъ давленiи упругости у m и n соотвѣтственно равнялись 760 и 750 *мм.*, то послѣ разрѣженiя воздуха въ приборѣ мы получимъ (при томъ же числѣ оборотовъ), напримѣръ, у m 200 *мм.*, а у n 190 *мм.*, или у m 50 *мм.*, а у n 40 *мм.* и т. д. Очевидно, что, если бы этотъ законъ оставался справедливымъ до самыхъ малыхъ упругостей, то, понизивъ давленiе у m до 10 *мм.*, мы должны были бы получить у n давленiе нуль, т. е. абсолютную пустоту. Но при низкихъ давленiяхъ, какъ мы уже знаемъ, начинается скольженiе газа вдоль стѣнокъ; газъ уже не прикрѣпленъ къ стѣнкѣ и потому перестаетъ увлекаться движенiемъ барабана A; въ то время какъ при большихъ упругостяхъ оставалась постоянною разность давленiй у m и n, при низшихъ — остается постояннымъ отношенiе этихъ давленiй. При самыхъ малыхъ упругостяхъ — меньшихъ 0,001 *мм.* — газовыя молекулы при отраженiи отъ стѣнокъ разсѣиваются вполнѣ равномѣрно во всѣ стороны — совершенно независимо отъ угла паденiя — и чаще всего перелетаютъ отъ одной стѣнки до другой, не сталкиваясь съ другими молекулами. Для этого отраженiя молекулъ Гэде даетъ слѣдующую картину: представимъ себѣ, что поверхность барабана A усѣяна большимъ числомъ микроскопическихъ пушекъ, направленныхъ своими жерлами по всевозможнымъ направленiямъ; молекулы вылетаютъ отъ поверхности такъ, какъ будто бы онѣ выбрасывались этими пушками со скоростью молекулярнаго движенiя. Что же теперь будетъ, если мы станемъ вращать барабанъ A со скоростью, превышающею скорость молекулярнаго движенiя? Тогда, очевидно, тѣ молекулы, которыя выпущены пушками, направленными по касательной къ A по направленiю къ отверстiю m, будутъ обладать скоростью, вдвое большею обычной скорости молекулярнаго движенiя; а тѣ молекулы, которыя выбрасываются по прямо противоположному направленiю (къ отверстiю n), будутъ имѣть скорость, равную нулю. Слѣдовательно, до n вообще не могутъ дойти молекулы, отраженныя отъ поверхности A, и тамъ молекулъ станетъ меньше, т. е. наступитъ разрѣженiе.

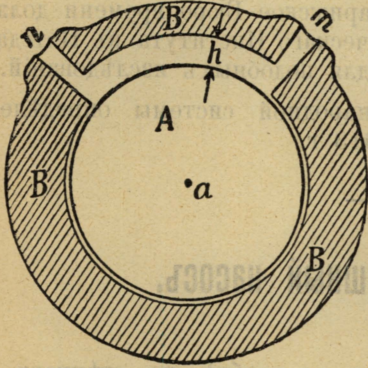

Рис. 1.

Построенный Гэде на этомъ принципѣ насосъ въ дѣйствительности имѣетъ нѣсколько иную и болѣе сложную конструкцiю. Выемки дѣлаются не въ корпусѣ, а во вращающемся барабанѣ A по всей окружности его (рис. 2), и для усиленiя дѣйствiя такихъ выемокъ дѣлается нѣсколько подрядъ. Глубина этихъ выемокъ-желобовъ равна b, ширина — h. Въ эти желоба входятъ язычки (выступы) C, прикрѣпленные къ корпусу B. Когда A вращается со скоростью, близкою къ молекулярной, по направленію часовой стрѣлки, газъ у m сгущается, у n разрѣжается. Чтобы усилить дѣйствіе, отверстія корпуса m и n, ведущія къ послѣдовательнымъ желобамъ, соединены другъ съ другомъ, а именно отверстіе m съ n_1, m_1 съ n_2 и т. д. Корпусъ закрытъ со всѣхъ сторонъ и имѣетъ только два отверстія: одно, идущее къ m_1 для присоединенія къ вспомогательному насосу, дающему первоначальное разрѣженіе, и второе — отъ послѣдняго n для присоединенія къ сосуду, въ которомъ требуется произвести разрѣженіе. Ось вращается въ подшипникахъ, совершенно не пропускающихъ воздуха.

Новый насосъ основанъ на механизмѣ молекулярнаго движенія газовъ, и потому названъ своимъ изобрѣтателемъ „молекулярнымъ".

