Обложка
ищется

Обложка
ищется

XLIX Сем. № 4.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 580.

О нахожденіи раціональныхъ корней алгебраическаго уравненія.

Прив.-доц. В. Ф. Кагана.

Въ средней школѣ обыкновенно излагаютъ учащимся способы нахожденія цѣлыхъ и даже раціональныхъ корней алгебраическаго уравненія съ цѣлыми коэффиціентами. Основная теорема, сюда относящаяся, заключается въ слѣдующемъ.

Если алгебраическое уравненіе съ цѣлыми коэффиціентами имѣетъ раціональный корень $\frac{m}{n}$, гдѣ m и n взаимно простыя числа, то числитель m есть дѣлитель свободнаго члена, а знаменатель n есть дѣлитель старшаго коэффиціента.

Обычныя доказательства этого предложенія, которыя излагаются какъ въ курсахъ высшей алгебры, такъ и въ элементарныхъ учебникахъ, конечно, по существу очень просты. Мнѣ кажется, однако, что нижеслѣдующія разсужденія доведены до такой степени элементарности, что даже въ пятомъ классѣ, гдѣ эти вещи излагаются, они не могутъ затруднить самаго средняго ученика.

Пусть

$$a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \cdots + a_{k-1} x + a_k = 0$$

будетъ наше уравненіе съ одной неизвѣстной, имѣющее цѣлые коэффиціенты. Если уравненіе имѣетъ корень $\frac{m}{n}$, то полиномъ P, составляющій лѣвую его часть, дѣлится нацѣло на $x - \frac{m}{n}\cdot$ Но въ такомъ случаѣ полиномъ P дѣлится нацѣло и на двучленъ $nx - m$; коэффиціенты частнаго будутъ только раздѣлены на n. Покажемъ, что при этомъ послѣднемъ дѣленіи коэффиціенты частнаго будутъ цѣлыми числами.

Въ самомъ дѣлѣ, расположимъ сначала дѣлимое и дѣлитель по нисходящимъ степенямъ перемѣнной x; въ такомъ случаѣ старшій членъ частнаго будетъ имѣть коэффиціентъ $\frac{a_0}{n}\cdot$ Въ зависимости отъ того, сокращается ли эта дробь или нѣтъ, знаменателемъ этого коэффиціента останется либо число n, либо одинъ изъ его дѣлителей. Когда мы вслѣдъ за этимъ умножимъ дѣлителя на найденный членъ частнаго, то коэффиціентами произведенія будутъ служить либо цѣлыя числа, либо дроби, знаменателями которыхъ служатъ дѣлители числа n: это зависитъ только отъ того, произойдетъ ли при умноженіи коэффиціента $\frac{a_0}{n}$ на соотвѣтствующій коэффиціентъ дѣлителя сокращеніе или нѣтъ. Такъ какъ дѣлимое имѣетъ исключительно цѣлые коэффиціенты, то, вычитывая изъ него полученное произведеніе, мы вновь получимъ полиномъ, коэффиціенты которыхъ не могутъ имѣть въ знаменателѣ никакихъ иныхъ дѣлителей, кромѣ тѣхъ, которые содержатся въ числѣ n.

Теперь мы будемъ старшій членъ перваго остатка дѣлить на nx. Ясное дѣло, что при такихъ условіяхъ новый коэффиціентъ частнаго можетъ имѣть въ знаменателѣ опять-таки только дѣлителей числа n: вѣдь только на это число и будетъ дѣлиться коэффиціентъ перваго остатка. Слѣдующее умноженіе дѣлителя на найденный членъ частнаго ничего въ этомъ смыслѣ не измѣнитъ, т. е. коэффиціенты произведенія опять-таки будутъ имѣть въ знаменателяхъ исключительно дѣлителей числа n. То же останется, конечно, справедливымъ и послѣ вычитанія, т. е. второй остатокъ будетъ имѣть такіе же коэффиціенты.

Продолжая это разсужденіе дальше, мы приходимъ къ слѣдующему выводу: если мы раздѣлимъ полиномъ P на $nx - m$, совершая дѣленіе по нисходящимъ степенямъ x, то коэффиціентами частнаго по ихъ сокращеніи будутъ служить либо цѣлыя числа, либо такія дроби, въ составъ знаменателей которыхъ входятъ только дѣлители числа n.

Расположимъ теперь дѣлимое и дѣлитель по восходящимъ степенямъ x; теперь первымъ (низшимъ) коэффиціентомъ частнаго будетъ служить дробь $\frac{a_k}{m}$; въ зависимости отъ того, произойдетъ ли тутъ сокращеніе или нѣтъ, это будетъ либо цѣлое число, либо дробь, знаменателемъ которой служитъ дѣлитель числа m. Такое же разсужденіе приводитъ, очевидно, къ слѣдующему результату: если будемъ располагать дѣленіе по восходящимъ степенямъ x, то коэффиціенты частнаго въ знаменателяхъ не будутъ имѣть никакихъ иныхъ дѣлителей, кромѣ тѣхъ, которые содержатся въ числѣ m.

Но разъ дѣленіе полинома P на двучленъ $nx - m$ выполняется нацѣло, то частное не можетъ зависѣть отъ того, будемъ ли мы располагать по восходящимъ или нисходящимъ степенямъ x. Слѣдовательно, коэффиціенты частнаго могутъ имѣть въ знаменателяхъ только общихъ дѣлителей чиселъ m и n. А такъ какъ m и n суть числа первыя между собой, то знаменателемъ каждаго коэффиціента частнаго можетъ служить только единица,—иными словами, всѣ коэффиціенты частнаго будутъ цѣлыми числами. Поэтому $\frac{a_0}{n}$ и $\frac{a_k}{m}$ также должны быть цѣлыми числами. Теорема, такимъ образомъ, доказана.

Значеніе и цѣль изслѣдованія облаковъ.

Проф. Зюринга.

Изслѣдованіе облаковъ долгое время стояло отдѣльно отъ другихъ отраслей метеорологіи. Для большинства вопросовъ довольствовались грубымъ опредѣленіемъ количества облаковъ (по числу десятыхъ частей неба, покрытыхъ облаками) и опредѣляли еще развѣ только видъ облаковъ и направленіе ихъ пути; все, вытекавшее изъ этихъ изслѣдованій, составляло до нѣкоторой степени особую дисциплину, которая не была связана съ другими метеорологическими вопросами и которой особенно усердно занимались любители. Это положеніе постепенно измѣнилось, съ тѣхъ поръ какъ аэрологія, изучающая верхніе слои атмосферы съ помощью воздухоплавательныхъ приспособленій, указала новые пути и поставила новыя проблемы. Съ тѣхъ поръ какъ мы въ состояніи изучать термодинамику свободной атмосферы на основаніи точныхъ измѣреній, явленіе конденсаціи, происходящей въ облакахъ, играетъ все болѣе и болѣе важную роль.

Воздушная область, до которой могутъ образовываться облака, сравнительно невысока и понижается отъ экватора къ полюсу; въ среднихъ широтахъ она достигаетъ вышины около 9 *км.*, у тропиковъ — 14 *км.*, въ полярныхъ странахъ она рѣдко доходитъ до 8 *км.* При этомъ не принимаются въ расчетъ случайныя скопленія пыли вулканическаго происхожденія, которыми вызываются такъ называемыя свѣтящіяся ночныя облака, и облака полярнаго сіянія. Въ этой узкой области происходитъ почти весь обмѣнъ по вертикальному направленію нашей атмосферы, такъ какъ лишь немного выше лежитъ верхняя граница тропосферы, т. е. той области, въ которой воздухъ подъ вліяніемъ нагрѣванія отъ почвы подымается и, двигаясь переплетающимися струйками, стремится къ равновѣсію, никогда не оставаясь въ покоѣ на продолжительное время. Уже на высотѣ около 11 *км.* прекращается пониженіе температуры, происходящее вслѣдствіе затраты работы на расширеніе воздуха, и устанавливается при почти постоянной температурѣ въ -60^{0} «стратосфера», въ которой имѣютъ мѣсто только горизонтальныя теченія. Благодаря незначительному содержанію пара здѣсь почти невозможно или крайне рѣдко образованіе облаковъ.

