Обложка
ищется

Обложка
пщется

XLIX Сем. № 11.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 587.

Содержаніе: Число и величина молекулъ и атомовъ. *М. Смолуховскаго.* (Окончаніе). — Примѣръ одной функціи. *Ф. Мазуровскаго.* — Вторая стадія развитія счисленія дробей. *Прив.-доц. В. Бобынина.* (Окончаніе). — Англійская ассоціація преподавателей математики. *Н. Г. Плехановой.* — Задачи №№ 110 — 113 (6 сер.). — Объявленія.

Число и величина молекулъ и атомовъ.

М. Смолуховскаго.

*(Окончаніе *).*

Какъ же приходится смотрѣть на этотъ вопросъ съ точки зрѣнія современной науки? Оказывается, что противъ всего метода Лошмидта можно выдвинуть очень важныя возраженія, которыя низводятъ полученный имъ результатъ до степени лишь очень грубаго приближенія.

Прежде всего давно ужъ не подлежитъ никакому сомнѣнію, что тѣ формулы, которыя О. Э. Майеръ и Клаузіусъ употребляли для вычисленія средней длины свободнаго пути изъ явленій диффузіи и т. п., были выведены неправильно. Общая форма ихъ, несомнѣнно, правильна, но значеніе содержащихся въ нихъ численныхъ коэффиціентовъ до сихъ поръ еще неизвѣстно достаточно точно. Именно, Больцману (Boltzmann) удалось обнаружить ошибки вычисленій, лежащихъ въ основѣ этихъ формулъ, но этому выдающемуся теоретику, несмотря на всѣ старанія, не удалось исправить ихъ. И до сихъ поръ еще эти вычисленія, основанныя на предположеніи, что молекулы обладаютъ свойствами упругихъ шаровъ, не произведены вполнѣ точно, и даже новѣйшія работы Ланжевена (Langevin) и Жана (Jeans) не даютъ еще окончательнаго разрѣшенія этихъ трудностей.

*) См. „Вѣстникъ", № 586.

Съ другой стороны упомянутая выше теорія Клазіуса-Мозотти представляетъ теперь лишь историческій интересъ, ибо теперь мы несомнѣнно знаемъ, что молекулы и атомы не могутъ быть разсматриваемы, какъ проводники электричества.

Но еще гораздо важнѣе слѣдующее вполнѣ принципіальное возраженіе: обладаютъ ли молекулы и атомы вообще неизмѣннымъ объемомъ? Тѣ, кто стоитъ далеко отъ современной физики и кто привыкъ видѣть въ нихъ нѣчто въ родѣ твердыхъ и неизмѣнныхъ зеренъ, считаютъ это почти самоочевиднымъ; но современные физики держатся другого мнѣнія. Прежде всего мы уже знаемъ теперь, что такъ называемые атомы вовсе не суть недѣлимыя части однороднаго вещества (что бы мы подъ этимъ ни понимали), но обладаютъ сложнымъ внутреннимъ строеніемъ; явленія радіоактивнаго распада и спектральнаго излученія неопровержимо доказываютъ это.

Поэтому уже a priori вполнѣ очевидно, что предѣлъ, до котораго могутъ сблизиться два такихъ атома и который опредѣляетъ величину видимо непроницаемаго собственнаго объема, зависитъ отъ того давленія, съ которымъ атомы принимаются одинъ къ другому, быть можетъ, также и отъ температуры, которая господствуетъ въ системѣ, и т. д. Можно было бы ожидать, что центры атомовъ, налетающихъ другъ на друга съ большой скоростью, ближе подходятъ одинъ къ другому, чѣмъ въ томъ случаѣ, если они двигаются съ меньшей скоростью. И дѣйствительно, еще 40 лѣтъ тому назадъ Стефанъ (Stefan) пришелъ къ такому заключенію на основаніи экспериментальнаго опредѣленія измѣненія вязкости газовъ съ температурой. Замѣчательное подтвержденіе получилъ этотъ взглядъ въ новѣйшихъ опытахъ надъ поглощеніемъ α-лучей веществомъ; оказалось, что α-частицы, т. е. заряженные положительнымъ электричествомъ и выбрасываемые съ громадной скоростью около 20 000 *км.* въ секунду атомы гелія, проникаютъ черезъ многія сотни атомовъ матеріальнаго тѣла, — напримѣръ, золота, — не испытывая замѣтнаго отклоненія отъ прямолинейнаго пути.

Изъ всего этого, повидимому, вытекаетъ, что величина видимо непроницаемаго атомнаго ядра зависитъ отъ внѣшнихъ условій, при которыхъ они наблюдаются, что она можетъ, напримѣръ, для одного и того же вещества въ газообразномъ и въ жидкомъ состояніи быть различной.

Кромѣ того, предположеніе о сферической формѣ атома, конечно, вполнѣ произвольно, а для многоатомныхъ молекулъ, во всякомъ случаѣ, несомнѣнно неправильно.

Эти соображенія не только опровергаютъ правильность метода Лошмидта для вычисленія величины молекулъ, но и обнаруживаютъ, что весь вопросъ долженъ быть, въ сущности, формулированъ иначе. Основная задача атомистики заключается въ вопросѣ о числѣ атомовъ, содержащихся въ опредѣленномъ количествѣ вещества. Это — ясный, опредѣленный вопросъ, совершенно не зависящій отъ вопроса о природѣ атомовъ. Если это число извѣстно, то тогда только можно заняться вопросомъ, насколько внѣшнія условія вліяютъ на объемъ атома или молекулы, и каковъ этотъ объемъ при нормальныхъ условіяхъ.

Послѣ Лошмидта появился еще цѣлый рядъ другихъ методовъ для рѣшенія этого вопроса, на основаніи которыхъ для діаметра атома были вычислены значенія отъ 10^{-7} до 10^{-8} *см.* Многіе изъ этихъ методовъ очень интересны и остроумны, но дѣйствительнаго шага впередъ все-таки не представляютъ, такъ какъ большинство изъ нихъ покоится на еще болѣе шаткой и гипотетической основѣ, и противъ всѣхъ нихъ можно выдвинуть тѣ же принципіальныя возраженія.

Лишь въ послѣдніе годы появилось нѣсколько работъ, которыя соотвѣтствуютъ приведенной выше раціональной формулировкѣ вопроса и бросаютъ совершенно новый свѣтъ на всю проблему, такъ какъ онѣ даютъ возможность непосредственно опредѣлить число молекулъ.

Прежде всего слѣдуетъ назвать нѣкоторые методы, которые всѣ могутъ быть подведены подъ общую точку зрѣнія. А именно, всѣ они основаны на наблюденіи состоянія термодинамическаго равновѣсія и обнаруживаютъ въ этой области существованіе извѣстныхъ аномалій, которыя противорѣчатъ традиціонной термодинамикѣ и вполнѣ объясняются, если принять, что число молекулъ конечно. Теорія этихъ явленій разработана Эйнштейномъ (Einstein) и Смолуховскимъ (Smoluchowski), при чемъ въ одномъ случаѣ нашлись точки соприкосновенія съ болѣе старыми работами лорда Рэлея (Lord Rayleigh); экспериментальная сторона составляетъ, главнымъ образомъ, заслугу Перрена (Perrin). Не входя въ подробности, которыя завели бы насъ слишкомъ далеко, мы ограничимся упоминаніемъ слѣдующихъ методовъ:

1. наблюденіе броуновскаго молекулярнаго движенія;
2. явленія опалесценціи въ газахъ;
3. распредѣленіе частицъ эмульсіи подъ дѣйствіемъ силы тяжести.

Этотъ послѣдній методъ — теоретически самый простой и экспериментально наиболѣе разработанный; поэтому о немъ можно будетъ сказать нѣсколько подробнѣе.

Основная мысль — слѣдующая. Если бы мы могли искусственно приготовить молекулы, размѣры или массу которыхъ можно было бы опредѣлить непосредственно, и если бы, съ другой стороны, мы могли обычными физико-химическими методами опредѣлить ихъ химическій молекулярный вѣсъ (по сравненію съ атомомъ водорода), то вся проблема была бы рѣшена, такъ какъ мы имѣли бы здѣсь средство вычислить абсолютный вѣсъ атома водорода, а вмѣстѣ съ тѣмъ и опредѣлить вообще число атомовъ, содержащихся въ нѣкоторомъ данномъ количествѣ вещества.

Въ извѣстномъ смыслѣ это, дѣйствительно, можно выполнить. Если растереть съ водой употребляемую живописцами желтую краску — гуммигуттъ, то получается эмульсія. Согласно кинетической теоріи, частицы, суспендированныя въ жидкости, подобныя тѣмъ микроскопически-видимымъ зернышкамъ гуммигутта, изъ которыхъ состоитъ эмульсія, должны въ извѣстномъ смыслѣ обладать тѣми же свойствами, что и молекулы газа: онѣ обладаютъ такой же кинетической энергіей движенія и соотвѣтственно съ этимъ производятъ осмотическое давленіе. Какъ извѣстно, Вант-Гоффъ (Vant' Hoff) давно ужъ показалъ на основаніи опытовъ Пфеффера (Pfeffer), что молекулы раствореннаго вещества производятъ такое осмотическое давленіе, какъ если бы онѣ образовывали газообразную среду, и притомъ независящее отъ вещества растворителя. То же самое должно быть вѣрно и для произвольно большихъ частицъ, такъ какъ величина ихъ не играетъ роли въ этомъ соотношеніи.