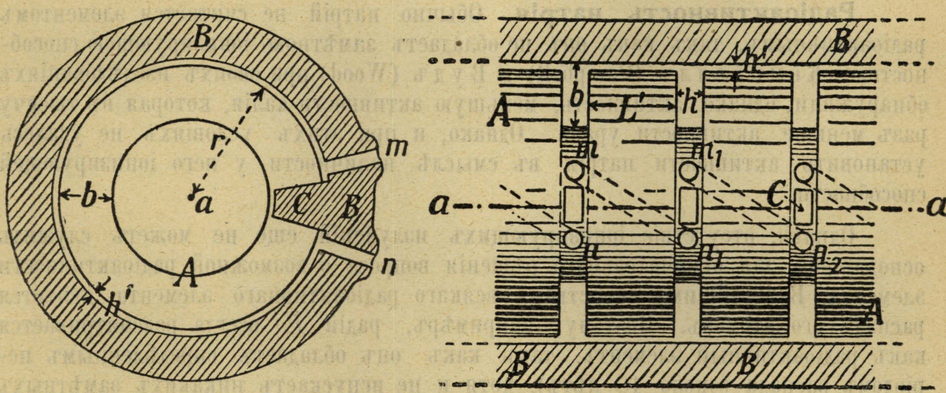

Рис. 2.

Преимущества его весьма велики: по сообщенію автора на 83 Съѣздѣ германскихъ естествоиспытателей (напечатанномъ въ № 18 журнала „Physikalische Zeitschrift" за 1912 г.) этимъ насосомъ достигнуто разрѣженіе, равное 0,000 000 2 *мм.* ртутнаго столба, въ то время какъ до сихъ поръ наилучшіе насосы давали лишь разрѣженія, не меньшія нѣсколькихъ стотысячныхъ долей *мм.* Далѣе, этотъ насосъ дѣйствуетъ приблизительно въ десять разъ скорѣе наилучшихъ изъ старыхъ. Наконецъ, пользуясь имъ, нѣтъ никакой надобности предварительно осушать разрѣжаемое пространство, такъ какъ, будучи основанъ исключительно на механизмѣ молекулярнаго движенія, онъ съ равнымъ успѣхомъ удаляетъ какъ газы, такъ и всякіе пары.

Замѣчательно еще одно обстоятельство: въ то время какъ во всѣхъ существовавшихъ до сихъ поръ насосахъ разрѣжаемый сосудъ всегда отдѣляется отъ внѣшняго пространства либо краномъ, либо клапаномъ, либо поршнемъ, либо жидкостью, въ молекулярномъ насосѣ разрѣжаемое пространство все время сообщается черезъ соединенныя другъ съ другомъ отверстія насоса съ внѣшнимъ пространствомъ.

Число оборотовъ барабана *A* въ опытахъ Гэде достигало 12 000 въ минуту, а въ выпущенныхъ въ продажу*) экземплярахъ равно

*) Фирмою „Leybold" въ Кельнѣ.

отъ 6 до 8 тысячъ въ минуту. Вслѣдствіе этого насосы эти очень дороги (1000 марокъ), и ими, вѣроятно, придется пользоваться только для самыхъ тонкихъ опытовъ, ибо при такихъ огромныхъ скоростяхъ вращенія они врядъ ли смогутъ выдержать продолжительную непрерывную работу.

М. Я.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Радіоактивность натрія. Обычно натрій не считается элементомъ радіоактивнымъ, такъ какъ онъ не обладаетъ замѣтною іонизирующею способностью. Кемпбеллъ (Campbell) и Вудъ (Wood) при своихъ изслѣдованіяхъ обнаружили, однако, активность, меньшую активности калія, которая въ тысячу разъ меньше активности урана. Однако, и при этихъ условіяхъ не удалось установить активности натрія въ смыслѣ наличности у него іонизирующей способности.

Однако, отсутствіе іонизирующихъ излученій еще не можетъ служить основаніемъ для окончательнаго рѣшенія вопроса о возможной радіоактивности элемента. Важнѣйшимъ свойствомъ всякаго радіоактивнаго элемента является распадъ его атомовъ. Поэтому, напримѣръ, радій E всегда разсматривается какъ радіоактивный элементъ, такъ какъ онъ обладаетъ опредѣленнымъ періодомъ распада (около 40 лѣтъ), хотя и не испускаетъ никакихъ замѣтныхъ лучей. Съ другой стороны, и такой элементъ, какъ гелій, также долженъ считаться радіоактивнымъ, хотя онъ тоже не даетъ іонизирующихъ излученій, такъ какъ онъ происходитъ вслѣдствіе радіоактивнаго распада атомовъ. Поэтому вопросъ о радіоактивности натрія все же можетъ быть поставленъ, несмотря на отсутствіе у натрія іонизирующей способности; натрій долженъ считаться радіоактивнымъ элементомъ, если удастся доказать, что онъ происходитъ вслѣдствіе радіоактивнаго распада атомовъ, или что онъ самъ вслѣдствіе такого распада превращается въ другое вещество.