Послѣ того какъ воздухоплавательными вспомогательными средствами лучше изслѣдованы пути частицъ воздуха въ тропосферѣ, можно яснѣе объяснить образованіе на этихъ путяхъ облаковъ, и, обратно, съ помощью наблюденій надъ облаками можно прослѣдить передвиженіе и обмѣнъ воздуха. Такъ, одинъ лишь взглядъ на такъ называемыя «барашки» намъ говоритъ, что надъ ними лежитъ зона разрыва, въ которой происходятъ скачки температуры и вѣтра; образованіе блестящихъ чечевицеобразныхъ клочковъ облака указываетъ на вторженіе теплаго вѣтра, подобнаго фёну и т. п. Часто, однако, процессъ не можетъ быть вполнѣ выясненъ при первомъ взглядѣ на облако, но только тщательныя наблюденія надъ измѣненіемъ внѣшняго вида даютъ полное объясненіе, какъ это желательно для цѣлей предсказыванія погоды; въ этомъ и заключается главная трудность такого предсказанія. Большимъ шагомъ впередъ являются наблюденія при подъемахъ воздушнаго шара. Поднятіе съ регистрирующими инструментами очень дорого и въ большихъ размѣрахъ доступно только немногимъ обсерваторіямъ, но выслѣживаніе съ одного мѣста небольшихъ шаровъ, обладающихъ извѣстной скоростью поднятія, легко выполнимо. Благодаря этимъ шарамъ узнаютъ измѣненіе вѣтра съ высотой, и задачей краткосрочныхъ наблюденій облаковъ теперь является пополненіе картины измѣненій вѣтра установленіемъ слоевъ конденсаціи, а вмѣстѣ съ тѣмъ отчасти и температурныхъ слоевъ. На засѣданіяхъ Международной Аэронавтической коммиссіи въ 1912 г. былъ сдѣланъ первый шагъ къ общей систематической работѣ. Тогда было постановлено дѣлать общія наблюденія надъ облаками во время ежемѣсячнаго международнаго подъема шаровъ, происходящаго строго одновременно въ опредѣленные часы. Этимъ путемъ надѣются прежде всего получить свѣдѣнія относительно распространенія и положенія слоевъ конденсаціи. Значеніе одновременныхъ наблюденій недавно доказалъ Гессельбергъ (Hesselberg, въ Христіаніи), установивши, что направленіе пониженія барометра близко совпадаетъ съ направленіемъ движенія перистыхъ облаковъ. Поэтому можно ждать дальнѣйшаго улучшенія предсказаній погоды отъ сѣти соединенныхъ между собой телеграфомъ станцій, производящихъ наблюденія надъ облаками.

То обстоятельство, что на высотѣ около 2 *км.* чаще всего встрѣчаются облака, между тѣмъ какъ другіе слои замѣтно бѣднѣе облаками, допускаетъ разрѣшеніе нѣкоторыхъ проблемъ независимо отъ подъема шаровъ. Врачъ Веттинъ (Vettin) уже въ 1882 г. указалъ на подобные «этажи» облаковъ; но на его работу не обратили вниманія, такъ какъ онъ могъ опираться только на приблизительную оцѣнку высоты. Точныя измѣренія подтвердили въ главнѣйшемъ его воззрѣнія и расширили ихъ, такъ что было даже предложено положить эти ступени высотъ въ основу новой классификаціи облаковъ. Выполненію этого предложенія препятствовали нѣкоторыя практическія соображенія, но на основаніи этихъ изслѣдованій можно во многихъ случаяхъ раздѣлять наблюденія не по абсолютной высотѣ, а по «порядку высоты». Это привело къ богатому слѣдствіями изученію опредѣленныхъ видовъ облаковъ и значенія послѣднихъ.

Въ наиболѣе благопріятныхъ условіяхъ для изслѣдованія находятся ледяныя облака большой высоты, такъ называемыя перистыя облака. Многія перистыя облака являются только краевыми образованіями большихъ тучъ, появляющимися вслѣдствіе расширенія подымающагося воздуха; другія же, наоборотъ, образуются на нѣсколько гектометровъ ниже стратосферы и, повидимому, независимо отъ послѣдней. Но и въ данномъ случаѣ замѣчается область предпочтительнаго образованія облаковъ, и Шау (Shaw), директоръ англійской метеорологической службы, говоритъ въ этомъ смыслѣ прямо о субстратосферѣ, находящейся на вышинѣ 9 *км*. Въ новой метеорологіи большую роль играетъ вопросъ о томъ, образуются ли на этой высотѣ зародыши облаковъ вслѣдствіе депрессіи (пониженія давленія) и, если образуются, то какимъ путемъ; при рѣшеніи этого вопроса оказываются полезными наблюденія надъ облаками. При пониженіи давленія въ субстратосферѣ наступаетъ расширеніе воздуха и вслѣдствіе этого пониженіе температуры, которое при достаточной интенсивности ведетъ къ конденсаціи паровъ. Перистыя облака указываютъ намъ, гдѣ впервые наступаетъ достаточное разрѣженіе воздуха и въ какихъ размѣрахъ послѣднее происходитъ. Множество отдѣльныхъ фактовъ въ дальнѣйшемъ развитіи этого отдѣла метеорологіи представляютъ собой поучительные примѣры явленія конденсаціи паровъ, — напримѣръ, листообразная структура перистыхъ облаковъ, волнообразное расположеніе границъ указанныхъ слоевъ, ковшеобразныя выпуклости или постепенный наклонъ слоевъ. При этомъ, конечно, можно не упоминать, что опредѣленія абсолютной высоты значительно облегчаютъ объясненіе явленій. При этомъ особенно пригодны фотограмметрическіе снимки, сдѣланные по тригонометрическому или по стереоскопическому методамъ. Такія опредѣленія высотъ малоупотребительны. Въ большемъ объемѣ они производятся теперь только въ метеорологической обсерваторіи въ Потсдамѣ. Въ Батавіи они были въ послѣдніе годы возобновлены послѣ долгаго перерыва.

На изслѣдованіе превращеній облаковъ путемъ ряда фотографическихъ снимковъ часто указывали, но эта мысль рѣдко выполнялась. Идеальное рѣшеніе этого вопроса помощью кинематографическихъ снимковъ впервые пытался сдѣлать г. Шау въ Лондонѣ, при чемъ облака фотографировались каждые 5 — 10 секундъ, начиная съ появленія пятнышка до превращенія въ плотныя высокія кучевыя облака. Тутъ еще возможно широкое дальнѣйшее развитіе изслѣдованій.

Фотограмметрическое изученіе облаковъ показало, что большинство перистыхъ облаковъ чаще всего развиваются одинаково, какъ волнообразныя слоистыя облака на высотѣ 3000 — 4000 *м*. и какъ высокія волнистыя кучевыя облака (Alto cumuli undulati), но что перистыя облака, состоящія изъ тонкихъ кристалловъ льда, значительно постояннѣе и потому болѣе удобны для продолжительнаго наблюденія воздушныхъ теченій. Въ развитіи облаковъ нужно различать два направленія, а именно: увеличеніе площади всего облака и вытягиваніе отдѣльныхъ струй облака, лежащихъ обычно на высшемъ уровнѣ. Въ потсдамской обсерваторіи можно наблюдать много отдѣльныхъ явленій въ высокихъ теченіяхъ воздуха, такъ какъ тамъ наблюденію доступна область въ $6^1/_2 \times 8$ *км.* при высотѣ въ 10 *км.*

Чѣмъ ниже лежитъ облако, тѣмъ оно измѣнчивѣе и непостояннѣе; среди облаковъ имѣются, однако, формы, которыя можно опредѣлить термодинамически, а потому они могутъ служить указателями состоянія воздуха. Сюда относится въ области водяныхъ облаковъ большая группа тонкихъ клочковатыхъ облаковъ, которыя раньше назывались неудачнымъ именемъ «ложныхъ» перистыхъ облаковъ. Они обыкновенно появляются тогда, когда токъ воздуха долженъ перевалить черезъ препятствіе (горы или нагроможденныя кучевыя облака), или же когда воздухъ подымается съ самой преграды, пока не наступаетъ конденсація. Такъ какъ при этомъ наблюдаются очень характерныя и легко описываемыя формы въ видѣ шапки, воротника, флага или чечевицы, то желательно, чтобы на эти облака было обращено вниманіе въ международной классификаціи. Эта классификація имѣетъ большое значеніе, такъ какъ съ ея помощью достигается единство обозначенія облаковъ на всей землѣ. Поэтому отъ нея неохотно отказываются, тѣмъ болѣе, что къ первымъ попыткамъ къ созданію новой классификаціи присоединялись революціонныя предложенія; но въ интересахъ успѣшнаго развитія нужно возможно скорѣе перейти къ физической обработкѣ старой классификаціи облаковъ.

Замѣтка о непрерывныхъ функціяхъ*).

В. Даватца.

Существуетъ извѣстная теорема о непрерывныхъ функціяхъ:

Если функція непрерывна въ интервалѣ отъ a до b (включая a и b) и для a и b принимаетъ различныя значенія: $f(a)=A$, $f(b)=B$, то она въ этомъ интервалѣ принимаетъ и всѣ значенія, содержащіяся между A и B.

---

*) Понятіе о „функціи“ и, въ частности, о „непрерывной функціи“ подвергалось различнымъ измѣненіямъ вмѣстѣ съ развитіемъ математической мысли. Въ настоящее время наиболѣе отвѣчающимъ современному состоянію науки слѣдуетъ признать опредѣленіе функціи по Риману (Riemann) и опредѣленіе непрерывности по Коши (Cauchy).

По Риману—y есть функція отъ x, если для каждаго изъ разсматриваемыхъ значеній перемѣнной x существуетъ опредѣленное значеніе перемѣнной y. Характернымъ въ этомъ опредѣленіи является то, что перемѣнная y вовсе не должна выражаться при помощи какихъ-нибудь аналитическихъ операцій надъ x и можетъ быть задана совершенно произвольно.

По Коши — функція называется непрерывной въ точкѣ x_0, если для каждаго положительнаго числа ε можно найти такое число η, что для всякаго x, удовлетворяющаго условію $|x-x_0|<\eta$, будемъ имѣть: $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Если это условіе удовлетворено для всѣхъ точекъ даннаго интервала, то говорятъ, что функція $f(x)$ непрерывна въ данномъ интервалѣ.