Поэтому, если предоставить эмульсію дѣйствію одной только силы тяжести, то суспендированныя частицы не опустятся съ теченіемъ времени совершенно на дно, какъ это думали прежде, но образуютъ на днѣ сосуда слой конечной толщины и снизу вверхъ постепенно уменьшающейся плотности, который можно сравнить съ газообразной земной атмосферой. Ибо въ обоихъ случаяхъ дѣйствіе тяжести частицъ или, соотвѣтственно, молекулъ воздуха, которое само по себѣ заставило бы ихъ опуститься на дно, уравновѣшивается противоположнымъ дѣйствіемъ непрерывнаго молекулярнаго движенія, такъ что получающееся въ окончательномъ результатѣ распредѣленіе является какъ бы компромиссомъ между этими двумя противоположными тенденціями. Различіе этихъ двухъ случаевъ — только количественное, такъ какъ относительно болѣе крупныя частицы эмульсіи, конечно, въ гораздо большей мѣрѣ подчиняются силѣ тяжести, чѣмъ молекулы воздуха. Поэтому, въ то время какъ земная атмосфера лишь на высотѣ 5600 *м.* имѣетъ плотность, вдвое меньшую, чѣмъ на уровнѣ моря, Перренъ наблюдалъ, напримѣръ, что въ эмульсіи гуммигутта, зернышки которой имѣли въ діаметрѣ 0,0009 *мм.*, число зернышекъ, заключающихся въ опредѣленномъ объемѣ, уменьшалось до половины уже на высотѣ 0,003 *мм.*

Эти два числа, 5600 *м.* и 0,003 *мм.*, служатъ мѣрой для высоты земной атмосферы и собирающейся на днѣ сосуда атмосферы гуммигутта. Они даютъ въ то же время средство опредѣлить относительный вѣсъ этихъ зернышекъ-молекулъ гуммигутта по сравненію съ молекулами водорода въ силу того общаго положенія, что эта высота для различныхъ газовъ должна быть обратно пропорціональна ихъ молекулярнымъ вѣсамъ. Въ нашемъ случаѣ нужно, впрочемъ, ввести еще одну поправку, такъ какъ вѣсъ зернышекъ гуммигутта замѣтно уменьшается благодаря гидростатической подъемной силѣ. Съ другой стороны, абсолютный вѣсъ этихъ зернышекъ легко вычислить, зная ихъ размѣры; отношеніе этихъ двухъ чиселъ и даетъ тотъ множитель, на который нужно умножить химическій атомный или молекулярный вѣсъ, чтобы получить абсолютный вѣсъ атома или молекулы въ граммахъ. По измѣреніямъ Перрена для водорода получается $\frac{1}{7.10^{23}}$; слѣдовательно, и наоборотъ — 1 *гр.* водорода состоитъ изъ 7.10^{23} атомовъ.

Это и есть то основное число, о которомъ шла рѣчь выше. Чтобы практически выполнить измѣренія, лежащія въ основѣ этихъ вычисленій, приходится преодолѣть много техническихъ трудностей, каковы, напримѣръ, приготовленіе эмульсіи со строго одинаковыми зернышками, точное опредѣленіе величины ихъ, сосчитываніе большого числа зернышекъ на точно измѣренномъ уровнѣ и т. д.; однако, съ помощью нѣкоторыхъ искусственныхъ пріемовъ все это можно выполнить сравнительно просто. Перренъ считаетъ число, полученное имъ и его сотрудниками Дабровскимъ (Dabrowski) и Шодесэгомъ (Chaudesaigues), тѣмъ болѣе заслуживающимъ довѣрія, что значенія, полученныя изъ наблюденія броуновскаго движенія, очень хорошо съ нимъ согласуются.

Прежде чѣмъ перейти къ дальнѣйшему обсужденію выводовъ, связанныхъ съ этимъ опредѣленіемъ, я изложу вкратцѣ еще одинъ новѣйшій методъ, который основанъ на совершенно другихъ принципахъ, но по своей простотѣ соперничаетъ съ вышеизложеннымъ, а по точности, пожалуй, даже превосходитъ его.

Какъ извѣстно, при электролизѣ необходимо, чтобы въ токъ было пропущено 96 513 кулоновъ электричества для выдѣленія 1 *гр.* водорода (или какого-нибудь другого одновалентнаго іона). Но одновалентные іоны водорода возникаютъ благодаря отщепленію одного электрона отъ химическаго атома водорода; слѣдовательно, каждый такой атомъ несетъ по одному элементарному электрическому заряду. Если бы былъ извѣстенъ зарядъ одного электрона, то достаточно было бы просто раздѣлить вышеприведенное число на это послѣднее, чтобы получить число атомовъ, содержащихся въ 1 *гр.* водорода. Точность этого метода зависитъ только отъ точнаго опредѣленія заряда электрона.

Въ этомъ отношеніи за послѣдніе два года нужно констатировать совершенно необычайный прогрессъ; именно, одинъ методъ, идея котораго принадлежитъ Дж. Дж. Томсону (J. J. Thomson) и Г. А. Вильсону (H. A. Wilson), былъ такъ видоизмѣненъ американцемъ Милликаномъ (Millikan), что онъ не только позволяетъ съ большой точностью вычислить дѣйствительную величину заряда электрона, но и даетъ въ то же время рѣшительное доказательство атомистически-электроннаго строенія электричества.

Милликанъ получаетъ при помощи пульверизатора очень небольшія капельки масла, которыя благодаря своей малой величинѣ долго держатся въ воздухѣ и при этомъ часто присоединяютъ къ себѣ тотъ или другой изъ положительныхъ или отрицательныхъ іоновъ, всегда находящихся въ воздухѣ. Онъ помѣщаетъ такую каплю въ пространствѣ между двумя пластинками конденсатора и наблюдаетъ черезъ трубу скорость ея паденія подъ вліяніемъ силы тяжести. Изъ этой скорости при помощи извѣстной формулы, выведенной Стоксомъ (Stokes), можно вычислить діаметръ капельки, который благодаря своей малой величинѣ не поддается непосредственному измѣренію.

Послѣ этого пластинкамъ конденсатора сообщается опредѣленная разность потенціаловъ, такъ что капля оказывается одновременно подъ вліяніемъ своей тяжести и силы, дѣйствующей на ея электрическій зарядъ. Если частица заряжена, напримѣръ, отрицательно, то, заряжая верхнюю пластинку конденсатора до опредѣленнаго положительнаго потенціала, можно заставить ее подъ дѣйствіемъ электрическаго поля подыматься вверхъ. Изъ скорости этого подъема можно легко вычислить отношеніе дѣйствующей на каплю электрической силы къ ея вѣсу, а отсюда и величину ея электрическаго заряда.

Для удачи опыта необходимо, конечно, устраненіе даже малѣйшихъ воздушныхъ теченій, и въ опытахъ Милликана это было выполнено настолько хорошо, что одна и та же капелька цѣлыми часами оставалась въ полѣ зрѣнія трубы, при чемъ она нѣсколько сотъ разъ опускалась и снова подымалась.

На основаніи всѣхъ своихъ измѣреній Милликанъ пришелъ къ тому результату, что электрическіе заряды капель представляютъ точныя кратныя нѣкоторой опредѣленной величины, которая составляетъ $4{,}89.10^{-10}$ электростатическихъ единицъ. Эти заряды были то положительными, то отрицательными, содержали четыре, пять и до семнадцати такихъ элементарныхъ квантъ, но ни въ одномъ изъ нѣсколькихъ тысячъ опытовъ не получился зарядъ другой величины, т. е. такой, который былъ бы меньше этой кванты или содержалъ бы часть ея.

Это — вполнѣ очевидное доказательство того факта, что электричество существуетъ лишь, такъ сказать, въ кускахъ указанной величины, которые мы и называемъ „элементарными зарядами“ или зарядами одного „электрона“. Тонкость и точность этого метода поистинѣ заслуживаютъ удивленія. Кто повѣрилъ бы прежде, что мы когда-нибудь будемъ въ состояніи такъ непосредственно измѣрять заряды отдѣльныхъ электроновъ! И какъ безнадежна, напротивъ, всякая мысль построить такіе вѣсы, на которыхъ мы могли бы взвѣшивать отдѣльные атомы! Тутъ мы еще разъ убѣждаемся въ превосходствѣ методовъ измѣренія электрическихъ величинъ по сравненію съ другими физическими величинами. Существуетъ, впрочемъ, еще цѣлый рядъ другихъ, тоже очень интересныхъ методовъ опредѣленія элементарнаго заряда, но всѣ они по своей точности уступаютъ только-что описанному.