Ф. Браунъ (F. C. Brown) усматриваетъ въ рядѣ геологическихъ данныхъ достаточныя основанія для рѣшенія вопроса о радіоактивности натрія въ положительномъ смыслѣ.

Во-первыхъ, давно уже нуждается въ объясненіи значительное разногласіе по вопросу о возрастѣ земли, существующее между результатами его опредѣленій радіоактивными методами, съ одной стороны, и чисто геологическими, съ другой. Тогда какъ первые методы, основывающіеся на оцѣнкѣ промежутка времени, необходимаго для образованія гелія или свинца въ наблюдаемыхъ количествахъ, даютъ для возраста земли величины въ 600—1000 милліоновъ лѣтъ; геологическіе же методы, основывающіеся на оцѣнкѣ времени, въ теченіе котораго натрій, приносимый рѣками въ океанъ, могъ скопиться въ немъ въ наблюдаемыхъ количествахъ, даютъ для возраста земли величины въ 60—100 милліоновъ лѣтъ. Это значительное разногласіе одинъ изъ геологовъ Жоли (Joly) пытался недавно объяснить неточнымъ знаніемъ радіоактивныхъ постоянныхъ. Какъ указываетъ Браунъ, это разногласіе можно съ большею вѣроятностью объяснить иначе,— именно, предположивъ, что натрій представляетъ собою радіоактивный элементъ. Недостаточное содержаніе натрія въ океанѣ становится понятнымъ, если предположить, что „отецъ натрія“ является нерастворимымъ элементомъ, и что весь натрій въ океанѣ попалъ туда исключительно благодаря рѣкамъ, приносившимъ его съ суши, гдѣ онъ постепенно образовывался въ результатѣ распада атомовъ.

Во-вторыхъ, возможно геологическое опредѣленіе возраста земли на основаніи учета количества хлора, находящагося въ океанѣ и также приносимаго въ океанъ рѣками. Но такія опредѣленія даютъ цифру, превышающую ту, которая получается изъ расчета надъ натріемъ. Согласно даннымъ Клэрка (Clarke), первая цифра равняется 160.10^6 годамъ, вторая — 89.10^6 годамъ. Здѣсь опять оказывается, что содержаніе натрія въ океанѣ сравнительно недостаточно. Его можно опять, согласно Брауну, объяснить предположеніемъ, что натрій радіоактивенъ, какъ сказано выше.

БИБЛІОГРАФІЯ.

I. Рецензіи.

Сборникъ задачъ по высшей математикѣ преподавателей Института Инженеровъ путей сообщенія **А. А. Адамова, А. П. Вилижанина, Н. М. Гюнтера, А. Н. Захарова, В. М. Меліоранскаго, В. Ф. Точисскаго и Я. В. Успенскаго.** Изданіе Института Инженеровъ Путей Сообщенія. СПБ., 1912. 8⁰, XII + 250.