Конечно, $f(x)$ не есть символъ опредѣленной операціи надъ x и, въ силу опредѣленія Римана, выражаетъ только, что значеніе этого сим-

Другими словами, при непрерывномъ измѣненiи аргумента x отъ a до b непрерывная функцiя не можетъ перейти отъ A къ B, не прiобрѣтя всѣхъ промежуточныхъ значенiй.

На первый взглядъ кажется, что это и есть характерное свойство непрерывныхъ функцiй. Функцiя, обладающая этимъ свойствомъ, „непрерывно“ переходитъ отъ значенiя A къ значенiю B, а потому въ основанiе опредѣленiя непрерывности могло бы быть положено это требованiе. И дѣйствительно, во Францiи одно время пользовались этимъ опредѣленiемъ, какъ указываетъ Лебегъ (Lebesgue) *). Однако, ошибочность этого утвержденiя была показана Дарбу (Darboux) **), давшимъ цѣлый рядъ не непрерывныхъ функцiй, обладающихъ этимъ условiемъ. Цѣль настоящей замѣтки — дать простой примѣръ именно такой функцiи.

Опредѣлимъ функцiю по слѣдующимъ условiямъ:

$$\begin{cases} y = 1 - x & \text{— для всѣхъ рацiональныхъ значенiй } x \text{ въ интервалѣ } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ y = x & \text{— для всѣхъ иррацiональныхъ значенiй } x \text{ въ этомъ же интервалѣ.} \end{cases}$$

Легко видѣть, что функцiя эта въ интервалѣ $0 \leqslant x \leqslant 1$ будетъ обладать слѣдующими свойствами:

1°. $f(0) = 1$; $f(1) = 0$.

2°. Внутри даннаго интервала функцiя принимаетъ всѣ промежуточныя значенiя.

3°. Она непрерывна только въ одной точкѣ $x = \frac{1}{2}$; въ любой же другой точкѣ она имѣетъ разрывы непрерывности.

Хотя, согласно опредѣленiю Римана, функцiя вовсе не должна обязательно быть выражена въ видѣ какой-нибудь опредѣленной аналитической операцiи, въ данномъ случаѣ это возможно сдѣлать при помощи извѣстной функцiи Римана:

$$\chi(x) = \lim_{m=\infty} \left[\lim_{n=\infty} \left\{ \cos(m!\,\pi x) \right\}^{2n} \right],$$

гдѣ m и n суть натуральныя числа.

вола извѣстно, если задано значенiе перемѣнной x. Точно такъ же перемѣнная x не должна принимать обязательно всѣ значенiя или значенiя опредѣленнаго интервала; значенiя перемѣнной x должны, вообще говоря, образовывать нѣкоторый ансамбль E, для котораго мы опредѣляемъ функцiю $f(x)$.

[Мы позволимъ себѣ замѣтить, что это опредѣленiе скорѣе по идеѣ, чѣмъ по формѣ, принадлежитъ Коши. *Ред.*]

*) Lebesgue — „Leçons sur l'intégration“, p. 89.

**) Annalles de l'École Normale, 1875.

Возьмемъ какую-нибудь раціональную абсциссу $x=\frac{p}{q}$. Для нея

$$\chi\left(\frac{p}{q}\right)=\lim_{m=\infty}\left[\lim_{n=\infty}\left\{\cos\left(m!\,\frac{\pi p}{q}\right)\right\}^{2n}\right].$$

При достаточно большихъ m (когда $m \geqslant q$) мы имѣемъ:

$$\cos\left(m!\,\frac{\pi p}{q}\right)=\cos(c\pi),$$

гдѣ c — цѣлое число, т. е.

$$\cos\left(m!\,\frac{\pi p}{q}\right)=\pm 1,$$

такъ что при всякомъ n

$$\left\{\cos\left(m!\,\frac{\pi p}{q}\right)\right\}^{2n}=1,$$

а потому $\chi\left(\frac{p}{q}\right)=1$.

Если же $x \neq \frac{p}{q}$, т. е. есть число ирраціональное, то при всякомъ m

$$\cos(m!\,\pi x) \neq \pm 1,$$

т. е.

$$|\cos(m!\,\pi x)|<1$$

а потому при всякомъ m

$$\lim_{n=\infty}\left\{(\cos m!\,\pi x)^{2n}\right\}=0$$

и, слѣдовательно, $\chi(x)=0$.

Такимъ образомъ, функція $\chi(x)$ имѣетъ слѣдующее свойство:

$$\begin{cases}\chi(x)=0, & \text{если } x \text{ есть число ирраціональное.}\\ \chi(x)=1, & \text{если } x \text{ есть число раціональное.}\end{cases}$$

Очевидно, что нашу функцію y можно выразить при помощи функціи Римана слѣдующимъ образомъ:

$$y=\chi(x)+(-1)^{\chi(x)}.\,x,$$

или подробнѣе:

$$y=\lim_{m=\infty}\left[\lim_{n=\infty}\left|\cos(m!\,\pi x)^{2n}\right|\right]+x\,.\,(-1)^{\lim\limits_{m=\infty}\left[\lim\limits_{n=\infty}\left\{\cos(m!\,\pi x)\right\}^{2n}\right]}.$$

Итакъ, функція наша, опредѣленная такимъ простымъ образомъ въ данномъ интервалѣ, можетъ быть изображена въ видѣ аналитическаго выраженія. Не будучи непрерывной ни въ одной точкѣ интерваловъ $0 \leqslant x < \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$, она, тѣмъ не менѣе, пріобрѣтаетъ всѣ безъ исключенія значенія, содержащіяся между $f\left(\frac{1}{2} - a\right)$ и $f\left(\frac{1}{2} + a\right)$, гдѣ $0 < a < \frac{1}{2}$. Въ частности, если $a = \frac{1}{2}$, то она принимаетъ всѣ значенія между нулемъ и единицей*).

ПИСЬМО ВЪ РЕДАКЦІЮ.

Милостивый государь, Господинъ Редакторъ!

Я познакомился съ «парадоксомъ» г-на Аменицкаго только по замѣткѣ г. Киселева въ № 578 «Вѣстника» **). Поэтому въ дальнѣйшемъ я буду ссылаться на помѣщенные въ ней чертежи.

Я полагаю, что никакими ухищреніями нельзя заставить шаръ (идеальный), положенный на горизонтальную плоскость (идеальную) и прислоненный къ наклонной плоскости (тоже идеальной), проявлять хоть какое-нибудь давленіе на послѣднюю, если этотъ шаръ находится подъ дѣйствіемъ одной только силы тяжести. Только при отсутствіи горизонтальной плоскости соотвѣтственная слагающая силы тяжести будетъ производить давленіе на наклонную плоскость (см. фиг. 2).

Г-нъ Аменицкій въ сущности такъ и поступаетъ, разлагая силу тяжести p (фиг. 1) на составляющія y и r. Если бы онъ принялъ во вниманіе реакцію z горизонтальной плоскости, то долженъ былъ бы разлагать на составляющія не p, а только $p - z$. Допустивъ $z = 0$, онъ тѣмъ самымъ какъ бы устранилъ горизонтальную плоскость, заставивъ шаръ опираться на одну только наклонную плоскость. Притомъ еще г. Аменицкій ошибочно принялъ составляющую y за давленіе (положимъ, Y), производимое шаромъ на наклонную плоскость. Для опредѣленія Y слѣдовало бы составляющую r разложить на двѣ слагающія: на слагающую k, направленную вдоль y, и на слагающую ϱ, направленную по нормали къ y, т. е. параллельно длинѣ наклонной плоскости. Тогда искомое давленіе Y выразится разностью $y - k$, и легко убѣдиться, что при всякомъ направленіи r всегда будетъ, какъ на фиг. 2, давленіе $Y = p \cos a$ и слагающая $\varrho = p \sin a$, гдѣ a есть уголъ (p, y). Сила ϱ неизбѣжно вынудитъ шаръ скользить внизъ вдоль наклонной плоскости, пока онъ не достигнетъ горизонтальной плоскости. Но тогда какое же другое значеніе для z можно было бы принять, какъ не $z = p$? Какія

*) Функція y обладаетъ указаннымъ свойствомъ не во всякомъ интервалѣ внутри $0 \leqslant x \leqslant 1$, а только въ интервалѣ, симметричномъ относительно $x = 1/2$.

**) См. замѣтку А. Киселева „Къ парадоксу, заимствованному г. Видеманомъ изъ учебника г. Аменицкаго" въ № 578 „Вѣстника." *Ред.*

основанія имѣлись бы для того, чтобы принять $z < p$? А если $z = p$, то $Y = (p - z)\cos\alpha = 0$; слѣдовательно, шаръ будетъ только соприкасаться съ наклонной плоскостью, опираясь всецѣло на одну только горизонтальную плоскость.

Проф. П. В. Котурницкій (С.-Петербургъ).

Задача на премію № 6.

Въ № 570-мъ „Вѣстника“ была предложена прив.-доц. Е. Л. Буницкимъ задача на премію № 6. Однако, по винѣ корректуры формулировка задачи оказалась не достаточно общей. Хотя и въ томъ болѣе частномъ видѣ, въ какомъ она предложена, задача не принадлежитъ къ числу легкихъ, но авторъ ея желаетъ, чтобы она была рѣшена въ болѣе общемъ видѣ. Мы вынуждены поэтому нѣсколько измѣнить редакцію задачи.