Но возвратимся къ нашей первоначальной проблемѣ. Зная величину элементарнаго заряда, мы ужъ легко вычисляемъ число атомовъ, содержащихся въ одномъ граммѣ водорода. Получается $N = 5{,}9.10^{23}$. Какъ мы видимъ, порядокъ величины вполнѣ соотвѣтствуетъ числу Перрена $N = 7.10^{23}$, полученному совершенно другимъ путемъ; но нѣкоторое, не совсѣмъ еще объясненное различіе все-таки остается. Пока эти опыты не повторены еще многими другими наблюдателями, трудно сказать, которое изъ этихъ двухъ чиселъ заслуживаетъ большаго довѣрія. Предварительно можно все-таки принять, что число Милликана ближе подходитъ къ истинѣ, такъ какъ въ опытахъ Перрена можно скорѣе предположить существованіе источниковъ ошибокъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ, пожалуй, лучше всего будетъ принять пока число $N = 6{,}3.10^{23}$, которое соотвѣтствуетъ произведенному Цанггеромъ (Zangger) измѣренію броуновскаго молекулярнаго движенія и которое очень близко совпадаетъ съ числомъ $N = 6{,}2.10^{23}$, выведеннымъ Планкомъ (Planck) изъ его теоріи лучеиспусканія. Это послѣднее соображеніе не можетъ, правда, служить настоящимъ доказательствомъ, такъ какъ теорія Планка сама построена на нѣкоторыхъ, еще не вполнѣ выясненныхъ, гипотетическихъ элементахъ, но оно все-таки повышаетъ вѣроятность того, что нашъ выборъ сдѣланъ правильно.

Во всякомъ случаѣ мы видимъ, что за послѣдніе годы атомистическая теорія сдѣлала большіе успѣхи въ смыслѣ усовершенствованія количественныхъ данныхъ. Вопросъ о томъ, каково число атомовъ въ данномъ количествѣ вещества, почти рѣшенъ. 50 лѣтъ тому назадъ не было еще и малѣйшихъ указаній на то, какъ рѣшить этотъ вопросъ. 15 лѣтъ тому назадъ можно было еще сомнѣваться, какое число правильнѣе — 3.10^{24} или 3.10^{21} атомовъ на граммъ-атомъ. Теперь въ приведенныхъ выше значеніяхъ N можетъ идти рѣчь лишь о разницѣ въ нѣсколько процентовъ.

Это число даетъ ключъ для рѣшенія цѣлаго ряда принципіально важныхъ вопросовъ. Прежде всего мы видимъ, что химическій атомный вѣсъ нужно раздѣлить на $6{,}3.10^{23}$, чтобы получить истинный вѣсъ атома въ граммахъ. Слѣдовательно, наименьшая матеріальная, электрически нейтральная частица, т. е. атомъ водорода, вѣситъ ровно $1{,}6{,}10^{-24}$ *гр.*

Чтобы лучше представить себѣ эти числа, замѣтимъ, что въ дождевой каплѣ содержится столько атомовъ, сколько водяныхъ капель — въ Средиземномъ морѣ.

Но мы знаемъ теперь, что это еще далеко не самыя малыя изъ существующихъ частицъ, такъ какъ сами атомы обладаютъ очень сложнымъ строеніемъ. Ихъ составныя части обнаруживаются тогда, когда все строеніе разрушается; такой процессъ, какъ онъ наблюдается въ радіоактивныхъ веществахъ, мы называемъ „радіоактивнымъ превращеніемъ“ атома. Какъ извѣстно, при этомъ получаются положительныя α-частицы, имѣющія величину атома гелія, и отрицательныя β-частицы, тождественныя съ элементарными частицами отрицательнаго электричества, такъ называемыми „электронами“. Во всякомъ случаѣ, должны существовать еще меньшія положительныя частицы, чѣмъ упомянутыя α-частицы, такъ какъ положительный іонъ водорода вѣситъ въ четыре раза меньше, чѣмъ атомъ гелія ($He = 4$), но болѣе точными свѣдѣніями о природѣ этихъ положительныхъ частицъ мы пока еще не располагаемъ.

Массу отрицательнаго электрона мы знаемъ очень точно; ее можно вычислить изъ отклоненія катодныхъ лучей въ магнитномъ полѣ, какъ это показалъ впервые Дж. Дж. Томсонъ, который и нашелъ, что она составляетъ $\frac{1}{1820}$ массы одного атома водорода. Но эти электроны существуютъ лишь, какъ отрицательно заряженныя частицы; но наименьшей извѣстной нейтральной частицей, наименьшей частицей того, что мы называемъ веществомъ, мы должны все-таки считать атомъ водорода.

Изъ этой основной величины можно затѣмъ очень просто вывести число молекулъ, заключающихся въ единицѣ объема любого газа при нормальныхъ условіяхъ (при 0^{0} С и 760 *мм.* давленія). Какъ извѣстно, молекула водорода двухатомна; поэтому, если мы помножимъ половинную плотность водорода на то же число N, то мы получимъ число молекулъ, приходящихся на 1 *кб. см.*, а именно $2{,}8.10^{19}$, т. е. приблизительно вдвое меньше, чѣмъ принималъ О. Е. Майеръ; какъ извѣстно, это число, по принципу Авогадро, одинаково для всѣхъ газовъ. Кому доставляетъ удовольствіе имѣть дѣло съ большими числами, тотъ можетъ теперь вычислить, сколько молекулъ содержитъ вся земная атмосфера, или изъ сколькихъ атомовъ состоитъ солнечная система. Въ первомъ случаѣ получится число порядка величины 10^{44}, во второмъ случаѣ — число порядка величины 10^{56}.

Это, конечно, довольно безполезная забава, такъ какъ такія числа вообще не поддаются уже нашему представленію. Но важно все-таки замѣтить, что даже въ самомъ маломъ объемѣ, какой мы еще можемъ различить невооруженнымъ глазомъ (это приблизительно кубъ съ длиной ребра въ 0,1 *мм.*), при нормальныхъ условіяхъ заключается еще не меньше 3.10^{13} газовыхъ молекулъ. Это обстоятельство имѣетъ большое значеніе для атомистически-кинетическаго истолкованія положеній термодинамики, такъ какъ принципъ энтропіи есть положеніе, статистически обоснованное на теоріи вѣроятностей и вѣрное лишь съ тѣмъ же приближеніемъ, что и законъ большихъ чиселъ. Но изъ предыдущаго очевидно, что въ макроскопической практикѣ мы дѣйствительно всегда имѣемъ дѣло съ такимъ громаднымъ числомъ молекулъ, что законъ большихъ чиселъ можно считать вѣрнымъ съ большой степенью точности.

Напротивъ, при „микроскопическихъ“ методахъ наблюденія могутъ при извѣстныхъ условіяхъ обнаружиться отклоненія отъ результатовъ, ожидаемыхъ на основаніи традиціонной термодинамики; и дѣйствительно, именно такія отклоненія и образуютъ основу для тѣхъ методовъ опредѣленія числа молекулъ, которые въ предыдущемъ были частью коротко упомянуты, частью изложены подробнѣе (броуновское движеніе, опалесценція, распредѣленіе частицъ въ эмульсіи). Но отъ болѣе подробнаго разбора затронутаго здѣсь очень интереснаго отношенія между термодинамикой и теоремами теоріи вѣроятностей намъ придется отказаться, такъ какъ это далеко выходитъ за предѣлы настоящей статьи.

Съ той точки зрѣнія, къ которой мы теперь пришли, мы можемъ теперь снова подойти къ вопросу о величинѣ атомовъ. Пользуясь величиной b изъ уравненія ванъ-деръ-Ваальса, мы получаемъ для діаметра молекулъ водорода, аргона, криптона, воздуха и др. значенія отъ 5.10^{-8} до 7.10^{-8} *см.* — результатъ, не особенно отличающійся отъ полученнаго Лошмидтомъ.

Но этимъ еще не разрѣшаются затронутые выше принципіальные вопросы. Что обозначаетъ этотъ „діаметръ“? Не слѣдуетъ ли скорѣе понимать подъ объемомъ атома нѣчто въ родѣ сферы дѣйствія отталкивательныхъ силъ, какъ это уже принималъ, напримѣръ, Максуеллъ въ своихъ позднѣйшихъ работахъ по кинетической теоріи газовъ? Въ эту теорію Максуелла, основанную на гипотезѣ отталкивательныхъ молекулярныхъ силъ, обратно пропорціональныхъ пятой степени разстоянія, вообще не входитъ ни понятіе о средней величинѣ свободнаго пути ни объ истинномъ діаметрѣ молекулы.