Въ русской учебной математической литературѣ эта книга представляетъ крупное явленіе, и потому она должна быть отмѣчена на страницахъ «Вѣстника», которыя открыты и для основъ высшей математики со времени введенія ихъ въ курсъ 7-го класса реальныхъ училищъ. Сборникъ содержитъ задачи на всѣ отдѣлы высшей математики, входящіе въ курсъ высшей технической школы: аналитическая геометрія на плоскости (364 задачи) и въ пространствѣ (267), дифференціальное исчисленіе (343), приложенія его къ анализу (353) и геометріи (350), высшая алгебра (178), интегрированіе функцій (315), кратные интегралы (303), интегрированіе уравненій (514), опредѣленные интегралы (180), ряды (245) и приближенныя вычисленія (127). Такимъ образомъ, кромѣ проективной геометріи, варіаціоннаго исчисленія и теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго, онъ содержитъ задачи почти на всѣ отдѣлы университетскаго курса. Этимъ онъ очень удобенъ для преподавателя на практическихъ занятіяхъ и экзаменахъ и для студентовъ, которые получаютъ съ нимъ въ руки цѣлую энциклопедію задачъ. Послѣднему употребленію, — т. е. для занятій на дому, — помогаетъ и то, что задачи расположены въ каждомъ отдѣлѣ по возрастающей трудности — сначала болѣе легкія, затѣмъ болѣе трудныя. Мнѣ кажется, что этотъ задачникъ можно рекомендовать и преподавателямъ реальныхъ училищъ: онъ освѣжаетъ матеріалъ и по нужнымъ для нихъ отдѣламъ, даетъ и по этимъ отдѣламъ самимъ по себѣ достаточно матеріала и, кромѣ того, даетъ возможность болѣе способнымъ ученикамъ, готовящимся въ высшія техническія заведенія, пробовать свои силы надъ вопросами, выходящими изъ области курса (конечно, при предварительныхъ поясненіяхъ преподавателя). Издана книга опрятно, и ошибокъ въ ней очень мало. Есть, конечно, кое-какіе недосмотры, и я сдѣлаю съ своей стороны указанія на встрѣтившіеся мнѣ при пользованіи (главнымъ образомъ, отдѣлами: I, II, Ѵ и IX).

Отдѣлъ I. Задача № 12 не на мѣстѣ, — ее надо помѣстить во II отдѣлѣ. Задачи 78 и 79 формулированы не совсѣмъ удачно: точку, симметричную данной относительно данной прямой, едва ли хорошо называть «отраженіемъ» этой точки, тѣмъ болѣе, что въ задачахъ 80 и 81 тотъ же терминъ «отраженіе» употребляется въ физическомъ смыслѣ. Отвѣтъ на задачу 78 долженъ былъ бы давать просто координаты искомой точки, ибо для ихъ нахожденія можно обойтись совсѣмъ безъ даваемой въ отвѣтѣ прямой. Задача 135 формулирована неполно: не только биссекторъ внутренняго угла квадрата, котораго обѣ стороны проходятъ черезъ неподвижныя точки, проходитъ черезъ неподвижную точку, но и биссекторъ соотвѣтствующаго внѣшняго угла, и вторая діагональ квадрата огибаетъ окружность радіуса, равнаго половинѣ діагонали. Отдѣлъ Ѵ. Кривая $\left(y+\frac{2a^3}{x}\right)^2=x\,(x^2-a^2)$ особенныхъ точекъ съ конечными координатами не имѣетъ, и отвѣтъ поэтому не вѣренъ. Вѣроятно, слѣдуетъ уравненіе кривой взять $\left(y+\frac{2a^2}{x}\right)^2=x\,(x-a)^2$. Въ отдѣлѣ IX задача 108 (стр. 202) едва ли можетъ быть вѣрна (отвѣта ея нѣтъ), ибо уравненіе

$$x^2y'=y^2f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$$

вообще не можетъ быть проинтегрировано.

Эти отдѣльныя замѣчанія не умаляютъ достоинства задачника. Отдѣльные недосмотры подобнаго рода неизбѣжны и легко могутъ быть исправлены въ слѣдующихъ изданіяхъ, которыя навѣрное не заставятъ себя ждать и въ которыхъ матеріалъ, конечно, еще возрастетъ.

Проф. Д. Синцовъ.

II. Собственныя сообщенія авторовъ, переводчиковъ и редакторовъ о выпущенныхъ книгахъ.

Авторы, переводчики и редакторы новыхъ сочиненій приглашаются присылать для этого отдѣла, извѣстнаго въ германской литературѣ подъ названіемъ: „Selbstanzeigen“, краткія сообщенія о выпущенныхъ ими сочиненіяхъ, объ ихъ характерѣ и объ ихъ назначеніи. Къ этимъ сообщеніямъ долженъ быть приложенъ экземпляръ сочиненія. Помѣщая эти сообщенія, редакція сохраняетъ, однако, за собою право помѣстить и независимую рецензію.

К. Ѳ. Лебединцевъ. *Концентрическое руководство алгебры для среднихъ учебныхъ заведеній.* Часть 1-я. Изд. книгоиздательства «Сотрудникъ». Спб.-Кіевъ, 1913. Ц. 90 к.

Настоящій учебникъ, подобно «Курсу алгебры» того же автора, предназначается для среднихъ учебныхъ заведеній (гимназій, реальныхъ и коммерческихъ училищъ); главной его особенностью является распредѣленіе курса на два большихъ концентра, различающихся не только содержаніемъ, но и методомъ изложенія.