Задача. Доказать слѣдующую теорему: если численныя значенія многочлена

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \cdots + a_{m-1} x + a_m$$

съ цѣлыми коэффиціентами и съ положительнымъ коэффиціентомъ a_0 при старшемъ членѣ представляютъ собою точныя n-ыя степени при всякомъ цѣломъ значеніи x, то этотъ многочленъ представляетъ собой n-ую степень нѣкотораго другого многочлена съ цѣлыми же коэффиціентами (n есть цѣлое положительное число).

Разница заключается, такимъ образомъ, въ томъ, что въ первоначальной формулировкѣ степень многочлена была обозначена тою же буквою n, что и фигурирующее ниже число. Въ этомъ частномъ случаѣ данный полиномъ могъ оказаться n-ой степенью только линейнаго двучлена; въ настоящей общей формулировкѣ число m должно оказаться кратнымъ n, и данный полиномъ долженъ оказаться n-ой степенью другого полинома степени $\frac{m}{n}$.

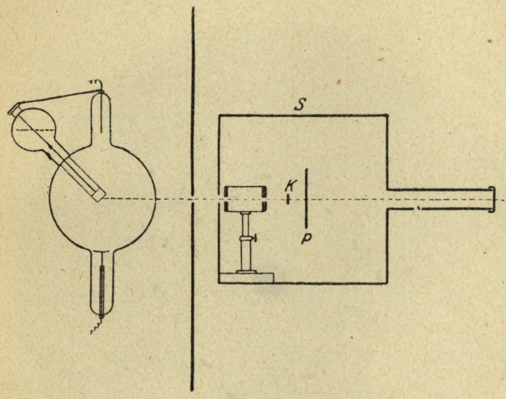
Вмѣстѣ съ измѣненіемъ текста задачи мы считаемъ цѣлесообразнымъ назначить новымъ срокомъ, не позже котораго должны быть представлены въ редакцію ея рѣшенія, 1-ое августа т. г.

Авторъ лучшаго рѣшенія получитъ въ видѣ преміи книги физико-математическаго содержанія по собственному выбору на сумму въ 10 рублей.

Интерференція рёнтгеновскихъ лучей и видимыя кристаллографическія пространственныя рѣшетки.

Г. Лёви.

Недавно въ Институтѣ теоретической физики Мюнхенскаго Университета были сдѣланы слѣдующіе опыты: на фотографическую пластинку (фиг. 1) посылались рёнтгеновскіе лучи черезъ кристаллъ, параллельно оси симметріи послѣдняго. Послѣ нѣсколькихъ часовъ экспозиціи на фотографической пластинкѣ появились, кромѣ центральной точки, куда попадали лучи, перпендикулярные къ пластинкѣ кристалла, еще цѣлый рядъ правильно расположенныхъ пятенъ, по которымъ можно было узнать свойства симметріи кристалла. На фиг. 2 дано изображеніе, полученное при освѣщеніи кристалла рёнтгеновскими лучами, параллельными оси симметріи четвертаго порядка, а на фиг. 3 — третьяго порядка.



Фиг. 1.

S — защитный ящикъ,
K — пластинка кристалла,
P – фотографическая пластинка.

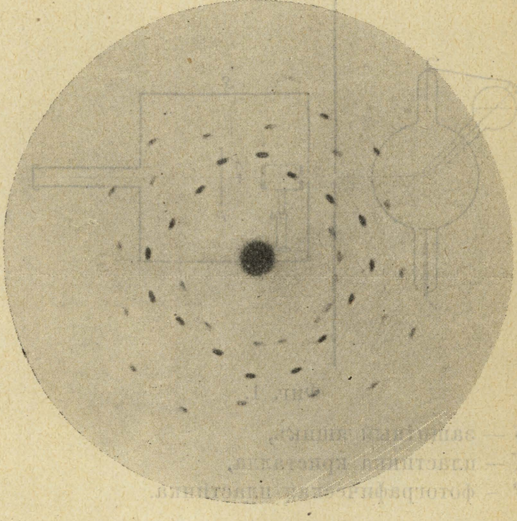
Осью симметріи 3-го, 4-го или, вообще, n-го порядка называется ось, при вращеніи вокругъ которой на $\frac{360}{3}$, $\frac{360}{4}$ или, вообще, на $\frac{360}{n}$ градусовъ кристаллическій многогранникъ совмѣщается самъ съ собой. Дѣйствительно, фотограммы показываютъ симметрію четвертаго и, соотвѣтственно, третьяго порядка кристаллическихъ осей: каждую точку на фиг. 2 можно совмѣстить съ соотвѣтствующей точкой вращеніемъ на $\frac{360}{4} = 90^0$, а на фиг. 3 — вращеніемъ на $\frac{360}{3} = 120^0$.

Если ось кристалла немного наклонить относительно направленія падающихъ лучей, то пятна сдвигаются по плоскости. При большемъ углѣ наклона пятна располагаются въ такомъ безпорядкѣ, что нельзя усмотрѣть какой-нибудь закономѣрности. Если превратить кристаллъ въ тонкій порошокъ, то исчезаютъ всѣ пятна, даже центральное.

Итакъ, эти изслѣдованія показываютъ, что при прожденіи черезъ кристаллъ рёнтгеновскіе лучи испытываютъ особое измѣненіе, которое тѣсно связано съ свойствами симметріи кристалла. Эти изслѣдованія выполнили, по предложенію Макса Лауэ (Max Laue), В. Фридрихъ (W. Friedrich) и П. Книппингъ (P. Knipping)*).

Въ дальнѣйшемъ я хочу изложить разсужденія, съ помощью которыхъ Лауэ удалось предусмотрѣть это замѣчательное явленіе. Тогда мы поймемъ, какое огромное значеніе имѣютъ эти изслѣдованія; мы увидимъ, что это есть одно изъ замѣчательнѣйшихъ предсказаній, сдѣланныхъ при помощи теоретическихъ наукъ.

Уже съ 1850 г. въ кристаллографіи, слѣдуя Бравэ (Bravais), принимали, что молекулы, которыя въ обыкновенныхъ (такъ называемыхъ аморфныхъ) тѣлахъ разбросаны въ безпорядкѣ, въ кристаллахъ располагаются совершенно опредѣленнымъ образомъ, а именно, въ видѣ параллелепипедныхъ пространственныхъ рѣшетокъ. Если принять это, то можно легко вывести, въ согласіи съ кристаллографіей, геометрическія свойства кристаллическихъ формъ и типы послѣднихъ. Закономѣрность цѣлаго объясняется закономѣрностью составляющихъ его маленькихъ частей. Но затѣмъ отъ этой теоріи естественно потребовали, чтобы съ помощью ея можно было объяснить не только геометрическія свойства кристалловъ, но и физическія. Только тогда можно было бы говорить о ея глубокомъ значеніи. Но до послѣдняго времени изъ структурной теоріи не удавалось сдѣлать какіе-либо выводы въ этомъ направленіи**). Вотъ что пишетъ объ этомъ В. Фогтъ (W. Voigt) въ своемъ „Учебникѣ кристаллофизики“, вышедшемъ въ 1910 г.: „Подобныя изслѣдованія, конечно, могутъ пріо-



Фиг. 2.

Структура кристалла вокругъ оси симметріи четвертаго порядка.

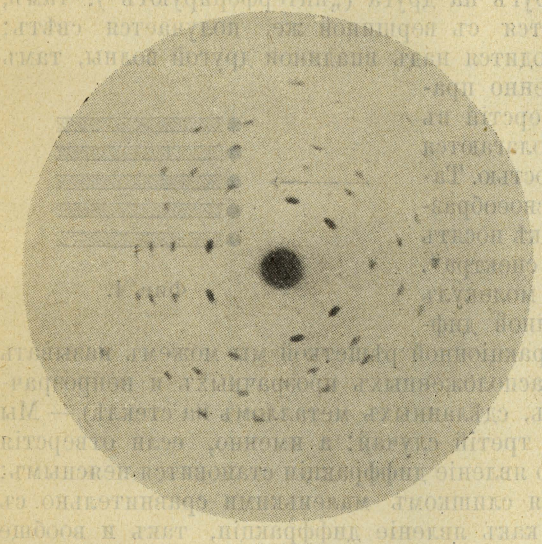
---

*) В. Фридрихъ, П. Книппингъ и М. Лауэ — „Явленія интерференціи рёнтгеновскихъ лучей“ (W. Friedrich, P. Knipping und M. Laue — „Interferenzscheinungen bei Röntgenstrahlen“).

М. Лауэ — „Количественное изслѣдованіе теоріи явленія интерфенціи рёнтгеновскихъ лучей“ (M. Laue — „Eine quantitative Prüfung der Theorie für die Interferenzscheinungen bei Röntgenstrahlen. Sitzb. d. Bayerl. Akad. d. Wissensch. 1912, p. 303 u. 363“)

**) Недавно П. П. Эвальду (P. P. Ewald) удалось въ своей диссертаціи (Мюнхенъ, 1912), получить объясненіе дисперсіи и двойного лучепреломленія кристалловъ, основанное на нѣкоторой структурной теоріи.