О молекулѣ Максуелла можно съ одинаковымъ правомъ сказать, что ея объемъ равенъ нулю (если понимать подъ нимъ объемъ абсолютно непроницаемаго ядра), но въ то же время можно сказать, что объемъ ея безконечно великъ (если понимать подъ нимъ сферу дѣйствія отталкивательныхъ силъ, которая въ этомъ случаѣ, строго говоря, простирается до безконечности).

Спеціальный законъ дѣйствія молекулярныхъ силъ въ гипотезѣ Максуелла есть, конечно, лишь провизорное предположеніе, выбранное по нѣкоторымъ математическимъ соображеніямъ, и въ реальность его никто, въ сущности, никогда и не вѣрилъ; но въ немъ, несомнѣнно, заключается важная мысль, которая должна сохраниться, а именно предположеніе пространственно непрерывнаго измѣненія свойствъ, характеризующихъ „веществъ“, вмѣсто внезапнаго измѣненія ихъ на „поверхности“ молекулы.

Итакъ, должны ли мы вообще строить атомистику въ духѣ прерывности или непрерывности? A priori и то и другое одинаково возможно. Или, быть можетъ, нужно соединить оба предположенія и принять для атома собственно „матеріальное“ ядро, окруженное опредѣленной сферой дѣйствія, какъ это дѣлаютъ, напримѣръ, въ своихъ интересныхъ теоріяхъ Сётгерландъ (Sutherland) и Клееманъ (Kleemann)? Для того, чтобы дать на эти вопросы болѣе опредѣленный отвѣтъ, нужно было бы прежде всего совершенно точно знать, какимъ образомъ видимый діаметръ атома, т. е. самое малое возможное разстояніе между двумя сталкивающимися атомами, зависитъ отъ ихъ скоростей и отъ другихъ возможныхъ условій.

Окончательный отвѣтъ на всѣ эти вопросы еще очень далекъ отъ насъ. Они несомнѣнно связаны съ вопросомъ о деталяхъ внутренняго строенія атома и будутъ разрѣшены лишь вмѣстѣ съ аналогичными вопросами относительно электроновъ.

Такимъ образомъ, едва только физика успѣла рѣшить одну основную проблему атомистики и этимъ создать одинъ изъ устоевъ современной науки о природѣ, какъ предъ нею опять раскрываются новыя, неразрѣшенныя еще загадки. И это хорошо, — ибо иначе она была бы мертвой наукой.

Примѣръ одной функціи.

Ф. Мазуровскаго.

Въ № 580 «Вѣстника» г. В. Даватцъ далъ примѣръ функціи, принимающей всѣ значенія отъ 0 до 1 въ интервалѣ $0 \leqslant x \leqslant 1$ и имѣющей разрывъ непрерывности въ любой точкѣ, за исключеніемъ $x = \frac{1}{2}$.

Функція эта имѣетъ видъ:

$$y = \chi(x) + (-1)^{\chi(x)} x,$$

гдѣ

$$\chi(x) = \lim_{m=\infty} \left[\lim_{n=\infty} \left\{ \cos(m!\,\pi x)^{2n} \right\} \right].$$

При помощи той же функціи $\chi(x)$ Леженъ Дирикле можно составить подобную же функцію съ весьма интересными свойствами. Мы полагаемъ:

$$y = x - \chi(x).$$

Функція эта обладаетъ, очевидно, слѣдующими свойствами:

1) Она имѣетъ разрывъ непрерывности въ любой точкѣ.

2) Въ любомъ интервалѣ, равномъ или большемъ единицы, она принимаетъ всѣ значенія отъ наименьшаго до наибольшаго, не пропуская ни одного.

Вторая стадія развитія счисленія дробей.

Прив.-доц. В. В. Бобынина.

*(Окончаніе *).*

Къ двумъ уже указаннымъ для дробей съ простыми или сложными знаменателями способамъ прямого опредѣленія перваго или, говоря вообще, одного изъ членовъ отыскиваемаго разложенія повторяющіяся по легко понятнымъ причинамъ очень часто попытки приложенія метода сокращенія къ несократимымъ дробямъ не замедлили присоединить третій. Наблюденіе и опытъ постоянно обнаруживали при этихъ попыткахъ передъ счетчиками въ разсматриваемыхъ ими частныхъ случаяхъ существованіе вполнѣ очевиднаго для пользующихся умозрѣніемъ счетчиковъ болѣе поздняго времени неравенства

$$\frac{1}{\left[\frac{b}{a}\right]+1}<\frac{a}{b}<\frac{1}{\left[\frac{b}{a}\right]}\ ^{**}),$$

получаемаго при дѣленіи членовъ дроби $\frac{a}{b}$ на числителя a. Это неравенство и приводило къ упомянутому третьему способу, показывая счетчикамъ, что дробь $\frac{1}{\left[\frac{b}{a}\right]+1}$, какъ меньшая изъ дробей, между которыми заключена разсматриваемая дробь, можетъ быть принята за первый, или, вообще говоря, за одинъ изъ членовъ разложенія послѣдней. Чтобы получить, какъ и въ двухъ предыдущихъ случаяхъ прямого опредѣленія того же члена, слѣдующіе члены разложенія, нужно было уже обратиться къ разности

$$\frac{a}{b}-\frac{1}{\left[\frac{b}{a}\right]+1}$$

между данною дробью и прямо найденнымъ членомъ ея разложенія. Если эта разность представится дробью съ единицею въ числителѣ, или дробью, допускающею приложеніе другихъ методовъ, то разложеніе будетъ закончено непосредственно въ первомъ случаѣ и черезъ примѣненіе соотвѣтствующаго изъ другихъ методовъ во второмъ. Если же ни тотъ ни другой случай не будутъ имѣть мѣсто, то съ разностью слѣдуетъ поступать такъ же какъ и съ данною дробью, а затѣмъ такимъ же образомъ и далѣе до тѣхъ поръ, пока не получится одинъ изъ указанныхъ двухъ случаевъ. Въ распоряженіи счетчиковъ

---

*) См. № 585 „Вѣстника“.

**) Здѣсь Гауссовы прямоугольныя скобки выражаютъ содержащееся въ частномъ $\frac{b}{a}$ наибольшее цѣлое число, т. е. $E\left(\frac{b}{a}\right)$ по обозначенію Лежандра.

соотвѣтствующихъ эпохъ оказался такимъ образомъ общій методъ разложенія несократимыхъ правильныхъ дробей, описанный въ «Liber Abbaci» подъ именемъ «septima differentia». Какъ дополняющій методъ сокращенія именно въ той области счисленія дробей, которая до его открытія лежала внѣ распространенія дополняемаго метода, онъ можетъ быть разсматриваемъ, какъ такая форма этого послѣдняго, въ которой онъ достигаетъ уже значенія всеобщаго метода,—regulae universalis, по терминологіи Леонарда Пизанскаго. Вслѣдствіе незнанія указанныхъ сейчасъ отношеній Леонардъ въ настоящемъ случаѣ не могъ, однако же, примѣнить этотъ терминъ, мѣсто для котораго ему удалось найти только въ послѣдней или восьмой изъ своихъ дифференцій. Что же касается разсматриваемаго метода, то о немъ онъ говоритъ только, что этотъ методъ слѣдуетъ прилагать къ тѣмъ случаямъ, когда предыдущія шесть дифференцій оказываются неприложимыми. Къ этому указанію онъ прибавляетъ далѣе замѣчаніе, что приложеніе того же метода къ дробямъ въ случаяхъ второй, четвертой, пятой и шестой дифференцій даетъ даже лучшіе результаты, чѣмъ примѣненіе ихъ собственныхъ правилъ.

Примѣромъ разсматриваемаго общаго метода въ «Liber Abbaci» служитъ разложеніе дроби $\frac{4}{13}$, заключаемой послѣ дѣленія знаменателя на числителя между дробями $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{3}$, изъ которыхъ меньшая, т. е. $\frac{1}{4}$, и представитъ первый членъ искомаго разложенія. Разность $\frac{3}{52}$ между ею и данною дробью допускаетъ приложеніе перваго изъ двухъ изложенныхъ выше сложныхъ методовъ, т. е. «второй дифференціи» по Леонарду Пизанскому. Результатомъ этого приложенія является представленіе разложенія разности въ видѣ $\frac{1}{26}+\frac{1}{52}$. Но къ ней можетъ быть примѣненъ вслѣдствіе своей всеобщности также и разсматриваемый общій методъ. Тогда окажется, что заключающими ее между собою дробями будутъ $\frac{1}{17}$ и $\frac{1}{18}$, и что, слѣдовательно, первымъ членомъ ея новаго разложенія будетъ $\frac{1}{18}$. А такъ какъ

$$\frac{3}{52}-\frac{1}{18}=\frac{1}{468},$$

то разложеніе оканчивается. Найденными такимъ образомъ двумя разложеніями дроби $\frac{4}{13}$ будутъ:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{26}+\frac{1}{52} \quad \text{и} \quad \frac{1}{4}+\frac{1}{18}+\frac{1}{468}.$$

Всѣ произведенныя до сихъ поръ изслѣдованія могутъ быть заключены въ качествѣ ихъ резюме слѣдующими вытекающими изъ нихъ положеніями. Оба простые основные метода и представляющій ихъ соединеніе сложный были въ употребленіи съ первыхъ временъ второй стадіи развитія счисленія дробей. Первый изъ нихъ, или методъ сокращенія, достигъ значенія всеобщаго метода только въ соединеніи со своею болѣе общею дополнительною формою, представляемою методомъ разложенія правильныхъ несократимыхъ дробей. Сложный методъ соединенія сокращенія съ разложеніемъ сдѣлался способнымъ къ всеобщимъ приложеніямъ черезъ методъ разложенія дроби по двумъ взаимно-дополнительнымъ множителямъ ея знаменателя.