Первый концентръ, излагаемый въ появляющейся теперь 1-й части, включаетъ ученіе объ уравненіяхъ 1-й и 2-й степени, въ связи съ необходимыми свѣдѣніями объ алгебраическихъ преобразованіяхъ и объ отрицательныхъ и несоизмѣримыхъ числахъ; сюда включены также ученія о прогрессіяхъ и логариѳмахъ, такъ что эта первая часть соотвѣтствуетъ курсу среднихъ (3, 4, 5 и 6) классовъ мужскихъ гимназій и содержитъ, собственно говоря, всѣ основные отдѣлы алгебры, требуемые обязательной программой нашей средней школы. При расположеніи матеріала авторъ руководился, главнымъ образомъ, педагогическими соображеніями и поэтому отступалъ отъ внѣшней систематизаціи всякій разъ, когда это ему казалось умѣстнымъ, чтобы сдѣлать изученіе алгебры болѣе доступнымъ для учащихся. Такъ, напримѣръ, уже въ самомъ началѣ курса даны свѣдѣнія о составленіи и рѣшеніи простѣйшихъ уравненій, и въ дальнѣйшемъ ученію объ уравненіяхъ отводится преобладающее значеніе сравнительно съ ученіемъ объ алгебраическихъ преобразованіяхъ; эти послѣднія излагаются не самостоятельно, въ видѣ особаго отдѣла, а въ связи съ ихъ приложеніями къ рѣшенію уравненій 1-й и 2-й степени. Подобнымъ образомъ и въ ученіи о логариѳмахъ выдвинута на первый планъ его практическая сторона, выяснено болѣе подробно понятіе о приближенныхъ логариѳмахъ и ихъ свойствахъ и указанъ способъ элементарнаго вычисленія приближенныхъ логариѳмовъ, достаточно удобный для педагогической практики.

Въ этомъ концентрѣ преобладаетъ конкретно-индуктивный методъ изложенія; всякое новое понятіе выясняется сперва на типичныхъ, спеціально подобранныхъ конкретныхъ примѣрахъ, и лишь затѣмъ устанавливается соотвѣтствующее опредѣленіе или общая истина. Кромѣ того, тѣ истины, дедуктивное доказательство которыхъ, по мнѣнію автора, затруднительно для учащихся даннаго возраста, изложены также индуктивно, т. е. выяснены на частныхъ примѣрахъ съ указаніемъ, какъ можно на опытѣ убѣдиться въ ихъ справедливости. Такимъ образомъ излагаются, напримѣръ, основные законы алгебраическихъ дѣйствій въ примѣненіи ихъ къ отрицательнымъ и несоизмѣримымъ числамъ.

Способы рѣшенія уравненій обоснованы не на ученіи о равносильныхъ уравненіяхъ, а на примѣненіи основныхъ свойствъ равныхъ чиселъ. Авторъ убѣжденъ, что такой методъ не заключаетъ въ себѣ логическихъ дефектовъ, если точно оговорить тѣ предположенія, которыя при этомъ молчаливо допускаются (эти предположенія оговорены въ соотвѣтствующихъ мѣстахъ курса); между тѣмъ этотъ методъ изложенія болѣе удобопонятенъ учащимся младшаго возраста, нежели ученіе о равносильныхъ уравненіяхъ.

Ученіе объ отрицательномъ и несоизмѣримомъ числѣ проводится при помощи конкретныхъ и графическихъ иллюстрацій и посредствомъ ознакомленія съ тѣми величинами, которыя этими числами выражаются.

Вторая часть учебника включаетъ въ себѣ второй концентръ общаго курса алгебры, именно теорію рѣшенія уравненій и неравенствъ, основанную на ученіи о равносильности, вопросъ объ изслѣдованіи уравненій, теорію дѣйствій надъ отрицательными, мнимыми и несоизмѣримыми числами (въ томъ числѣ и теорію несоизмѣримыхъ показателей), а также основы ученія о предѣлахъ. Въ эту же часть включены такъ называемыя дополнительныя статьи алгебры, требуемыя программой нашихъ среднихъ учебныхъ заведеній: теорія соединеній, биномъ Ньютона, неопредѣленныя уравненія, непрерывныя дроби.