брѣсти гораздо большее значеніе, такъ какъ извѣстнымъ строеніемъ нужно объяснить законы всѣхъ физическихъ свойствъ кристаллическаго вещества. Однако, въ этомъ направленіи успѣхи такъ называемой структурной теоріи незначительны.... Въ дѣйствительности дѣло сводится только къ доказательству, что при допущеніи опредѣленнаго представленія о составляющихъ кристаллъ корпускулахъ (которыя могутъ и не совпадать съ химическими молекулами) можно найти такое пространственное расположеніе этихъ корпускулъ, которое соотвѣтствовало бы 32-мъ типамъ симметріи“. И далѣе: „Вслѣдствіе такого положенія дѣла до сихъ поръ не было основанія отводить структурной теоріи очень много мѣста при изложеніи кристаллофизики“ *). То же высказываетъ О. Мюгге (O. Mügge) въ заключительной части своей статьи въ Математич. Энциклопедіи: „Какъ вытекаетъ изъ этого обзора, содержащаго всѣ наиболѣе важныя свѣдѣнія, произведенныя до сихъ поръ изслѣдованія ... еще не даютъ возможности опредѣлить, насколько картина строенія кристалла, изображаемая структурной теоріей, соотвѣтствуетъ дѣйствительности“ **). Какъ отсюда видно, структурная теорія до сихъ поръ не могла претендовать на серьезное значеніе съ физической точки зрѣнія.



Фиг. 3.

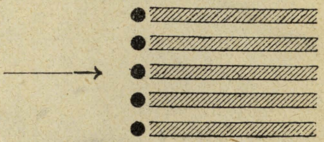
Структура кристалла вокругъ оси симметріи третьяго порядка.

Теперь примемъ, что кристаллъ дѣйствительно состоитъ изъ молекулъ, расположенныхъ по параллелепипедамъ (почти по кубамъ); для простоты мы замѣнимъ пространственную рѣшетку прямой линіей, на которой расположены на равномъ разстояніи одна отъ другой матеріальныя точки (молекулы). Что произойдетъ, если на рѣшетку попадутъ электромагнитныя волны (почти обыкновенный свѣтъ)? Такая рѣшетка, конечно, является не чѣмъ инымъ, какъ ширмой, снабженной отверстіями для свѣтовыхъ волнъ; по законамъ геометрической оптики мы должны ждать позади ширмы перемежающихся полосокъ свѣта и тѣни (фиг. 4).

*) W. Voigt —„Lehrbuch der Kristallphysik“, 1910, p. 111.

**) О. Мюгге —„Относительно опытнаго изслѣдованія структурной теоріи“ (O. Mügge —„Zur Prüfung der Strukturtheorien an der Erfahrung“. Enzyklop. d. Math. Wiss, v. 1, p. 492).

Законы геометрической оптики, какъ извѣстно, не могутъ примѣняться въ данномъ случаѣ съ полною строгостью, а именно, они становятся тѣмъ менѣе точными, чѣмъ меньше отверстія ширмы (разстоянія между точками) сравнительно съ длиною волны падающаго свѣта. Если отверстія одного порядка съ длиною волны (около 10^{-5} *см.*), то упомянутое расположеніе тѣней совершенно измѣняется. Оптика учитъ, что въ этомъ случаѣ расположеніе свѣта и тѣни происходитъ слѣдующимъ образомъ. Представляютъ себѣ, что точка въ тотъ моментъ, когда на нее попадаетъ свѣтовая волна, начинаетъ испускать свѣтъ въ той же фазѣ; волны, исходящія изъ столь многочисленныхъ источниковъ свѣта, въ пространствѣ пересѣкаются по всевозможнымъ направленіямъ и налагаются другъ на друга („интерферируютъ"); тамъ, гдѣ вершина волны встрѣчается съ вершиной же, получается свѣтъ; гдѣ же вершина волны приходится надъ впадиной другой волны, тамъ получается тѣнь. Соотвѣтственно правильному распредѣленію отверстій въ рѣшеткѣ, свѣтъ и тѣнь располагаются съ опредѣленною закономѣрностью. Такимъ образомъ появляются своеобразныя фигуры, которыя въ оптикѣ носятъ названіе „диффракціоннаго спектра". Дѣйствительно, наша система молекулъ является какъ бы обыкновенной диффракціонной рѣшеткой. Диффракціонной рѣшеткой мы можемъ называть всякую систему правильно расположенныхъ прозрачныхъ и непрозрачныхъ тѣлъ(въ родѣ черточекъ, сдѣланныхъ металломъ на стеклѣ).— Мы должны разсмотрѣть еще и третій случай: а именно, если отверстія продолжаютъ уменьшаться, то явленіе диффракціи становится неяснымъ; когда же отверстія сдѣлаются слишкомъ маленькими сравнительно съ длиной волны, то исчазаетъ какъ явленіе диффракціи, такъ и вообще всякое различіе между свѣтомъ и тѣнью: пространство кажется освѣщеннымъ болѣе или менѣе тусклымъ свѣтомъ (такъ называемое разсѣиваніе свѣта).



Фиг. 4.

Какой изъ этихъ трехъ случаевъ осуществится, когда свѣтъ попадаетъ на кристаллъ? Длина волны видимаго свѣта равна приблизительно 10^{-5} *см.*; слѣдовательно, остается опредѣлить разстояніе между молекулами въ кристаллѣ (такъ называемую постоянную рѣшетки). Это разстояніе можно опредѣлить, съ одной стороны, на основаніи вѣса молекулы, плотности и числа молекулъ въ единицѣ объема (всѣ эти величины извѣстны*), а съ другой стороны—изъ кристаллографическихъ данныхъ: оба вычисленія даютъ величину порядка 10^{-8} *см.* Слѣдовательно, длина свѣтовой волны слишкомъ велика сравнительно съ разстояніемъ между молекулами (постоянной рѣшетки); поэтому мы имѣемъ дѣло съ третьимъ случаемъ. Для полученія ясныхъ фигуръ диффракціи (т. е. для осуществленія второго случая) мы должны примѣнять свѣтъ съ значительно меньшей длиной волны.

*) Л а у э, l. c., стр. 364

Такого рода свѣтомъ являются рёнтгеновскіе лучи. Длина ихъ волны, по измѣреніямъ Гага (Haga) и Винда (Wind), равна $2 \cdot 10^{-8}$ *см.*, а по измѣреніямъ Зоммерфельда (Sommerfeld) и Коха (Koch) — 10^{-9} *см.* Эти числа какъ разъ того же порядка, что и вышеприведенное разстояніе между молекулами въ кристаллѣ. На основаніи этого простого вычисленія Лауэ могъ предсказать то замѣчательное явленіе, которое мы называемъ диффракціоннымъ или интерференціоннымъ спектромъ.

Что образованіе картинъ диффракціи обусловливается не закономѣрностью въ цѣломъ, т. е. внѣшнимъ видомъ кристалла, а закономѣрностью въ расположеніи малѣйшихъ его частей, т. е. молекулярнымъ строеніемъ послѣднихъ, показываютъ опыты съ кристаллами, внѣшній видъ которыхъ принадлежитъ не къ тому классу симметріи, что ихъ молекулярная рѣшетка (а къ низшему). Такія формы называютъ „геміэдрическими", въ противоположность „голоэдрическимъ" формамъ симметріи структурной рѣшетки. Фотограмма цинковой обманки, принадлежащей къ такому геміэдрическому классу, дѣйствительно показываетъ высшую симметрію пространственной рѣшетки, а не симметрію ея кристаллической формы. Далѣе было доказано, что направленіе ограничивающихъ поверхностей кристалла относительно падающихъ лучей — какъ и слѣдовало ожидать — не имѣетъ вліянія на диффракціонный спектръ, если только пространственная рѣшетка сохраняетъ свое положеніе.

Опыты производились съ очень тонкими пластинками (0,5 *мм.* толщины) изъ кристалловъ цинковой обманки, каменной соли, свинцоваго блеска и мѣднаго купороса. „Время освѣщенія при напряженіи отъ 2 до 10 милли-амперъ продолжалось отъ 1 до 20 часовъ. Въ качествѣ рёнтгеновской трубки употреблялась или интенсивная трубка Гунделаха (Gundelach), или быстрая трубка съ водянымъ охлажденіемъ Мюллера (Müller), которыя соединялись съ индукторомъ Клингельфусса (Klingelfuss), дающимъ искру въ 50 *см.* Употреблялись прерыватель Венельта (Whenelt) или механическій прерыватель"*). Очень важной является точная установка кристалла, потому что — какъ уже упоминалось — достаточно незначительнаго наклона, чтобы уничтожилась правильность фигуры. Поэтому эти опыты можно примѣнять для точнаго опредѣленія кристаллографическихъ осей.

Выше мы приняли, что рёнтгеновскіе лучи представляютъ волнообразное излученіе, подобное обыкновеному свѣту или „электрическимъ" волнамъ, и пользовались тѣмъ значеніемъ длины ихъ волны, которое было вычислено на основаніи этого предположенія. Въ новѣйшее время — особенно Браггъ (Bragg) — защищаютъ противоположный взглядъ, что рёнтгеновскіе лучи суть корпускулярные лучи, подобные катоднымъ и каналовымъ лучамъ, но только съ тѣмъ различіемъ, что матеріальныя частицы, которыя мчатся по направленію лучей, не заряжены электричествомъ. Съ этой точки зрѣнія, однако, очень трудно объяснить

*) В. Фридрихъ, П. Книппингъ и М. Лауэ, l. c., стр. 314.