Введеніе дѣйствія дѣленія въ число самостоятельно употребляемыхъ въ счетѣ ариѳметическихъ дѣйствій имѣло въ отношеніи разложенія дробей съ числителями, превосходящими единицу, на дроби съ числителями, ей равными, очень важное значеніе. Не говоря уже о значительныхъ сокращеніяхъ вычисленій, достаточно сказать, что въ самомъ этомъ дѣйствіи явился въ распоряженіи счетчиковъ новый методъ упомянутаго разложенія, который по имени дѣйствія, его создавшаго, и долженъ быть названъ *методомъ дѣленія*. Передъ изслѣдователемъ этотъ методъ представляется въ двухъ родахъ формъ: древнѣйшей и позднѣйшихъ.

Обильный матеріалъ для изученія древнѣйшей формы метода дѣленія доставляется изслѣдователю *папирусомъ Ринда*. Прилагаемая въ немъ въ различныхъ случаяхъ дѣленія меньшаго числа на большее, эта форма является особенно ясно выраженною въ составляющихъ первыя восемь таблицъ *папируса* табличкахъ дѣленія числа 2 на нечетныя числа 3 — 99. Составъ и строеніе этихъ табличекъ слѣдующіе. Первое мѣсто въ каждой изъ нихъ занято числомъ, на которое требуется раздѣлить число 2. Въ одной горизонтальной строкѣ съ этимъ числомъ находятся полученные при дѣленіи члены частнаго. Слѣдующая затѣмъ горизонтальная строка содержитъ произведенія, полученныя отъ умноженія разсматриваемаго дѣлителя на найденные члены частнаго. Если дѣленіе сдѣлано вѣрно, то сумма этихъ произведеній должна равняться дѣлимому, т. е. числу 2. На эту строку слѣдуетъ смотрѣть, поэтому, какъ на содержащую въ себѣ *повѣрку* найденнаго частнаго. Затѣмъ слѣдуетъ нахожденіе частнаго, называемое «вычисленіемъ» и занимающееся болѣе или менѣе подробно изложеннымъ опредѣленіемъ членовъ искомаго частнаго. Помѣщенные въ первой горизонтальной строкѣ члены частнаго, какъ главный результатъ таблички, отличаются отъ всѣхъ другихъ чиселъ и знаковъ той же таблички, имѣющихъ черный цвѣтъ, своимъ краснымъ цвѣтомъ. Въ отдѣлѣ «вычисленія» эти члены частнаго также имѣютъ отличительный знакъ: передъ строками, гдѣ они находятся, ставится наклонная черточка. Остатокъ, полученный отъ дѣленія послѣ нахожденія перваго члена частнаго, иногда записывается при вычисленіи, при чемъ передъ нимъ пишется слово «остатокъ».

Для выполненія дѣленія меньшаго числа на бо́льшее или, другими словами, для разложенія правильной дроби съ числителемъ, превосходящимъ единицу, на дроби съ числителями, ей равными, древнеегипетскіе счетчики отыскивали помощью ряда попытокъ число, на которое нужно умножить дѣлителя, чтобы получить дѣлимое. Необходимость для успѣха дѣла возможнаго уменьшенія числа попытокъ, принимаемыхъ къ разсмотрѣнію, привела съ теченіемъ времени къ избранію опредѣленныхъ первыхъ или исходныхъ попытокъ и къ приведенію слѣдующихъ за ними попытокъ въ систему. Эти послѣднія, дѣйствительно, являются въ большинствѣ случаевъ послѣдовательными подраздѣленіями по двоичной системѣ исходной попытки. Въ случаяхъ дѣленія числа 2 на нечетныя числа исходною попыткою принималось чаще всего число $\frac{2}{3}$ и только въ рѣдкихъ сравнительно случаяхъ число $\frac{1}{2}\cdot$ Когда при образованіи послѣдовательныхъ попытокъ указаннымъ путемъ получается, наконецъ, попытка, представляемая дробью, произведеніе которой на дѣлителя менѣе дѣлимаго, тогда эта дробь принимается за первый членъ искомаго частнаго, а методъ попытокъ замѣняется постепеннымъ исчерпываніемъ дѣлимаго, пользующимся во всѣхъ безъ исключенія случаяхъ дѣленія числа 2 на нечетныя числа однимъ и тѣмъ же общимъ правиломъ. Остатокъ, полученный послѣ составляющаго сущность упомянутаго исчерпыванія исключенія изъ дѣлимаго произведенія дѣлителя на найденный членъ частнаго, если онъ самъ по себѣ не представляется въ видѣ одной или нѣсколькихъ дробей съ единицею въ числителѣ, разлагается на такія дроби или по методу соединенія разложенія съ сокращеніемъ или съ помощью пользованія разложеніями, найденными ранѣе. Затѣмъ, чтобы найти члены частнаго, соотвѣтствующіе отдѣльнымъ членамъ полученнаго остатка, каждый изъ этихъ послѣднихъ дѣлится на дѣлителя. Это общее правило, найденное первоначально, конечно, при помощи индукціи черезъ простое перечисленіе, позднѣе могло быть легко доказано также и при помощи умозрѣнія.

Все изложенное сейчасъ представляется въ совершенно чистомъ и полномъ видѣ въ табличкахъ, посвященныхъ соотвѣтственно дѣленію числа 2 на 3, 5, 9, 11, 17, 19, 23, 37, 41 при употребленіи исходной попытки $\frac{2}{3}$ и дѣленію 3 на 7 и 13 при употребленіи исходной попытки $\frac{1}{2}\cdot$ Въ качествѣ примѣровъ достаточно привести для каждой группы по одному «вычисленію», заимствуя его изъ одной изъ ея табличекъ (См. таблицу на стр. 311).

Выработавшимся въ счисленіи именованныхъ чиселъ процессомъ дѣленія составного именованнаго числа на отвлеченное было доставлено дѣйствію дѣленія очень важное для него средство его продолженія за остатокъ, меньшій дѣлителя. Для этого продолженія нужно было приводить остатокъ въ счисленіи именованныхъ чиселъ въ единицы какого-нибудь изъ меньшихъ наименованій, а въ счисленіи отвлеченныхъ чиселъ — въ какія-нибудь изъ подраздѣленій отвлеченной единицы. Средствомъ такихъ приведеній остатка было его умноженіе въ первомъ случаѣ на число, представляющее отношеніе единицъ соотвѣтствующихъ наименованій, а во второмъ — на знаменателя избираемаго подраздѣленія единицы. Частное, доставляемое дѣленіемъ результата упомянутыхъ приведеній остатка на дѣлителя, являлось выраженнымъ въ случаѣ именованныхъ чиселъ въ единицахъ взятаго меньшаго наименованія, а въ случаѣ отвлеченныхъ — въ избранныхъ подраздѣленіяхъ отвлеченной единицы, т. е. въ видѣ дроби, знаменателемъ которой былъ знаменатель тѣхъ же подраздѣленій.

Указаннымъ сейчасъ продолженіемъ дѣленія отвлеченныхъ чиселъ за остатокъ, меньшій дѣлителя, въ тѣхъ частныхъ случаяхъ, въ которыхъ при

$$2 : 41$$
$$\cdot \quad 41$$
$$\frac{2}{3} \qquad 27\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{3} \qquad 13\frac{1}{2}\frac{1}{6} = 13\frac{2}{3}$$
$$\frac{1}{6} \qquad 6\frac{1}{2}\frac{1}{3} = 6\frac{2}{3}\frac{1}{6}$$
$$\frac{1}{12} \qquad 3\frac{1}{3}\frac{1}{12}$$
$$* \frac{1}{24} \qquad 1\frac{1}{2}\frac{1}{6}\frac{1}{24} = 1\frac{2}{3}\frac{1}{24}$$
$$* \frac{1}{246} \qquad \frac{1}{6}$$
$$* \frac{1}{328} \qquad \frac{1}{8}$$

Первый членъ частнаго $\frac{1}{24}\cdot$ Остатокъ $\frac{1}{6}\frac{1}{8}\cdot$ Соотвѣтствующіе членамъ остатка второй и третій члены частнаго: $\frac{1}{6} : 41$ и $\frac{1}{8} : 41$.

$$2 : 13$$
$$\cdot \quad 13$$
$$\frac{1}{2} \qquad 6\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{4} \qquad 3\frac{1}{4}$$
$$* \frac{1}{8} \qquad 1\frac{1}{2}\frac{1}{8}$$
$$* \frac{1}{52} \qquad \frac{1}{4}$$
$$* \frac{1}{104} \qquad \frac{1}{8}$$

Первый членъ частнаго $\frac{1}{8}\cdot$ Остатокъ $\frac{1}{4}\frac{1}{8}\cdot$ Соотвѣтствующіе членамъ остатка второй и третій члены частнаго $\frac{1}{4} : 13$ и $\frac{1}{8} : 13$.