Въ этомъ концентрѣ всѣ существенно новыя понятія изъясняются также конкретно-индуктивнымъ методомъ, но доказательства всѣхъ изучаемыхъ истинъ проводятся уже дедуктивно. Здѣсь доказываются, между прочимъ, и тѣ истины, которыя въ предыдущемъ концентрѣ были усвоены только на основаніи опыта, и дается, такимъ образомъ, прочное обоснованіе тѣмъ навыкамъ и свѣдѣніямъ, съ которыми учащіеся ознакомились ранѣе; возрастъ же учащихся позволяетъ имъ теперь осилить предлагаемыя разсужденія вполнѣ сознательно.

Наконецъ, третья, дополнительная, часть включаетъ свѣдѣнія о перемѣнныхъ величинахъ, о функціяхъ и функціональныхъ зависимостяхъ, объ измѣненіи функцій и ихъ графическомъ изображеніи, о производной функціи — однимъ словомъ, тѣ свѣдѣнія изъ области такъ называемой высшей математики, которыя современная педагогическая мысль признаетъ умѣстными и цѣлесообразными въ курсѣ средней школы. Авторъ попрежнему полагаетъ, что свѣдѣнія эти должны сообщаться учащимся не въ концѣ учебнаго курса, а постепенно въ тѣсной связи съ остальными отдѣлами такъ называемой элементарной алгебры; но чтобы не стѣснять преподавателей опредѣленнымъ расположеніемъ этихъ свѣдѣній, они выдѣлены теперь въ особую третью часть книги. Въ предисловіи къ третьей части авторъ разсчитываетъ дать краткія указанія относительно того, какимъ образомъ прохожденіе этихъ свѣдѣній могло бы быть неразрывно связано съ изученіемъ обязательнаго курса алгебры, изложеннаго въ первыхъ двухъ частяхъ.

К. Лебединцевъ.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей привать-доцента **Е. Л. Буницкаго.**

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 74 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\frac{1}{a+b-x}-\frac{1}{a-b-x}=\frac{1}{2\sqrt{ax}}.$$

Е. Григорьевъ (Саратовъ).

№ 75 (6 сер.) Для какого треугольника отношеніе

$$\frac{r_a^2+r_b^2+r_c^2}{p^2},$$

гдѣ r_a, r_b, r_c, p суть соотвѣтственно его радіусы внѣвписанныхъ круговъ и полупериметръ, достигаетъ *maximum*'а?

Л. Богдановичъ (Н.-Новгородъ).

№ 76 (6 сер.). Изъ точки O пространства къ вершинамъ даннаго треугольника ABC направлены три силы, измѣряемыя соотвѣтственно отрѣзками OA, OB, OC. Найти геометрическое мѣсто точекъ O, для которыхъ равнодѣйствующая силъ OA, OB, OC имѣетъ данную величину a.

В. Шлыгинъ (Москва).

№ 77 (6 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ уравненіе

$$x^x+y^y=2x+y.$$

В. Яницкій (Острогъ).

Поправка: Въ условіи задачи **№ 41** (№ 565 „Вѣстника") вмѣсто $\frac{1}{m^{2n}}$ слѣдуетъ читать $\frac{1}{m^{2^n}}$.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 3 (6 сер.). *Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе*

$$(2x+y)^x=x^y.$$

Рѣшимъ предложенное уравненіе прежде всего въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ. Если $x>0$ и $y>0$, то $2x+y>x$, а потому $x<y$. Раздѣливъ обѣ части на x^x, получимъ:

$$\left(2+\frac{y}{x}\right)^x=x^{y-x},$$

откуда видно, что цѣлое число x^{y-x} есть x-овая степень раціональнаго числа $\left(2+\frac{y}{x}\right)$; слѣдовательно, $2+\frac{y}{x}$ есть число цѣлое, а, значитъ, и $\frac{y}{x}$ есть число цѣлое. Называя цѣлое частное $\frac{y}{x}$ черезъ z, имѣемъ, такимъ образомъ:

$$2+z=x^{\frac{y-x}{x}}=x^{z-1},$$

откуда

(1) $$x = \sqrt[z-1]{2+z},$$

при чемъ

(2) $$y = zx$$

и x, y, z должны быть цѣлыми положительными числами. Но при $z > 4$ формула (1) не можетъ дать для x цѣлаго значенія; дѣйствительно, при $z > 4$ имѣемъ:

$$2^{z-1} = (1+1)^{z-1} = 1 + z - 1 + \frac{(z-1)(z-2)}{2} + \cdots + 1 > 1 + z - 1 + 1 + 1 = 2 + z,$$