существованіе упомянутыхъ замѣчательныхъ явленій, какъ это подробнѣе выясняется авторомъ цитированной работы.

Такимъ образомъ, благодаря новымъ изслѣдованіямъ, мы сдѣлали цѣлый рядъ важныхъ пріобрѣтеній: появился новый аргументъ въ пользу волнообразной природы рёнтгеновскихъ лучей; структурная теорія выдержала свое первое физическое испытаніе; и, что всего важнѣе, открылся новый путь для физическихъ изслѣдованій, очень легкій, но ведущій далеко въ глубину; слѣдуя по этому пути, можно будетъ, если изслѣдовать измѣненіе диффракціонныхъ фигуръ подъ вліяніемъ различныхъ условій, слѣдить, какъ бы глазами, за движеніемъ молекулъ при дѣйствіи различныхъ физическихъ силъ.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Смитсоновская экспедиція для изученія солнечной теплоты. Недавно закончила свои работы пятимѣсячная астрономическая экспедиція въ Бассуръ (Алжиръ), организованная директоромъ Смитсоновской астрономической обсерваторіи Абботомъ (Abbot). Цѣлью этой экспедиціи было подтвердить или опровергнуть взглядъ на солнце, какъ на перемѣнную звѣзду. Астрономическая обсерваторія вотъ ужъ семь лѣтъ производитъ на Маунтъ-Уильсонѣ (Калифорнія) наблюденія надъ ежедневнымъ количествомъ тепла, получаемымъ отъ солнца. Эти наблюденія поставлены такимъ образомъ, что они указываютъ не только количество солнечнаго тепла, достигающее земли, но также и количество тепла, которое достигло бы тѣла, лишеннаго атмосферы, подобно лунѣ.

Наблюденія указали, что солнце, повидимому, является перемѣнной звѣздой съ колебаніями въ предѣлахъ отъ пяти до десяти процентовъ и съ неправильнымъ періодомъ отъ пяти до десяти дней. Въ 1911 г. Абботъ производилъ наблюденія въ Алжирѣ, въ то время какъ его коллега Алдричъ (Aldrich) — на Маунтъ-Уильсонѣ. Основаніемъ для такихъ двойныхъ измѣреній послужило желаніе исключить вліяніе мѣстныхъ атмосферныхъ условій на наблюденія на Маунтъ-Уильсонѣ. Такъ какъ Алжиръ удаленъ отъ Маунтъ-Уильсона почти на треть окружности земли, то считалось совершенно невѣроятнымъ, чтобы на обѣихъ станціяхъ произошли одинаковыя мѣстныя нарушенія въ одинъ и тотъ же день и при томъ одинаковымъ образомъ. Наблюденія 1911 года вполнѣ подтверждали предположеніе, что солнце есть перемѣнная звѣзда; но вслѣдствіе облачности не удалось произвести число наблюденій, достаточное для того, чтобы окончательно установить это обстоятельство. Поэтому рѣшено было въ прошломъ году еще разъ вернуться въ Алжиръ.

Ассистентомъ Аббота въ Алжирѣ былъ Андерсъ Кнутсонъ Ангстрёмъ (Anders Knutson Angström) изъ Упсалы (Швеція). Ангстрёмъ происходитъ изъ выдающейся семьи ученыхъ. О его дѣдѣ Андерсѣ Ангстрёмѣ Кайзеръ (Kayser) говоритъ въ своемъ трудѣ о спектроскопіи:

«Тогда появился человѣкъ настолько великій, что имя его всегда будетъ связано съ исторіей спектроскопіи». Отецъ Ангстрёма Кнутъ Ангстрёмъ былъ человѣкомъ, не менѣе выдающимся, чѣмъ дѣдъ, и изобрѣлъ много цѣнныхъ приборовъ для измѣренія солнечной и земной радіаціи. Нынѣшній Ангстрёмъ интересуется тѣми же вопросами, которыми занимался его отецъ, и работаетъ теперь въ университетѣ Корнелля (Cornell University).

Наблюденія, произведенныя Смитсоновской экспедиціей въ прошломъ году въ Алжирѣ, были, повидимому, вполнѣ удовлетворительны. Они заняли 65 дней, и въ теченіе больше 50 изъ этихъ дней Фауль (Fowle) производилъ подобныя же наблюденія на Маунтъ-Уильсонѣ. Теперь можно быть увѣреннымъ, что результаты работы 1911 и 1912 г. г. либо твердо установятъ предполагаемый перемѣнный характеръ солнца, либо докажутъ окончательно, что эта гипотеза должна быть оставлена. Когда эти результаты будутъ опубликованы, мы сообщимъ о нихъ.

БИБЛІОГРАФІЯ.

I. Рецензіи.

С. П. Виноградовъ. *Курсъ прямолинейной тригонометріи.* Москва, 1912. Ц. 70 к.

Исторія тригонометріи распадается на періоды, рѣзко различающіеся по взглядамъ на значеніе тригонометрическихъ функцій. Ранній, весьма продолжительный, періодъ характеризуется разсмотрѣніемъ этихъ функцій, какъ вспомогательныхъ величинъ, необходимыхъ для рѣшенія треугольниковъ. Второй періодъ, связанный, главнымъ образомъ, съ именемъ Эйлера, выдвинулъ на первый планъ идею функціональной зависимости. Тригонометрическія величины стали съ этого времени не столько средствомъ вычисленія, сколько средствомъ выраженія зависимости между величинами. Теорія тригонометрическихъ функцій прониклась идеями высшей математики, и дальнѣйшая разработка ея пошла въ томъ направленіи, какое оказалось нужнымъ съ точки зрѣнія требованій анализа. Когда тригонометрія оказалась включенной въ программу средняго образованія, съ ея изложеніемъ случилось слѣдующее. Такъ какъ принципы высшей математики остались за дверями средней школы, то теорія тригонометрическихъ функцій оказалась оторванной отъ той почвы, на которой она получила свое окончательное развитіе; но въ элементарный курсъ она вошла со всѣми тѣми аттрибутами, которые появились у нея какъ разъ на этой почвѣ. Поэтому для ученика, впервые приступавшаго къ изученію тригонометріи, въ ея изложеніи оказывалось очень много психологически непонятнаго и страннаго: зачѣмъ разсматривать аргументъ измѣняющимся отъ $-\infty$ до $+\infty$, когда для рѣшенія треугольниковъ необходимы лишь функціи остраго, прямого и тупого угла? зачѣмъ измѣрять углы и дуги въ такъ называемыхъ абсолютныхъ единицахъ? и т. п. Слѣдуетъ замѣтить, что, по мѣрѣ увеличенія строгости изложенія тригонометріи, положеніе изучавшаго ее становилось не лучше, а хуже, а самый курсъ средней школы принималъ все болѣе и болѣе уродливыя формы. Такъ, въ большинствѣ учебниковъ терминъ «тригонометрическая величина» смѣнился терминомъ «тригонометрическая функція», что указываетъ на признаніе важности и въ курсѣ средней школы идеи функціональной зависимости, но, при сохраненіи неизмѣннымъ общаго характера изложенія алгебры, это имѣло своимъ слѣдствіемъ лишь то, что учащіеся стали знакомиться съ идеей функціи не на простѣйшихъ примѣрахъ линейной и квадратной функцій, а на такихъ своеобразныхъ, какъ тригонометрическія, а то и безконечно многозначныя — имъ обратныя. Не улучшило положенія и внесенное программами 1906 года реальныхъ училищъ дѣленіе курса тригонометріи на два концентра, такъ какъ, удѣливъ на первый концентръ, которому мѣсто въ курсѣ геометріи послѣ главы о подобіи, два годовыхъ часа, оно неимовѣрно раздуло его объемъ и наполнило его никому ненужными особыми случаями рѣшенія треугольниковъ; мало улучшилось и положеніе самой теоріи тригонометрическихъ функцій отъ включенія въ программу VII-го класса реальныхъ училищъ элементовъ аналитической геометріи и анализа, такъ какъ по программѣ новые предметы не ставятся въ органическую связь съ общимъ курсомъ математики, а представляютъ на немъ чисто механическую надстройку.