Упомянутый выше наклонный штрихъ замѣщенъ въ этихъ обоихъ примѣрахъ звѣздочкою.

Разложенія $\frac{2}{41}$ и $\frac{2}{13}$.

этомъ и частное и остатокъ оказывались равными единицѣ, прямо достигалось, какъ нетрудно видѣть, разложеніе искомаго окончательнаго частнаго на дроби съ числителями, равными единицѣ. Примѣромъ можетъ служить дробь $\frac{2}{23}$, разлагающаяся при обращеніи числителя въ 12-ыя доли на дроби $\frac{1}{12}$ и $\frac{1}{276}\cdot$ Процессъ дѣйствія представляется при этомъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$2$$
$$\times 12$$
$$24 \mid 23$$
$$23 \mid 1 = \frac{1}{12}$$
$$1 = \frac{1}{12 \,.\, 23} = \frac{1}{276}\cdot$$

Что же касается подавляющаго большинства случаевъ другого рода, то для полученія въ нихъ такого же окончательнаго разложенія нужно было только примѣнять къ находимымъ въ частномъ и остаткѣ дробямъ съ числителями, превосходящими единицу, извѣстные уже методы разложенія. Такъ какъ болѣе употребительнымъ по своей простотѣ изъ этихъ методовъ былъ методъ, представляющій соединеніе сокращенія съ разложеніемъ, то для успѣха его примѣненія къ дроби, полученной въ частномъ, эта дробь должна была доставлять ему извѣстный относительный просторъ, т. е. такой, при которомъ избѣгалась бы по возможности затрата лишняго для ближайшей преслѣдуемой цѣли труда. Число, получаемое въ частномъ, или, что то же самое, числитель представляемой имъ дроби, не долженъ быть ни очень малымъ ни очень большимъ. Принятыми для него въ соотвѣтствующія эпохи на основаніи указаній опыта предѣлами были низшимъ половина дѣлимаго и высшимъ удвоенное дѣлимое. Если обозначить черезъ k знаменатель подраздѣленій отвлеченной единицы, въ которыхъ долженъ быть выраженъ остатокъ, меньшій дѣлителя, то на основаніи сказаннаго сейчасъ предѣлы, между которыми должно заключаться это число k, опредѣлятся при обозначеніи остатка черезъ m и дѣлителя черезъ n изъ неравенствъ:

$$\frac{mk}{n} > \frac{m}{2} \quad \text{и} \quad \frac{mk}{n} < 2m,$$

т. е. представятся неравенствами:

$$k > \frac{n}{2} \quad \text{и} \quad k < 2n.$$

Эти предѣлы дѣйствительно и указываются Леонардомъ Пизанскимъ въ его изложеніи послѣдняго или восьмого изъ описываемыхъ имъ методовъ разложенія дробей на дроби съ числителями, равными единицѣ*). Правильно названный Леонардомъ «общимъ правиломъ» разсматриваемаго разложенія (regula universalis in disgregatione partium numerorum), этотъ методъ является одною изъ позднѣйшихъ формъ метода дѣленія. Въ хронологическомъ порядкѣ происхожденія этихъ позднѣйшихъ формъ онъ былъ между ними первою. Если обозначить черезъ q частное и черезъ r остатокъ, происшедшій отъ дѣленія на дѣлителя n произведенія дѣлимаго m на число k, заключающееся между указанными предѣлами, то общимъ выраженіемъ процесса разложенія въ разсматриваемой формѣ метода дѣленія будетъ въ главной его части слѣдующее:

$$\frac{m}{n} = \frac{mk}{n} : k = \left(q + \frac{r}{n}\right) : k = \frac{q}{k} + \frac{r}{nk}.$$

Для увѣренности въ успѣхѣ достиженія преслѣдуемой цѣли изъ значеній числа k, заключающихся между указанными его предѣлами, слѣдуетъ, по легко понятнымъ причинамъ, выбирать числа сложныя.

---

*) Scritti di Leonardo Pisano, volume I, pp. 82, 83.

Указаніе своего «всеобщаго правила» разложенія Леонардъ Пизанскій пояснилъ примѣромъ разложенія дроби $\frac{17}{29}$. Изъ заключающихся между предѣлами $\frac{29}{2}$ и 58 сложныхъ чиселъ онъ взялъ для вычисленія 24 и 36; при употребленіи перваго изъ нихъ процессъ разложенія данной дроби на дроби съ числителями, равными единицѣ, представится въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{array}{r|l}
17 & \\
\times\ 24 & \\
\hline
68 & \\
34 & \\
\hline
408 & 29 \\
29 & \overline{14} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12} = \frac{4+3}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\
\hline
118 & \\
116 & \\
\hline
2 & = \frac{2}{29 \cdot 24} = \frac{1}{29 \cdot 12} = \frac{1}{348}.
\end{array}$$

Найденнымъ разложеніемъ будетъ, слѣдовательно:

$$\frac{17}{29} = \frac{1}{348} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}.$$

То же самое разложеніе доставляется и числомъ 36. Чтó въ виду этого заставило Леонарда выбрать число 36, остается непонятнымъ, такъ какъ при выборѣ другихъ сложныхъ чиселъ онъ могъ бы получить несходныя между собою разложенія Такъ, выборъ сложнаго числа 40 далъ бы ему разложеніе:

$$\frac{17}{29} = \frac{1}{2} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \frac{1}{116} + \frac{1}{580} + \frac{1}{1160}.$$

Въ тѣхъ же — и даже, можетъ быть, нерѣдкихъ — случаяхъ, когда соединеніе сокращенія съ разложеніемъ, прилагаясь къ частному, является неприложимымъ къ остатку, къ этому послѣднему должно было вновь примѣняться «всеобщее правило» Леонарда Пизанскаго. Нетрудно представить себѣ также и такіе случаи, въ которыхъ примѣненіе того же «всеобщаго правила» найдетъ себѣ мѣсто не только въ первомъ и второмъ, но и въ цѣломъ рядѣ послѣдовательныхъ остатковъ, являясь такимъ образомъ основою процесса, способнаго въ соотвѣтствующихъ случаяхъ къ значительной длительности.

При членахъ правильной дроби, представляемыхъ небольшими числами, — каковы, напримѣръ, члены дробей $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{7}$, — приложеніе «всеобщаго правила» Леонарда Пизанскаго могло приводить счетчиковъ къ освобождавшимъ ихъ отъ труда разложенія дроби, представляемой частнымъ, случаямъ полученія въ ея числителѣ единицы. Значеніе представляющагося въ такихъ случаяхъ облегченія было слишкомъ ясно, чтобы не обратить на себя вниманіе сколько-нибудь размышляющаго счетчика. Для выясненія условій, при которыхъ это облегченіе достижимо, ему пришлось обратиться къ наблюденіямъ и опытамъ соотвѣтствующаго рода, не замедлившимъ показать, что искомыя условія выражаются въ требованіи выбирать знаменателемъ подраздѣленій единицы, въ которыя должно быть обращено дѣлимое, превосходимое дѣлителемъ, наименьшее изъ чиселъ, произведенія которыхъ на дѣлимое превосходятъ дѣлителя.

Указываемое изложеннымъ требованіемъ значеніе упоминаемаго въ немъ знаменателя или, по вышеприведенному обозначенію, числа k отыскивалось первоначально попытками. Позднѣе, напримѣръ, у народовъ, вступившихъ въ научный періодъ развитія наукъ математическихъ, опредѣленіе числа k могло достигаться умозрительнымъ путемъ при помощи разсужденій, состоявшихъ, въ сущности, при ихъ переводѣ на языкъ новѣйшей науки въ рѣшеніи неравенства:

$$\frac{mk}{n} \geqq 1,$$

представляющемъ искомое значеніе числа k въ видѣ:

$$k \geqq \frac{n}{m}.$$

Въ свое время эти разсужденія могли представляться, напримѣръ, въ слѣдующей формѣ. Для того, чтобы частное $\frac{mk}{n}$ или, что то же самое, произведеніе $\frac{m}{n}\cdot k$ было не менѣе единицы, оно должно или равняться единицѣ или превосходить ее. Въ первомъ случаѣ k будетъ, очевидно, числомъ обратнымъ числу $\frac{m}{n}$, т. е. представляющимся въ видѣ:

$$1 : \frac{m}{n} = \frac{n}{m},$$

во второмъ — превышающимъ то же обратное число.