такъ какъ при $z > 4$ въ разложеніи $2^{z-1} = 1 + z - 1 + \frac{(z-1)(z-2)}{2} + \cdots + 1$ больше четырехъ членовъ, а, съ другой стороны, при $z > 4$ членъ $\frac{(z-1)(z-2)}{2}$ больше единицы. Итакъ, при $z > 4$ имѣемъ:

$$1^{z-1} < 2 + z < 2^{z-1},$$

т. е. $2 + z$ при $z > 4$ не есть точная $(z-1)$-ая степень. Поэтому формула (1) можетъ вообще давать для x цѣлыя значенія лишь при z, равномъ одному изъ чиселъ 1, 2, 3, 4, а по провѣркѣ оказывается, что можно получить цѣлое значеніе для x лишь при $z = 2$. При $z = 2$ имѣемъ [см. (1), (2)]:

(3) $$x = 4, \quad y = 8,$$

и другихъ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній данное уравненіе не имѣетъ. Изслѣдуемъ теперь остальныя цѣлыя рѣшенія. При $x = y = 0$ обѣ части даннаго уравненія обращаются въ 0^0, т. е. въ неопредѣленное выраженіе, а потому предположеніе $x = y = 0$ не даетъ, строго говоря, рѣшенія. Легко провѣрить, что при $x = 0$, $y \neq 0$ или $y = 0$, $x \neq 0$ мы также не получаемъ цѣлаго рѣшенія. Если $x > 0$, а $y < 0$, то, полагая $y = -z$ (гдѣ $z > 0$), можно привести данное уравненіе къ виду $(2x - z)^x x^z = 1$, откуда $2x - z = \pm 1$, $x = 1$, т. е. $x = 1$, $z = 1$ или $x = 1$, $z = 3$. Значитъ, $x = 1$, $y = -1$ или $y = -3$, но второе значеніе для y не годится. Итакъ,

(4) $$x = 1, \quad y = -1.$$

Если $x < 0$, а $y > 0$, то, полагая $x = -u$, приводимъ данное уравненіе къ виду $(-u)^y (y - 2u)^u = 1$, откуда $-u = -1$, $y - 2u = \pm 1$; изъ этихъ равенствъ приходимъ къ двумъ рѣшеніямъ: $x = -1$, $y = 3$,

(5) $$x = -1, \quad y = 1,$$

изъ которыхъ, послѣ провѣрки, остается лишь второе. Наконецъ, пусть x и y оба отрицательны. Полагая $x = -u$, $y = -z$, приводимъ данное уравненіе къ виду $(-2u - z)^{-u} = (-u)^{-z}$; возвышая обѣ части въ степень (-1) и приравнивая абсолютныя величины (ибо $u > 0$ и $z > 0$), получимъ: $(2u + z)^u = u^z$, откуда [см. (3)] $u = 4$, $z = 8$, т. е.

(6) $$x = -4, \quad y = -8.$$

Итакъ [см. (3), (4), (5), (6)], всѣ цѣлыя рѣшенія даннаго уравненія можно записать въ слѣдующую таблицу:

$$x = \pm 4, \quad y = \pm 8; \quad x = \pm 1, y = \mp 1,$$

при чемъ въ каждомъ изъ этихъ четырехъ рѣшеній надо взять при x и y одновременно либо верхніе, либо нижніе знаки.

В. Моргулисъ (Одесса); *П. Тикуновъ* (Козловъ).

№ 43 (6 сер.). *Доказать неравенство*

$$a^3 + b^3 \geqq a^2b + ab^2$$

при положительныхъ значеніяхъ a *и* b. *Какому соотношенію между* a *и* b *отвѣчаетъ знакъ равенства?*

Прибавляя къ обѣимъ частямъ очевиднаго неравенства $(a-b)^2 \geqq 0$ по ab, получимъ: $a^2 - 2ab + b^2 + ab \geqq ab$, или

$$(1) \qquad a^2 - ab + b^2 \geqq ab.$$

Помножая обѣ части неравенства (1) на число $a+b$, которое положительно, такъ какъ a и b положительны, получимъ:

$$(a^2 - ab + b^2)(a+b) \geqq ab(a+b),$$

т. е.

$$(2) \qquad a^3 + b^3 \geqq a^2b + ab^2.$$

Въ неравенствѣ (1) знакъ равенства, какъ и въ формулѣ $(a-b)^2 \geqq 0$, возможенъ лишь при $a = b$; слѣдовательно, и въ формулѣ (2), полученной путемъ умноженія формулы (1) на положительное значеніе $a+b$, знакъ равенства возможенъ лишь при $a = b$ Слѣдуетъ замѣтить, что при выводѣ формулы (2) нѣтъ надобности предполагать, что a и b положительны: достаточно допустить, что сумма $a+b$ неотрицательна. При такомъ болѣе общемъ предположеніи знакъ равенства въ формулѣ (2) возможенъ или при $a - b = 0$, или при $a + b = 0$, т. е. вообще при $a^2 = b^2$.