Однимъ изъ главныхъ достоинствъ разбираемаго нами учебника тригонометріи является то, что въ немъ теорія тригонометрическихъ функцій приведена въ связь съ общимъ понятіемъ о функціи, идеей координатъ, графическимъ представленіемъ функцій, начиная съ простѣйшихъ, и идеей непрерывнаго измѣненія. Такая постановка вопроса позволяетъ автору, не вызывая никакихъ недоразумѣній, съ самаго начала ввести общее опредѣленіе тригонометрическихъ функцій и разсматривать аргументъ измѣняющимся отъ $-\infty$ до $+\infty$. Введеніе главы о проекціяхъ, необходимой не только въ курсѣ тригонометріи, позволяетъ выяснить мотивы установленія правила знаковъ (особенно для cosinus'а), а автору дало возможность обойтись безъ искусственныхъ «доказательствъ о б щ н о с т и» теоремы сложенія. Слѣдуетъ, правда, указать на допущенный при изложеніи недосмотръ, заключающійся въ отсутствіи указанія выраженія проекціи отрѣзка, расположеннаго на оси, на другую ось; послѣднее можетъ вызвать нѣкоторыя затрудненія при выводѣ формулъ $\cos(\alpha+\beta)$ и $\sin(\alpha+\beta)$. Весьма удачной является идея разсмотрѣнія дугъ (для вывода формулъ приведенія), концы которыхъ симметричны относительно той или иной оси. Намъ кажется только, что мысль эту можно провести нѣсколько дальше, чѣмъ это сдѣлалъ авторъ, и использовать ее при разсмотрѣніи функцій взаимно дополнительныхъ дугъ, концы которыхъ симметричны относительно биссектрисы нормальнаго угла; послѣднее освободило бы автора отъ необходимости сохранить общепринятый въ учебникахъ двоякій способъ выбора положительныхъ направленій для взаимнодополнительныхъ дугъ. Весьма умѣстнымъ является включеніе въ курсъ тригонометріи теоріи комплексныхъ количествъ, позволяющее дать доказательство такой важной теоремы, какъ такъ называемая формула М у а в р а. Считая въ общемъ изложеніе этой главы образцовымъ, мы все-таки думаемъ, что данное въ немъ опредѣленіе произведенія двухъ комплексныхъ чиселъ можетъ оказаться психологически непріемлемымъ для ученика въ виду своего появленія, какъ deus ex machina, а также и весьма труднымъ для запоминанія, и хотѣлось бы поэтому, чтобы къ этому опредѣленію, хотя бы послѣ, данъ былъ своего рода «ключъ». Очень хорошо и просто разобранъ вопросъ о рѣшеніи тригонометрическихъ уравненій.

Въ общемъ изложеніе учебника можно считать образцовымъ, и остается лишь пожелать распространенія разобранной книгѣ, всецѣло проникнутой идеей реформы, заключающейся не въ ломкѣ программъ, а въ освѣщеніи наличнаго курса средней школы съ точки зрѣнія принциповъ высшей математики.

А. Волковъ.

Отъ Организаціоннаго Комитета 2-го Всероссійскаго Съѣзда преподавателей математики.

На первомъ Всероссійскомъ Съѣздѣ Преподавателей Математики, состоявшемся въ С.-Петербургѣ въ декабрѣ 1911 — январѣ 1912 года, было постановлено созвать 2-й Всероссійскій Съѣздъ преподавателей математики во время рождественскихъ вакацій 1913 — 1914 года, и выражено пожеланіе, чтобы организацію этого Съѣзда принялъ на себя Московскій Математическій Кружокъ. Во исполненіе этого постановленія, весною 1912 года, особо составленнымъ Организаціоннымъ Комитетомъ былъ разработанъ проектъ Положенія о 2-омъ Всероссійскомъ Съѣздѣ преподавателей математики и возбуждено ходатайство о его разрѣшеніи предъ Министерствомъ Внутреннихъ Дѣлъ. Осенью 1912 года послѣдовало разрѣшеніе на устройство 2-го Съѣзда и одобрено Положеніе о немъ, выработанное Организаціоннымъ Комитетомъ.

Доводя о семъ до всеобщаго свѣдѣнія, Организаціонный Комитетъ 2-го Съѣзда приглашаетъ профессоровъ, преподавателей и преподавательницъ математическихъ наукъ и вообще всѣхъ лицъ, интересующихся вопросами преподаванія математики и близкихъ къ ней наукъ, принять участіе въ Съѣздѣ вступленіемъ въ число его членовъ, а также чтеніемъ на немъ докладовъ и рефератовъ и доставленіемъ экспонатовъ на имѣющую быть при немъ выставку учебныхъ пособій.

Для непосредственнаго завѣдыванія дѣломъ устройства Съѣзда Организаціоннымъ Комитетомъ избрано бюро Съѣзда въ слѣдующемъ составѣ: Предсѣдатель — проф. Б. К. Млодзѣевскій. Товарищи предсѣдателя — С. М. Зегеръ, проф. А. К. Власовъ. Казначеи — М. Ѳ. Бергъ, А. Я. Модестовъ. Секретари — А. А. Волковъ, А. П. Поляковъ, І. И. Чистяковъ.

Адресъ бюро Организаціоннаго Комитета 2-го Всероссійскаго Съѣзда преподавателей математики: *Москва, М.-Знаменскій пер., Реальное училище К. К. Мазинга.*

Заявленія о желаніи вступить въ члены Съѣзда должны быть направляемы по этому адресу вмѣстѣ съ членскими взносами на имя казначея Съѣзда Алексѣя Яковлевича Модестова. По тому же адресу должны быть присылаемы заявленія о желаніи сдѣлать доклады (съ приложеніемъ или подлинныхъ докладовъ, или краткаго изложенія ихъ содержанія). При этомъ Комитетъ покорнѣйше проситъ упомянутыя заявленія дѣлать, по возможности, ранѣе, въ виду необходимости заблаговременно опредѣлить, хотя бы приблизительно, число членовъ Съѣзда и число предполагаемыхъ сообщеній. Эти свѣдѣнія Комитету желательно имѣть, между прочимъ, въ виду его намѣренія исхлопотать для пріѣзжихъ членовъ Съѣзда удешевленныя помѣщенія, а также для опредѣленія необходимаго для печатанія количества экземпляровъ «Бюллетеней» Съѣзда. Первые выпуски означенныхъ «Бюллетеней», содержащіе свѣдѣнія о ходѣ работъ Организаціоннаго Комитета, предполагается разсылать лицамъ, записавшимся въ члены Съѣзда, еще до его открытія.

Положеніе о 2-мъ Всероссійскомъ Съѣздѣ преподавателей математики.

§ 1. 2-й Всероссійскій Съѣздъ преподавателей математики созывается въ Москвѣ Организаціоннымъ Комитетомъ при ближайшемъ участіи Московскаго Математическаго Кружка.—§ 2. Съѣздъ открывается 27 декабря 1913 г. и продолжается по 3 января 1914 года включительно.—§ 3. Съѣздъ имѣетъ цѣлью: 1) обсужденіе научныхъ вопросовъ имѣющихъ отношеніе къ элементарной математикѣ; 2) разсмотрѣніе современной постановки преподаванія математики въ учебныхъ заведеніяхъ различныхъ типовъ, преимущественно— въ среднихъ; 3) обсужденіе вопросовъ о желательной постановкѣ преподаванія математическихъ наукъ; 4) обсужденіе вопросовъ о методахъ и пріемахъ преподаванія математики и соприкасающихся съ нею наукъ и о способахъ провѣрки знаній учащихся; 5) обсужденіе вопроса о подготовленіи преподавателей математики.—§ 4. Для непосредственнаго завѣдыванія дѣлами Съѣзда Организаціонный Комитетъ избираетъ изъ своей среды предсѣдателя, товарищей предсѣдателя, секретарей и казначея. Въ случаѣ надобности Организаціонный Комитетъ можетъ пополнить свой составъ новыми членами.—§ 5. Организаціонный Комитетъ устраиваетъ секціи Съѣзда по отдѣльнымъ группамъ вопросовъ и избираетъ изъ своей среды завѣдующихъ этими секціями.—§ 6. Членами Съѣзда могутъ быть профессора, преподаватели и преподавательницы математическихъ наукъ; члены математическихъ и педагогическихъ обществъ и кружковъ, а также лица, заявившія себя печатными трудами въ области математики и общей педагогики. Всѣ прочія лица, интересующіяся дѣятельностью Съѣзда, могутъ вступать въ число его членовъ, но безъ права рѣшающаго голоса.—§ 7. Лица, желающія вступить въ число членовъ Съѣзда, заявляютъ объ этомъ Организаціонному Комитету, прилагая членскій взносъ въ размѣрѣ трехъ рублей.—§ 8. При Съѣздѣ организуется выставка учебныхъ и наглядныхъ пособій по математикѣ. Лица, не состоящія членами Съѣзда, допускаются къ осмотру выставки за особую плату.—§ 9. Лица, желающія сдѣлать доклады, заявляютъ объ этомъ въ Организаціонный Комитетъ не позже 1 декабря 1913 года съ приложеніемъ или подлинныхъ докладовъ, или краткаго изложенія ихъ содержанія. Не доставленныя къ этому сроку сообщенія могутъ быть прочитаны только съ особаго разрѣшенія Организаціоннаго Комитета. Порядокъ и продолжительность докладовъ устанавливаются Организаціоннымъ Комитетомъ.—§ 10. Организаціонный Комитетъ выпускаетъ дневникъ Съѣзда. Для редактированія изданій Съѣзда Организаціонный Комитетъ избираетъ особое лицо.—§ 11. Организаціонный Комитетъ, на основаніи постановленій какъ общихъ, такъ и секціонныхъ собраній Съѣзда, вноситъ въ заключительное общее собраніе проекты резолюцій по вопросамъ, обсуждавшимся на Съѣздѣ, для голосованія. Соотвѣтствующія резолюціи принимаются или отвергаются безъ преній простымъ большинствомъ голосовъ.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей привать-доцента **Е. Л. Буницкаго.**

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 86 (6 сер.). Привести къ логариѳмическому виду выраженія

$$P = \sin\frac{A}{4} + \sin\frac{B}{4} + \sin\frac{C}{4} + \cos\frac{A}{4} + \cos\frac{B}{4} + \cos\frac{C}{4}$$

и

$$Q = \sin\left(A + \frac{B}{4}\right) + \sin\left(B + \frac{C}{4}\right) + \sin\left(C + \frac{A}{4}\right) +$$

$$+ \cos\left(A + \frac{B}{4}\right) + \cos\left(B + \frac{C}{4}\right) + \cos\left(C + \frac{A}{4}\right)$$

при условіи $A + B + C = 180^\circ$.