Согласованная съ указаннымъ требованіемъ схема процесса разложенія по методу дѣленія и будетъ выраженіемъ второй изъ позднѣйшихъ формъ этого метода, впервые усмотрѣнной*) въ акмимскомъ математическомъ папирусѣ. Что же касается выражающей эту схему общей формулы, то она можетъ быть получена черезъ введеніе условія $q = 1$ въ приведенную выше общую формулу, представляющую схему процесса разложенія по первой изъ позднѣйшихъ формъ метода дѣленія.

*) V. V. Bobynin — Developpement des procedés servants à décomposer le quotient en quantiémes. Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, IX, S. 3 — 4.

Изъ содержащихся въ акмимскомъ папирусѣ примѣровъ приложенія второй изъ позднѣйшихъ формъ метода дѣленія можно привести разложеніе дроби $\frac{10}{13}$. Наименьшее изъ чиселъ, произведеніе которыхъ на дѣлимое 10 превосходитъ дѣлителя, есть 2. Процессъ разложенія представится, слѣдовательно, въ видѣ:

$$
\begin{array}{r|l}
10 & \\
\times\ 2 & \\
\hline
20 & 13 \\
13 & 1 = \frac{1}{2} \\
\hline
\end{array}
$$

$$7 = \frac{7}{2\,.\,13} = \frac{14}{52} = \frac{13+1}{52},$$

а его результатомъ будетъ выраженіе:

$$\frac{10}{13} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{52}.$$

Если полученный при продолженіи дѣленія остатокъ не оказывался способнымъ къ приложенію метода соединенія сокращенія съ разложеніемъ, то къ нему прилагались другіе методы и въ числѣ ихъ сама разсматриваемая теперь форма метода дѣленія. Примѣромъ ея употребленія въ этомъ случаѣ можетъ служить находящееся въ акмимскомъ папирусѣ разложеніе дроби $\frac{13}{17}$. На основаніи изложеннаго процессъ этого разложенія представляется безъ раздѣленія его на части въ слѣдующемъ цѣльномъ видѣ:

$$
\begin{array}{r|l}
13 & \\
\times\ 2 & \\
\hline
26 & 17 \\
17 & 1 = \frac{1}{2} \\
\hline
9 & \\
\times\ 2 & \\
\hline
18 & 17 \\
17 & 1 = \frac{1}{4} \\
\hline
1 = \frac{1}{68} &
\end{array}
$$

Оказывается такимъ образомъ, что

$$\frac{13}{17} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{68}.$$

Еще въ болѣе полномъ видѣ вторая изъ позднѣйшихъ формъ метода дѣленія представляется, очевидно, при ея послѣдовательномъ примѣненіи въ цѣломъ рядѣ слѣдующихъ одинъ за другимъ остатковъ.

Разложенія, доставляемыя второю изъ позднѣйшихъ формъ метода дѣленія, вслѣдствіе своего полнаго совпаденія съ такими же разложеніями, получаемыми при помощи алгориѳма Бине или, что то же самое, формулы Ламберта*), заслуживаютъ особеннаго вниманія.

Наблюденіе не преминуло показать древнимъ счетчикамъ, что въ очень многихъ случаяхъ продолженія дѣленія за остатокъ, меньшій дѣлителя, въ числителѣ дроби, представляемой частнымъ, можетъ быть получена единица не только при употребленіи наименьшаго изъ значеній числа k, но также и при употребленіи слѣдующаго за нимъ одного или даже нѣсколькихъ. Употребляемая вторая форма метода дѣленія въ его позднѣйшемъ состояніи оказывалась въ такихъ случаяхъ способною доставлять не одно разложеніе данной дроби, а нѣсколько и иногда даже очень значительное число ихъ. Расширеніе области наблюденія съ помощью попытокъ открывало передъ древними счетчиками, кромѣ извѣстнаго уже имъ нижняго предѣла разсматриваемыхъ теперь значеній числа k, также и ихъ верхній предѣлъ. Съ помощью наблюденія и попытокъ познаніе этого предѣла ограничивалось всякій разъ только разсматриваемымъ частнымъ случаемъ. Въ своемъ общемъ видѣ этотъ предѣлъ могъ быть познанъ только въ болѣе позднія времена,— напримѣръ, въ научномъ періодѣ развитія наукъ математическихъ, и при томъ едва ли не единственно путемъ умозрѣнія, т. е. съ помощью разсужденій, состоявшихъ, по существу, при ихъ переводѣ на языкъ новѣйшей науки въ рѣшеніи неравенства:

$$\frac{mk}{n} < 2,$$

представляющемъ k въ видѣ:

$$k < \frac{2n}{m}\cdot$$

Упомянутыя разсужденія въ соотвѣтствующія отдаленныя эпохи могли быть слѣдующими. Для того, чтобы частное $\frac{mk}{n}$ или, что то же самое, произведеніе $\frac{m}{n}\cdot k$ равнялось 2, множитель k долженъ быть, очевидно, двойнымъ обратнымъ для $\frac{m}{n}$ числомъ. А изъ этого уже прямо слѣдуетъ, что для существованія неравенства:

$$\frac{mk}{n} < 2$$

множитель k долженъ быть менѣе двойного обратнаго для $\frac{m}{n}$ числа, или, короче,

$$k < \frac{2n}{m}\cdot$$

*) P. Bachmann—„Niedere Zahlentheorie“, I Theil, Leipzig 1902, S. 120.

Если это заключеніе соединить съ тѣмъ, что уже было извѣстно ранѣе о нижнемъ предѣлѣ числа k, то нетрудно придти къ правилу: для того, чтобы частное $\frac{mk}{n}$ было менѣе 2, но не менѣе единицы, множитель k долженъ заключаться между предѣлами $k \geqslant \frac{n}{m}$, $k < \frac{2n}{m}$. Примѣненіе этого правила въ процессѣ метода дѣленія и составляетъ существенную характеристическую черту третьей изъ позднѣйшихъ формъ метода дѣленія. Главнымъ отличіемъ этой формы отъ второй является способность давать, говоря вообще, не одно разложеніе, какъ вторая, а нѣсколько и даже очень большое число различныхъ разложеній.

Были ли достигнуты второю стадіею развитія счисленія дробей до окончанія ея существованія познаніе и употребленіе третьей изъ позднѣйшихъ формъ метода дѣленія, остается, къ сожалѣнію, неизвѣстнымъ, такъ какъ въ дошедшихъ отъ этой стадіи до новѣйшаго времени памятникахъ математической литературы слѣдовъ употребленія этой формы не содержится.

Помощью разсмотрѣнныхъ методовъ разложенія правильныя дроби съ числителями, превосходящими единицу, устранялись изъ практики счисленія дробей, какъ это по указаннымъ причинамъ и было нужно счетчикамъ второй стадіи развитія этого счисленія. Не было также въ этой стадіи и недостатка въ заботахъ,—хотя, можетъ быть, и безсознательныхъ,—о недопущеніи дробей съ числителями, превосходящими единицу, къ употребленію даже въ теченіе того короткаго промежутка времени, который долженъ былъ предшествовать ихъ разложенію на дроби съ числителями, равными единицѣ. Въ папирусѣ Р и н д а — въ такихъ, напримѣръ, выраженіяхъ, какъ «дѣли 2 на 37», —онѣ разсматривались не какъ дроби, а какъ частныя отъ не произведеннаго еще дѣленія, результатомъ выполненія котораго должно было быть выраженіе частнаго въ дробяхъ съ числителями, равными единицѣ. Въ акмимскомъ папирусѣ та же цѣль достигалась представленіемъ дроби съ числителемъ, превосходящимъ единицу, въ видѣ взятой отъ даннаго числителя части, представляемой дробью съ числителемъ, равнымъ единицѣ, и съ даннымъ знаменателемъ. Вмѣсто того, чтобы сказать, напримѣръ, $\frac{16}{29}$, въ акмимскомъ папирусѣ говорилось: «это есть $\frac{1}{29}$ отъ 16». Устраненіе дробей съ числителями, превосходящими единицу, изъ практики счисленія, достигнутое второю стадіею развитія счисленія дробей, было такимъ образомъ полнымъ. Дѣйствіямъ надъ дробями пришлось вслѣдствіе этого въ теченіе всей этой стадіи имѣть дѣло исключительно съ дробями, имѣющими числителемъ единицу, что не могло не выразиться въ нѣкоторыхъ измѣненіяхъ ихъ вида, хотя, конечно, только съ внѣшней стороны.

Английская ассоціація преподавателей математики.

(The Mathematical Association).

Н. Г. Плехановой.