М. Вайнбергъ (Одесса); *Н. Павлова* (Петербургъ).

№ 48 (6 сер.). *Пусть* n *равныхъ круговъ касаются между собой и даннаго круга радіуса* R *внѣшнимъ образомъ; пусть другой рядъ* n *равныхъ круговъ касаются между собой и того же круга внутреннимъ образомъ. Называя радіусы круговъ перваго и второго ряда соотвѣтственно черезъ* r_n *и* ϱ_n *доказать, что*

$$r_n \varrho_n = \left(R \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}\right)^2.$$

Пусть O — центръ круга радіуса R, а $O_1, O_2, \ldots, O_n$ — центры круговъ внѣшняго ряда въ послѣдовательномъ круговомъ порядкѣ, $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — центры круговъ внутренняго ряда въ аналогичномъ круговомъ порядкѣ. Называя черезъ τ_i точку касанія круговъ O_i и O_{i+1}, а черезъ T_i и T_{i+1} — точки касанія этихъ круговъ съ кругомъ O, имѣемъ по условію:

$$OO_i = OO_{i+1} = OT_i + T_iO_i = OT_{i+1} + T_{i+1}O_{i+1} = R + r_n,$$

$$O_iO_{i+1} = O_i\tau_i + \tau_iO_{i+1} = r_n + r_n = 2r_n.$$

Итакъ, въ каждомъ изъ треугольниковъ O_iOO_{i+1} стороны имѣютъ вполнѣ опредѣленное значенiе, а потому и уголъ O_iOO_{i+1} также имѣетъ вполнѣ опредѣленное значенiе; иначе говоря, всѣ углы $\angle O_1OO_2$, $\angle O_2OO_3, \ldots$, $\angle O_{n-1}OO_n$ равны. Но сумма этихъ равныхъ угловъ есть 2π, а потому

$$\angle O_1OO_2 = \frac{2\pi}{n}. \tag{1}$$

Точно такъ же, исходя изъ равенствъ $OC_i = OC_{i+1} = R - \varrho_n$, $C_iC_{i+1} = 2\varrho_n$, вытекающихъ изъ внутренняго касанiя равныхъ круговъ C_i и C_{i+1} съ кругомъ O и изъ внѣшняго касанiя круговъ C_i и C_{i+1} между собою, выводимъ равенство:

$$\angle C_1OC_2 = \frac{2\pi}{n}. \tag{2}$$

Называя черезъ τ_1 и t_1 соотвѣтственно точки касанiя паръ круговъ O_1, O_2 и C_1, C_2 и принимая во вниманiе, что каждая изъ прямыхъ $O\tau_1$ и Ot_1 есть биссектриса угловъ $\angle O_1OO_2$ и $\angle C_1OC_2$ (сливающихся при надлежащемъ нумерованiи круговъ), находимъ [см. (1), (2)]:

$$\angle \tau_1O_1O = \angle t_1C_1O = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{n},$$

$$O_1\tau_1 = r_n = OO_1 \sin \angle \tau_1O_1O = (R + r_n)\sin\frac{\pi}{n},$$

$$C_1t_1 = \varrho_n = OC_1 \sin \angle t_1C_1O = (R - \varrho_n)\sin\frac{\pi}{n}.$$

Изъ равенствъ $r_n = (R + r_n)\sin\frac{\pi}{n}$ и $\varrho_n = (R - \varrho_n)\sin\frac{\pi}{n}$ находимъ:

$$r_n = \frac{R\sin\frac{\pi}{n}}{1 - \sin\frac{\pi}{n}}, \tag{3}$$

$$\varrho_n = \frac{R\sin\frac{\pi}{n}}{1 + \sin\frac{\pi}{n}}. \tag{4}$$

Перемножая равенства (3) и (4), получимъ:

$$r_n\varrho_n = \frac{R^2\sin^2\frac{\pi}{n}}{1 - \sin^2\frac{\pi}{n}} = \frac{R^2\sin^2\frac{\pi}{n}}{\cos^2\frac{\pi}{n}} = \left(R\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}\right)^2.$$

Н. Нейцъ (Самара); *В. Кованько* (Струнино); *Б. Скаткинъ* (Москва).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографiя Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Обложка
ищется

Обложка
ищется