Е. Григорьевъ (Саратовъ).

№ 87 (6 сер.). Даны точки F и G и двѣ прямыя AB и CD, точка пересѣченія которыхъ недоступна. Требуется построить окружность, проходящую черезъ эту недоступную точку и черезъ данныя точки F и G.

И. Александровъ (Москва).

№ 88 (6 сер.). Доказать справедливость тожества

$$C_0^0 \cdot C_{2n}^n + C_2^1 \cdot C_{2n-2}^{n-1} + \cdots + C_{2k}^k \cdot C_{2n-2k}^{n-k} + \cdots + C_{2n}^n \cdot C_0^0 = 2^{2n},$$

гдѣ символъ C_p^q обозначаетъ вообще число сочетаній изъ p элементовъ по q, а $C_0^0 = 1$.

Л. Богдановичъ (Ярославль)

№ 89 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5.$$

С. Посновъ (Петербургъ).

ПОПРАВКА:

Въ задачѣ **№ 60** (6 сер.), помѣщенной въ № 572—573 „Вѣстника", слѣдуетъ читать въ концѣ условія „наименьшаго значенія", а не „наибольшаго значенія".

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 41 (6 сер.). *Найти предѣлъ, къ которому стремится произведеніе*

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{1}{m^2}\right)\left(1+\frac{1}{m^4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{m^{2^n}}\right),$$

гдѣ $m>1$*, если* n *безконечно возрастаетъ.*

Умноживъ разсматриваемое выраженіе на разность $1-\dfrac{1}{m}$, получимъ послѣ надлежащихъ преобразованій:

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{1}{m^2}\right)\left(1+\frac{1}{m^4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{m^{2^n}}\right)\right]$$

$$=\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{1}{m}\right)\left[\left(1+\frac{1}{m^2}\right)\left(1+\frac{1}{m^4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{m^{2^n}}\right)\right]$$

$$=\left(1-\frac{1}{m^2}\right)\left(1+\frac{1}{m^2}\right)\left[\left(1+\frac{1}{m^4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{m^{2^n}}\right)\right]$$

$$=\left(1-\frac{1}{m^4}\right)\left(1+\frac{1}{m^4}\right)\left(1+\frac{1}{m^8}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{m^{2^n}}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{m^8}\right)\left(1+\frac{1}{m^8}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{m^{2^n}}\right)=\ldots=\left(1-\frac{1}{m^{2^n}}\right)\left(1+\frac{1}{m^{2^n}}\right)=1-\frac{1}{m^{2^{n+1}}}$$

Итакъ, называя разсматриваемое выраженіе черезъ p_n, имѣемъ:

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)p_n=1-\frac{1}{m^{2^{n+1}}},$$

откуда

$$p_n=\frac{1-\dfrac{1}{m^{2^{n+1}}}}{1-\dfrac{1}{m}}.$$

Слѣдовательно,

$$\lim_{n=\infty} p_n = \lim_{n=\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{m}\right)^{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{m}} = \frac{1-\lim\limits_{n=\infty}\left(\frac{1}{m}\right)^{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{m}} = \frac{1}{1-\frac{1}{m}} = \frac{m}{m-1},$$

такъ какъ, при $m > 1$, $\lim\limits_{n=\infty}\left(\frac{1}{m}\right)^{2^{n+1}} = 0.$

М. Вайнбергъ (Одесса); *Н. Павлова* (Петербургъ).

№ 59 (6 сер.). *Доказать что выраженіе*

$$3^{3n+2} + 5 . 2^{3n+1}$$

кратно 19 *при* n *цѣломъ и неотрицательномъ.*

Послѣ ряда преобразованій имѣемъ:

$$3^{3n+2} + 5 . 2^{3n+1} = 3^2(3^3)^n + 5 . 2(2^3)^n = 9 . 27^n + 10 . 8^n - 19 . 8^n + 19 . 8^n =$$

$$= 9 . (27^n - 8^n) + 19 . 8^n.$$

Разность одинаковыхъ степеней $27^n - 8^n$ кратна разности 27—8, т. е. числа 19, и членъ $19 . 8^n$ тоже кратенъ 19 при n цѣломъ и неотрицательномъ; значитъ, и данное выраженіе кратно 19 при тѣхъ же условіяхъ.

Д. Синцовъ (Харьковъ); *В. Маловичко*; *Л. Марголинъ* (Петербургъ); *Р. Витвинскій* (Тирасполь); *А. Кисловъ* (Москва); *В. Лаватцъ* (Харьковъ); *И. Зюзинъ* (Архангельскъ); *Л. Закутинскій* (Черкассы); *А. Русецкій* (Кіевъ); *А. Ющенко* (Чита); *Н. Кирьяновъ* (Петербургъ).

№ 61 (6 сер.). *На сторонахъ* AB *и* AC *треугольника* ABC *взяты соотвѣтственно точки* D *и* E *такъ, что площадь всего треугольника оказывается вдвое больше площади* ADE; *затѣмъ проведена медіана* CM *треугольника* ABC. *Доказать, что прямыя* DE *и* CM *встрѣчаются въ точкѣ* I, *для которой удовлетворяется равенство*

$$IM . ID = IE . IC.$$

Треугольникъ AMC имѣетъ общую съ треугольникомъ ABC высоту, проведенную изъ вершины C, и основаніе AM, равное по построенію половинѣ основанія AB. Поэтому площадь треугольника AMC равна половинѣ площади треугольника ABC, т. е. равна площади треугольника ADE, площадь котораго по условію составляетъ тоже половину площади треугольника ABC. Вычитая изъ равныхъ площадей треугольниковъ AMC и ADE одну и ту же площадь четырехугольника $AMIE$, находимъ, что треугольники MID и EIC, имѣющіе при вершинѣ I равные углы, равновелики. Слѣдовательно,

$$\frac{\text{площ. } MID}{\text{площ. } EIC} = 1 = \frac{IM . ID}{IE . IC},$$

откуда $IM . ID = IE . IC$.

Р. Витвинскій (Тирасполь); *И. Зюзинъ* (с. Архангельское); *В. Кованько* (ст. Струнино); *N. N.*; *А. Ющенко* (Чита); *Н. Кирьяновъ* (Петербургъ).

№ 63 (6 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$\frac{x-4\sqrt{x-1}}{x-1}+\frac{4}{x}=0.$$

Представивъ данное уравненіе въ видѣ

$$\frac{x^2-4x\sqrt{x-1}+4(x-1)}{x(x-1)}=\frac{(x-2\sqrt{x-1})^2}{x(x-1)}=0,$$

приравниваемъ числителя нулю. Тогда получимъ:

$$x-2\sqrt{x-1}=0, \text{ откуда } x^2-4x+4=(x-2)^2=0, \text{ т. е. } x=2.$$

Этотъ корень числителя не обращаетъ въ нуль знаменателя $x(x-1)$, а потому $x=2$ есть корень и первоначальнаго уравненія.

Д. Синцовъ (Харьковъ); *Л. Моргулисъ* (Петербургъ); *В. Кованько* (ст. Струнино). *Л. Закутинскій* (Черкассы); *М. Софроновъ* (Уральскъ); *А. Ильинъ* (Астрахань); *Б. Посновъ* (Бѣжица); *И. Зюзинъ* (с. Архангельское); *А. Кисловъ* (Москва); *А. Бутомо*; *А. Русецкій* (Кіевъ); *Н. Нейцъ* (Самара); *Н. Кирьяновъ* (Петербургъ); *А. Сердобинскій* (Чита); *С. М.* (Астрахань).

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника", подходящихъ подъ его програму и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

Новыя идеи въ физикѣ. Непеміодическое изданіе, выходящее подъ редакціей заслуженнаго проф. С.-Петербургскаго Университета И. И. Боргмана. Сборникъ № 6. „Природа теплоты". Изданіе кн-ва „Образованіе". СПб., 1913. Стр. 158. Ц. 80 к.

Естествознаніе въ школѣ. Непеpіодическое изданіе, выходящее подъ общей редакціей профессоровъ В. А. Вагнера и Б. Е. Райкова. Сборникъ № 2. „Преподаваніе начальнаго природовѣдѣнія". Изд. кн-ва „Образованіе". СПб., 1913. Стр. 140 Ц. 80 к.

Географія въ школѣ. Непеpіодическое изданіе, выходящее подъ редакціей Я. И. Руднева. Сборникъ № 1. „Вопросы преподаванія и методики географіи въ средней и народной школѣ". Изданіе кн-ва „Образованіе". СПб, 1913. Стр. 128. Ц. 80 к.

Фр. Содди. *Химія радіоэлементовъ.* Перев. съ англійск. Я. Р. Шмидтъ подъ редакціей и съ примѣчаніями В. А. Бородовскаго. Изданіе кн-ва „Образованіе". СПб. 1913. Стр. 139. Ц. 80 к.

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Обложка
пщется

Обложка
ищется