Въ семидесятыхъ годахъ въ Лондонѣ основался кружокъ „The Association for improvement of geometrical teaching“ по инициативѣ группы лицъ („enthousiastic mathematicians“), убѣжденныхъ, что не слѣдуетъ начинать обученіе геометріи съ книги Евклида, единовластно царившей тогда во всей англійской школѣ. Съ теченіемъ времени программа занятій расширилась, и въ 1897 г. Общество пореименовалось въ „The Mathematical Association, an association of teachers and students of elementary mathematics“. Въ настоящее время Mathematical Association имѣетъ членовъ во всѣхъ частяхъ свѣта; въ общемъ, болѣе 700; сорганизовалось также нѣсколько мѣстныхъ отдѣловъ его — въ Лондонѣ, Сѣверномъ Уэллсѣ, Сиднеѣ и Соутгемптонѣ. Во главѣ общества стоитъ Совѣтъ изъ 20 человѣкъ; въ 1911-12 годахъ предсѣдателемъ былъ профессоръ Hobson, а товарищами предсѣдателя профессора Ball, Forsyth, Lodge, Hudson и др. (всего 9 человѣкъ). Оно имѣетъ свою библіотеку и свой журналъ, научно-педагогическаго характера, „The Mathematical gazette“ *), въ которомъ печатаются, наряду со свѣдѣніями о дѣятельности Общества, статьи, библіографическія замѣтки, задачи и отдѣлъ почтоваго ящика; особенно большое значеніе редакція придаетъ обзорамъ новостей англійской и иностранной литературы.

Первые 20 лѣтъ M. Association работала больше, такъ сказать, внутри себя; теперь же это общество опредѣленно стоитъ на почвѣ истинной общественности, укрѣпляя связь между работой широкой преподавательской массы и центрами **) научной и педагогической мысли. Конецъ девятидесятыхъ годовъ въ Англіи ознаменовался важными реформами въ учебномъ дѣлѣ (учрежденіе Board of Education, реорганизація университетскаго преподаванія въ сторону сближенія профессоровъ со студентами); къ этому же періоду относится такъ называемое Perry-movement 1901 г., — направленіе, которое требовало конкретности и жизненности въ преподаваніи математики, и самымъ яркимъ лозунгомъ котораго было провозглашеніе правъ „средняго“ ученика („Justice to the average boy!“)***). Математическая Ассоціація тоже была захвачена этимъ движеніемъ и принимала въ немъ дѣятельное участіе; профессоръ Lodge первый опредѣленно высказался за необходимость теперь же приняться за детальныя схемы преподаванія мате-

*) Членскій взносъ въ размѣрѣ 10 шиллинговъ покрываетъ и плату за журналъ.

**) Надо сказать, что преподаваніе въ англійской школѣ въ значительной мѣрѣ направляется университетомъ, такъ какъ нѣкоторые университеты уже много лѣтъ организуютъ экзамены, дающіе свидѣтельства объ окончаніи средней и низшей школы.

***) Съ этимъ направленіемъ читатели „Вѣстника“ были своевременно ознакомлены въ статьѣ г. Лермантова „Силлабусъ курса элементарной математики“, рекомендуемый Британской Ассоціаціей для профессіональныхъ школъ и реальныхъ училищъ. „Вѣстникъ“ №№ 325, 326.

матики, не ограничиваясь общими положеніями. Мнѣніе его было подтверждено открытымъ письмомъ 22 учителей *). Въ результатѣ при М. А. была учреждена комиссія для разработки примѣрныхъ программъ геометріи, ариѳметики и алгебры. Организація этой teaching-comittee по мѣрѣ надобности нѣсколько измѣнялась; въ настоящее время она состоитъ изъ 35-40 человѣкъ — предсѣдателя, почетныхъ секретарей и нѣсколькихъ членовъ Совѣта, представителей среднихъ, низшихъ и техническихъ школъ и университетовъ, и нѣсколькихъ лицъ, кооптированныхъ комиссіей, хотя бы не изъ числа членовъ Общества. Труды комиссіи печатаются отдѣльными выпусками, разсылаемыми по университетамъ и другимъ учебнымъ организаціямъ, и вообще получающими широкое распространеніе. Составленные сжато и дѣловито, эти отчеты глубоко интересны цѣликомъ, отъ начала до конца. Нѣсколько данныхъ, взятыхъ изъ нихъ, можетъ быть, дадутъ общее представленіе о характерѣ и задачахъ этой работы. При составленіи доклада о преподаваніи геометріи (1907 г.) была предварительно устроена анкета, — обращенная, приблизительно, къ 400 учителямъ; докладъ 1902 г. былъ разосланъ по университетамъ **), и тамъ не только приняли его во вниманіе, но и пошли дальше по пути реформъ; „такимъ образомъ,“ — говорится по этому поводу въ докладѣ 1907 г.— „работа въ извѣстной мѣрѣ достигла своей цѣли“. Замѣчательно, далѣе, то, что для комиссіи въ учебномъ дѣлѣ не существуетъ мелочей, не стоющихъ вниманія, — указывается, какъ вести запись при доказательствѣ теоремы, какъ и когда чертить отъ руки или точно, въ какомъ порядкѣ и съ какими пропусками проходить Евклида (1902 г.). Изъ положеній общаго характера укажу только слѣдующія: всѣ разсужденія (при производствѣ ариѳметическихъ дѣйствій, рѣшеніи уравненій, доказательствѣ теоремъ и пр.) слѣдуетъ, по возможности, сводить къ основнымъ принципамъ данной логической системы. Съ приближенными вычисленіями и съ графикой слѣдуетъ знакомить дѣтей съ самаго же почти начала обученія. Систематическому курсу геометріи долженъ предшествовать „экспериментальный“ курсъ: ученикъ по такимъ-то даннымъ (линейныя и угловыя мѣры) строитъ фигуру и затѣмъ измѣряетъ тѣ или другіе элементы ея. Такимъ образомъ, онъ знакомится на опытѣ со свойствами фигуръ; кромѣ того, онъ пріучается къ точному и аккуратному выполненію чертежей.

Само собой разумѣется, что формально выводы комиссіи не имѣютъ никакой обязующей силы, фактически же вліяніе ея на школу чрезвычайно велико, и The Mathematical Association пользуется тѣмъ высокимъ авторитетомъ, который ей подобаетъ по существу дѣла. Для иллюстраціи приведу, въ заключеніе, два факта, правда, весьма различной цѣнности. Borchardt, руководства котораго по ариѳметикѣ и алгебрѣ встрѣтили необыкновенно единодушное одобреніе, и знакомство съ которыми, по отзывамъ печати, необходимо

---

*) Характерная подробность: объ этомъ письмѣ упоминается въ статьѣ посвященной появленію сотаго номера журнала „Mathematical Gazette“ (special commemorative issue, january 1913); хотя она носитъ нѣсколько „юбилейный“ оттѣнокъ въ смыслѣ подчеркиванія заслугъ отдѣльныхъ лицъ, но появленію этого письма заурядныхъ учителей и въ ней придается большое значеніе.

**) Съ другой стороны, комиссія при своей схемѣ прилагаетъ программу, по которой производятся экзамены для низшихъ школъ при Кэмбриджскомъ университетѣ.

для каждаго преподавателя, указываетъ въ предисловіи къ учебнику алгебры, что онъ слѣдовалъ многимъ положеніямъ учебной комиссіи М. А. Въ одномъ изъ номеровъ Mathematical Gazette, въ отдѣлѣ почтоваго ящика, нѣкто Н. Р. обращаетъ вниманіе Математической Ассоціаціи на искусственность экзаменаціонныхъ задачъ, предлагаемыхъ Board of Education (учебнымъ начальствомъ): не можетъ ли Математическая Ассоціація обратить этихъ экзаменаторовъ къ болѣе современнымъ идеаламъ (send out missionaries to convert the Board of Education examiners to more modern ideals).

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей привать-доцента Е. Л. Буницкаго.

№ 110 (6 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$x^2 - x + m = y(2x-1)^2,$$

гдѣ m — данное цѣлое число. Разобрать въ видѣ примѣра случай, когда $m = 169$.

Ю. Рабиновичъ (Казань).

№ 111 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\frac{(x+1)^4}{n+1} - \frac{x^4}{n} = 1.$$

Е. Григорьевъ (Саратовъ).

№ 112 (6 сер.). Построить треугольникъ ABC по суммѣ двухъ его сторонъ $AB + AC = 2l$, высотѣ AH и медіанѣ AD. Рѣшеніе требуется чисто геометрическое.

Р. Витвинскій (Варшава).

№ 113 (6 сер.). Назовемъ черезъ S площадь нѣкотораго треугольника ABC, а черезъ q — площадь треугольника, вершины котораго суть точки касанія со сторонами треугольника ABC вписаннаго въ него круга. Доказать тождество

$$\frac{q}{S} = \frac{r}{2R},$$

гдѣ r и R суть радіусы круговъ вписаннаго и описаннаго для треугольника ABC.

Н. С. (Одесса).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Обложка
пщется

Обложка
ищется